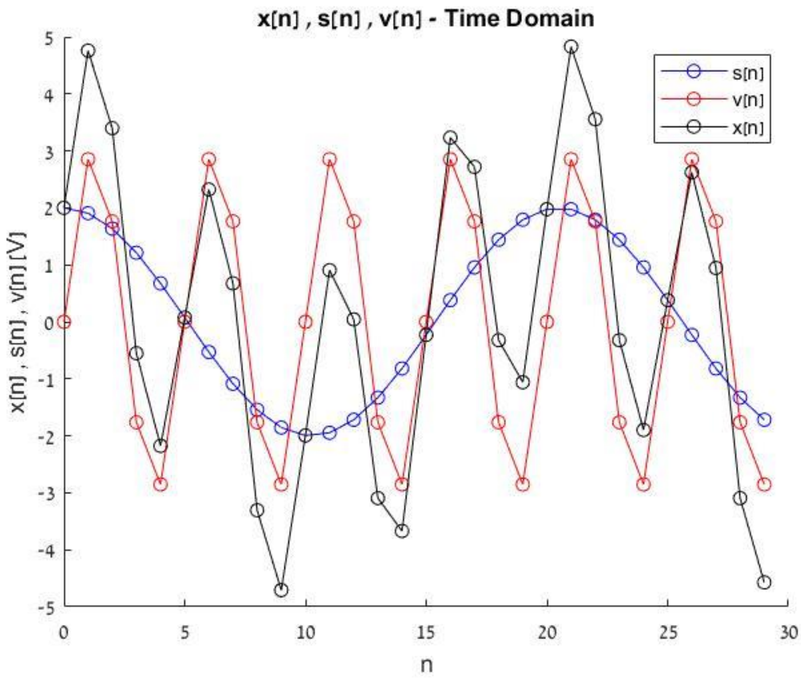
שאלה 1 – התמרת DFT:

נתונים האותות הבאים:

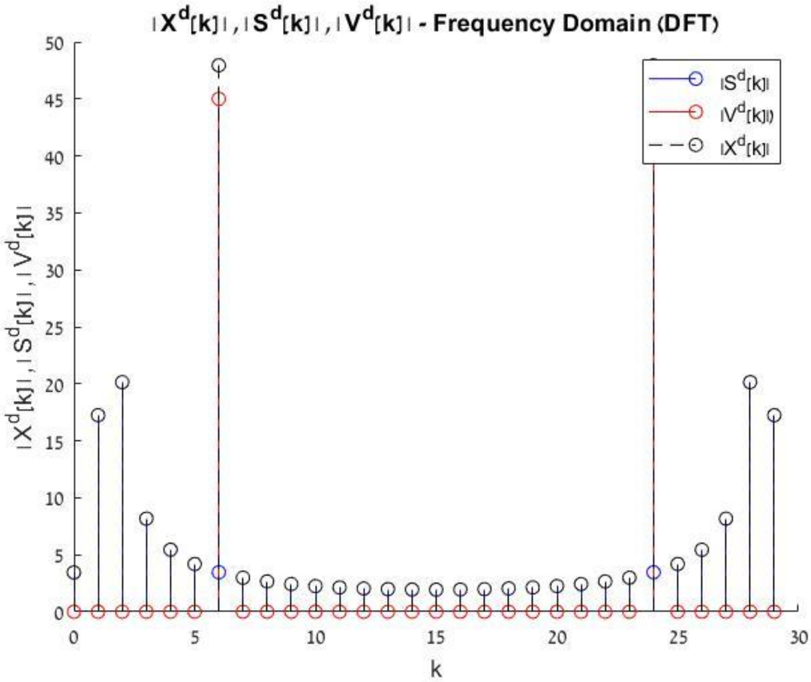
$$x[n] = s[n] + v[n], \quad ,n = 0,1, \dots ,29$$
$$s[n] = 2\cos[\theta_1 n]\,, \theta_1 = \frac{\pi}{10.25}$$
$$v[n] = 3\sin[\theta_2 n]\,, \theta_2 = \frac{2\pi}{5}$$

א. נסמן ב- $X[k]$ את התמרת ה-*DFT* של $x[n]$.

- גרף האותות $x[n], s[n], v[n]$:

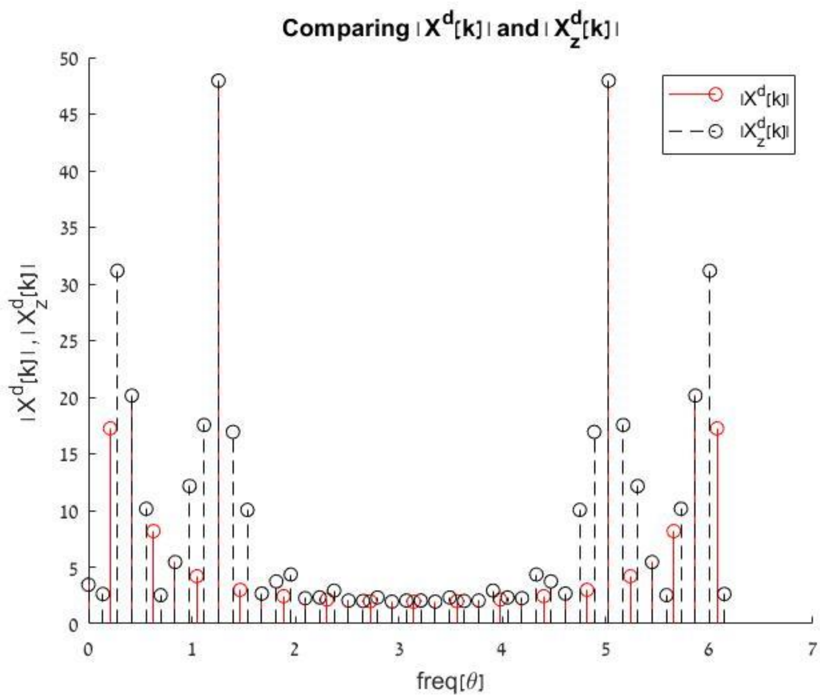


- גרף האותות $X^d[k], S^d[k], V^d[k]$ בערכם המוחלט:



- ההבדלים בין האותות $V[k]$ ו- $S[k]$:
תדר הדגימה של האותות הינו $\frac{2\pi}{30}$, נשים לב כי $\theta_1 = \frac{\pi}{10.25}$ איננה מהווה כפולה שלמה של תדר דגימה ואילו $\theta_2 = \frac{2\pi}{5} = 6 \cdot \frac{2\pi}{30}$, כן מהווה כפולה שלמה של תדר הדגימה, לכן עבור $S[k]$ נקבל שתי דלתאות בנקודות שאינן נקודות הדגימה ותתקבל מריחה של האות ועבור $V[k]$, נקבל 2 דלתאות בדיוק בנקודות הדגימה ולכן נקבל שתי דלתאות ב-$\frac{2\pi}{5}$ ו- $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$ וביתר הדגימות 0, כפי שניתן לראות בגרף עבור
$k = 6, 24$.

ב. גרף התמרת *DFT* של האות המרופד והאות המקורי:



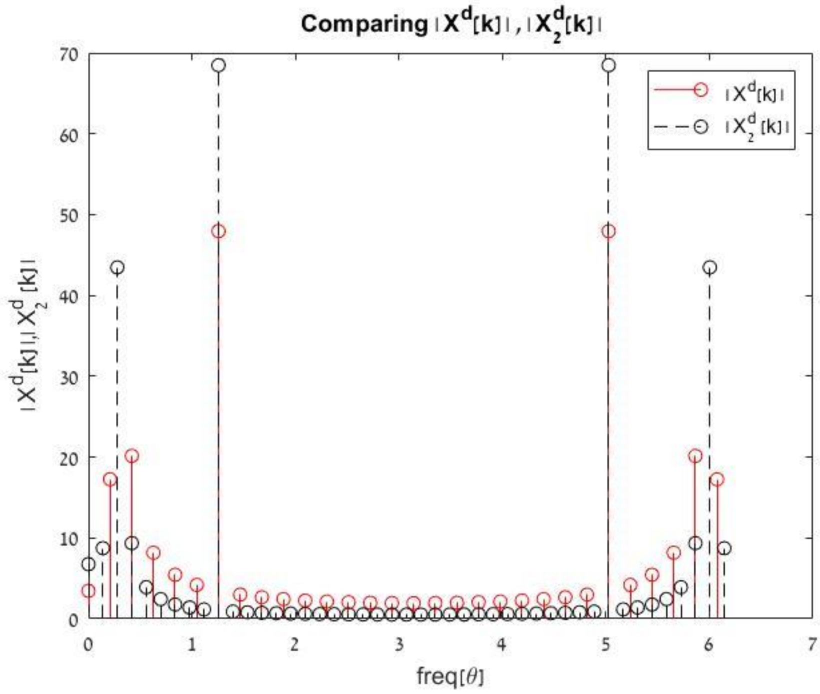
נשים לב כי כתוצאה מריפוד באפסים בזמן אנו צפויים לקבל רזולוציה גבוהה יותר בתדר, כלומר בפועל הגדלנו את *N* מ-30 דגימות ל-45 וכתוצאה מכך נקבל יותר דגימות במרווחי זמן קטנים יותר כלומר דגימה בקצב גבוה יותר ומכאן בתדר נקבל קירוב טוב יותר לאות המקורי (כפי שניתן לראות בגרף).

<u>ההבדלים בין $X_z^d[k]$ ל-$X^d[k]$:</u>

- התמרת ה-*DFT* הינה סדרת דגימות סופית של התמרת ה-*DTFT* אשר מכילה מספר אינסופי של דגימות, עבור $X^d[k]$ סדרת הדגימות הינה באורך 30 ולכן כל איבר בסדרה מתקבל ע״י: $X^f(\theta_k)$, $\theta_k = \frac{2\pi k}{30}, k = 0,1 \dots, 29$.
לעומת זאת, עבור הסדרה $X_z^d[k]$, נקבל סדרת דגימות באורך 45 כאשר כל איבר בסדרה מתקבל ע״י: $X^f(\theta_k)$, $\theta_k = \frac{2\pi k}{45}, k = 0,1 \dots, 44$.
- רזולוציית הדגימה ב-$X_z^d[k]$ גבוהה יותר (כפי שהוסבר מעלה).

ג. כעת הוספנו לדגימה המקורית $x[n]$ עוד 15 דגימות ולכן בעצם הוספנו מידע נוסף לאות הדגום ולכן נקבל קירוב טוב יותר ל- *DTFT* (כמובן שמספר הדגימות עדיין סופי ולכן אנו רק מקבלים קירוב טוב יותר בהשוואה לאינטרפולציה עם חלון בזמן מסעיף קודם).

גרף התמרת ה-*DFT* של האותות $x_2[n]$ ו- $x[n]$ בערכם המוחלט:



ההבדלים בין $X_2^d[k]$ ל-$X^d[k]$:

- כפי שרשמנו מעלה, $X_2^d[k]$ מהווה התמרת *DFT* לאות המכיל יותר דגימות ולכן נקבל קירוב טוב יותר להתמרת ה-*DTFT*.
- ב-$X_2^d[k]$ ניתן לראות בצורה ברורה יותר את ארבעת הדלתאות בניגוד ל-$X^d[k]$.

ד. נראה את קיום משפט פרסבל עבור הזוגות: $x[n]$ ו- $X^d[k]$, $x_z[n]$ ו- $X_z^d[k]$.

- משפט פרסבל בכתיב מטריציוני: $\underline{x^H} \cdot \underline{x} = \frac{1}{N} \underline{X^{d^H}} \cdot \underline{X^d}$

$$\underline{X^{d^H}} \cdot \underline{X^d} = (F_N x)^H \cdot F_N x = x^H F_N^H F_N x = (F_N^H = N F_N^{-1}) = x^H N F_N^{-1} F_N x = N x^H x$$

חישוב ערכי האותות:

Parseval of $x[n]$	*211.1799*
Parseval of $x_z[n]$	*211.1799*
Parseval of $X^d[k]$	*211.1799*
Parseval of $X_z^d[k]$	*211.1799*

נשים לב כי מתקיים שוויון בין כל שני זוגות ובפרט עבור שני הזוגות המבוקשים.

ה. נתונה מערכת עם תגובה להלם $h_1[n]$ כך שמוצא המערכת הינו חישוב ממוצע של שלושת הדגימות האחרונות של אות הכניסה.

- נפתח ביטוי לתגובת המערכת $h_1[n]$ להלם:
נדרוש כי מוצא המערכת $y_1[n]$ יהווה ממוצע של שלושת הדגימות האחרונות של $x[n]$:

$$y_1[n] = \sum_m h_1[m]x[n-m] = \frac{x[n] + x[n-1] + x[n-2]}{3}$$

לכן:

$$h_1[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

- נציג ביטוי לחישוב $y_1[n]$ ע״י חישוב קונבולוציה ליניארית בעזרת התמרת *DFT*:
נחשב את הקונבולוציה הליניארית ע״י קונבולוציה מעגלית, לשם כך נרפד את הסדרות $h_1[n]$ ו- $x[n]$ באפסים ונעבור למכפלה בתדר עבור האותות המרופדים.

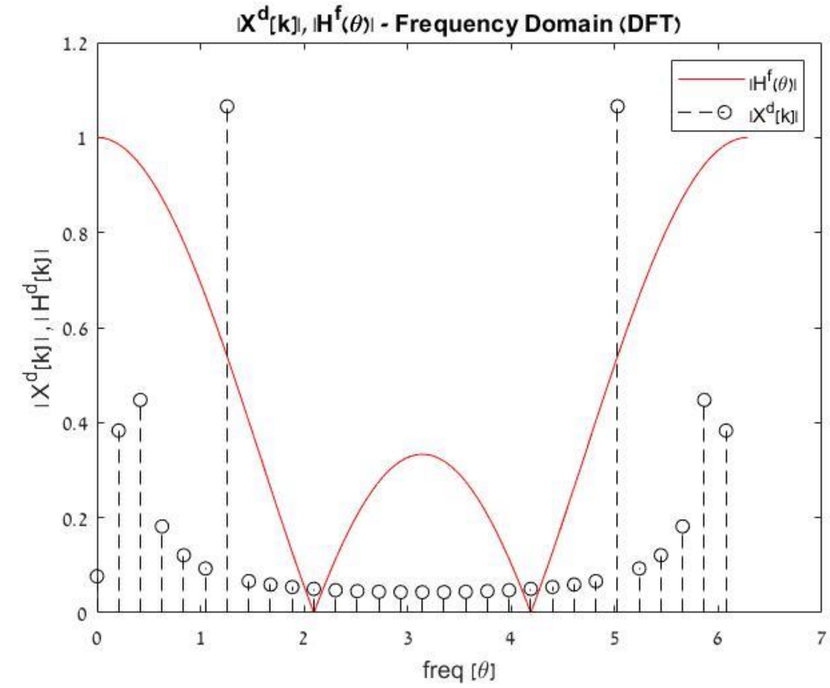
$$y_1[n] = IDFT\{Y_1^d[k]\} = IDFT\{DFT\{x_{1,a}[n] \cdot DFT\{h_{1,a}[n]\}$$

כאשר האותות $x_a[n]$ ו- $h_{1,a}[n]$ הינם האותות המרופדים.

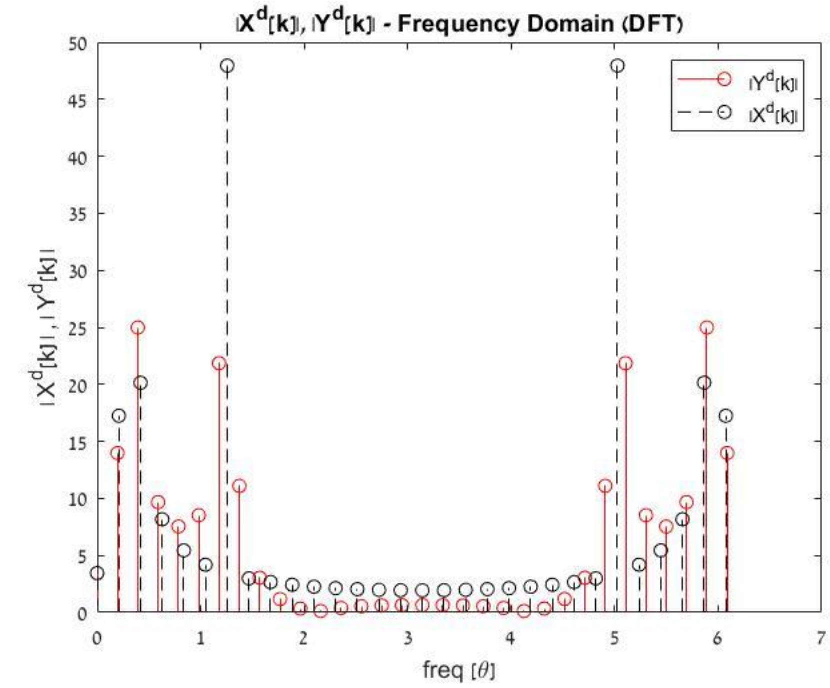
- נחשב את אורך ההתמרות הדרוש למימוש ולחישוב הקונבולוציה הליניארית בעזרת התמרת *DFT*:
נסמן ב- N_x את אורך הסדרה המקורית $x[n]$, ע״פ הנתון אורכה 30.
נסמן ב- N_h את אורך הסדרה הדרושה למערכת $h_1[n]$, ע״פ הפיתוח אורכה 3.
לכן:
$$N_x + N_h - 1 = 30 + 3 - 1 = 32$$
מכאן שאורך ההתמרות הדרוש הינו 32.
- חישוב התמרת *DTFT* של $h_1[n]$:

$$H_1^f(\theta) = DTFT\{h_1[n]\} = \sum_{n=0}^{2} h_1[n]e^{-j\theta n} = \frac{1}{3}(1 + e^{-j\theta} + e^{-2j\theta})$$

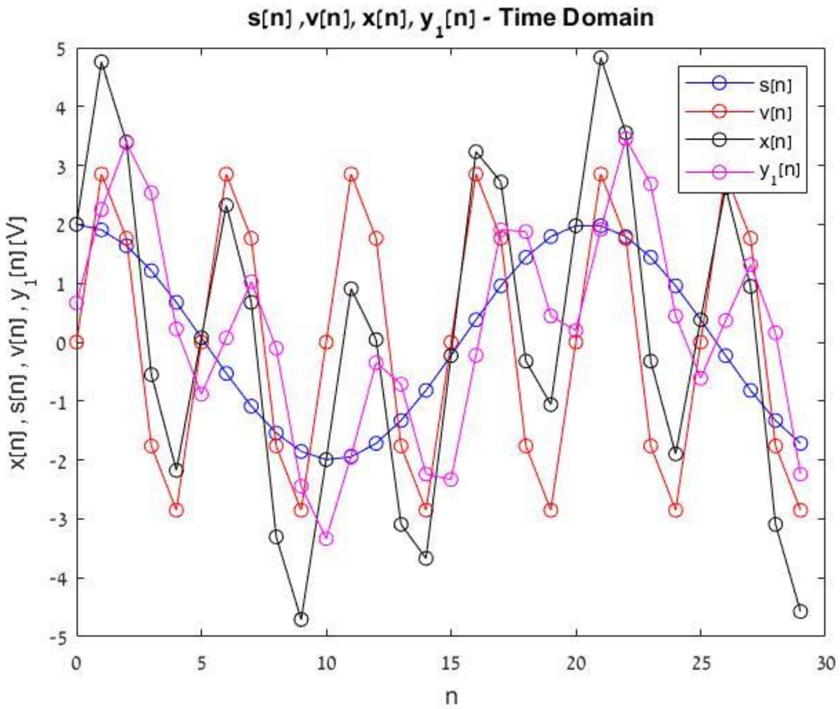
גרף האותות $X^d[k]$ ו- $H_1^f(\theta)$ בערכם המוחלט:



גרף האותות $X^d[k]$ ו- $Y_1^d[k]$ בערכם המוחלט:



גרף האותות $x[n], s[n], v[n]$ יחד עם $y_1[n]$ עבור $n = 0,1,\dots,29$:



ניתן לראות מהגרף של $H_1^f(\theta)$ שהוא מעין *LPF* (לא אידיאלי) ולכן נוכל להסיק כי תדרים נמוכים יישארו באמפליטודה זהה בקירוב למקור ואילו עבור תדרים גבוהים נקבל הנחתה ולכן בגרף של $Y_1^d[k]$ ניתן לראות בבירור כי עבור תדרים גבוהים האמפליטודה של $Y_1^d[k]$ אכן נמוכה מזו של $X^d[k]$.

עבור $v[n]$ ו- $s[n]$, נשים לב כי כיוון שתדר הדגימה של $v[n]$ גבוה מזה של $s[n]$ נוכל להסיק כי הוא יהיה זה שיעבור הנחתה משמעותית יותר במעבר במסנן ולכן אות המוצא $y_1[n]$ צפוי להידמות יותר ל- $s[n]$ מאשר ל-$v[n]$ ואכן ניתן לראות זאת מתוך הגרף של ארבעת האותות יחד.

בנוסף, כיוון שאות המוצא מתקבל ע״י מיצוע של 3 דגימות אחרונות של אות המבוא ברור כי נקבל אות ״מתון״ יותר מאות הכניסה שבו השינוי המרבי בין דגימות עוקבות קטן יותר ולכן כפי שניתן לראות האות $y_1[n]$ שומר על צורתו הכללית של אות המבוא אך ערכיו צפופים יותר סביב ערכי $s[n]$ (ע״פ ההסבר הקודם).

ו. נתונה מערכת עם תגובה להלם $h_2[n] = \{1,1\}$.

- נחשב את אורך ההתמרות הדרוש למימוש ולחישוב הקונבולוציה הליניארית בעזרת התמרת *DFT*:
נסמן ב- N_x את אורך הסדרה המקורית $x[n]$, ע״פ הנתון אורכה 30.
נסמן ב- N_h את אורך הסדרה הדרושה למערכת $h_1[n]$, ע״פ הפיתוח אורכה 2.
לכן:
$$N_x + N_h - 1 = 30 + 2 - 1 = 31$$
מכאן שאורך ההתמרות הדרוש הינו 31.

- נציג ביטוי לחישוב $y_2[n]$ ע״י חישוב קונבולוציה ליניארית בעזרת התמרת *DFT*:
נחשב את הקונבולוציה הליניארית ע״י קונבולוציה מעגלית, לשם כך נרפד את הסדרות $h_1[n]$ ו- $x[n]$ באפסים ונעבור למכפלה בתדר עבור האותות המרופדים.

$$y_2[n] = IDFT\{Y_2^d[k]\} = IDFT\{DFT\{x_{2,a}[n] \cdot DFT\{h_{2,a}[n]\}$$

כאשר האותות $x_{2,a}[n]$ ו- $h_{2,a}[n]$ הינם האותות המרופדים.

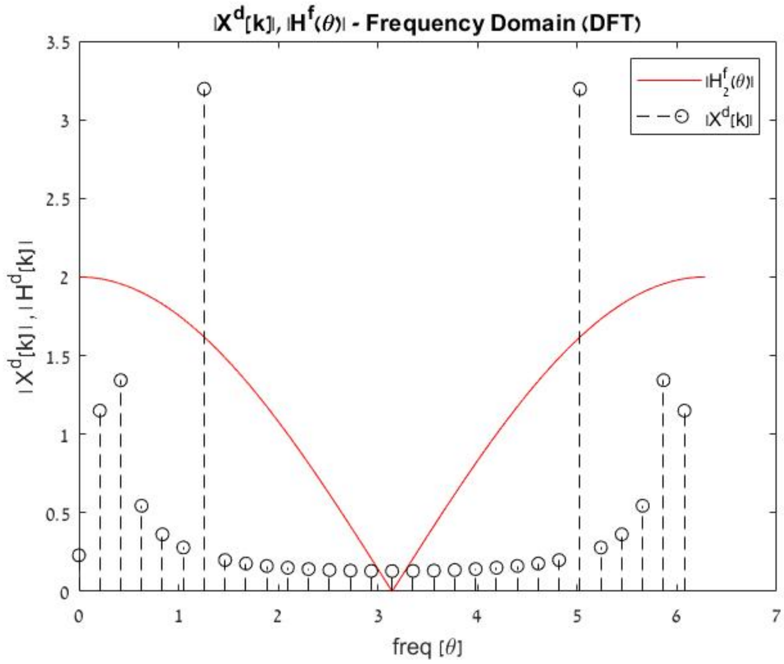
- כעת נחשב את מוצא המערכת $y_2[n]$ הרלוונטית:

$$y_2[n] = \sum_{n=0}^{30} h_2[m]x[n-m] = 1 \cdot x[n] + 1 \cdot x[n-1] \ + 0 \ + \cdots = x[n] + x[n-1]$$

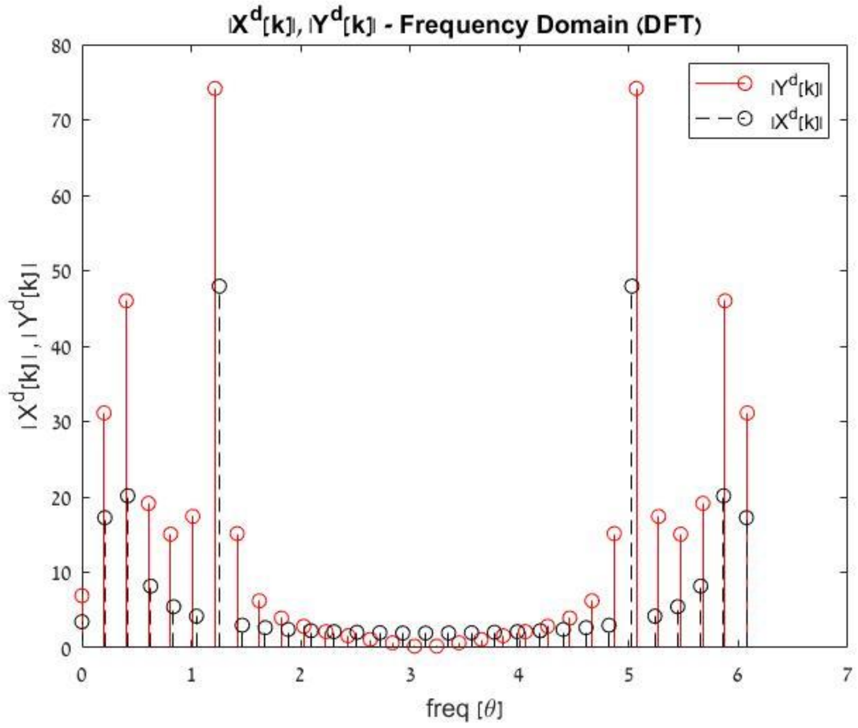
- חישוב התמרת *DTFT* של $h_2[n]$:

$$H_1^f(\theta) = DTFT\{h_2[n]\} = \sum_{n=0}^{1} h_2[n]e^{-j\theta n} = 1 \ \cdot e^{-j\theta \cdot 0} + 1 \ \cdot e^{-j\theta \cdot 1} = 1 + e^{-j\theta}$$

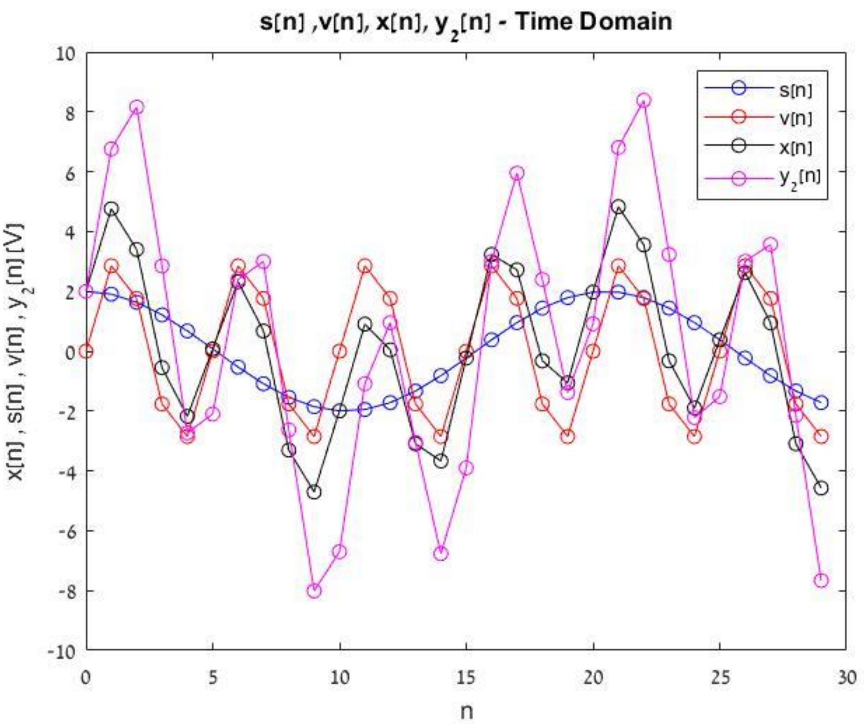
גרף האותות $X^d[k]$ ו- $H_2^f(\theta)$ בערכם המוחלט:



גרף האותות $X^d[k]$ ו- $Y_2^d[k]$ בערכם המוחלט:



גרף האותות $x[n], s[n], v[n]$ יחד עם $y_2[n]$ עבור $n = 0,1, \dots, 29$:



נשים לב כי מהגרף עבור האות $H_2^f(\theta)$ ניתן לראות כי המערכת מנחיתה תדרים בסביבת הערך π ומגבירה תדרים שיחסית רחוקים ממנו, יכולנו להסיק את ההגברה של המערכת מראש כיוון שמוצא המערכת $y_2[n]$ מתקבל ע״י קונבולוציה של אות המבוא עם המערכת $h_2[n]$ המהווה סכימה של שתי הדגימות $x[n]$ ו- $x[n-1]$.
עבור אות המבוא $x[n]$ המהווה סכום של האותות $s[n]$ ו- $v[n]$, נשים לב כי אותות אלו הינם בעלי תדר דגימה שרחוק יחסית מ- π ולכן נסיק כי המערכת מגבירה אותם ולכן אות המוצא $y_2[n]$ הינו בעל אמפליטודה גדולה מזו של $x[n]$.
בנוסף כיוון שהאות $s[n]$ בעל תדר נמוך יותר משל $v[n]$ נוכל להסיק כי הגברת האמפליטודה של המערכת עבורו גדולה מזו של $v[n]$ ולכן באות המוצא $y_2[n]$ הוא המרכיב הדומיננטי לפיו נקבעת התנהגות הגל של אות המוצא.

ז. נבצע השוואה בין המערכות $h_1[n]$ ו- $h_2[n]$:

- עבור המקרה בו $\theta_2 = \frac{8\pi}{5}, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ נעדיף להשתמש במסנן $h_1[n]$ כיוון שעבורו נקבל הנחתה משמעותית של הרעש, הנחתה כמעט מלאה בסביבה של 2 ו-4 ואילו הרעש הינו באזור הנקודה 5.

- עבור המקרה בו $\theta_2 = \pi, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ נעדיף להשתמש במסנן $h_2[n]$ כיוון שעבורו נקבל הנחתה מלאה של ב-π שזהו תדר הדגימה של הרעש.

שאלה 2 – בעיה מעשית:

א. a. נפתח ביטוי להתמרת האות המוקלט $Y^d[k]$ כתלות בהתמרות המערכות הנתונות והתמרת הרעש $V^d[k]$ והאות המקורי $X^d[k]$.

אות המבוא למערכת g מתקבל ע״י:

$$DFT\{x * h_1\}[n] + \ DFT\{v * h_2\}[n]\,, \qquad n = 0,1,\ldots,L-1$$

$$L = \max\left(N_x + N_{h_1} - 1, N_v + N_{h_2} - 1\right)$$

נממש את הקונבולוציה הליניארית באמצעות קונבולוציה מעגלית על האותות המרופדים באפסים באורך L:

$$X_a^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k] + V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k]$$

כעת האותות עוברים במערכת g ולכן האורך הכולל הינו:

$$M = \mathrm{L} + \mathrm{N_g} - 1 = \max\left(N_x + N_{h_1} - 1, N_v + N_{h_2} - 1\right) + N_g - 1$$

$$y[n] = \{(x * h_1 + v * h_2)_a \otimes g_a\ \}[n]$$

ולכן נקבל:

$$Y^d[k] = DFT\{g_a[n] * (x[n] * h_1[n] + v[n] * h_2[n])\} =$$

$$G_a^d[k] \cdot (X^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k] + V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k])$$

א. b. האורך אליו נדרש לרפד את הסדרות הוא כפי שתיארנו בסעיף קודם.

ב. נתון כי אורך אות המוצא הינו 3.8 שניות, אורך כל אחת מהתגובות להלם הוא 0.45 שניות ותדר הדגימה הינו *44,100Hz*, נחשב את מספר הדגימות שנלקחו באותות $x[n]$ ו-$v[n]$:

$$Num\ Of\ Samples = 3.8 \cdot 44{,}100 = 167{,}580$$

$$Num\ Of\ \delta\ Samples = \ 0.45 \cdot 44{,}100 = 19{,}845$$

כעת נציב בביטוי למציאת מספר הדגימות הכולל מסעיף קודם:

$$\max(N_x + 19{,}845 - 1, N_v + 19{,}845 - 1\} + 19{,}845 - 1 = 167{,}580$$

$$\max\{N_x\,, N_v\} = 167{,}580 + 2 \cdot (1 - 19{,}845) = 127{,}892$$

$$\max\{N_x\,, N_v\} = 127{,}892$$

ג. *a+b*. הקלטה מס׳ 1 ($y_z[n]$) הינה הקלטה ללא אות מבוא המכילה ״רעש״ בלבד ולכן:

$$Y_z^d[k] = G_a^d[k] \cdot \left(X^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k] + V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k]\right) = G_a^d[k] \cdot V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k]$$

לכן: $N_z = N_v + N_{h_2} + N_g - 2$.

כאשר אות המבוא איננו מאופס, נקבל אורך נוסף המתקבל ע״י:

$N_1 = N_x + N_{h_2} + N_g - 2$.

לכן נבחר את אורך אות המוצא להיות: $N_Y = \max\left(N_z, N_1\right)$.

נבצע הסרה של הרעש משאר ההקלטות באופן הבא:

$$Y_0^d[k] = Y^d[k] - Y_z^d[k] =$$

$$G_a^d[k] \cdot \left(X^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k] + V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k]\right) - G_a^d[k] \cdot V_a^d[k] \cdot H_{2,a}^d[k] =$$

$$= G_a^d[k] \cdot X_a^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k]$$

נבחין כי אם:

- $N_1 > N_z$ – כלומר, אורך הקלטת הרעש קצר יותר אז נבחר את $N_Y = N_1$ ונרפד את $y_z[n]$ באפסים בהתאמה לאורך הנ״ל.
- $N_z > N_1$ – כלומר, אורך הקלטת הרעש ארוך יותר אז נבחר את $N_Y = N_z$ ונרפד את $x[n]$ באפסים בהתאמה לאורך הנ״ל.

ד. *a+b*. נפתח ביטוי לשחזור התמרת האות המקורי $X_{rec}^d[k]$ מתוך האות המוקלט לאחר ניקוי הרעש $Y_0^d[k]$.

ניעזר באות הבוחן $x_{test}[n]$ ונציבו בביטוי שפיתחנו בסעיף קודם ל- $Y_0^d[k]$:

$$Y_{test,0}^d[k] = Y_{test}^d[k] - Y_z^d[k] = X_{test,a}^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k] \cdot G_a^d[k]$$

לכן עבור אות לאחר הסרת הרעש אם נמצא מערכת שהתגובה שלה להלם מקיימת:

$$H_{rec}^d[k] = \frac{1}{H_{1,a}^d[k] \cdot G_a^d[k]}$$

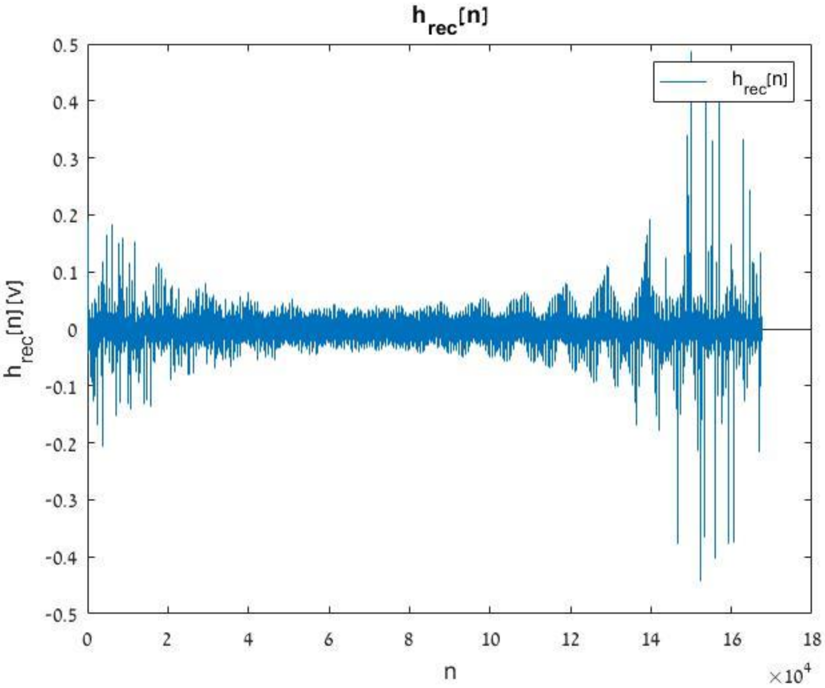
נוכל לשחזר בחזרה את האות המקורי באופן הבא:

$$X_{rec}^d[k] = Y_0^d[k] \cdot H_{rec}^d[k] = \frac{G_a^d[k] \cdot X_a^d[k] \cdot H_{1,a}^d[k]}{H_{1,a}^d[k] \cdot G_a^d[k]} = X_a^d[k]$$

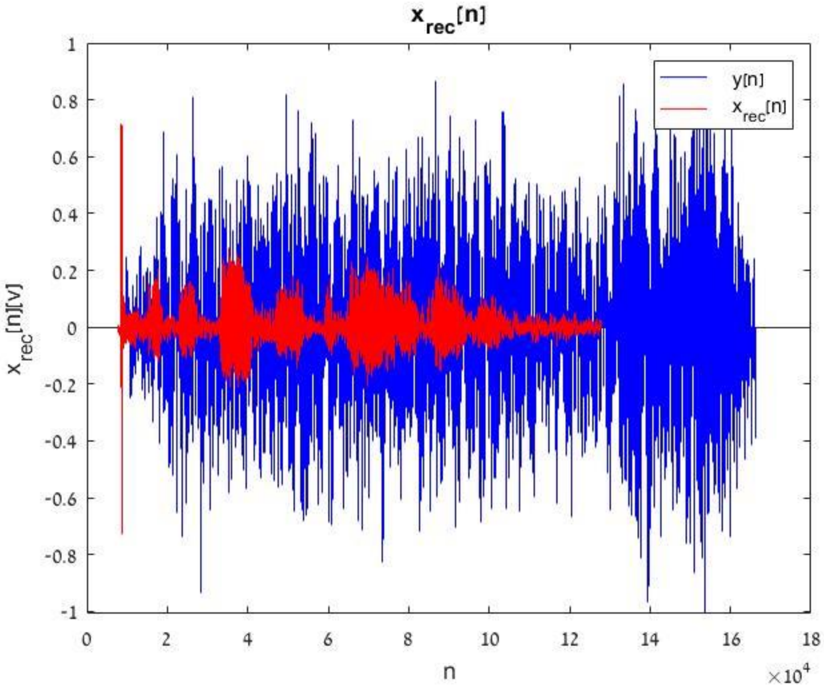
עבור אות הבוחן $x_{test}[n]$ נקבל:

$$H_{rec}^{d}[k]=\frac{1}{H_{1,a}^{d}[k]\cdot G_{a}^{d}[k]}=\frac{X_{test,a}^{d}[k]}{Y_{test,0}^{d}[k]}$$

ד. c. נציג את התגובה להלם שחישבנו בגרף עבור טווח הזמנים הרלוונטי:



ה. נציג את האות המשוחזר המתקבל ע״י הפיתוח בסעיף קודם:



נשים לב כי מספר הדגימות של אות המוצא המתקבל הינו בקירוב הערך שחישבנו בסעיף ב׳ (*167,580* דגימות).

ו. תוכן האות המשוחזר $x_{rec}[n]$ הינו: ״בוקר טוב, ברוך הבא למבוא לעיבוד אותות״.