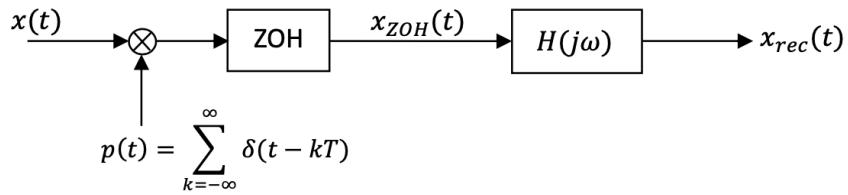


שאלה 1. דגימה ושהזור (40 נק')

באיור 2 מוצגת מערכת המבצעת דגימה של אות הכניסה בעזרת רכיבת הלמים ושהзор בעזרת תחлик ZOH ומסנן מעביר נਮוכים ($H^F(\omega)$)



איור 2. מערכת דגימה ושהзор

$$x(t) = \frac{4}{\omega_m \pi t^2} \cdot \sin^2(\omega_m t) \cos(\omega_m t) \sin(2\omega_m t) [V], \quad \omega_m = 3\pi$$

א. (5 נק'). צייר/י את $x(t)$ בעזרת MATLAB בתחום $t \in [0.2, 3]$ [sec]. לצורך כך הייעורי בשלבים הבאים:

- יש ליצור וקטור שורה של נקודות הזמן בהן יוצג האות: $t = 0.2:1/100:3$

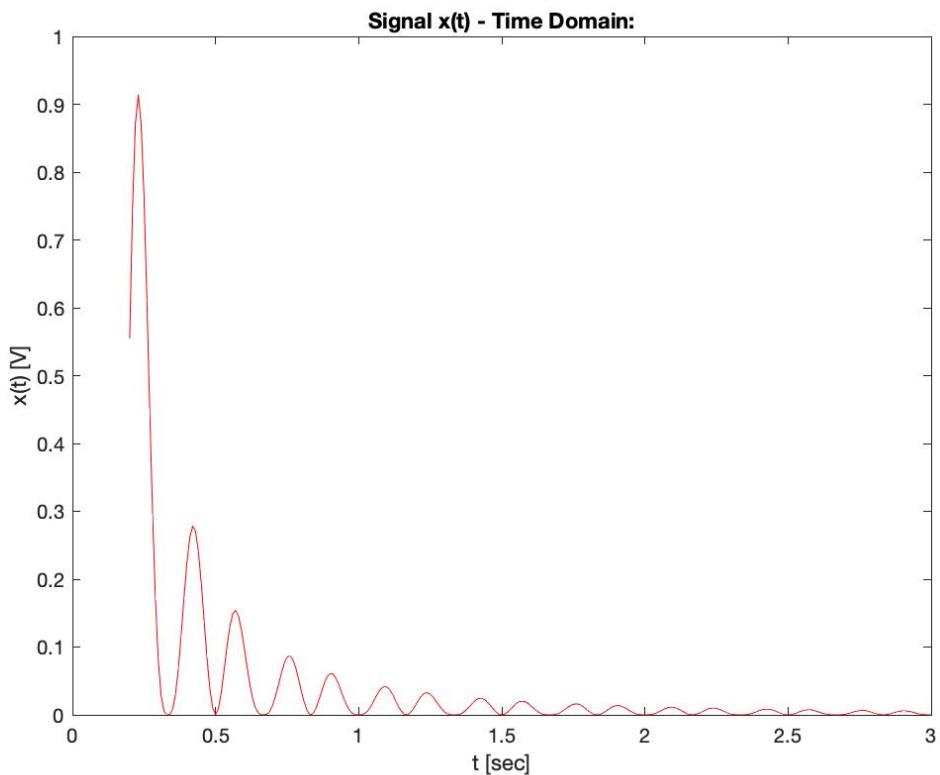
- חשב/י את האות בנקודות הזמן שיצרת:

- $x = 4./(\omega_m * \pi * t.^2) .* (\sin(\omega_m * t)).^2 .* (\cos(\omega_m * t)).*(\sin(2 * \omega_m * t))$

- הציג/י את הערך המוחלט של תוצאות החישוב: $plot(t, x)$

- השתמש/י בפונקציות $xlabel$, $ylabel$, $title$ לצורת ושמות לצירים.

גרף האות $x(t)$



ב. (10 נק'). יש לפתח ביטוי ל $\{x(t)\}$, התמורה פורייה של האות $(t)x$. הצג/י גורף של $|X^F(\omega)|$, כאשר

$\omega \in [-17\pi, 17\pi]$ ור' לאחר מכן להציב את ערכו.

הערה : בפיתוח כדי לפחות תחילת את האות כך שהיא מורכבת מפונקציות בעלות התמורות מוכנות: $\exp(), \text{sinc}(), \sin()$ וכו'.

נפתח ביטוי לתמורה פורייה של האות $x(t)$:

$$\begin{aligned}
 X^F(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{4}{\omega_m \pi t^2} \sin^2(\omega_m t) \cos(\omega_m t) \sin(2\omega_m t)\right\} = (*) \\
 &= \mathcal{F}\left\{\frac{2}{\omega_m} \cdot \frac{\sin^2(\omega_m t)}{\pi t^2} (\sin(\omega_m t) + \sin(3\omega_m t))\right\} \\
 &= \mathcal{F}\left\{\frac{2\omega_m}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega_m t)}{\pi^2 (\frac{\omega_m t}{\pi})^2} (\sin(\omega_m t) + \sin(3\omega_m t))\right\} \\
 &= \mathcal{F}\left\{\frac{2\omega_m}{\pi} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right) \cdot (\sin(\omega_m t) + \sin(3\omega_m t))\right\} = (**) \\
 &= \frac{2\omega_m}{\pi} \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\} * \mathcal{F}\{(\sin(\omega_m t) + \sin(3\omega_m t))\} \\
 &= (** + ***) \\
 &= \frac{2\omega_m}{\pi} \cdot (\mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\} * \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\}) \\
 &\quad * \frac{\pi}{j} (\delta(\omega - \omega_m) - \delta(\omega + \omega_m) + \delta(\omega - 3\omega_m) - \delta(\omega + 3\omega_m)) \\
 &= \frac{2\omega_m}{j} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_m} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) * \frac{\pi}{\omega_m} \Pi\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) \right) \\
 &\quad * (\delta(\omega - \omega_m) - \delta(\omega + \omega_m) + \delta(\omega - 3\omega_m) - \delta(\omega + 3\omega_m)) \\
 &= (****) \\
 &= \frac{2\pi^2}{j\omega_m} \cdot \left(\frac{2\omega_m}{2\pi} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right) \right) \\
 &\quad * (\delta(\omega - \omega_m) - \delta(\omega + \omega_m) + \delta(\omega - 3\omega_m) - \delta(\omega + 3\omega_m)) \\
 &= \frac{1}{j} \cdot \left(\Lambda\left(\frac{\omega - \omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_m}{2\omega_m}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega - 3\omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega + 3\omega_m}{2\omega_m}\right) \right)
 \end{aligned}$$

(*) - שימוש בזהות $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, $a = 3\omega_m t$, $b = \omega_m t$

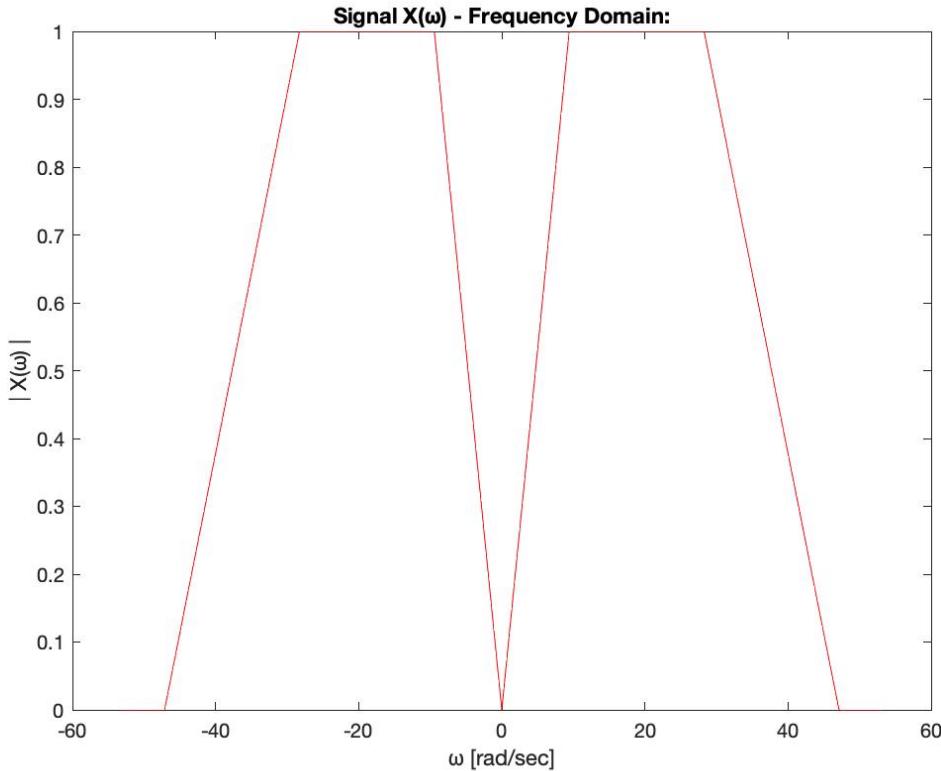
(**) - מכפלה בזמן שקופה לקונבולוציה בתדר

(***) - ליניאריות התמורה פורייה

(****) – ע"פ הפיתוח שהוצע בכיתה

$$\Rightarrow X^F(\omega) = \frac{1}{j} \cdot (\Lambda\left(\frac{\omega - \omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_m}{2\omega_m}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega - 3\omega_m}{2\omega_m}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega + 3\omega_m}{2\omega_m}\right))$$

graf התמרת פורייה של האות $x(t)$ (בערך מוחלט) עבור $\omega \in [-17\pi, 17\pi] \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$



ג. (5 נק').

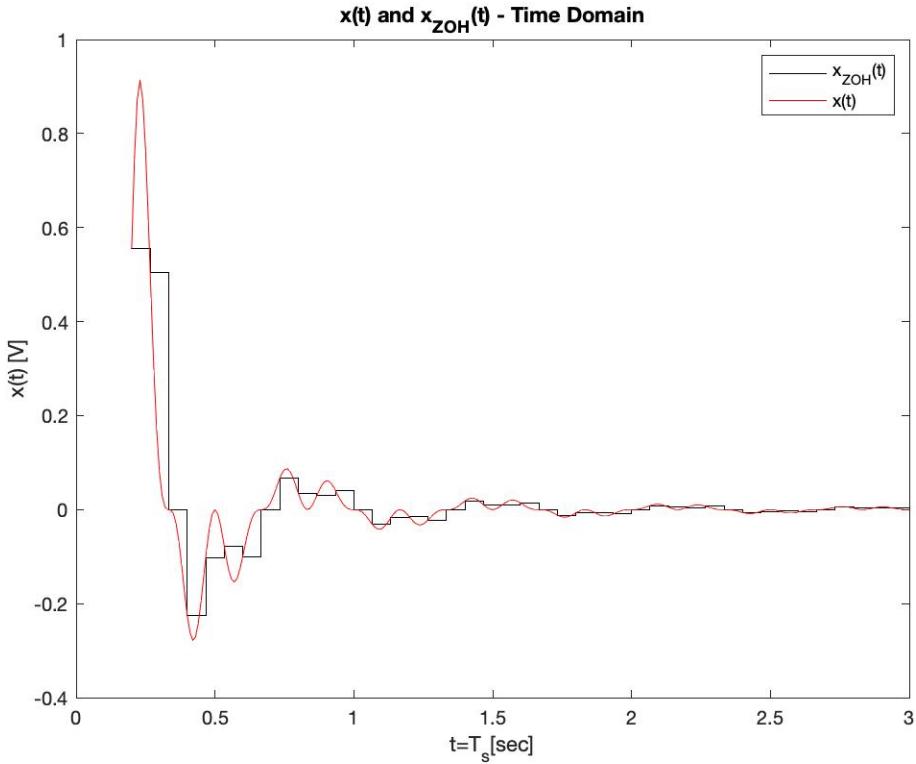
- מהו התדר המקסימלי ω_{max} של האות $x(t)$? (עבור התדר המקסימלי מתקיים $X^F(\omega) = 0 \forall |\omega| \geq \omega_{max}$)
הצעי/זמן מחזור לדגימה, T_s , שיאפשר שחזור ללא שגיאות.
- דגםו את האות בנקודות $nT_s = t_n$. מהדgesmoות יש ליצור אותן מדרגות מסוג ZOH, שיסומן ב- $x_{ZOH}(t)$. הציג את האותות $x_{ZOH}(t)$ ו- $x(t)$ בgraf אחד.

- התדר המקסימלי של האות עבורו מתקיים: $X^F(\omega) = 0 \forall |\omega| < \omega_{max}$: הינו:

$$\omega_{max} = 3\omega_m + 2\omega_m = 5\omega_m = 15\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

ע"פ משפט ניוקויסט, בהינתן אותן חסום סרט נוכל לשחזר את האות המקורי מתור $\omega_s = 10\omega_m \rightarrow T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{10 \cdot 3\pi} = \frac{1}{15} \text{ sec}$, לכן נבחר: $\omega_s \geq 2\omega_{max}$.

גרף האות $x_{ZOH}(t)$ דגום בנקודות $t = nT_s$ לצד האות המקורי:



צ. (10 נק') יש לפתח ביטוי ל $\{x(t)\}$. התרמת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$, $X_{ZOH}^F(\omega) = \mathcal{F}\{x_{ZOH}(t)\}$. הצעה גраф של $\omega \in [-17\pi, 17\pi] \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$.

נפתח ביטוי להתרמת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$:

$$x_s(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s), \quad h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$$

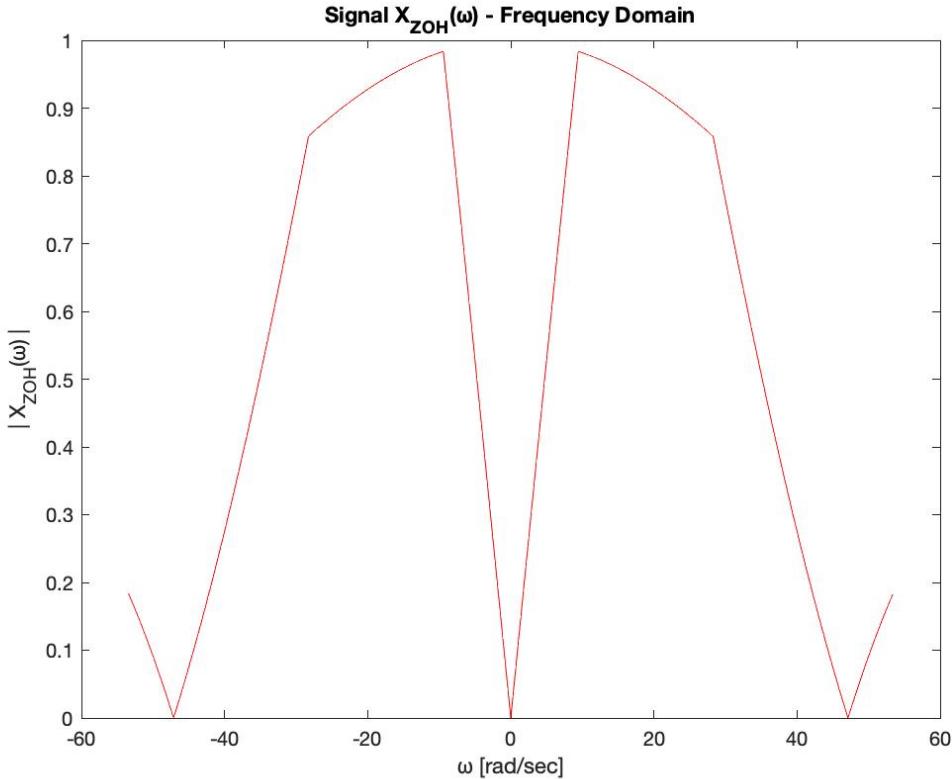
$$\begin{aligned} x_{zoh}(t) &= x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * h(t) = (*) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) (\delta(t - nT_s) * h(t - nT_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) h(t - nT_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{ZOH}^F(\omega) &= \mathcal{F}\{x_s(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{x_s(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\} = (**) \\ &= \left(\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - k\omega_s) \right) \cdot T_s \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - k\omega_s) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}} \end{aligned}$$

(*) – תכונה של פונקציית דלתא
 (***) – שימוש בהתרמתות מוכנות מדף נוסחאות

$$\Rightarrow X_{ZOH}^F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - k\omega_s) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}}$$

$\omega \in [-17\pi, 17\pi] \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$ גраф התמרת פורייה של האות x (בערך מוחלט) עבורי

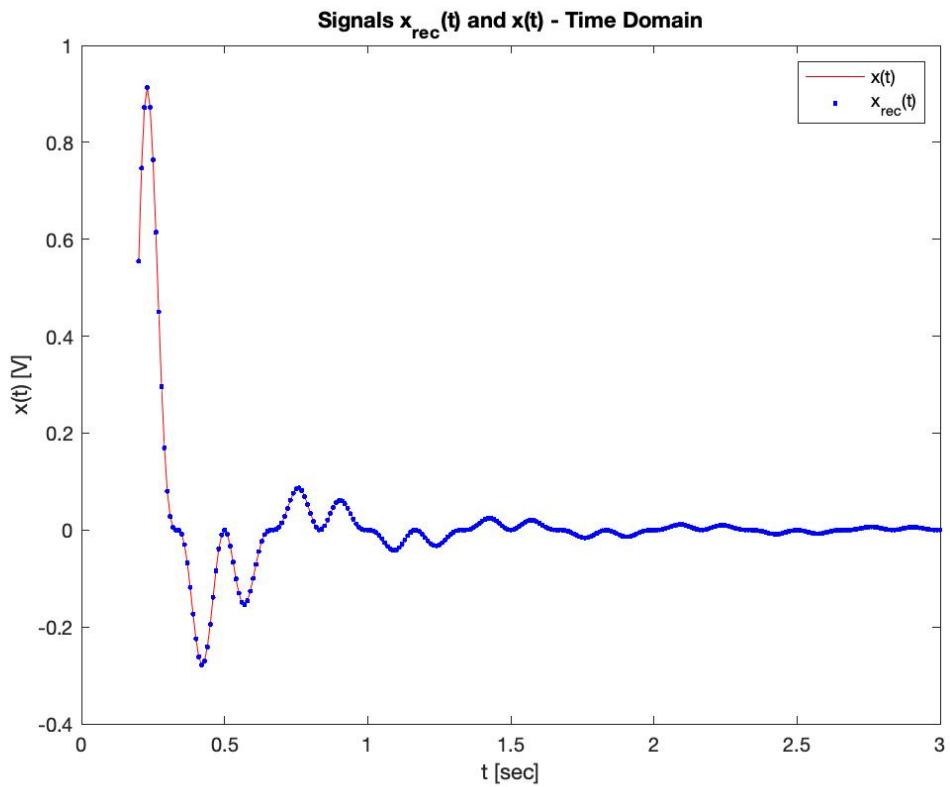


ה. (5 נק') ספקטרום המשן המשוחר האידיאלי נתון על ידי הפונקציה

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\pi\omega/\omega_s}}{\text{sinc}(\omega/\omega_s)} & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

יש להפעיל את המשן האידיאלי במישור התדר על $(\omega) X^F_{ZOH}(\omega)$. השתמשי בפונקציה $\text{trapz}()$ על מנת לחשב את האות המשוחר, $x_{rec}(t)$, על ידי אינטגרל התמרת פורייה. הציגו את האותות x ו- $x_{rec}(t)$ בגרף אחד. האם התקבל שזרור מדויק של $x(t)$? הסבר/י.

גרף האות המקורי והאות המשוחזר:



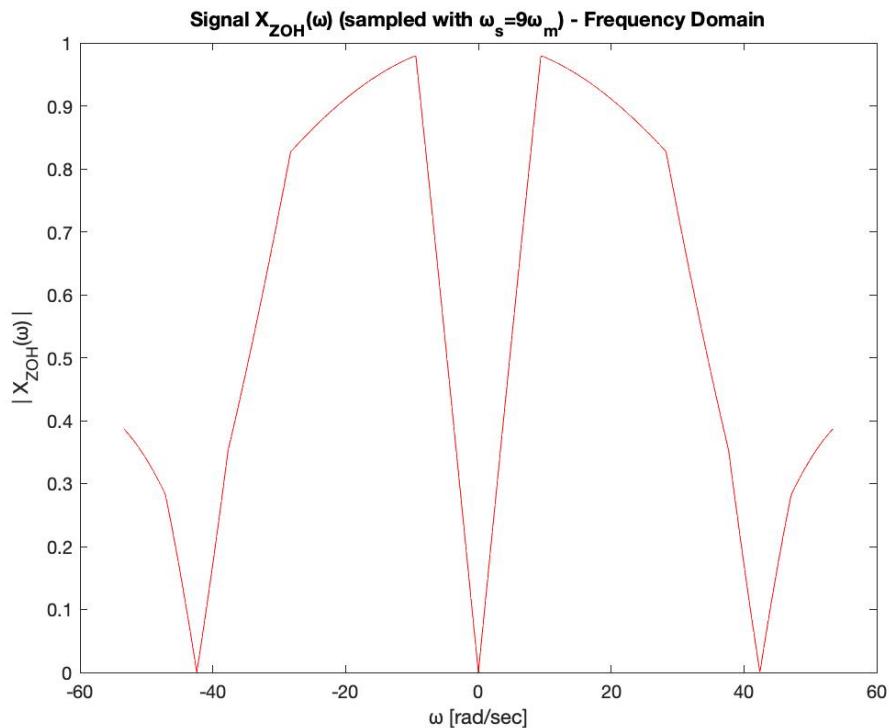
ניתן לראות כי האותות מתקבלים וכי קיבלנו שחרור מדויק של האות המקורי.

ג'. (5 נק'). בעת הנח/כי האות $(t)x$ נדגם בתדר $\omega_s = 9\omega_m = 9\frac{rad}{sec}$, האם במקרה זה ניתן לקבל שחרור מדויק? הסבר/י.

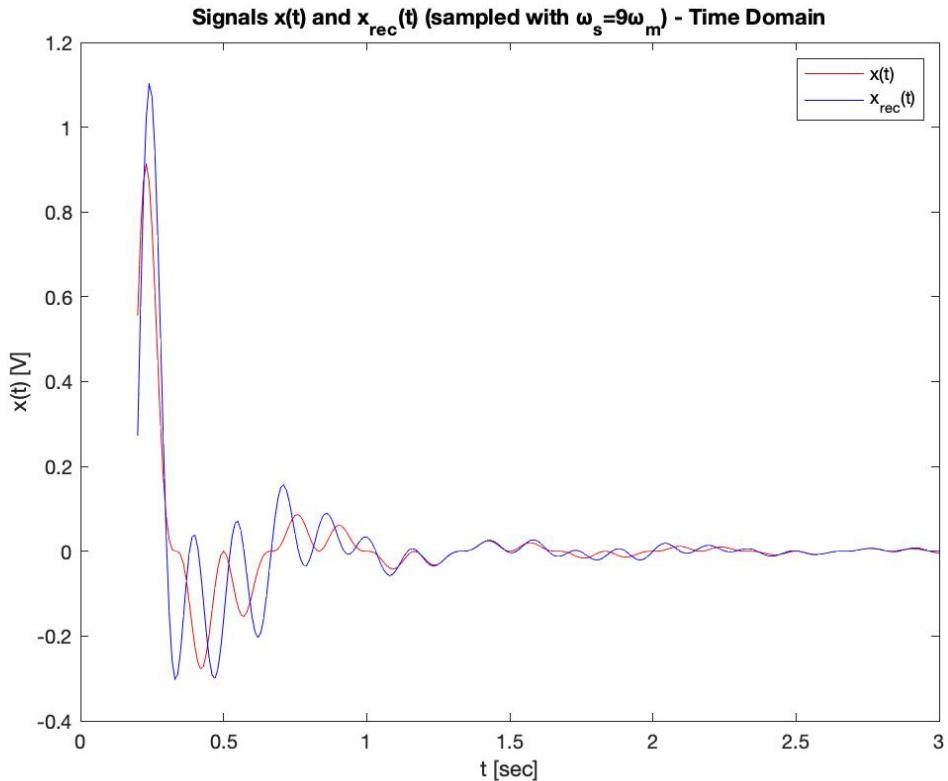
שחרור על סעיף ה' וודא שתוצאות מתבוססות עם המסקנה מסעיף זה.

כעת אנו דוגמים בתדר $\omega_s = 27\pi = 27\pi\frac{rad}{sec}$, עברו תדר הדגימה הנ"ל תנאי ניקוייסט איננו מתקיים ולכן יתרחשו חפיות (aliasing) ועל כן לא נצליח לשחרר.

נשים לב כי עברו תדר הדגימה הנ"ל אכן קיבלנו חפיות והאות במישור התדר אכן השתנה:



כמו כן, ניתן לראות כי אכן במשורר הזמן האות המשוחזר אינו תואם את האות המקורי ולא קיבלנו שחזור מדויק



שאלה 2. דגימה לא איחידה של אות מחזורי (30 נק')

נתון אות מחזורי מוגבל סרט: $x(t) = 5 \cos(\omega_A t) - 3 \sin(\omega_B t)$; $\omega_A = 7\pi$, $\omega_B = 4\pi$

A. (10 נק'). מה זמן המחזורי של הפונקציה (t) ? א' דגימו את האות בצורה איחידה על פני מחזורי אחד בעורת 15 נק'

דוגמא. הצבי את האות "דגום" x יחד עם האות המקורי "רציף" (t) , על פני מחזורי אחד.

מדוע נדרש לפחות 15 נקודות דגימה?

הערה: שימו לב שבנקודת הדגימה ה-15 של האות "דגום" לא ממוקמת בתחילת המחזורי השני של האות "רציף".

הערה: שימו לב כי וקטורי הדגימות x אינם רציף ויש להציג את הדגימות בלבד. לצורך כך השתמשו בתכונות

הקו של פונקציית ()atom כפי שהוצע בתחילת העבודה.

האות מהווים סכום של פונקציות קויסינוס בעלת זמן מחזורי $T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2}{7} [\text{sec}]$ ופונקציית סינוס בעלת מחזורי $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{1}{2} [\text{sec}]$, לכן זמן המחזורי של האות הינו הערך T הקטן ביותר אשר מהווה כפולה שלמה של שני זמני המחזורי הנ"ל, כלומר: $T_{period} = 2 [\text{sec}]$.

נשים לב כי (t) x מחזורי ולכן ניתן לייצוג באמצעות טור פורייה: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi}{T}mt}$. נתון בנוסף כי האות חסום סרט ולכן לכל $\omega_m = \omega_A > |\omega|$ נדרש כי מקדמי פורייה יתאפסו,

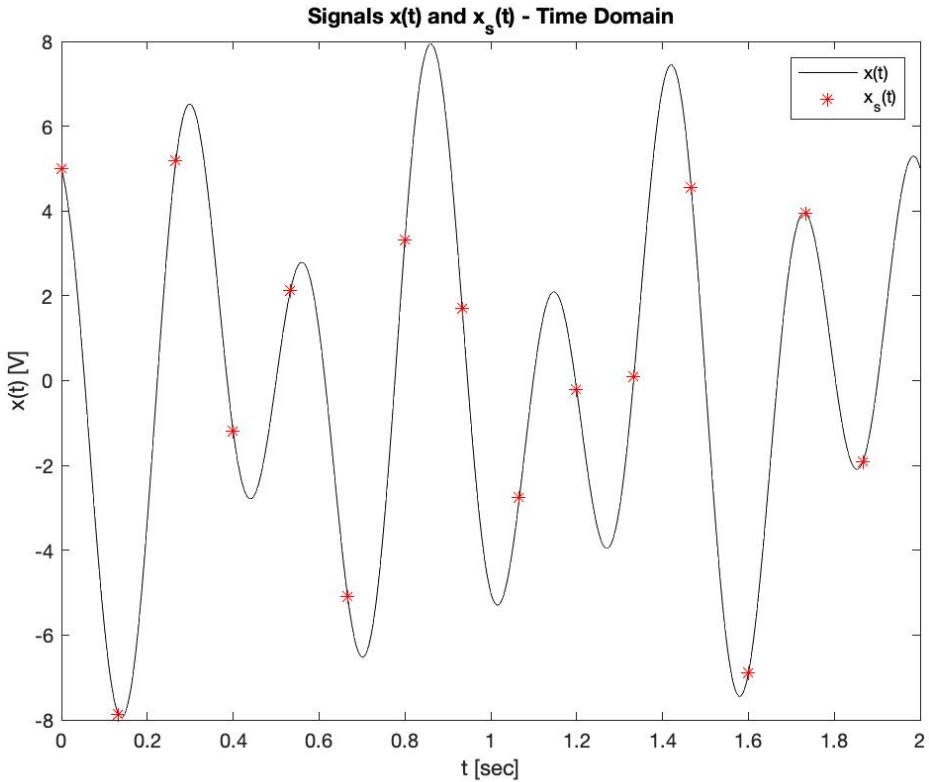
כלומר, עבור $\pi > |m| = |\omega| = \frac{2\pi}{T}$, כלומר: $a_m = 0$, כלומר: $\sum_{m=-7}^7 a_m e^{j\pi m t} = x(t)$.

קיבלנו כי האות מתקיים ע"י לכל היתר 15 מקדים ולכן נדרש ל-15 דגימות על פני מחזורי בודד.

נבצע דגימה אחידה ל- $x(t)$ עם 15 דגימות על פניו מוחזר בודד:

$$x_s[n] = x(nT_s) \quad \forall n \in [0, 1, 2, \dots, 14]$$

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$



ב. (10 נק'). כפי שהוזג בשיעור, ניתן להשתמש בדגימות מסעיף א' על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע"י כתיבת מערכת משוואות מהצורה $F\alpha = x$, כאשר הווקטור α מכיל את ערכי הפונקציה בנקודות הדגימה והווקטור x מכיל את $2M+1$ מקדמי טור פורייה.
כתב/י בחרה מפורשת את מטריצת האקספוננטים F (מספיק לכתוב ביטוי לאיבר כללי). יש לפתח ביטוי למציאת הווקטור α מתוך מערכת המשוואות. התיחס/י למקרים: $N=2M+1$, $N>2M+1$. עבור N נקודות הדגימה מסעיף א', חשב/י באמצעות MATLAB את וקטור מקדמי טור פורייה. הצג/י את ערכי המקדים בטבלה.

נעזר בדגימות מסעיף א' על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע"י פתרון מערכת המשוואות הבאה:

$$\underline{x} = \underline{F} \cdot \underline{\alpha}$$

עבור: $\underline{x} = [x[t_0], x[t_1], \dots, x[t_N]]^T$, $\underline{\alpha} = [a_{-M}, \dots, a_0, \dots, a_M]$

$$F_{n,m} = e^{j \frac{2\pi}{T} m t_n}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad m \in \{-M, \dots, 0, \dots, M\}$$

נבחן בין שני מקרים:

1. $1 + M = N$ – יש לנו מספר זהה של געלים ומדידות ולכן $\underline{\underline{F}}$ המתקבלת הינה מטריצה ריבועית ובהונתן כי המדידות נדגמו על פני אותו מחזור נקבל כי $\underline{\underline{F}}$ הינה מטריצה הפיכה ולכן וקטור המקדמים מתקיים ע"י: $\underline{\underline{a}} = \underline{x} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$.

2. $1 + M > N$ – יש לנו יותר דוגימות מנעלמים וידוע כי דרגתה של $\underline{\underline{F}}$ מלאה (כיוון שדגמוני על פני אותו מחזור) ולכן מתקבלת מטריצה שאיננה ריבועית ואינה הפיכה. במצב זה המשווהה בפועל הינה: $\underline{x} + \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{x}$, כאשר \underline{x} הינו השגיאה. לכן נשתמש בשיטת הריבועים הפחותים אשר מביאה למינימום את המרחק בין המדידות \underline{x} לבין המודל הלינארי $(\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{F}})$, כלומר נדרש: $\left\{ \min_{\underline{a}} \| \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{x} \| \right\}$. ע"י פיתוח מטריצת פסאודה-איינברס של $\underline{\underline{F}}$ נוכל להגיע למטריצה ריבועית והפיכה ולקבל את וקטור המקדמים ע"י: $\underline{\underline{a}} = (\underline{\underline{F}}^H \underline{\underline{F}})^{-1} \underline{\underline{F}}^H \cdot \underline{x}$.

$$Cond(\underline{\underline{F}}) = 1$$

ערך זה מהו מדד לריגישות ערכי המוצא ביחס לשינויים באוט המבוא, ניתן להשתמש בערכו של מדד זה כדי לאמוד את טיב השחזור, כמוון שהיחס בין השינוי באוט המבוא לשינוי באוט המוצא (האות המשוחזר) הינו 1:1 נוכל להסיק כי אכן השגנו שחזור מדויק.

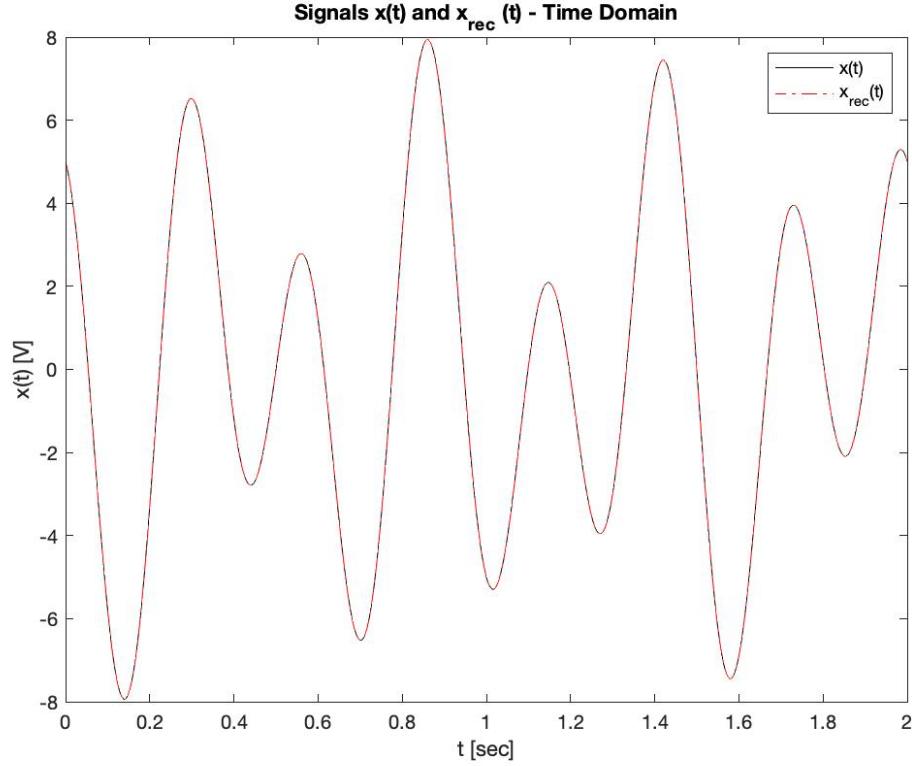
וקטור מקדמי טור פורייה:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.500000000000000	$5.06539254985228e^{-16}$
a_6	$1.38777878078145e^{-16}$	$-1.38777878078145e^{-17}$
a_5	$-2.04003480774873e^{-15}$	$-3.05311331771918e^{-16}$
a_4	$1.45890244329649e^{-15}$	1.000000000000000
a_3	$-2.02615701994091e^{-15}$	$-1.11022302462516e^{-16}$
a_2	$-7.07767178198537e^{-16}$	$1.11022302462516e^{-16}$
a_1	$-2.31759056390501e^{-15}$	$-1.80411241501588e^{-16}$
a_0	$1.83186799063151e^{-15}$	$1.94189045753203e^{-16}$
a_{-1}	$-3.46944695195361e^{-15}$	$5.96744875736022e^{-16}$
a_{-2}	$1.27675647831893e^{-15}$	$8.32667268468867e^{-16}$
a_{-3}	$-3.26128013483640e^{-15}$	$3.05311331771918e^{-16}$
a_{-4}	$1.40339129206524e^{-15}$	-1.000000000000000
a_{-5}	$-1.58206781009085e^{-15}$	$1.13797860024079e^{-15}$
a_{-6}	$2.63677968348475e^{-16}$	$-7.21644966006352e^{-16}$
a_{-7}	2.500000000000000	$-3.22658566531686e^{-16}$

נשים לב כי המקדמים המשמעותיים הינם באינדקסים $7 \pm 4, \pm 1$, שאר המקדמים מקבלים ערכים זניחים יחסית וקרובים מאוד לאפס (כפי שניתן להסיק מפיתוח ישיר של האות לטור פורייה וחישוב המקדמים).

ג. (10 נק'). שחזרו את האות מתוך וקטור מקדמי טור פורייה והציגו את האות המשוחזר והאות המקורי בגרף אחד.
הערה: האות המשוחזר יוצג כאות רציף ולכן כולל כמות נקודות גבוהה מכמות הדוגימות בסעיף א'.

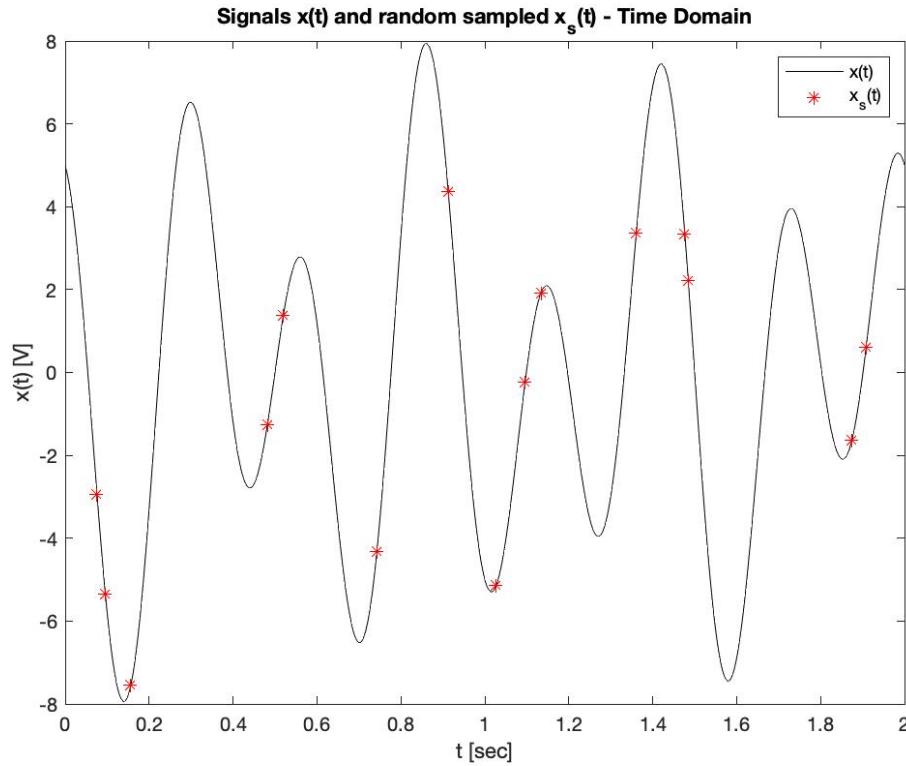
נשחזר את האות המקורי באמצעות וקטור מקדמי פורייה שה חישבנו בסעיף קודם ונציג את שני האותות בגרף.
גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec}(t)$:



ניתן לראות כי אכן האות המשוחזר ע"י דוגימה איחידה מתלכד עם האות המקורי.
ד. (6 נק'). חיזרו על סעיפים א', ב' וכי כאשר 15 נקודות הדוגימה מפוזרות בצורה אקראית על פני מחזור אחד של האות. לצורך דוגימה אקראית השתמשו בפונקציית rand. ממה יש להיזהר במקרה זה אם ברצוננו לשחזר את האות?

כעת נבצע דוגימה אקראית ב-15 נקודות רנדומליות לאורך מחזור בודד של האות המקורי.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (DOGIMA אקראית):

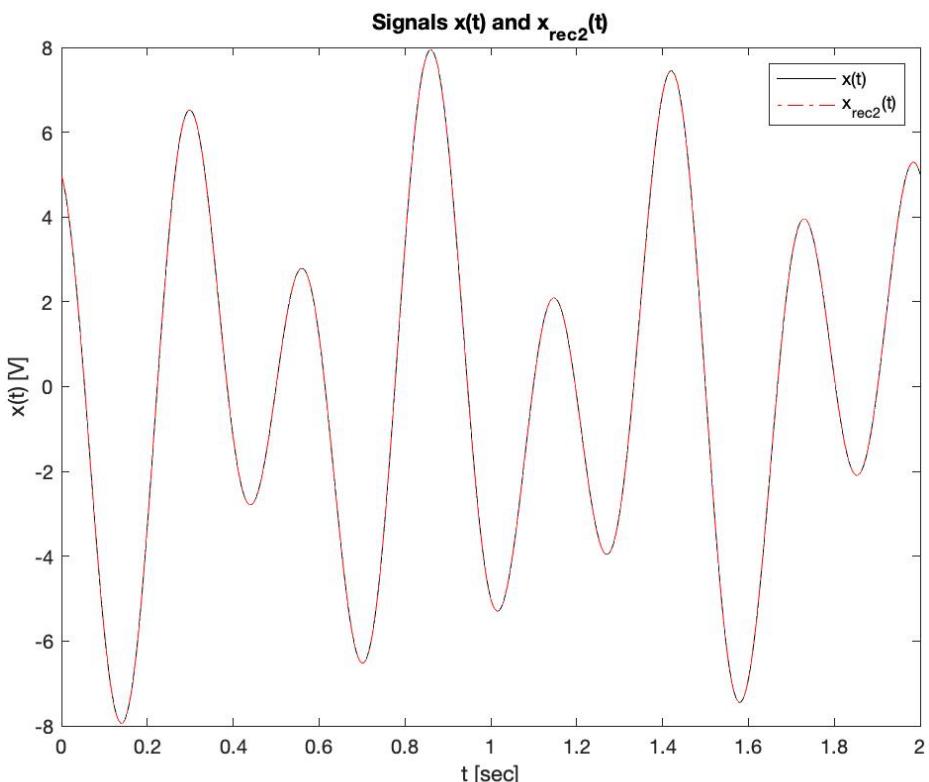


יקטור מקדמי טור פורייה המתתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.5000000000000002	0.000000000000016
a_6	$-1.603404908845363e^{-14}$	$2.470246229790973e^{-15}$
a_5	$6.938893903907228e^{-15}$	$-3.538835890992687e^{-15}$
a_4	0.000000000000014	1.499999999999996
a_3	$1.293409823688307e^{-14}$	$-1.190714193910480e^{-14}$
a_2	$1.483535516655365e^{-14}$	$8.770761894538737e^{-15}$
a_1	$-7.244205235679146e^{-15}$	$2.098321516541546e^{-14}$
a_0	$-3.416017468893529e^{-14}$	$-6.320014951318829e^{-15}$
a_{-1}	$-3.913536161803677e^{-15}$	$-1.078304112667183e^{-14}$
a_{-2}	$1.285083151003619e^{-14}$	$-1.887379141862766e^{-15}$
a_{-3}	$1.007527394847330e^{-14}$	$9.520162436160717e^{-15}$
a_{-4}	0.000000000000014	-1.499999999999998
a_{-5}	$4.218847493575595e^{-14}$	$3.649858193455202e^{-15}$
a_{-6}	$-1.459162651817891e^{-14}$	$-4.718447854656915e^{-15}$
a_{-7}	2.500000000000000	-0.000000000000018

נשים לב כי עדין המקדים המשמעותיים הינם המקוריים אך ערכם המספרי מעת השתנה (כמו כן ערכם של שאר המקדים "זניח" פחות) כתוצאה מדגימות בנקודות זמן קרובות מדי אשר גוראות "דמיון" רב מדי בין שתי שורות במטריצת פורייה וכתוצאה לכך יתקבלו שגיאות נומריות.

graf האותות $x(t)$ ו- $x_{rec2}(t)$:

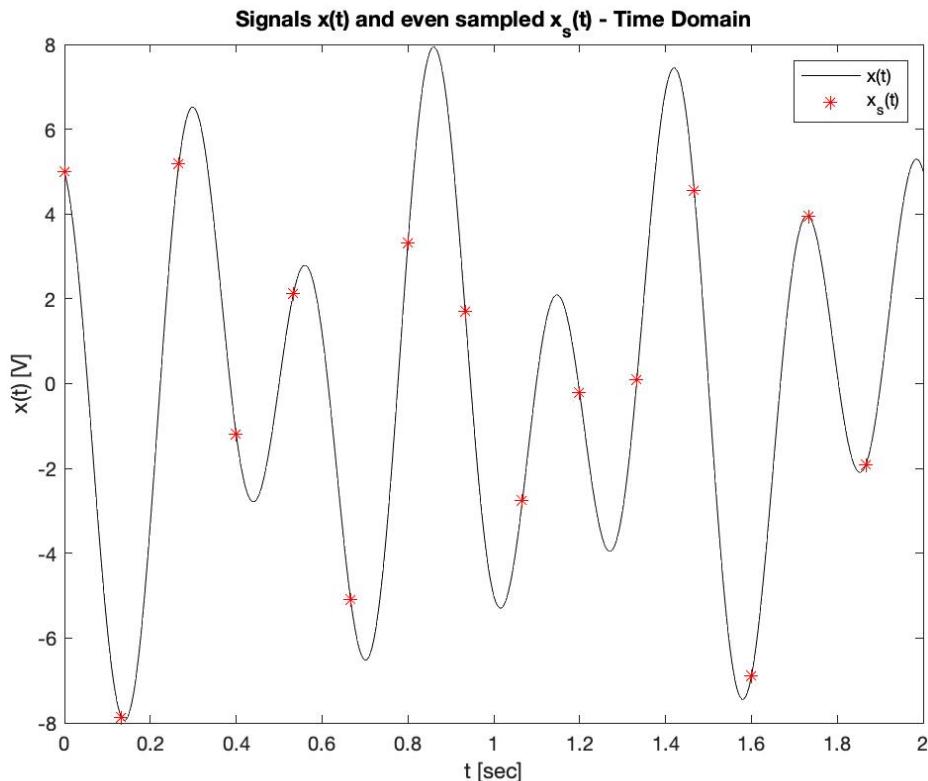


נשים לב כי גם עבור דוגמה אקראית ולא איחידה האות המשוחזר מתלכד עם האות המקורי ומתקבל שחזור מדויק.

ה. (8 נק'). חזרו על סעיפים א'-ד' כאשר יש אי-ודאות במקום הדגימות, כלומר כאשר בונים את המטריצה F , במקומות להכנס את זמן הדגימה האמיטי, t_n , יש להכניס $t_n * rand(1)$ (שים לב - לכל n מגרילים מספר רנדומלי אחר). חשבו את ה-condition number של מטריצה F בשני המקרים (דגם אחידה ולא אחידה) ע"י פונקציית `cond`. השבירו את ההבדלים בין האותות המשוחזרים בשני המקרים.

נזכיר על סעיפים א' – ד' כאשר יש אי-ודאות במקום הדגימות והדגימות מבוצעות בצורה אחידה.

graf האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגם אחידה):

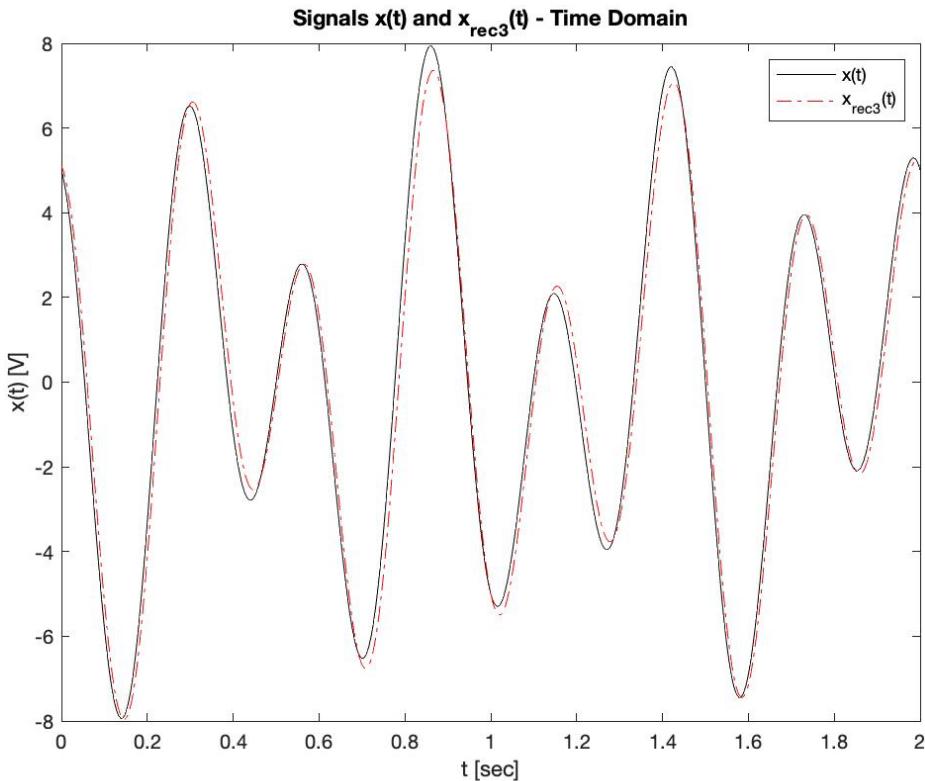


קטור מקדמי טור פורייה המתתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.456343989605339	-0.335604112191757
a_6	0.010494402189935	0.004940329492793
a_5	0.036010546915163	-0.009146011005686
a_4	0.092562968796787	1.452893694414489
a_3	-0.018826613753651	0.094567836339591
a_2	-0.038444109619169	-0.073374550785182
a_1	0.051611296784954	-0.004327950091892
a_0	-0.075090678999759	0.000000000000000
a_{-1}	0.051611296784953	0.004327950091893
a_{-2}	-0.038444109619170	0.073374550785183
a_{-3}	-0.018826613753651	-0.094567836339590
a_{-4}	0.092562968796786	-1.452893694414489
a_{-5}	0.036010546915164	0.009146011005687
a_{-6}	0.010494402189934	-0.004940329492792
a_{-7}	2.456343989605342	0.335604112191757

ניתן לראות כי המקדמים המשמעותיים עדין יחסית קרובים לערך המקורי עם זאת, שאר המקדמים כבר לא "זניחים".

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec3}(t)$:



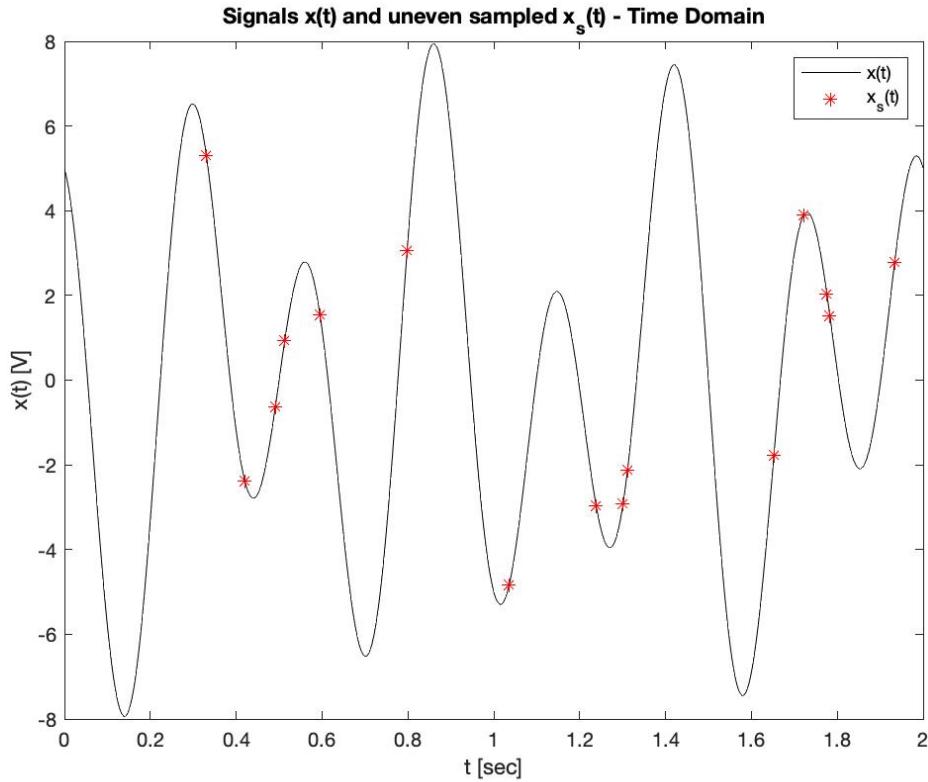
האות המשוחזר מתקרב לאות המקורי אך ברור מהגרף כי הם אינם מתלכדים אחד עם השני וכן נוכל להסיק כי השחזור אינו שחרור מדויק, בהלימה עם האופן בו ניתחנו את ערכיו וקטור מקדמי פורייה של האות המשוחזר ביחס לערכי וקטור מקדמי פורייה של האות המקורי.

$$Cond \left(\underline{F_{even_sample[15]}} \right) = 1.106664648606944$$

בהתאם להתוצאות שקיבלנו, כעת ערכו של ממד היחס בין שינויים באוט המבוא לשינויים באוט המוצא (האות המשוחזר) הינו גדול מאוד, ככלומר, עברו שינוי מסוימים (שגיאה) באוט המבוא נקבל שגיאה גדולה יותר במושג, הערך הכללי עדין יחסית קרוב ל-1 וכאן אנו מקבלים אותן משוחזר אשר מאוד קרוב לאות המקורי, אך עדין איננו זהה לו.

ניחס על סעיפים א' – ד' כאשר יש אי וודאות במיקום הדגימות והדגימות מבוצעות בצורה לא אחידה.

गраф האותות ($x(t)$ ו- $x_s(t)$) דוגמה לא אחידה:

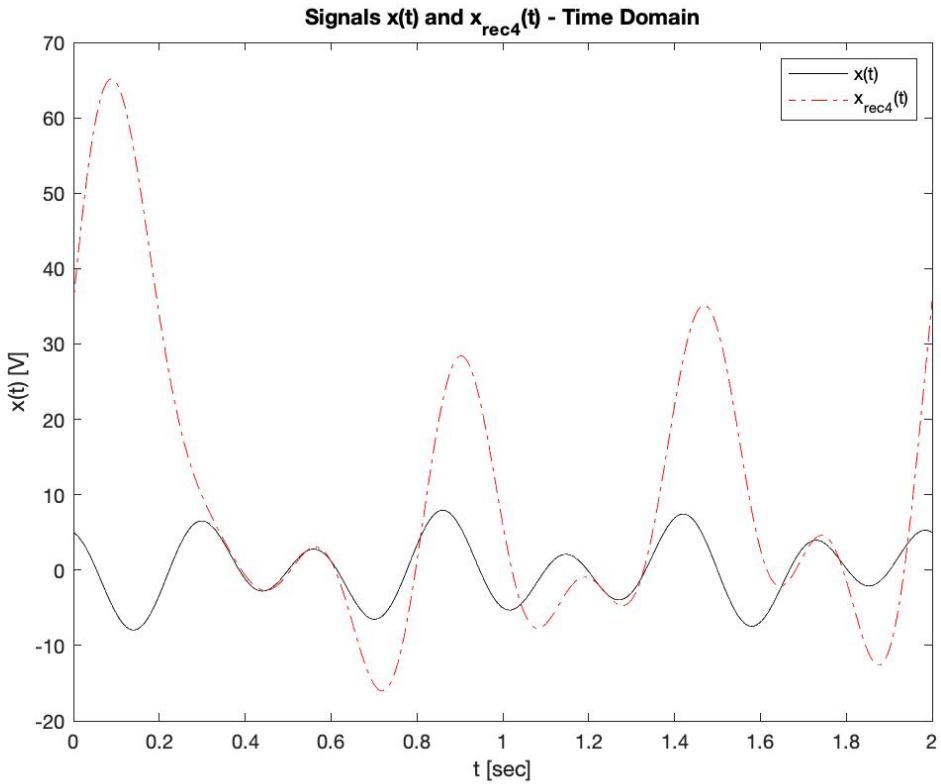


קטור מקדמי טור פורייה המתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.321933932031434	-3.564366745995542
a_6	-1.883236042216566	-1.172794747047639
a_5	-1.180643373795264	-4.080956615641833
a_4	4.199082298667138	-1.477501424000651
a_3	1.326787980800948	-8.535864696617276
a_2	3.161729751681357	-4.150405858835388
a_1	4.929039559343895	0.096392916140935
a_0	9.938848352028115	0.000000000000568
a_{-1}	4.929039559343755	-0.096392916140302
a_{-2}	3.161729751680916	4.150405858835867
a_{-3}	1.326787980799972	8.535864696617374
a_{-4}	4.199082298666760	1.477501424001003
a_{-5}	-1.180643373795762	4.080956615641679
a_{-6}	-1.883236042216630	1.172794747047464
a_{-7}	2.321933932031115	3.564366745995437

ניתן לראות כי בשונה מהתוצאותינו הקודמות, עבור דוגמה לא אחידה (בתוספת רעש אקראי) כבר לא ניתן לזרות באופן חד משמעי את מקדמי פורייה של אותן המקורות.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec4}(t)$



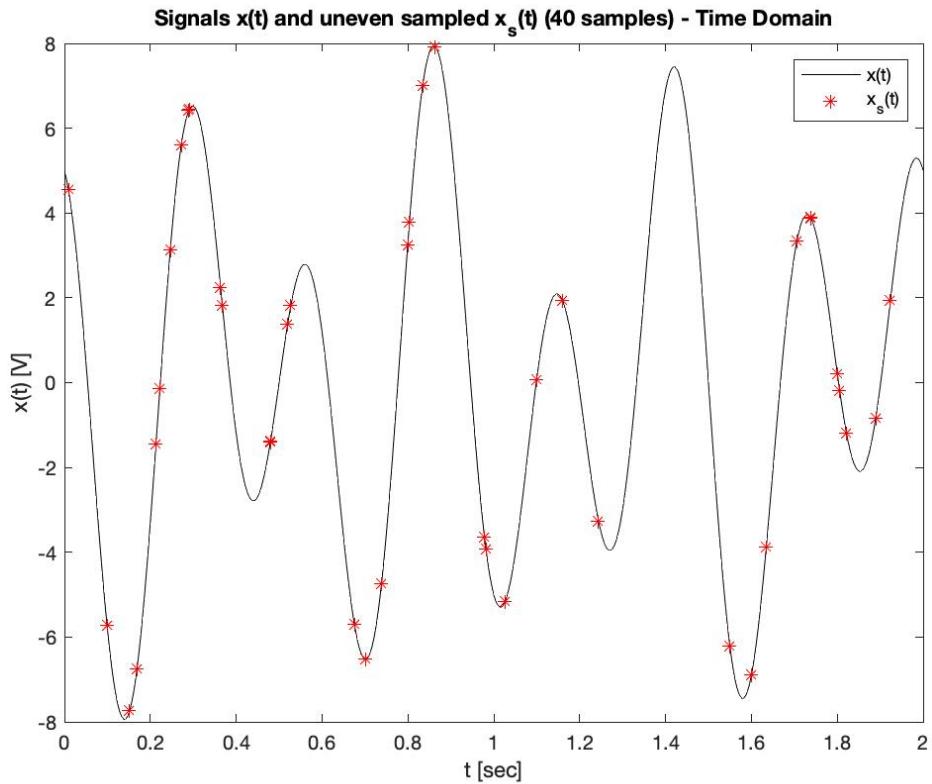
כפוי ניתן לראות כי האות המשוחזר רחוק משמעוית מהאות המקורי, והשחזור אינו רק לא אידיאלי אלא גם אינו אפקטיבי, קיבלנו אות שונה בתכליות מאות המבוא.

$$Cond \left(\underline{\underline{F_{uneven_sample[15]}}} \right) = 1.057216333130592e^3 \sim 1057.2$$

בהתאם לתוצאות שקיבלנו, כעת ערכו של ממד היחס בין שינויים באות המבוא לשינויים באות המוצא (האות המשוחזר) הינו גדול משמעותית מ-1, כלומר, עברו שינוי מאוד קטן (שgiaה) באות המבוא נקבל שgiaה גדולה בסדר גודל במוצא, הערך הינו רחוק מחדך ועל כן אנו מקבלים אות שונה בתכליות מאות המבוא.

1. (6 נק'). חזרו על סעיף ה' כאשר דוגמאות אחרות ב-40 נק' על פני מחזור אחד, עברו המקרה של דגימה לא איחודית (שימו לב שמספר המקדמים שמחפשים נשאר זהה). הסבירו את ההבדלים שהתקבלו.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגימה לא איחודית – 40 דגימות):

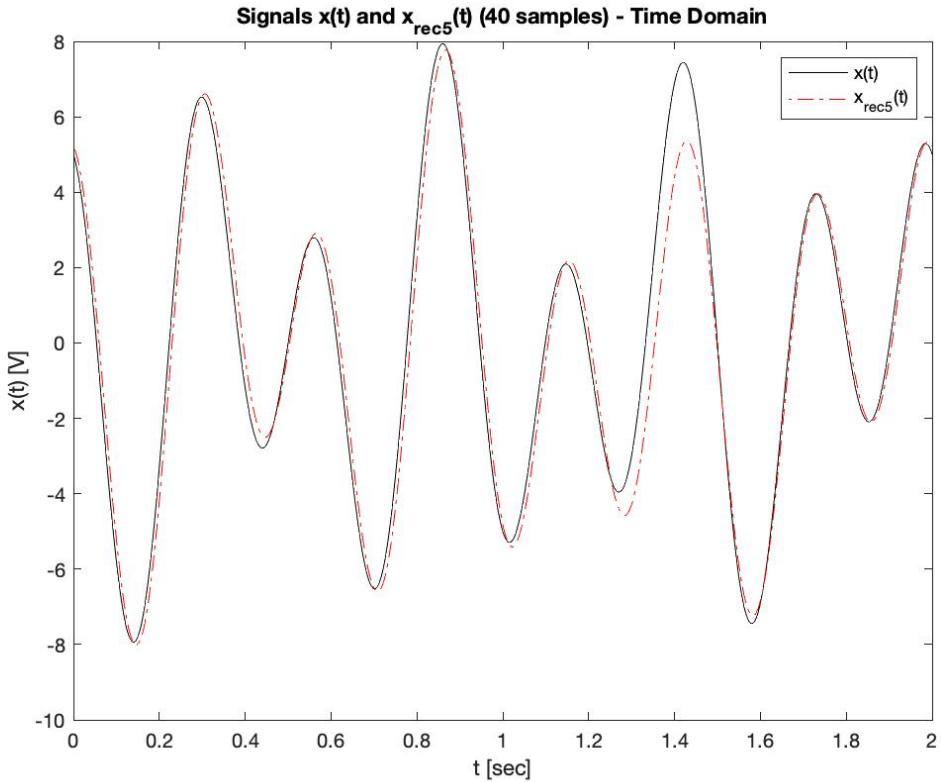


קטור מקדמי טור פורייה המתתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.430386935442293	-0.352618963518817
a_6	0.004762504524663	0.093464493309147
a_5	0.142239722984797	-0.017856355867904
a_4	0.086134882340359	1.352329637846034
a_3	-0.153687933873774	0.138838580479840
a_2	0.100508927854784	0.097943789742305
a_1	0.091865794939390	-0.189442992897176
a_0	-0.179677676249392	-0.0000000000000002
a_{-1}	0.091865794939388	0.189442992897174
a_{-2}	0.100508927854787	-0.097943789742308
a_{-3}	-0.153687933873778	-0.138838580479840
a_{-4}	0.086134882340360	-1.352329637846034
a_{-5}	0.142239722984800	0.017856355867905
a_{-6}	0.004762504524661	-0.093464493309146
a_{-7}	2.430386935442292	0.352618963518818

ניתן לראות כי עבור דגימה לא איחודית של 40 דגימות (עם שגיאה אקראית), אנו מקבלים ערכים קרובים יותר לערכי המקדמים האמיתיים, ככלומר צפוי להתקבל ערך משוחזר קרוב יותר מאשר הדגימה שביצעו בסעיף קודם (25 דגימות).

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec5}(t)$:



נשים לב כי אכן קיבלנו קירוב טוב יותר לאות המקורי, עם זאת ניתן לראות בבירור שהאותות אינם זהים ולא קיבלנו שחזור מדויק, מכאן נסיק שהגדלת מספר הדגימות מקרבת את השחזור בצורה טובה יותר לאות המקורי, ככלומר מגדילה את דיוק השחזור למرات שהדגימות אינן אחידות ומתווספת שגיאה אקראית.
עם זאת, נבחין כי האות המשוחזר והאות המקורי אינם מתלכדים והשחזור המתתקבל אינו שחזור מלא למرات הגדלת מספר הדגימות ביותר מפי 2.

$$Cond\left(\underline{F_{uneven_sample[40]}}\right) = 11.709550611034565$$

נשים לב כי ערכו של ממד היחס בין שינויים באוט המבוא לשינויים באוט המוצא המתkeletal עבור 40 דגימות הינו אכן גדול מאוד וללא מתקיים שחזור מלא אף הערך המתkeletal קטן ממשמעוותית מהערך שקיבלנו עבור דוגמה זהה של 15 דגימות, וכן תוצאה זו מתीישבת היטב עם מסקנתנו.

שאלה 3 - דגימה ואנליזה פונקציונאלית (30 נק')

נתונים שני סטים של פונקציות בסיס מוחזירות:

- $\phi_n(t) = \exp(j \frac{2\pi}{T} nt)$
- $\psi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{t}{T/20} - (n + 0.5) - 20k \right)$
- בעל זמן מחזור T ו- duty cycle של 5% . a מספר שלם.

נתונים שני אוטות בעלי זמן מחזור $T = 10 [sec]$:

$$f(t) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right)$$

- $g(t)$ פונקציה מוחזרת עם זמן מחזור T כך שמחזור אחד מקיים :
- $g(t) = 2\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)\right) - 4\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right), t \in [0, T]$

A. (5 נק') כתבו פונקציה ב MATLAB המתקבלת שלושה ארגומנטים :

- וקטור עמודה המכיל ערכים מוחזר אחד של האות בזמן "ירצף".
- מטריצה בעלת N עמודות המכילה בכל עמודה פונקציית בסיס אחת (ערכים של פונקציית הבסיס), כך שהמטריצה תיציג סט אחד של פונקציות. הערה : שימוש לב שמספר השורות במטריצה ובווקטור צריכים בהתאם.
- סקלר השווה לזמן המוחזר T .

הפונקציה מוחזירה וקטור באורך N , המכיל את מקדמי ההטלה של האות על כל אחת מפונקציות הבסיס. מקדמי ההטלה עבור פונקציות בסיס ואוטות מוחזרים יחושו כך :

$$c_n = \frac{\langle x(t), \phi_n(t) \rangle}{\|\phi_n(t)\|^2} = \frac{\int_0^T x(t) \phi_n^*(t) dt}{\int_0^T |\phi_n(t)|^2 dt}$$

(השתמשו בפונקציה trapz על מנת לחשב את האינטגרלים)

הערה: הפונקציה מופיעה בקוד ה- MATLAB המצורף (*projection_coef_vec(vec,mat,T)*)

ב. (10 נק') בעזרת הפונקציה מסעיף א' חשבו את מקדמי הנטלה c_n של כל שני האותות על כל אחד משני הסטים של פונקציית הבסיס הנתונם. עבור $(t)_n \phi$ חשבו את המקדים $c_{20}, c_{-20}, \dots, c_{-2}, c_2, \dots, c_0$, ועבור $(t)_n \psi$ חשבו את המקדים c_{19}, \dots, c_0 . הציגו בטבלה את המקדים שקיבלתם והסבירו את התוצאה.

הערה : נסו להגדיר את מטריצת פונקציות הבסיס בשורה אחת, ללא שימוש בולולאה.

וקטור מקדמי הנטלה C_n המתקבלים מדגימות של $f(t)$ ו- $g(t)$ עם פונקציות הבסיס $\psi_n(t)$ ו- $\phi_n(t)$ בהתאם:

C_n	$f(t)$ sampled with $\psi_n(t)$	$g(t)$ sampled with $\psi_n(t)$
c_0	4.379044979393163	-2
c_1	2.943273154607983	-2
c_2	-0.643561949881100	-2
c_3	-2.951273154607983	-4.6720000000000002
c_4	-3.104865351540962	-6
c_5	-3.105809623450961	2
c_6	-2.947273154607982	3.3440000000000001
c_7	-0.629673406061103	6
c_8	2.955273154607981	6
c_9	4.378100707483164	6
c_{10}	3.101809623450962	-6
c_{11}	1.674037798665781	-6
c_{12}	0.633673406061103	-6
c_{13}	-1.682037798665779	-3.3280000000000003
c_{14}	-4.382100707483163	-2
c_{15}	-4.375044979393165	6
c_{16}	-1.670037798665781	4.655999999999999
c_{17}	0.639561949881100	2
c_{18}	1.678037798665781	2
c_{19}	3.107079510562086	2

נשים לב כי בהתאם לתוצאות שהוצגו מעלה, $(t)_n \psi$ הינה פונקציית הטלה ממשית והיא פונקציית מדרגות ברוחב $\frac{T}{20}$, חישוב הנורמה:

$$\|\psi_n(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(t) dt = \int_{\frac{nT}{20}}^{\frac{nT+T}{20}} dt = \frac{T}{20}$$

כאמור $(t)_n \psi$ מקבלת ערכים ממשיים בלבד ולכן מקדמי הנטלה מתקבלים ע"י:

$$c_n = \frac{1}{T/20} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_n * (t) dt = \frac{20}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_n(t) dt = \frac{20}{T} \int_{\frac{nT}{20}}^{\frac{nT+T}{20}} x(t) dt$$

כלומר, קיבלנו כי המקדים מתקבלים ע"י מיצוע של ערכי האות למשך $\frac{T}{20}$ זמן.

c_n	$f(t)$ sampled with $\phi_n(t)$	$g(t)$ sampled with $\phi_n(t)$
c_{-20}	$-1.9984e^{-16} - 5.5511e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.3878e^{-16}i$
c_{-19}	$-1.2629e^{-16} + 1.2678e^{-16}i$	$-0.0010 + 0.0005i$
c_{-18}	$-1.4710e^{-16} - 6.1062e^{-17}i$	$0.0030 - 0.2829i$
c_{-17}	$-2.0400e^{-16} - 7.2164e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.26569e^{-4}i$
c_{-16}	$-1.5526e^{-16} - 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 8.7353e^{-18}i$
c_{-15}	$-1.4225e^{-16} + 4.9960e^{-17}i$	$-0.0010 + 0.2546i$
c_{-14}	$-2.0262e^{-16} + 1.2212e^{-16}i$	$0.0030 - 0.3638i$
c_{-13}	$-7.3899e^{-17} - 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.5898e^{-4}i$
c_{-12}	$-2.5396e^{-16} + 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 1.1102e^{-16}i$
c_{-11}	$-2.6645e^{-16} - 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6434e^{-4}i$
c_{-10}	$-1.6098e^{-16} + 4.4409e^{-17}i$	$0.0030 - 0.5093i$
c_{-9}	$-2.609e^{-16} - 6.6613e^{-17}i$	$-0.0010 + 0.4244i$
c_{-8}	$-7.7716e^{-17} - 8.8818e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 1.0124e^{-16}i$
c_{-7}	$-1.0408e^{-16} - 1.8874e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6032e^{-4}i$
c_{-6}	$-1.7902e^{-16} - 2.4425e^{-16}i$	$0.0030 - 0.8488i$
c_{-5}	$0.5i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6300e^{-4}i$
c_{-4}	$-2.2204e^{-16} - 4.4409e^{-16}i$	$-2.0000e^{-4} - 4.8850e^{-16}i$
c_{-3}	$-3.5527e^{-16} + 2.4425e^{-16}i$	$-0.0010 + 1.2732i$
c_{-2}	2	$0.0030 - 2.5465i$
c_{-1}	$-1.3323e^{-16} - 8.2157e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6166e^{-4}i$
c_0	$8.8818e^{-17}$	$-2.0000e^{-4}$
c_1	$-1.3323e^{-16} + 8.2157e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6166e^{-4}i$
c_2	2	$0.0030 + 2.5465i$
c_3	$-3.5527e^{-16} - 2.4425e^{-16}i$	$-0.0010 - 1.2732i$
c_4	$-2.2204e^{-16} + 4.4409e^{-16}i$	$-2.0000e^{-4} + 4.8850e^{-16}i$
c_5	$-0.5i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6300e^{-4}i$
c_6	$-1.7902e^{-16} + 2.4425e^{-16}i$	$0.0030 + 0.8488i$
c_7	$-1.0408e^{-16} + 1.8874e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6032e^{-4}i$
c_8	$-7.7716e^{-16} + 8.8818e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.0124e^{-16}i$
c_9	$-2.6090e^{-16} + 6.6613e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.4244i$
c_{10}	$-1.6098e^{-16} - 4.4409e^{-17}i$	$0.0030 + 0.5093i$
c_{11}	$-2.6645e^{-16} + 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-4} + 4.6434e^{-4}i$
c_{12}	$-2.5396e^{-16} - 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.1102e^{-16}i$
c_{13}	$-7.3899e^{-17} + 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.5898e^{-4}i$
c_{14}	$-2.0262e^{-16} - 1.2212e^{-16}i$	$0.0030 + 0.3638i$
c_{15}	$-1.4225e^{-16} - 4.9960e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.2546i$
c_{16}	$-1.5526e^{-16} + 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 8.7353e^{-18}i$
c_{17}	$-2.0400e^{-16} + 7.2164e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6569e^{-4}i$
c_{18}	$-1.4710e^{-16} + 6.1062e^{-17}i$	$0.0030 + 0.2829i$
c_{19}	$-1.2629e^{-16} - 1.2768e^{-16}i$	$-0.0010 - 0.0005i$
c_{20}	$-2.0866e^{-16} + 2.7756e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.0005i$

נבדוק את התוצאות המספריות שקיבלנו אל מול פיתוח ישיר של המקדמים:

נפתח את $f(t)$ לטור פורייה:

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right) = 2\left(e^{j\frac{4\pi}{T}t} + e^{-j\frac{4\pi}{T}t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{10\pi}{T}t} - e^{-j\frac{10\pi}{T}t}\right) \\ &= 2\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j5\pi t} - e^{-j5\pi t}\right) \\ \Rightarrow C_{\pm 2} &= 2, \quad C_{-5} = 0.5j, \quad C_5 = -0.5j \end{aligned}$$

ניתן לראות כי אכן קיבלנו את המקדמים הנ"ל בקטור שהוצג מעלה, כמו כן נשים לב כי שאר המקדמים הינם מאוד קרובים לאפס (סדר גודל של $10^{-17}, 10^{-16}$) ולכן נסיק כי מדובר בשגיאות נומריות.

עבור $(t)g$ נשים לב כי לא קובלנו שחזור מדויק עם פונקציית הבסיס $(t)_n\phi$ וגם לא נוכל לקבל צזה כיוון $(t)g$ הינה פונקציה המתקבלת בערכים בדים (סכום של פונקציות סימן עם מקדמים קבועים) ולכן מהווות אותן שאיננו חסום סרט (ומחזורי) ולכן פורייה שלו קיימים מכיל אינסוף מקדמים ועל מנת לקבל שחזור מדויק נדרש לדוגמאות באינסוף דוגמאות. כמו כן נשים לב כי בקטור המקדמים אינם מכיל ערכים "זוניים" כפי שראינו בדוגמאות עם $(t)f$, בהתאם למסקנתנו.

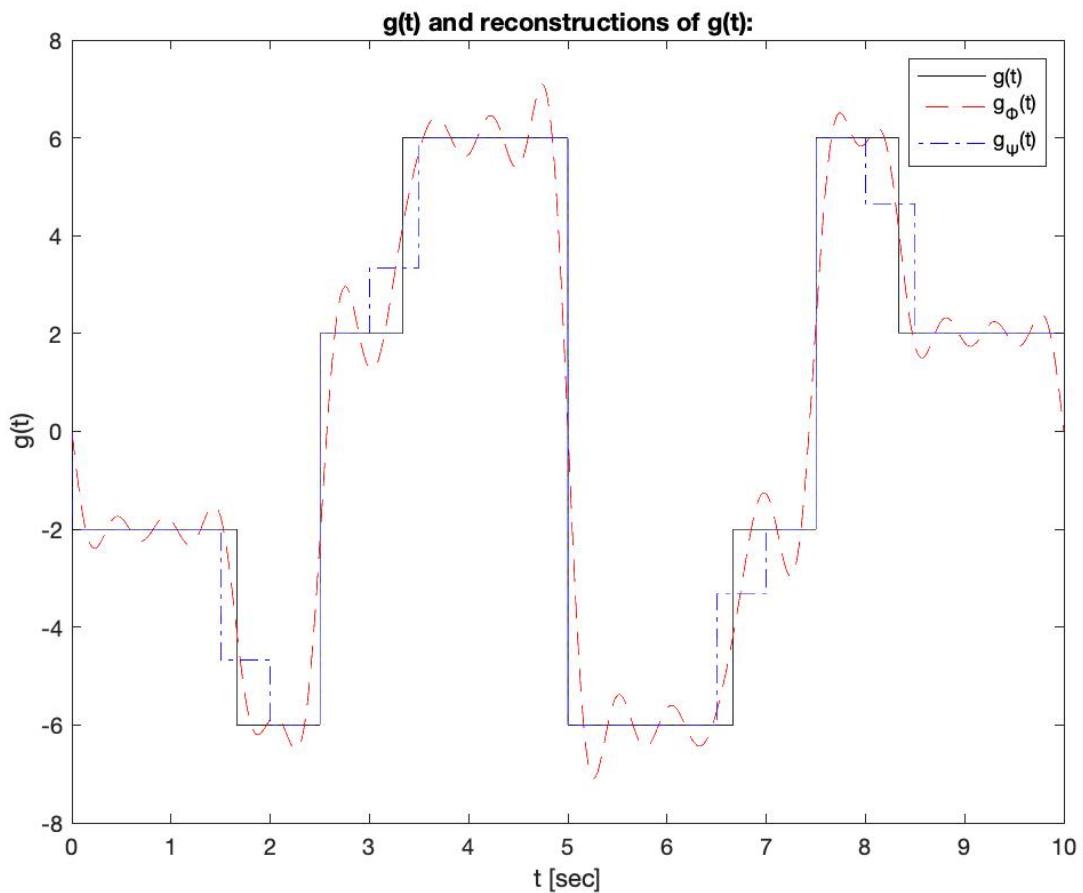
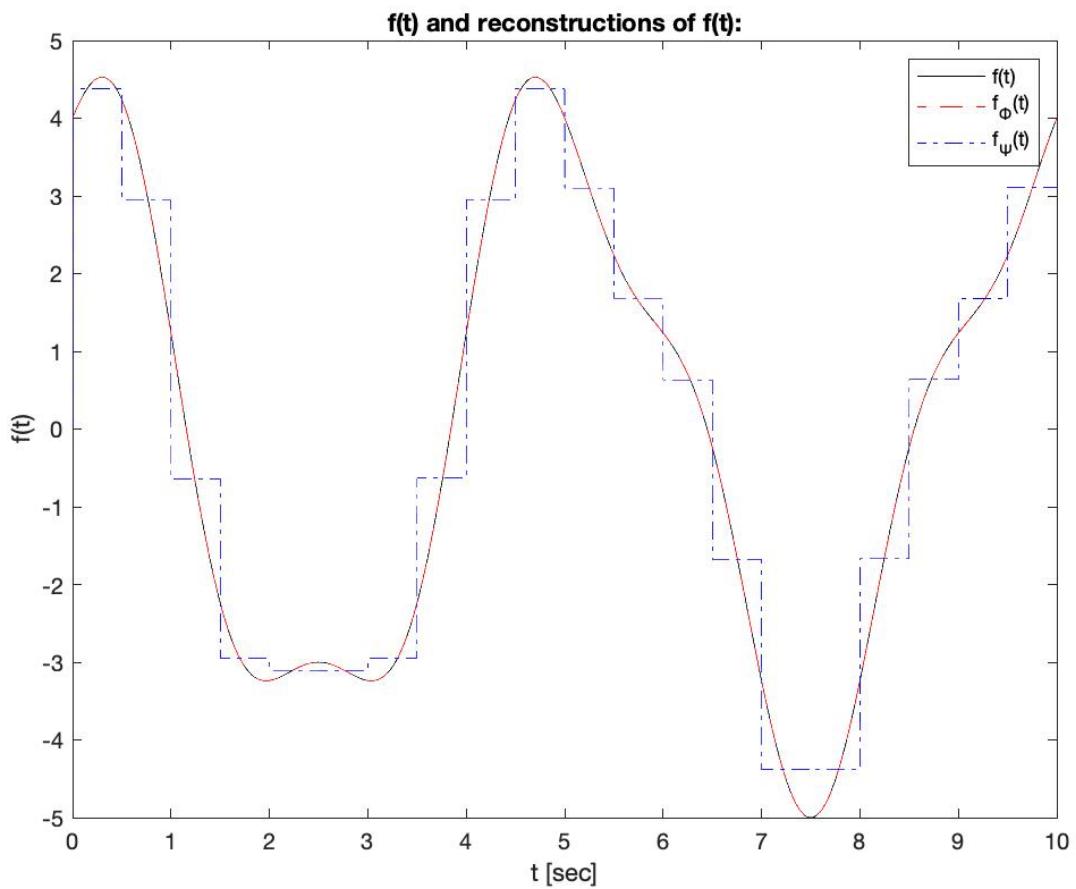
ג. (10 נק') שחוירו את האותות מתוך מקדמי החלטה שיחסבתם בסעיף ב', על ידי נוסחת השחזור :

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \phi_n(t)$$

הציגו את האות המקורי ואת האותות שיחסורתם בגרף אחד עבור $(t)f$ ובgraf נוסף עבור $(t)g$, עברו מחזור אחד.

- האם מתקבל שחזור מדויק בכל אחד מהמקרים?
- בשחזור האות $(t)g$ מתוך מקדמי ההחלטה על $(t)_n\phi$, האם ניתן לקבל שחזור מדויק (לא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחשובו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?
- בשחזור האות $(t)f$ מתוך מקדמי ההחלטה על $(t)_n\psi$, האם ניתן לקבל שחזור מדויק (לא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחשובו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?

הגרפים המתוארים משחזרו האות המקורי עברו כל אחת מפונקציות הבסיס:



- כאמור (t) f היא פונקציה מחזורית, על כן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה, בפרט ע"י מספר סופי של מקדמי פורייה סכום של פונקציות סינוסואידליות, כמובן, ניתן לפרש אותה ע"י פונקציית הבסיס ϕ (אקספוננטים) בלי לאבד מידע בשחזר. כדי שאנו רואים ישנה חפיפה מלאה בגרף לכך לנשchter הוא מלא. לעומת זאת, למחרת שהשחזר שקיבלנו עבור ψ הוא הקירוב הטוב ביותר ביותר ל- (t) f במרחב הנפרש ע"י פונקציות ψ , פונקציות הבסיס ψ אינן פורשות את (t) f ולכן לא מנגננו שנאבד מידע בשחזר וכך אכן קורה כפי שניתן להראות בגרף.
- הוספת מקדמי הטלה על ψ לשחזר האות (t) f לא תביא לשחזר מדויק של האות שכן הוספת מקדמים של פונקציית הבסיס רק תהיה הוספה של אחת מהפונקציות הנתונות עם הזזה, לכן לא תעוזר לדיווק השחזר. לעומת זאת, כן ניתן לשפר את הדיווק ע"י הגדלת הפרמטר N – מספר הדגימות שלנו במחזור, נוכל לצמצם את מרוחת השגיאה שלנו עם הקטנת רוחב החלונות בדגם, וכך נתכנס לתשובה מדויקת יותר.
- כאמור (t) g היא סכום פונקציות סימן עם פרמטרים – לכן מהוות פונקציית מדרגות, על כן ניתן לייצוג מדויק ע"י ψ – שהיא עצמה פונקציית מדרגות, אמן לא קיבלנו ייצוג מדויק כאן אך קיבלנו גרפ מאווד קרוב לגרף המקורי ויהיה ניתן לקבל אותו אם נוסיף עוד מספר דגימות סופי (נגדיל את N).
- בנוסף, אנו יודעים ש (t) g אות מחזורי שכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה, (t) g אינם אות חסום סרט ולכן יכולAINSOV איברים בטוור. השחזר שקיבלנו לפि ϕ כפי שניתן לראות אינם מדויק אך אכן ישנה אפשרות לשפר את הדיווק ע"י הוספת מקדמי פורייה שכותצאה מכך תגדיל את טווח התדרים שאנו משחזרים, אך חשוב לציין שבמצב זה השחזר מדויק לא אפשרי (בכלים פיזיים וב- MATLAB בפרט) מכיוון שעל מנת לקבל השחזר מדויק נצטרך להוסיף מקדמי פורייה וזה כמובן בלתי אפשרי מבחינתנו (תמיד נהיה קרובים לתוצאה בכל נק' דגם עד כדי אפסילון שגיאה).

ד. (5 נק'). הסבר/י:

- באיזה בסיס עדיף להשתמש עבור כל אחד מהאותות הנתונות?
- מהם היתרונות והחסרונות בכל אחד מהבסיסים?
- האם השימוש בבסיס $(t)_n$ ψ זהה לשחזר H_0Z ?

כפי שראינו בתוצאות של סעיף ג' עדיף להשתמש בפונקציות הבסיס ϕ עבור השחזר של $(t)_f$ ובפונקציות הבסיס ψ עבור השחזר של $(t)_g$.
הסבר:

$(t)_f$ הוא אותן מחזורי חסום סרט ולכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה סכום סופי של אקספוננטים, כמובן, ניתן לייצוג ע"י סכום פונקציות הבסיס ϕ , אך ϕ פורשות את המרחב שבו נמצאת הפונקציה $(t)_f$ ונותנות לנו שחזר מדויק עם מספר סופי וקטן של איברי בסיס. ψ לא פורשות את המרחב של $(t)_f$ – נוכל תמיד לקבל קירוב אך לא שחזר מדויק. סכום פונקציות מדרגה לא יניב אותן רצף אלא רק קירוב שלו.

$(t)_g$ גם הוא אותן מחזורי אך הוא אותן מחזורי חסום סרט (פונקציית מדרגות) שכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה סכום אינסופי של אקספוננטים.

$(t)_g$ נפרשת ע"י ψ בצורה מדויקת, זאת אם נוספת מספר סופי של דגימות ונקלט שחזר מדויק.

לעומת זאת ϕ לא פורש את המרחב של $(t)_g$ שכן כפי שציינו על מנת לפרק את המרחב של ϕ נדרש אינסוף פונקציות מהבסיס ϕ כמובן בדבר בלתי ישים.

יתרנו בשימוש בbasis ψ : כל פונקציה מחזורי חסומה סרט ניתנת לייצוג ע"י סכום אקספוננטים שכן ניתן לשחזר מדויק ע"י איברי הבסיס ϕ .

חסרון: לא ניתן לשחזר עם הבסיס אותן אותות בדים – לא חסומי סרט.

יתרנו בשימוש בbasis ψ : כל פונקציה מחזורי לא חסומה סרט (בדידה) ניתנת לייצוג מלא ע"י איברי הבסיס ובמספר יחסי קטן של איברי בסיס ולכן ניתן לשחזר מדויק ובקלות.

חסרון: שחזר בעזרת פונקציות בסיס אלו תמיד יהיה בעל רוחב סרט אינסופי, דבר בעיתי בשחזר אותן מוגבלים סרט (לא ניתן לשחזר במידוקן אותות רציפים).

השימוש בפונקציית הבסיס ψ מזכיר את H_0Z אך אינו זהה לו, עבור H_0Z אנחנו מקבעים את הערך הדגום בכל תחילת מחזור דגימה עד סופו עבור כל אחת מבין הדגימות שאנו

מבצעים ואילו עבור ψ עבור כל מחזור אנחנו סוכמים מס' דגימות מהמחזור, מחלקים את הסכום באורך הממחזור ומתקבלים תוצאה שהיא ממוצע הממחзор.

אתה התואאה זו אנחנו מקבעים לאורך הממחзор בשונה מערך שרירותי בתחילת הדגימה שקורית ב- H_0Z .