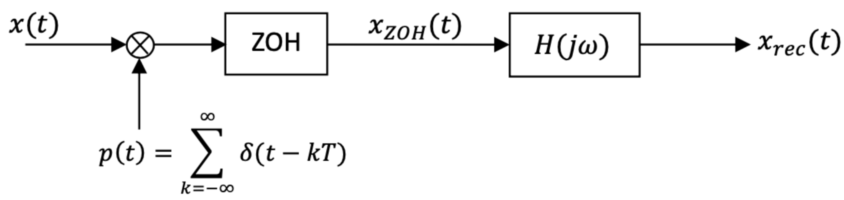
מבוא לעיבוד אותות

תרגיל MATLAB מס' 1

מגישים :
איל צבי – 319067732
סער בן יוחנה – 313234155

שאלה 1. דגימה ושחזור (40 נק')

באיור 2 מוצגת מערכת המבצעת דגימה של אות הכניסה בעזרת רכבת הלמים ושחזור בעזרת תהליך ZOH ומסנן מעביר נמוכים $H^F(\omega)$.



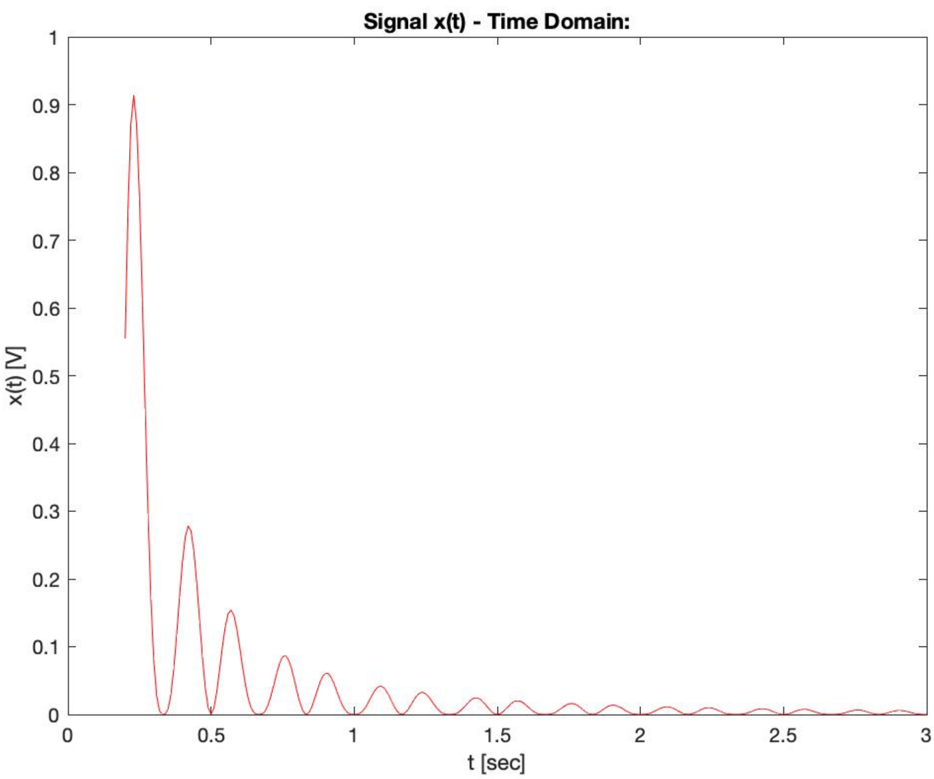
איור 2. מערכת דגימה ושחזור

נתון האות הרציף הבא: $\omega_m = 3\pi$, $x(t) = \frac{4}{\omega_m \pi t^2} \cdot \sin^2(\omega_m t)\, cos(\omega_m t) \sin(2\omega_m t)\ [V]$.

א. (5 נק'). צייר/י את $x(t)$ בעזרת MATLAB בתחום $t \in [0.2,3]\ [sec]$. לצורך כך היעזר/י בשלבים הבאים:

- יש ליצור וקטור שורה של נקודות הזמן בהן יוצג האות: $t = 0.2{:}\,1/100{:}\,3$.
- חשב/י את האות בנקודות הזמן שיצרת:
  - x = 4./(wm*pi*t.^2).*(sin(wm*t)).^2.*(cos(wm*t)).*(sin(2*wm*t))
- הצג/י את הערך המוחלט של תוצאות החישוב: $plot(t, x)$.
- השתמש/י בפונקציות $xlabel, ylabel, title$ לצורך הוספת כותרת ושמות לצירים.

גרף האות $x(t)$:



ב. (10 נקי). יש לפתח ביטוי ל$X^F(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x(t)$. הצג/י גרף של $|X^F(\omega)|$, כאשר $\omega\in[-17\pi,17\pi]\ \left[\frac{rad}{sec}\right]$. **את התמרת הפורייה יש לפתח עם הפרמטר ω_m ורק לאחר מכן להציב את ערכו.**

הערה : בפיתוח כדאי לפשט תחילה את האות כך שיהיה מורכב מפונקציות בעלות התמרות מוכרות: exp(),sinc(),sin() וכו׳.

<u>נפתח ביטוי להתמרת פורייה של האות $x(t)$:</u>

$$X^F(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\ \mathcal{F}\left\{\frac{4}{\omega_m\pi t^2}sin^2(\omega_m t)\cos(\omega_m t)\sin(2\omega_m t)\right\}=(*)$$
$$=\ \mathcal{F}\left\{\frac{2}{\omega_m}\cdot\frac{sin^2(\omega_m t)}{\pi t^2}(\sin(\omega_m t)+\sin(3\omega_m t))\right\}$$
$$=\mathcal{F}\left\{\frac{2\omega_m}{\pi}\cdot\frac{sin^2(\omega_m t)}{\pi^2(\frac{\omega_m t}{\pi})^2}(\sin(\omega_m t)+\sin(3\omega_m t))\right\}$$
$$=\mathcal{F}\left\{\frac{2\omega_m}{\pi}\cdot sinc^2\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\cdot(\sin(\omega_m t)+\sin(3\omega_m t))\right\}=(**)$$
$$=\frac{2\omega_m}{\pi}\ \mathcal{F}\left\{sinc\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\cdot sinc\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\}*\mathcal{F}\{(\sin(\omega_m t)+\sin(3\omega_m t))\}$$
$$=(**\ +\ ***)$$
$$=\frac{2\omega_m}{\pi}\cdot(\ \mathcal{F}\left\{sinc\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\}*\mathcal{F}\left\{sinc\left(\frac{\omega_m t}{\pi}\right)\right\}$$
$$*\frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_m)-\delta(\omega+\omega_m)+\delta(\omega-3\omega_m)-\delta(\omega+3\omega_m)))$$
$$=\frac{2\omega_m}{j}\cdot\left(\frac{\pi}{\omega_m}\Pi\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)*\frac{\pi}{\omega_m}\Pi\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)\right)$$
$$*\left(\delta(\omega-\omega_m)-\delta(\omega+\omega_m)+\delta(\omega-3\omega_m)-\delta(\omega+3\omega_m)\right)$$
$$=(****)$$
$$=\frac{2\pi^2}{j\omega_m}\cdot\left(\frac{2\omega_m}{2\pi}\cdot\Lambda\left(\frac{\omega}{2\omega_m}\right)\right)$$
$$*\left(\delta(\omega-\omega_m)-\delta(\omega+\omega_m)+\delta(\omega-3\omega_m)-\delta(\omega+3\omega_m)\right)$$
$$=\frac{1}{j}\cdot(\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_m}{2\omega_m}\right)-\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_m}{2\omega_m}\right)+\Lambda\left(\frac{\omega-3\omega_m}{2\omega_m}\right)-\Lambda\left(\frac{\omega+3\omega_m}{2\omega_m}\right))$$

(*) - שימוש בזהות $\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\ a=3\omega_m t\ ,\ b=\omega_m t$

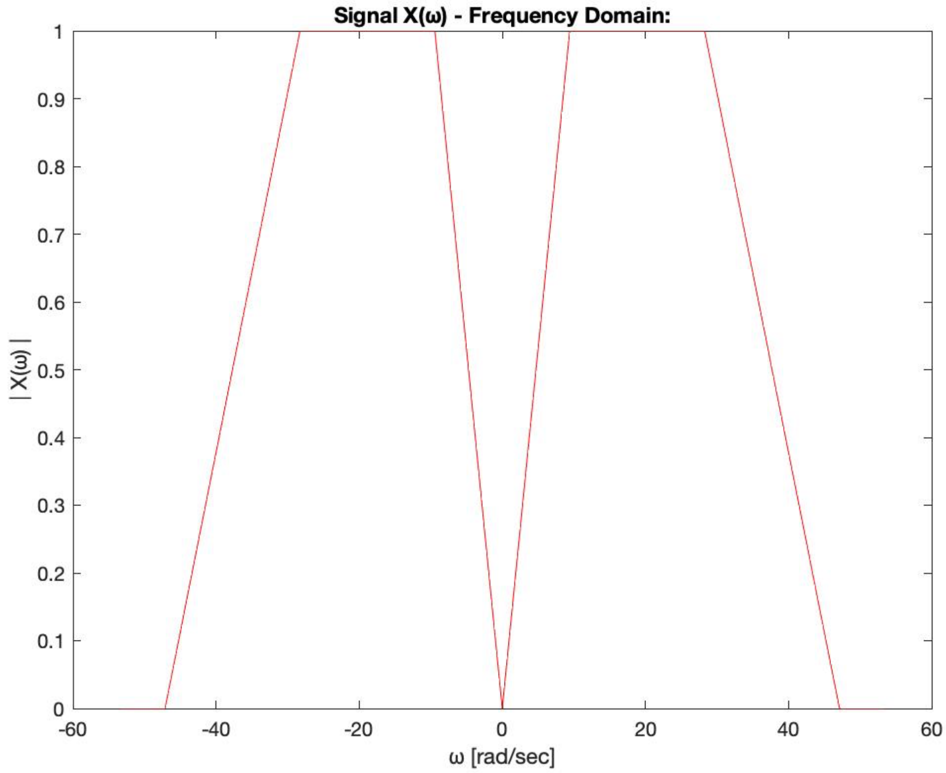
(**) - מכפלה בזמן שקולה לקונבולוציה בתדר

(***) - ליניאריות התמרת פורייה

(****) – ע״פ הפיתוח שהוצג בכיתה

$$\Longrightarrow\ X^F(\omega)=\frac{1}{j}\cdot\left(\Lambda\left(\frac{\omega-\omega_m}{2\omega_m}\right)-\Lambda\left(\frac{\omega+\omega_m}{2\omega_m}\right)+\Lambda\left(\frac{\omega-3\omega_m}{2\omega_m}\right)-\Lambda\left(\frac{\omega+3\omega_m}{2\omega_m}\right)\right)$$

גרף התמרת פורייה של האות $x(t)$ (בערך מוחלט) עבור $\omega\in[-17\pi,17\pi]\left[\frac{rad}{sec}\right]$:



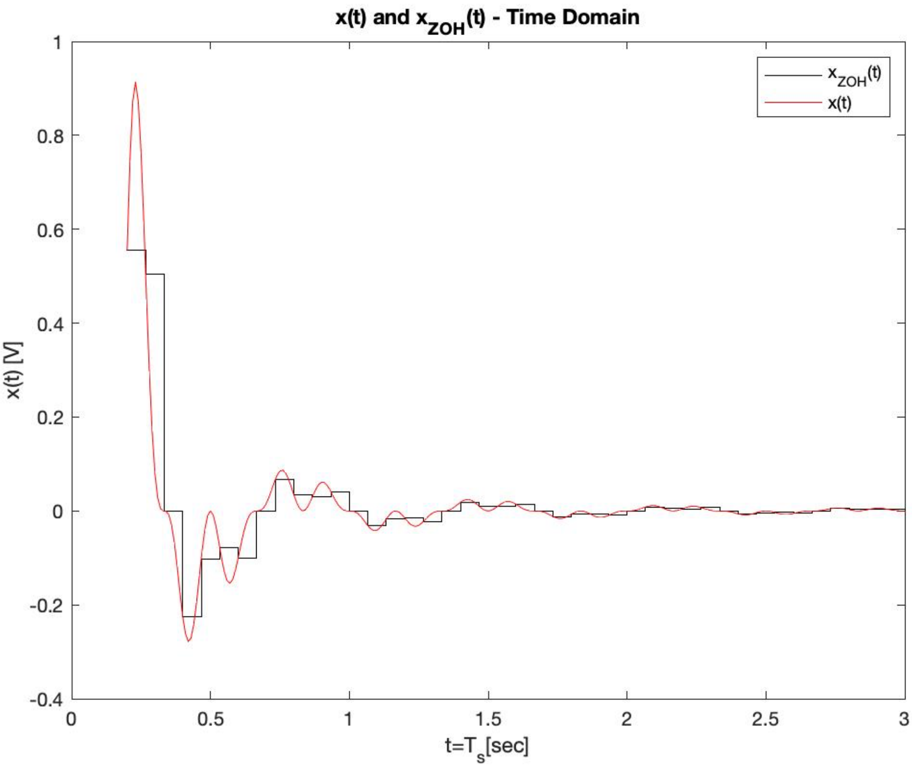
ג. (5 נק׳).

- מהו התדר המקסימלי ω_{max} של האות $x(t)$? (עבור התדר המקסימלי מתקיים $X^F(\omega)=0\ \forall|\omega|\geq\omega_{max}$)
  הצע/י זמן מחזור לדגימה, T_s, שיאפשר שחזור ללא שגיאות.
- דגמו את האות בנקודות $t_n=nT_s$. מהדגימות יש לייצר אות מדרגות מסוג ZOH, שיסומן ב-$x_{ZOH}(t)$. הציג/י את האותות $x_{ZOH}(t)$ ו-$x(t)$ בגרף אחד.

- התדר המקסימלי של האות עבורו מתקיים: $X^F(\omega)=0 :\omega_{max}> |\omega|\ \forall$, הינו:
$$\omega_{max}=3\omega_m+2\omega_m=5\omega_m=15\pi\left[\frac{rad}{sec}\right]$$

ע״פ משפט נייקוויסט, בהינתן אות חסום סרט נוכל לשחזר את האות המקורי מתוך דגימותיו אם ורק אם $\omega_s\geq 2\omega_{max}$, לכן נבחר: $\omega_s=10\omega_m\rightarrow T_s=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{2\pi}{10\cdot3\pi}=\frac{1}{15}[sec]$.

גרף האות $x_{ZOH}(t)$ דגום בנקודות $t = nT_s$ לצד האות המקורי:



ד. (10 נקי) יש לפתח ביטוי ל-$X^F{}_{ZOH}(\omega) = \mathcal{F}\{x_{ZOH}(t)\}$, התמרת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$. הצג/י גרף של $|X^F{}_{ZOH}(\omega)|$, כאשר $\left[\frac{rad}{sec}\right]$ $\omega \in [-17\pi, 17\pi]$.

נפתח ביטוי להתמרת פורייה של האות $x_{ZOH}(t)$:

$$x_s(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\ ,\ \ h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$$

$$x_{zoh}(t) = x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] * h(t) = (*)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)(\delta(t-nT_s) * h(t-nT_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h(t-nT_s)$$

$$X_{ZOH}^F(\omega) = \mathcal{F}\{x_s(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{x_s(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h(t)\} = (**)$$

$$= \left(\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - k\omega_s)\right) \cdot T_s \cdot sinc\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}}$$

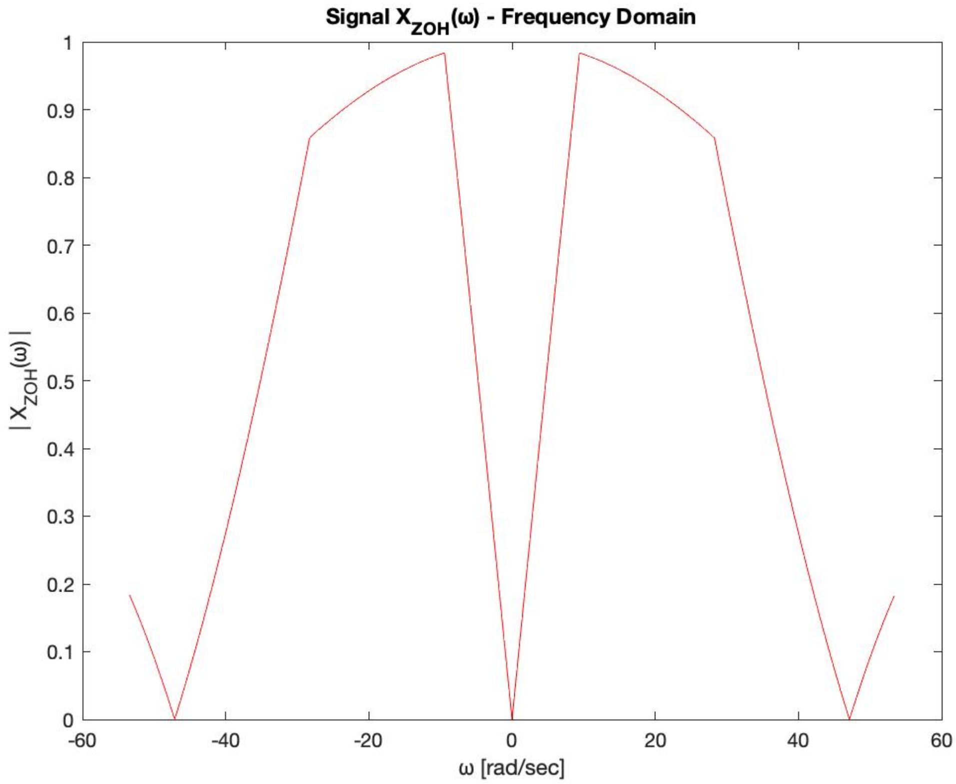
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega - k\omega_s) \cdot sinc\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}}$$

(*) - תכונה של פונקציית דלתא

(**) – שימוש בהתמרות מוכרות מדף נוסחאות

$$\Longrightarrow\ X^F_{ZOH}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X^F(\omega-k\omega_s)\cdot sinc\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\cdot e^{\frac{-j\omega T_s}{2}}$$

גרף התמרת פורייה של האות $x_{zoh}(t)$ (בערך מוחלט) עבור $\omega\in[-17\pi,17\pi]\left[\frac{rad}{sec}\right]$:

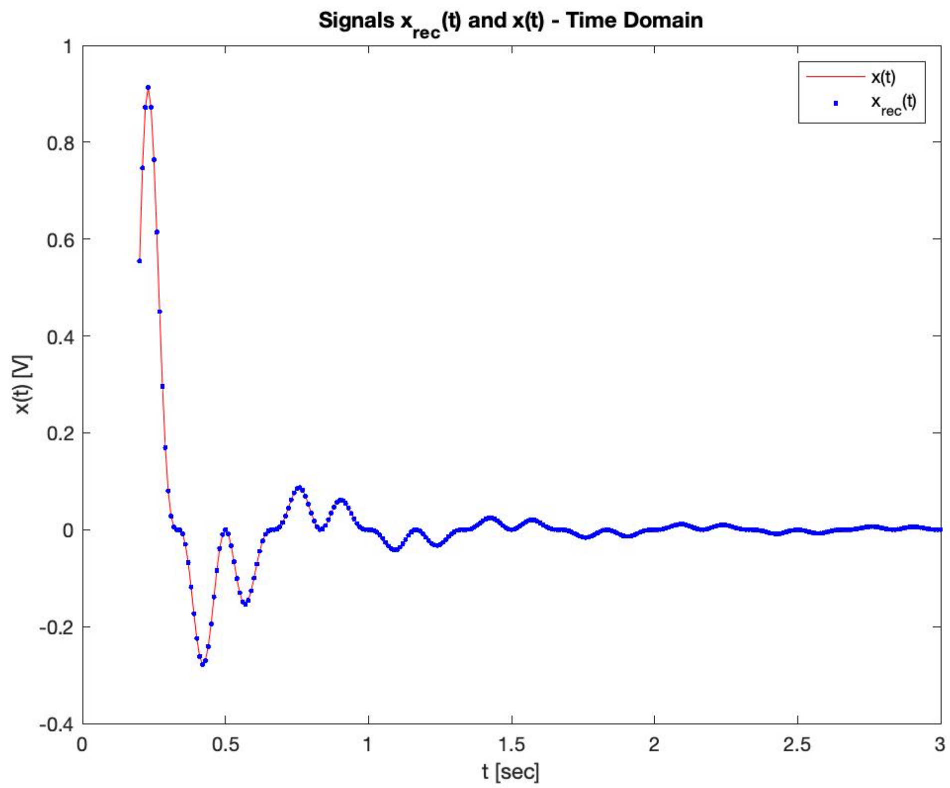


ה. (5 נק׳) ספקטרום המסנן המשחזר האידיאלי נתון על ידי הפונקציה

$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{e^{j\pi\omega/\omega_s}}{\mathrm{sinc}(\omega/\omega_s)} & |\omega|\le \omega_s/2\\ 0 & |\omega|>\omega_s/2\end{cases}$$

יש להפעיל את המסנן האידיאלי במישור התדר על $X^F{}_{ZOH}(\omega)$ לקבלת ביטוי ל$X^F{}_{rec}(\omega)$. השתמש/י בפונקצית trapz() על מנת לחשב את האות המשוחזר, $x_{rec}(t)$, על ידי אינטגרל התמרת פורייה. הציגו את האותות $x_{rec}(t)$ ו-$x(t)$ בגרף אחד. האם התקבל שחזור מדויק של $x(t)$? הסבר/י.

גרף האות המקורי והאות המשוחזר:

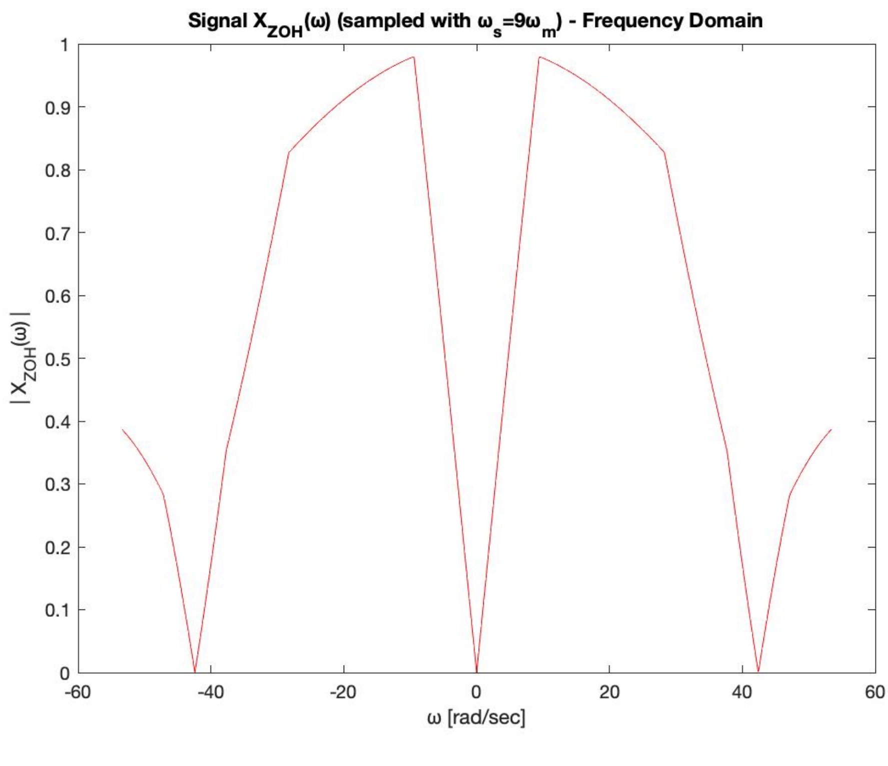


ניתן לראות כי האותות מתלכדים וכי קיבלנו שחזור מדויק של האות המקורי.

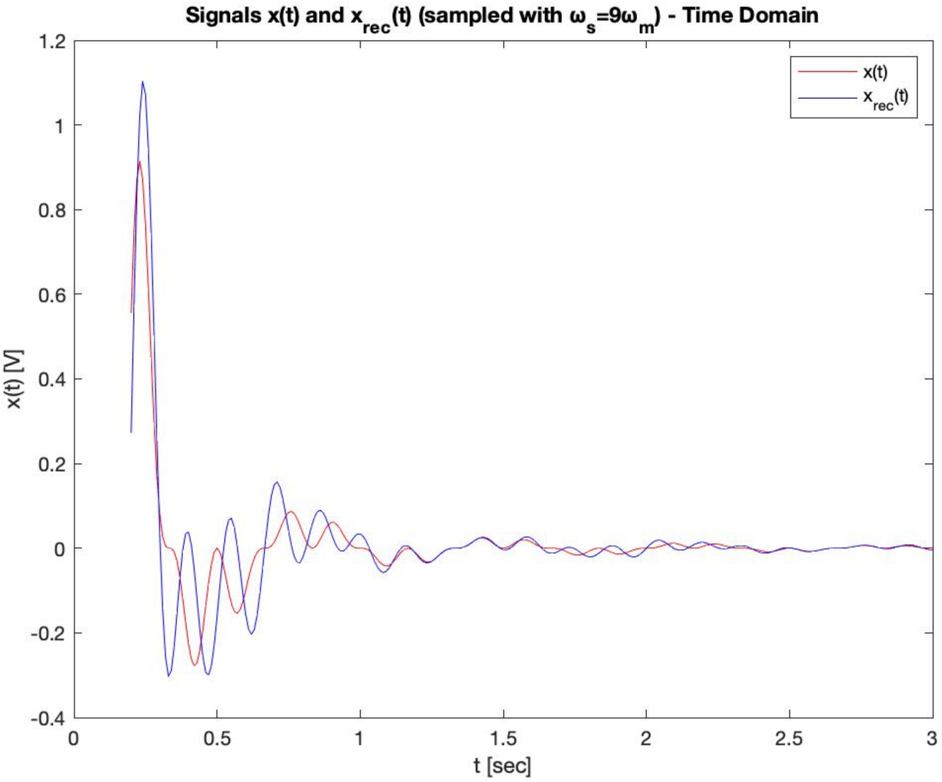
ו. (5 נק׳). כעת הנח/י כי האות $x(t)$ נדגם בתדר $\omega_s = 9\omega_m \left[\frac{rad}{sec}\right]$, האם במקרה זה ניתן לקבל שחזור מדויק? הסבר/י.
חזור על סעיף ה׳ ו-וודא שתוצאותיך מתיישבות עם המסקנה מסעיף זה.

כעת אנו דוגמים בתדר $\omega_s = 9\omega_m = 27\pi \left[\frac{rad}{sec}\right]$, עבור תדר הדגימה הנ״ל תנאי נייקוויסט אינו מתקיים ולכן יתרחשו חפיפות (aliasing) ועל כן לא נצליח לשחזר.

נשים לב כי עבור תדר הדגימה הנ״ל אכן קיבלנו חפיפות והאות במישור התדר אכן השתנה:



כמו כן, ניתן לראות כי אכן במישור הזמן האות המשוחזר אינו תואם את האות המקורי ולא קיבלנו שחזור מדויק



שאלה 2. דגימה לא אחידה של אות מחזורי (30 נק')

נתון אות מחזורי מוגבל סרט: $x(t) = 5\cos(\omega_A t) - 3\sin(\omega_B t); \quad \omega_A = 7\pi, \ \omega_B = 4\pi$

א. (10 נק'). מה זמן המחזור של הפונקציה $x(t)$? דיגמו את האות בצורה אחידה על פני מחזור אחד בעזרת 15 נק' דגימה. הצג/י את האות ה"דגום" x_s יחד עם האות המקורי ה"רציף" $x(t)$, על פני מחזור אחד.

מדוע נדרשות לפחות 15 נקודות דגימה?

הערה: שימו לב שנקודת הדגימה ה15 של האות ה"דגום" לא ממוקמת בתחילת המחזור השני של האות "הרציף".

הערה: שימו לב כי וקטור הדגימות x_s אינו אות רציף ויש להציג את הדגימות בלבד. לצורך כך השתמשו בתכונות הקו של פונקציית plot() כפי שהוצג בתחילת העבודה.

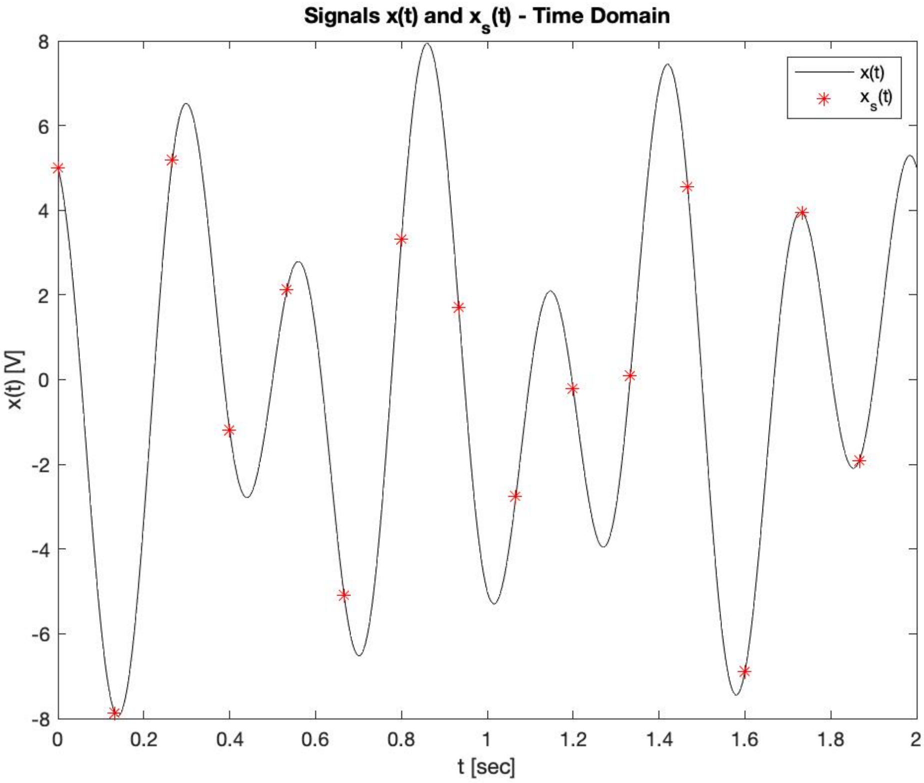
האות מהווה סכום של פונקציית קוסינוס בעלת זמן מחזור $T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = \frac{2}{7}[sec]$ ופונקציית סינוס בעלת מחזור $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{1}{2}[sec]$, לכן זמן המחזור של האות הינו הערך T הקטן ביותר אשר מהווה כפולה שלמה של שני זמני המחזור הנ"ל, כלומר: $T_{period} = 2\ [sec]$.

נשים לב כי $x(t)$ מחזורי ולכן ניתן לייצוג באמצעות טור פורייה: $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{j\frac{2\pi}{T}mt}$.
נתון בנוסף כי האות חסום סרט ולכן לכל $|\omega| > \omega_m = \omega_A$ נדרוש כי מקדמי פורייה יתאפסו, כלומר, עבור $|\omega| = \left|\frac{2\pi}{T}m\right| = |\pi m| > 7\pi$: $a_m = 0$, לכן: $x(t) = \sum_{m=-7}^{7} a_m e^{j\pi mt}$.
קיבלנו כי האות מתקבל ע"י לכל היותר 15 מקדמים ולכן נדרש ל-15 דגימות על פני מחזור בודד.

נבצע דגימה אחידה ל- $x(t)$ עם 15 דגימות על פני מחזור בודד:

$$x_s[n] = x(nT_s) \quad \forall n \in [0,1,2,\dots,14]$$

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$:



ב. (10 נק׳). כפי שהוצג בשיעור, ניתן להשתמש בדגימות מסעיף א׳ על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע״י כתיבת מערכת משוואות מהצורה $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{a}$, כאשר הוקטור $\boldsymbol{x}$ מכיל את ערכי הפונקציה בN נקודות הדגימה והוקטור $\boldsymbol{a}$ מכיל את 2M+1 מקדמי טור פורייה.

כתב/י בצורה מפורשת את מטריצת האקספוננטים $\boldsymbol{F}$ (מספיק לכתוב ביטוי לאיבר כללי).

יש לפתח ביטוי למציאת הוקטור $\boldsymbol{a}$ מתוך מערכת המשוואות. התייחס/י למקרים : N=2M+1 , N>2M+1.

עבור N נקודות הדגימה מסעיף א׳, חשב/י באמצעות MATLAB את וקטור מקדמי טור פורייה. הצג/י את ערכי המקדמים בטבלה.

ניעזר בדגימות מסעיף א׳ על מנת למצוא את מקדמי טור פורייה ע״י פתרון מערכת המשוואות הבאה:

$$\underline{x} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{a}$$

עבור: $\underline{a} = [a_{-M}, \dots, a_0, \dots, a_M]$, $\underline{x} = [x[t_0], x[t_1], \dots, x[t_N]]^T$.

$$F_{n,m} = e^{j\frac{2\pi}{T}mt_n}, \qquad n \in \{0,1,\dots,N\}, \qquad m \in \{-M,\dots,0,\dots,M\}$$

נבחין בין שני מקרים:

1. $\underline{N = 2M+1}$ – יש לנו מספר זהה של נעלמים ומדידות ולכן $\underline{\underline{F}}$ המתקבלת הינה מטריצה ריבועית ובהינתן כי המדידות נדגמו על פני אותו מחזור נקבל כי $\underline{\underline{F}}$ הינה מטריצה הפיכה ולכן וקטור המקדמים מתקבל ע״י: $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{x} = \underline{a}$.

2. $\underline{N > 2M+1}$ – יש לנו יותר דגימות מנעלמים וידוע כי דרגתה של $\underline{\underline{F}}$ מלאה (כיוון שדגמנו על פני אותו מחזור) ולכן מתקבלת מטריצה שאיננה ריבועית ואינה הפיכה. במצב זה המשוואה בפועל הינה: $\underline{x} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{a} + \underline{v}$, כאשר $\underline{v}$ הינו השגיאה.
לכן נשתמש בשיטת הריבועים הפחותים אשר מביאה למינימום את המרחק בין המדידות $\underline{x}$ לבין המודל הלינארי $(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{a})$, כלומר נדרוש: $\{ \|\underline{x} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{a}\|_2 \}^{min}_{\underline{a}}$.
ע״י פיתוח מטריצת פסאודו-אינברס של $\underline{\underline{F}}$ נוכל להגיע למטריצה ריבועית והפיכה ולקבל את וקטור המקדמים ע״י: $\underline{a} = \underline{\underline{(F^H F)}}^{-1} \underline{\underline{F^H}} \cdot \underline{x}$.

$$Cond\left(\underline{\underline{F}}\right) = 1$$

ערך זה מהווה מדד לרגישות ערכי המוצא ביחס לשינויים באות המבוא, ניתן להשתמש בערכו של מדד זה כדי לאמוד את טיב השחזור, כיוון שהיחס בין השינוי באות המבוא לשינוי באות המוצא (האות המשוחזר) הינו 1:1 נוכל להסיק כי אכן השגנו שחזור מדויק.

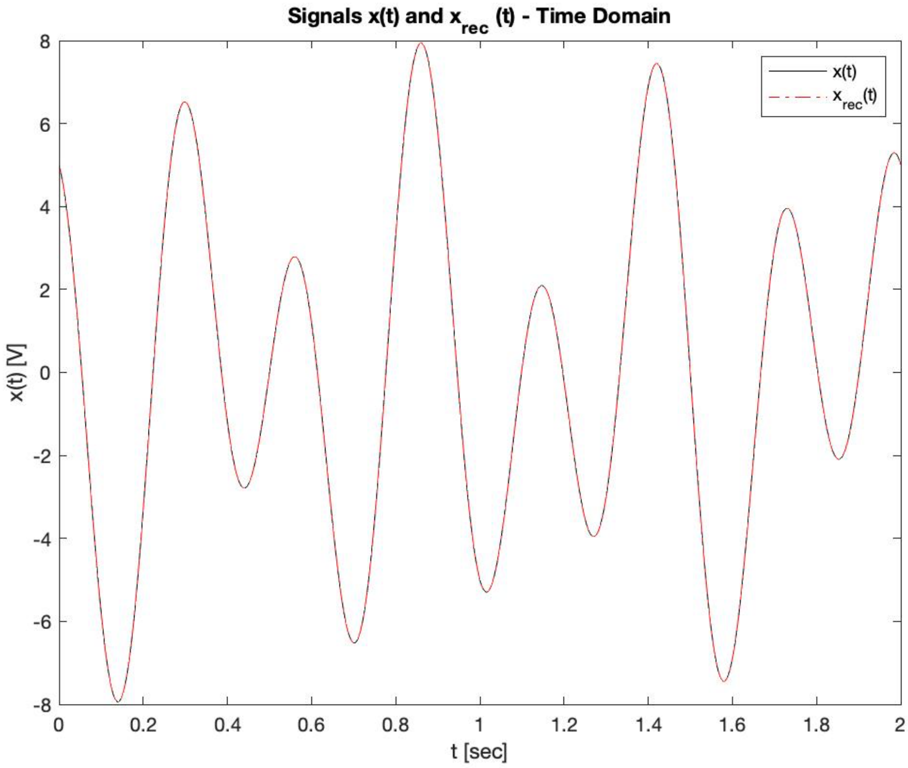
<u>וקטור מקדמי טור פורייה:</u>

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.50000000000000	$5.06539254985228e^{-16}$
a_6	$1.38777878078145e^{-16}$	$-1.38777878078145e^{-17}$
a_5	$-2.04003480774873e^{-15}$	$-3.05311331771918e^{-16}$
a_4	$1.45890244329649e^{-15}$	1.50000000000000
a_3	$-2.02615701994091e^{-15}$	$-1.11022302462516e^{-16}$
a_2	$-7.07767178198537e^{-16}$	$1.11022302462516e^{-16}$
a_1	$-2.31759056390501e^{-15}$	$-1.80411241501588e^{-16}$
a_0	$1.83186799063151e^{-15}$	$1.94189045753203e^{-16}$
a_{-1}	$-3.46944695195361e^{-15}$	$5.96744875736022e^{-16}$
a_{-2}	$1.27675647831893e^{-15}$	$8.32667268468867e^{-16}$
a_{-3}	$-3.26128013483640e^{-15}$	$3.05311331771918e^{-16}$
a_{-4}	$1.40339129206524e^{-15}$	−1.50000000000000
a_{-5}	$-1.58206781009085e^{-15}$	$1.13797860024079e^{-15}$
a_{-6}	$2.63677968348475e^{-16}$	$-7.21644966006352e^{-16}$
a_{-7}	2.50000000000000	$-3.22658566531686e^{-16}$

נשים לב כי המקדמים המשמעותיים הינם באינדקסים $\pm 4, \pm 7$, שאר המקדמים מקבלים ערכים זניחים יחסית וקרובים מאוד לאפס (כפי שניתן להסיק מפיתוח ישיר של האות לטור פורייה וחישוב המקדמים).

ג. (10 נק׳). שחזרו את האות מתוך וקטור מקדמי טור פורייה והציגו את האות המשוחזר והאות המקורי בגרף אחד.
הערה : האות המשוחזר יוצא כאות רציף ולכן כולל כמות נקודות גבוהה מכמות הדגימות בסעיף א׳.

נשחזר את האות המקורי בעזרת וקטור מקדמי פורייה שחישבנו בסעיף קודם ונציג את שני האותות בגרף.
גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec}(t)$:

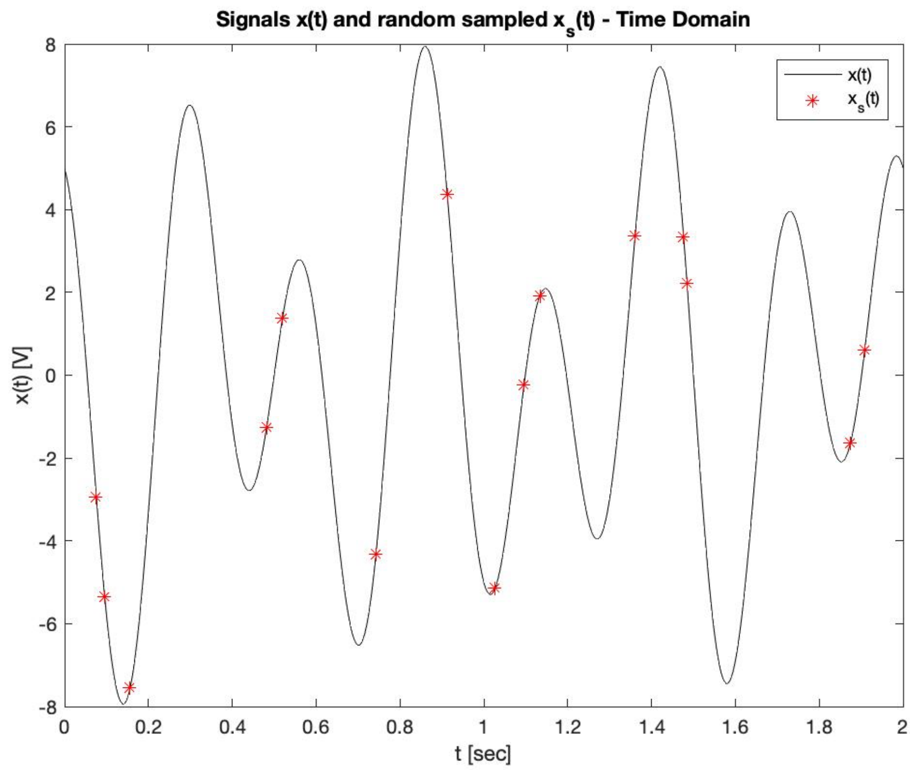


ניתן לראות כי אכן האות המשוחזר ע"י דגימה אחידה מתלכד עם האות המקורי.

ד. (6 נק'). חיזרו על סעיפים א', ב' וג' כאשר 15 נקודות הדגימה מפוזרות בצורה אקראית על פני מחזור אחד של האות. לצורך דגימה אקראית השתמשו בפונקצית rand. ממה יש להיזהר במקרה זה אם ברצוננו לשחזר את האות?

כעת נבצע דגימה אקראית ב-15 נקודות רנדומליות לאורך מחזור בודד של האות המקורי.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגימה אקראית):

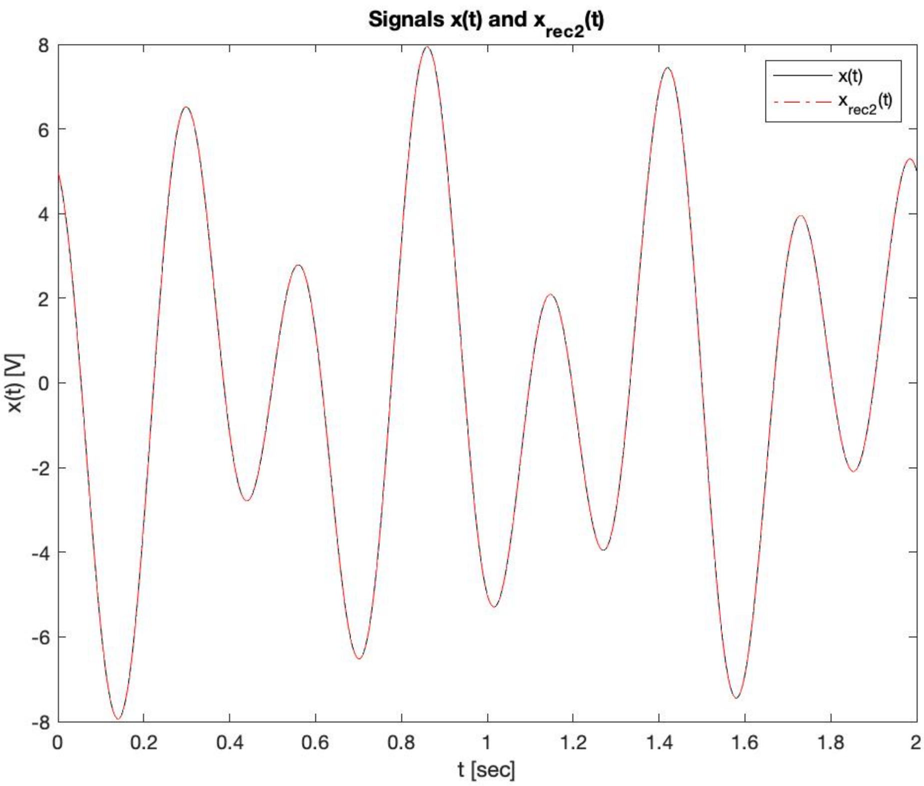


וקטור מקדמי טור פורייה המתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.500000000000002	0.000000000000016
a_6	$-1.603404908845363e^{-14}$	$2.470246229790973e^{-15}$
a_5	$6.938893903907228e^{-15}$	$-3.538835890992687e^{-15}$
a_4	0.000000000000014	1.499999999999996
a_3	$1.293409823688307e^{-14}$	$-1.190714193910480e^{-14}$
a_2	$1.483535516655365e^{-14}$	$8.770761894538737e^{-15}$
a_1	$-7.244205235679146e^{-15}$	$2.098321516541546e^{-14}$
a_0	$-3.416017468893529e^{-14}$	$-6.320014951318829e^{-15}$
a_{-1}	$-3.913536161803677e^{-15}$	$-1.078304112667183e^{-14}$
a_{-2}	$1.285083151003619e^{-14}$	$-1.887379141862766e^{-15}$
a_{-3}	$1.007527394847330e^{-14}$	$9.520162436160717e^{-15}$
a_{-4}	0.000000000000014	-1.499999999999998
a_{-5}	$4.218847493575595e^{-14}$	$3.649858193455202e^{-15}$
a_{-6}	$-1.459162651817891e^{-14}$	$-4.718447854656915e^{-15}$
a_{-7}	2.500000000000000	-0.000000000000018

נשים לב כי עדיין המקדמים המשמעותיים הינם המקדמים המקוריים אך ערכם המספרי מעט השתנה (כמו כן ערכם של שאר המקדמים ״זניח״ פחות) כתוצאה מדגימות בנקודות זמן קרובות מדי אשר גוררות ״דמיון״ רב מדי בין שתי שורות במטריצת פורייה וכתוצאה מכך יתקבלו שגיאות נומריות.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec2}(t)$:

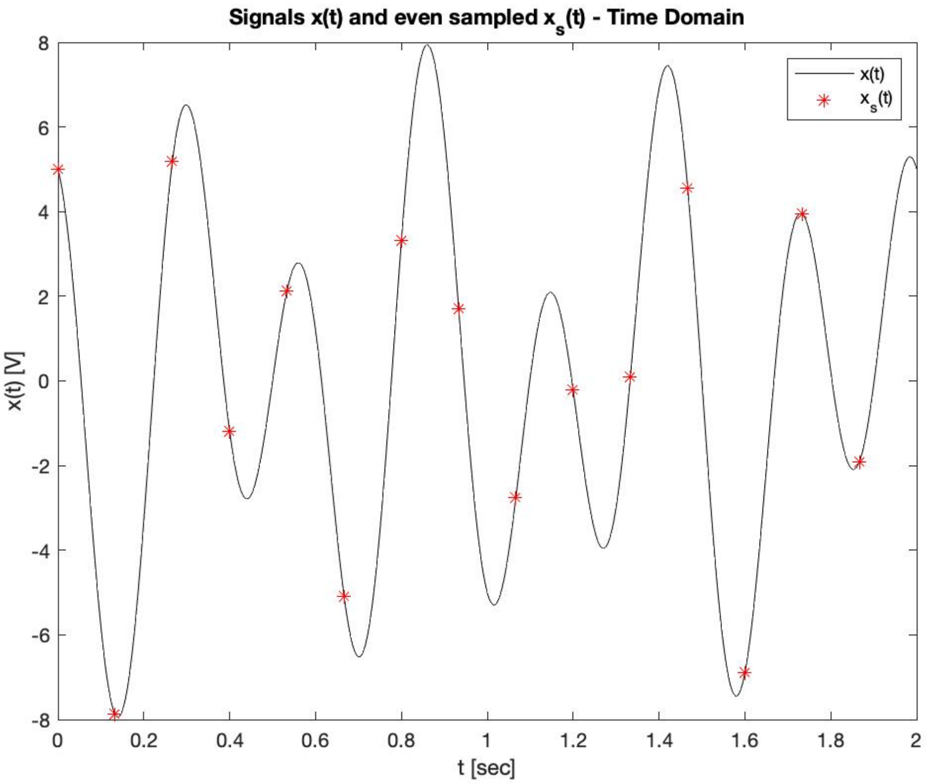


נשים לב כי גם עבור דגימה אקראית ולא אחידה האות המשוחזר מתלכד עם האות המקורי ומתקבל שחזור מדויק.

ה. (8 נק׳). חזרו על סעיפים א׳-ד׳ כאשר יש אי-ודאות במיקום הדגימות, כלומר כאשר בונים את המטריצה $\boldsymbol{F}$, במקום להכניס את זמן הדגימה האמיתי, t_n , יש להכניס $t_n + 0.01 * rand(1)$ (שימו לב- לכל n מגרילים מספר רנדומלי אחר). חשבו את ה-condition number של מטריצה $\boldsymbol{F}$ בשני המקרים (דגימה אחידה ולא אחידה) ע״י פונקצית cond. הסבירו את ההבדלים בין האותות המשוחזרים בשני המקרים.

נחזור על סעיפים א׳ – ד׳ כאשר יש אי ודאות במיקום הדגימות והדגימות מבוצעות בצורה אחידה.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגימה אחידה):

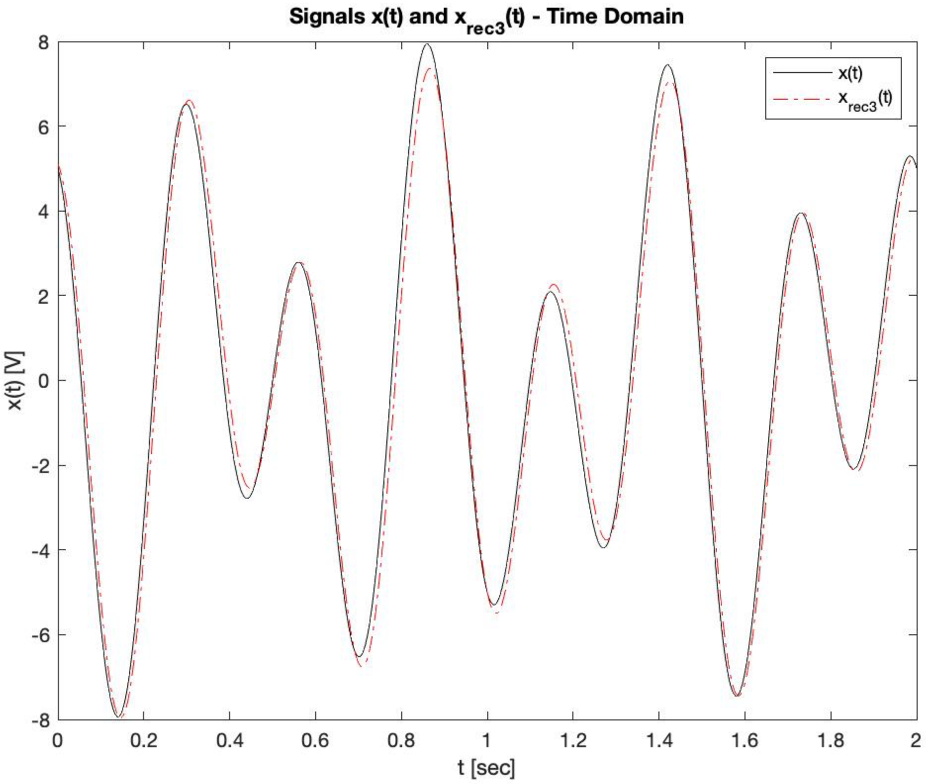


וקטור מקדמי טור פורייה המתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.456343989605339	−0.335604112191757
a_6	0.010494402189935	0.004940329492793
a_5	0.036010546915163	−0.009146011005686
a_4	0.092562968796787	1.452893694414489
a_3	−0.018826613753651	0.094567836339591
a_2	−0.038444109619169	−0.073374550785182
a_1	0.051611296784954	−0.004327950091892
a_0	−0.075090678999759	0.000000000000000
a_{-1}	0.051611296784953	0.004327950091893
a_{-2}	−0.038444109619170	0.073374550785183
a_{-3}	−0.018826613753651	−0.094567836339590
a_{-4}	0.092562968796786	−1.452893694414489
a_{-5}	0.036010546915164	0.009146011005687
a_{-6}	0.010494402189934	−0.004940329492792
a_{-7}	2.456343989605342	0.335604112191757

ניתן לראות כי המקדמים המשמעותיים עדיין יחסית קרובים לערכם המקורי עם זאת, שאר המקדמים כבר לא "זניחים".

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec3}(t)$:



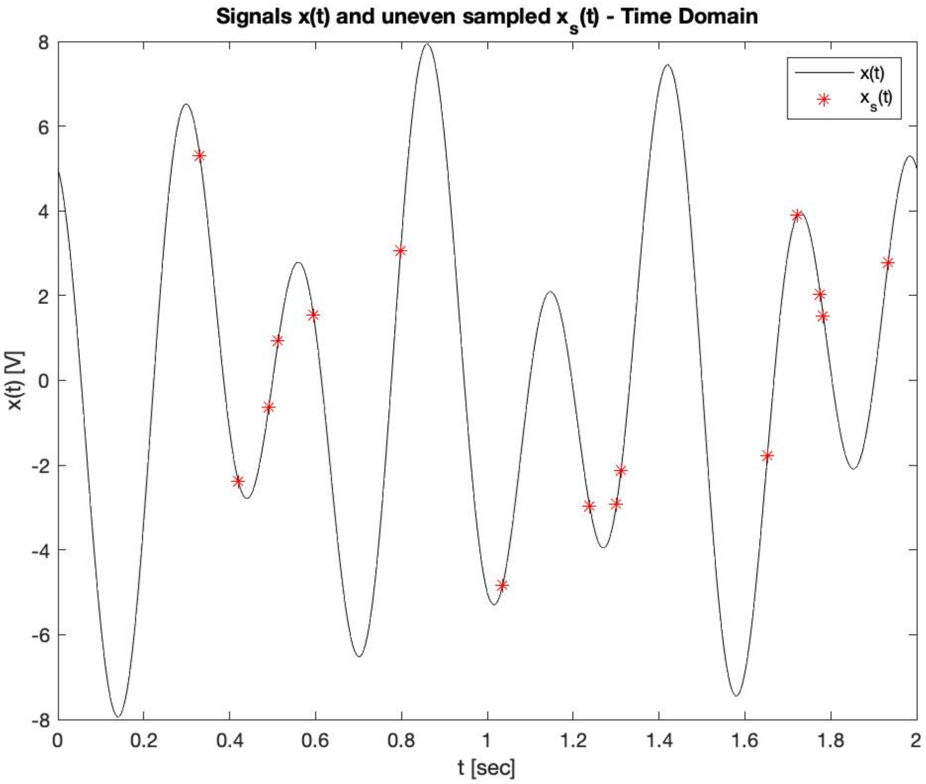
האות המשוחזר מתקרב לאות המקורי אך ברור מהגרף כי הם אינם מתלכדים אחד עם השני ולכן נוכל להסיק כי השחזור אינו שחזור מדויק, בהלימה עם האופן בו ניתחנו את ערכי וקטור מקדמי פורייה של האות המשוחזר ביחס לערכי וקטור מקדמי פורייה של האות המקורי.

$$Cond\left(\underline{\underline{F_{even\_sample[15]}}}\right) = 1.106664648606944$$

בהתאמה לתוצאות שקיבלנו, כעת ערכו של מדד היחס בין שינויים באות המבוא לשינויים באות המוצא (האות המשוחזר) הינו גדול מאחד, כלומר, עבור שינוי מסוים (שגיאה) באות המבוא נקבל שגיאה גדולה יותר במוצא, הערך הכללי עדיין יחסית קרוב ל-1 ולכן אנו מקבלים אות משוחזר אשר מאוד קרוב לאות המקורי, אך עדיין אינו זהה לו.

נחזור על סעיפים א׳ – ד׳ כאשר יש אי ודאות במיקום הדגימות והדגימות מבוצעות בצורה לא אחידה.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגימה לא אחידה):

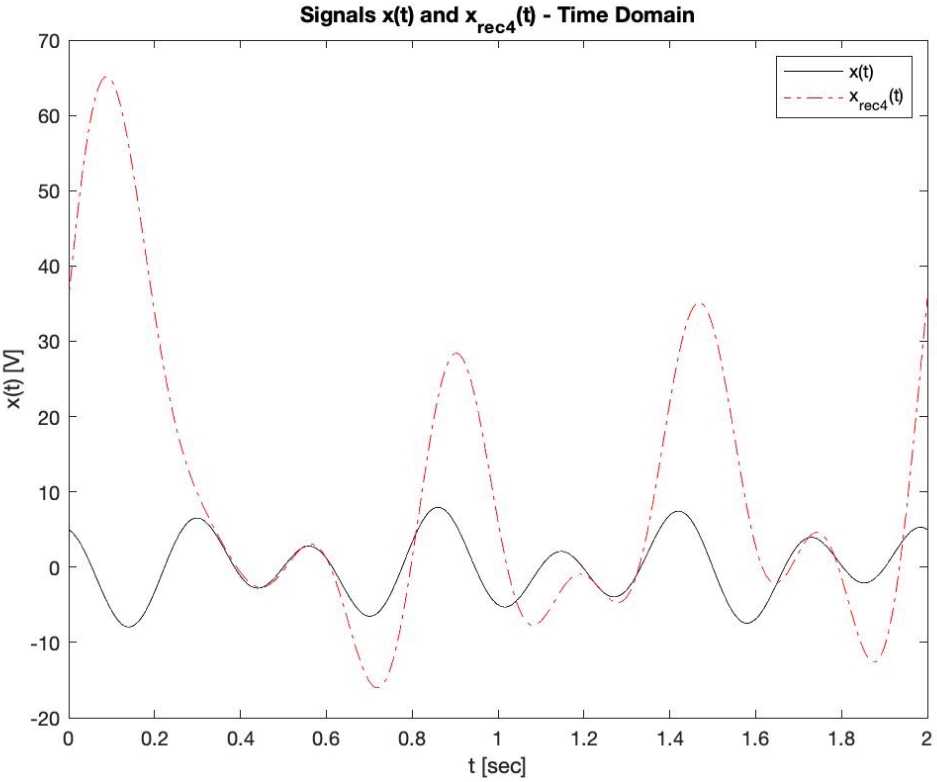


וקטור מקדמי טור פורייה המתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.321933932031434	−3.564366745995542
a_6	−1.883236042216566	−1.172794747047639
a_5	−1.180643373795264	−4.080956615641833
a_4	4.199082298667138	−1.477501424000651
a_3	1.326787980800948	−8.535864696617276
a_2	3.161729751681357	−4.150405858835388
a_1	4.929039559343895	0.096392916140935
a_0	9.938848352028115	0.000000000000568
a_{-1}	4.929039559343755	−0.096392916140302
a_{-2}	3.161729751680916	4.150405858835867
a_{-3}	1.326787980799972	8.535864696617374
a_{-4}	4.199082298666760	1.477501424001003
a_{-5}	−1.180643373795762	4.080956615641679
a_{-6}	−1.883236042216630	1.172794747047464
a_{-7}	2.321933932031115	3.564366745995437

ניתן לראות כי בשונה מתוצאותינו הקודמות, עבור דגימה לא אחידה (בתוספת רעש אקראי) כבר לא ניתן לזהות באופן חד משמעי את מקדמי פורייה של האות המקורי.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec4}(t)$:



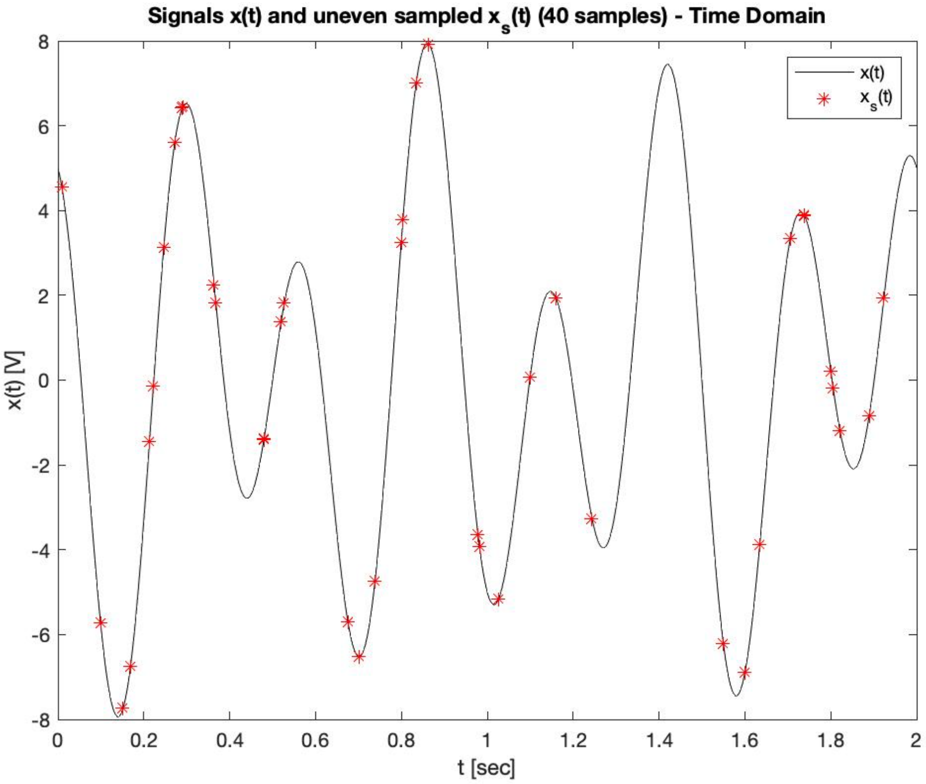
כצפוי ניתן לראות כי האות המשוחזר רחוק משמעותית מהאות המקורי, והשחזור אינו רק לא אידיאלי אלא גם אינו אפקטיבי, קיבלנו אות שונה בתכלית מאות המבוא.

$$Cond\left(\underline{\underline{F_{uneven\_sample[15]}}}\right) = 1.057216333130592e^{3} \sim 1057.2$$

בהתאמה לתוצאות שקיבלנו, כעת ערכו של מדד היחס בין שינויים באות המבוא לשינויים באות המוצא (האות המשוחזר) הינו גדול משמעותית מ-1, כלומר, עבור שינוי מאוד קטן (שגיאה) באות המבוא נקבל שגיאה גדולה בסדרי גודל במוצא, הערך הינו רחוק מאחד ועל כן אנו מקבלים אות שונה בתכלית מאות המבוא.

ו. (6 נק׳). חזרו על סעיף ה׳ כאשר דוגמים את האות ב-40 נק׳ על פני מחזור אחד, עבור המקרה של דגימה לא אחידה (שימו לב שמספר המקדמים שמחפשים נשאר זהה). הסבירו את ההבדלים שהתקבלו.

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_s(t)$ (דגימה לא אחידה – 40 דגימות):

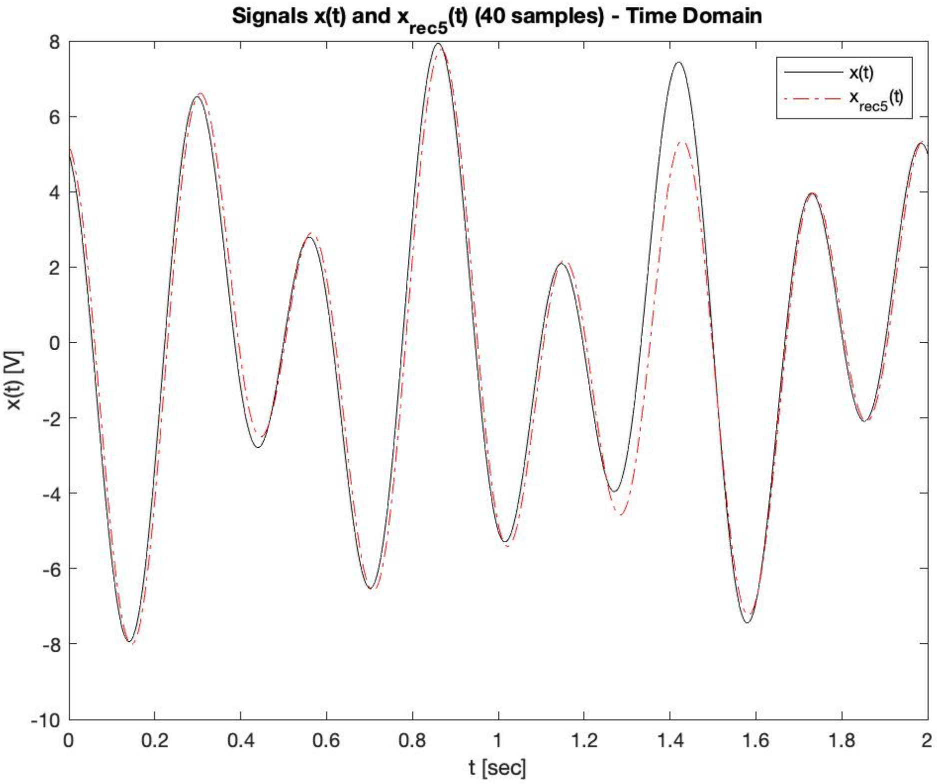


וקטור מקדמי טור פורייה המתקבל הינו:

a_i	$Re(a_i)$	$Im(a_i)$
a_7	2.430386935442293	−0.352618963518817
a_6	0.004762504524663	0.093464493309147
a_5	0.142239722984797	−0.017856355867904
a_4	0.086134882340359	1.352329637846034
a_3	−0.153687933873774	0.138838580479840
a_2	0.100508927854784	0.097943789742305
a_1	0.091865794939390	−0.189442992897176
a_0	−0.179677676249392	−0.000000000000002
a_{-1}	0.091865794939388	0.189442992897174
a_{-2}	0.100508927854787	−0.097943789742308
a_{-3}	−0.153687933873778	−0.138838580479840
a_{-4}	0.086134882340360	−1.352329637846034
a_{-5}	0.142239722984800	0.017856355867905
a_{-6}	0.004762504524661	−0.093464493309146
a_{-7}	2.430386935442292	0.352618963518818

ניתן לראות כי עבור דגימה לא אחידה של 40 דגימות (עם שגיאה אקראית), אנו מקבלים ערכים קרובים יותר לערכי המקדמים האמיתיים, כלומר צפוי להתקבל ערך משוחזר קרוב יותר מאשר הדגימה שביצענו בסעיף קודם (25 דגימות).

גרף האותות $x(t)$ ו- $x_{rec5}(t)$:



נשים לב כי אכן קיבלנו קירוב טוב יותר לאות המקורי, עם זאת ניתן לראות בבירור שהאותות אינם זהים ולא קיבלנו שחזור מדויק, מכאן נסיק שהגדלת מספר הדגימות מקרבת את השחזור בצורה טובה יותר לאות המקורי, כלומר מגדילה את דיוק השחזור למרות שהדגימות אינן אחידות ומתווספת שגיאה אקראית.
עם זאת, נבחין כי האות המשוחזר והאות המקורי אינם מתלכדים והשחזור המתקבל אינו שחזור מלא למרות הגדלת מספר הדגימות ביותר מפי 2.

$$Cond\left(\underline{\underline{F_{uneven\_sample[40]}}}\right) = 11.709550611034565$$

נשים לב כי ערכו של מדד היחס בין שינויים באות המבוא לשינויים באות המוצא המתקבל עבור 40 דגימות הינו אכן גדול מאחד ולכן לא מתקיים שחזור מלא אך הערך המתקבל קטן משמעותית מהערך שקיבלנו עבור דגימה זהה של 15 דגימות, ולכן תוצאה זו מתיישבת היטב עם מסקנתנו.

שאלה 3 - דגימה ואנליזה פונקציונאלית (30 נק')

נתונים שני סטים של פונקציות בסיס מחזוריות:

- $\phi_n(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{T}nt\right)$, כאשר n מספר שלם.
- $\psi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t}{T/20} - (n+0.5) - 20k\right)$ אשר מייצגת גל ריבועי, אשר מקבל ערכים בתחום [0,1] בעל זמן מחזור T ו- duty cycle של 5% . $n \in [0,19]$ מספר שלם.

נתונים שני אותות בעלי זמן מחזור $T = 10\ [sec]$:

- $f(t) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right)$
- $g(t)$ פונקציה מחזורית עם זמן מחזור T כך שמחזור אחד מקיים:

$$g(t) = 2sign\left(\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)\right) - 4sign\left(\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\right), t \in [0,T]$$

א. (5 נק') כתבו פונקציה ב MATLAB המקבלת שלושה ארגומנטים:

- וקטור עמודה המכיל ערכים ממחזור אחד של האות בזמן "רציף".
- מטריצה בעלת N עמודות המכילה בכל עמודה פונקציית בסיס אחת (ערכים של פונקציית הבסיס), כך שהמטריצה תייצג סט אחד של פונקציות. הערה: שימו לב שמספר השורות במטריצה ובווקטור צריכים להתאים.
- סקלר השווה לזמן המחזור T.

הפונקציה מחזירה וקטור באורך N, המכיל את מקדמי ההטלה של האות על כל אחת מפונקציות הבסיס. מקדמי ההטלה עבור פונקציות בסיס ואותות מחזוריים יחושבו כך:

$$c_n = \frac{\langle x(t), \phi_n(t)\rangle}{\|\phi_n(t)\|^2} = \frac{\int_0^T x(t)\phi_n^*(t)dt}{\int_0^T |\phi_n(t)|^2 dt}$$

(השתמשו בפונקציה trapz על מנת לחשב את האינטגרלים)

<u>הערה:</u> הפונקציה מופיעה בקוד ה-*MATLAB* המצורף *(projection_coef_vec(vec,mat,T))*

ב. (10 נק') בעזרת הפונקציה מסעיף א' חשבו את מקדמי ההטלה c_n של כל אחד משני האותות על כל אחד משני הסטים של פונקציית הבסיס הנתונים. עבור $\phi_n(t)$ חשבו את המקדמים $c_{-20}, \dots, c_{20}$, ועבור $\psi_n(t)$ חשבו את המקדמים $c_0, \dots, c_{19}$. הציגו בטבלה את המקדמים שקיבלתם והסבירו את התוצאה.

הערה: נסו להגדיר את מטריצת פונקציות הבסיס בשורה אחת, ללא שימוש בלולאה.

וקטורי מקדמי ההטלה C_n המתקבלים מדגימות של $f(t)$ ו-$g(t)$ עם פונקציות הבסיס $\psi_n(t)$ ו- $\phi_n(t)$ בהתאמה:

C_n	$f(t)$ sampled with $\psi_n(t)$	$g(t)$ sampled with $\psi_n(t)$
c_0	4.379044979393163	-2
c_1	2.943273154607983	-2
c_2	−0.643561949881100	-2
c_3	−2.951273154607983	-4.672000000000002
c_4	−3.104865351540962	-6
c_5	−3.105809623450961	2
c_6	−2.947273154607982	3.344000000000001
c_7	−0.629673406061103	6
c_8	2.955273154607981	6
c_9	4.378100707483164	6
c_{10}	3.101809623450962	-6
c_{11}	1.674037798665781	-6
c_{12}	0.633673406061103	-6
c_{13}	−1.682037798665779	-3.328000000000003
c_{14}	−4.382100707483163	-2
c_{15}	−4.375044979393165	6
c_{16}	−1.670037798665781	4.655999999999999
c_{17}	0.639561949881100	2
c_{18}	1.678037798665781	2
c_{19}	3.107079510562086	2

נשים לב כי בהתאמה לתוצאות שהוצגו מעלה, $\psi_n(t)$ הינה פונקציית הטלה ממשית והיא פונקציית מדרגות ברוחב $\frac{T}{20}$, חישוב הנורמה:

$$\|\psi_n(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} {\psi_n}^2(t)dt = \int_{\frac{nT}{20}}^{\frac{nT+T}{20}} dt = \frac{T}{20}$$

כאמור $\psi_n(t)$ מקבלת ערכים ממשיים בלבד ולכן מקדמי ההטלה מתקבלים ע״י:

$$C_n = \frac{1}{T/20}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_n*(t)dt = \frac{20}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_n(t)dt = \frac{20}{T}\int_{\frac{nT}{20}}^{\frac{nT+T}{20}} x(t)dt$$

כלומר, קיבלנו כי המקדמים מתקבלים ע״י מיצוע של ערכי האות לאורך $\frac{T}{20}$ זמן.

C_n	$f(t)$ sampled with $\phi_n(t)$	$g(t)$ sampled with $\phi_n(t)$
c_{-20}	$-1.9984e^{-16} - 5.5511e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.3878e^{-16}i$
c_{-19}	$-1.2629e^{-16} + 1.2678e^{-16}i$	$-0.0010 + 0.0005i$
c_{-18}	$-1.4710e^{-16} - 6.1062e^{-17}i$	$0.0030 - 0.2829i$
c_{-17}	$-2.0400e^{-16} - 7.2164e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.26569e^{-4}i$
c_{-16}	$-1.5526e^{-16} - 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 8.7353e^{-18}i$
c_{-15}	$-1.4225e^{-16} + 4.9960e^{-17}i$	$-0.0010 + 0.2546i$
c_{-14}	$-2.0262e^{-16} + 1.2212e^{-16}i$	$0.0030 - 0.3638i$
c_{-13}	$-7.3899e^{-17} - 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.5898e^{-4}i$
c_{-12}	$-2.5396e^{-16} + 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 1.1102e^{-16}i$
c_{-11}	$-2.6645e^{-16} - 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6434e^{-4}i$
c_{-10}	$-1.6098e^{-16} + 4.4409e^{-17}i$	$0.0030 - 0.5093i$
c_{-9}	$-2.609e^{-16} - 6.6613e^{-17}i$	$-0.0010 + 0.4244i$
c_{-8}	$-7.7716e^{-17} - 8.8818e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 1.0124e^{-16}i$
c_{-7}	$-1.0408e^{-16} - 1.8874e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6032e^{-4}i$
c_{-6}	$-1.7902e^{-16} - 2.4425e^{-16}i$	$0.0030 - 0.8488i$
c_{-5}	$0.5i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6300e^{-4}i$
c_{-4}	$-2.2204e^{-16} - 4.4409e^{-16}i$	$-2.0000e^{-4} - 4.8850e^{-16}i$
c_{-3}	$-3.5527e^{-16} + 2.4425e^{-16}i$	$-0.0010 + 1.2732i$
c_{-2}	2	$0.0030 - 2.5465i$
c_{-1}	$-1.3323e^{-16} - 8.2157e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6166e^{-4}i$
c_0	$8.8818e^{-17}$	$-2.0000e^{-4}$
c_1	$-1.3323e^{-16} + 8.2157e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6166e^{-4}i$
c_2	2	$0.0030 + 2.5465i$
c_3	$-3.5527e^{-16} - 2.4425e^{-16}i$	$-0.0010 - 1.2732i$
c_4	$-2.2204e^{-16} + 4.4409e^{-16}i$	$-2.0000e^{-4} + 4.8850e^{-16}i$
c_5	$-0.5i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6300e^{-4}i$
c_6	$-1.7902e^{-16} + 2.4425e^{-16}i$	$0.0030 + 0.8488i$
c_7	$-1.0408e^{-16} + 1.8874e^{-16}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.6032e^{-4}i$
c_8	$-7.7716e^{-16} + 8.8818e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.0124e^{-16}i$
c_9	$-2.6090e^{-16} + 6.6613e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.4244i$
c_{10}	$-1.6098e^{-16} - 4.4409e^{-17}i$	$0.0030 + 0.5093i$
c_{11}	$-2.6645e^{-16} + 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-4} + 4.6434e^{-4}i$
c_{12}	$-2.5396e^{-16} - 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} + 1.1102e^{-16}i$
c_{13}	$-7.3899e^{-17} + 1.1102e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} - 4.5898e^{-4}i$
c_{14}	$-2.0262e^{-16} - 1.2212e^{-16}i$	$0.0030 + 0.3638i$
c_{15}	$-1.4225e^{-16} - 4.9960e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.2546i$
c_{16}	$-1.5526e^{-16} + 3.3307e^{-17}i$	$-2.0000e^{-4} - 8.7353e^{-18}i$
c_{17}	$-2.0400e^{-16} + 7.2164e^{-17}i$	$-1.0000e^{-3} + 4.6569e^{-4}i$
c_{18}	$-1.4710e^{-16} + 6.1062e^{-17}i$	$0.0030 + 0.2829i$
c_{19}	$-1.2629e^{-16} - 1.2768e^{-16}i$	$-0.0010 - 0.0005i$
c_{20}	$-2.0866e^{-16} + 2.7756e^{-17}i$	$-0.0010 - 0.0005i$

נבדוק את התוצאות המספריות שקיבלנו אל מול פיתוח ישיר של המקדמים:

<u>נפתח את $f(t)$ לטור פורייה:</u>

$$f(t) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right) = 2\left(e^{j\frac{4\pi}{T}t} + e^{-j\frac{4\pi}{T}t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{10\pi}{T}t} - e^{-j\frac{10\pi}{T}t}\right)$$
$$= 2\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right) + \frac{1}{2j}\left(e^{j5\pi t} - e^{-j5\pi t}\right)$$

$$\Rightarrow C_{\pm 2} = 2\,, \qquad C_{-5} = 0.5j, \qquad C_5 = -0.5j$$

ניתן לראות כי אכן קיבלנו את המקדמים הנ"ל בוקטור שהוצג מעלה, כמו כן נשים לב כי שאר המקדמים הינם מאוד קרובים לאפס (סדר גודל של $10^{-16}, 10^{-17}$) ולכן נסיק כי מדובר בשגיאות נומריות.

עבור $g(t)$ נשים לב כי לא קיבלנו שחזור מדויק עם פונקציית הבסיס $\phi_n(t)$ וגם לא נוכל לקבל כזה כיוון $g(t)$ הינה פונקציה המקבלת ערכים בדידים (סכום של פונקציות סימן עם מקדמים קבועים) ולכן מהווה אות שאיננו חסום סרט (ומחזורי) לכן טור פורייה שלו קיים ומכיל אינסוף מקדמים ועל מנת לקבל שחזור מדויק נדרש לדגום באינסוף דגימות.
כמו כן נשים לב כי וקטור המקדמים אינו מכיל ערכים "זניחים" כפי שראינו בדגימות עם $f(t)$, בהתאם למסקנתנו.

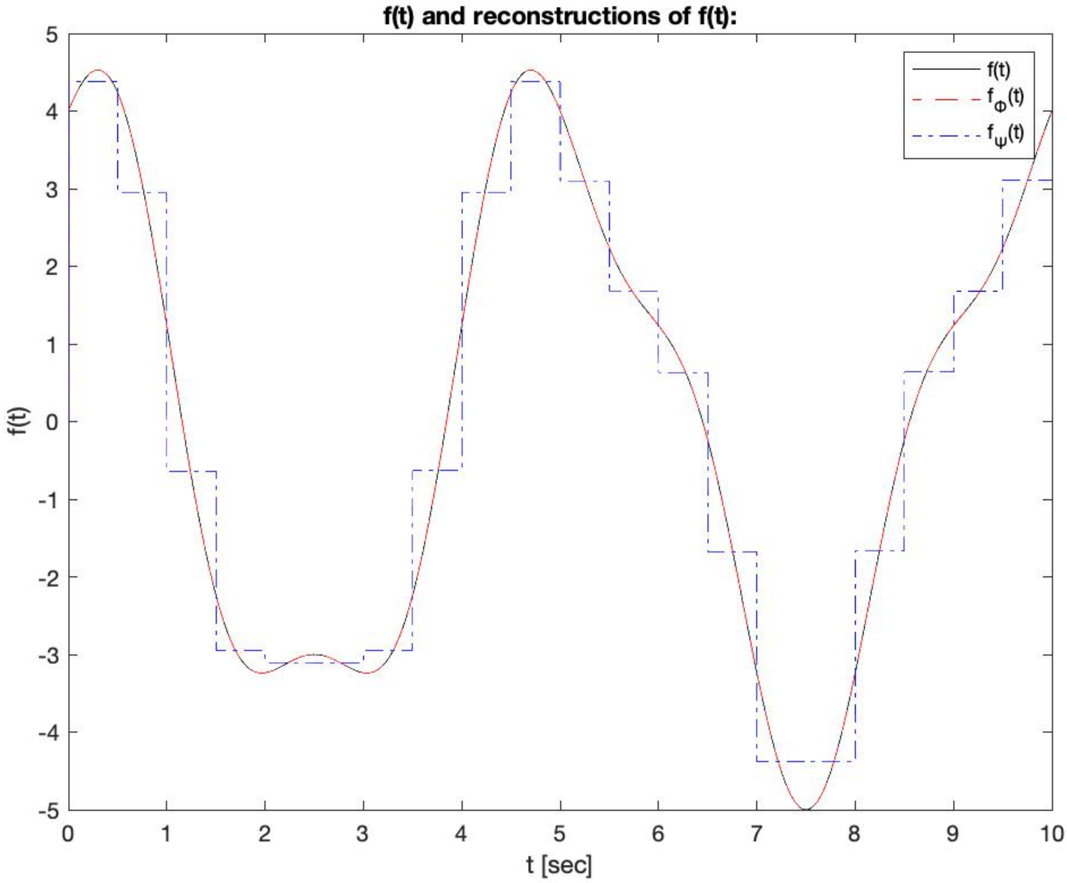
ג. (10נק') שחזרו את האותות מתוך מקדמי ההטלה שחישבתם בסעיף ב', על ידי נוסחת השחזור:

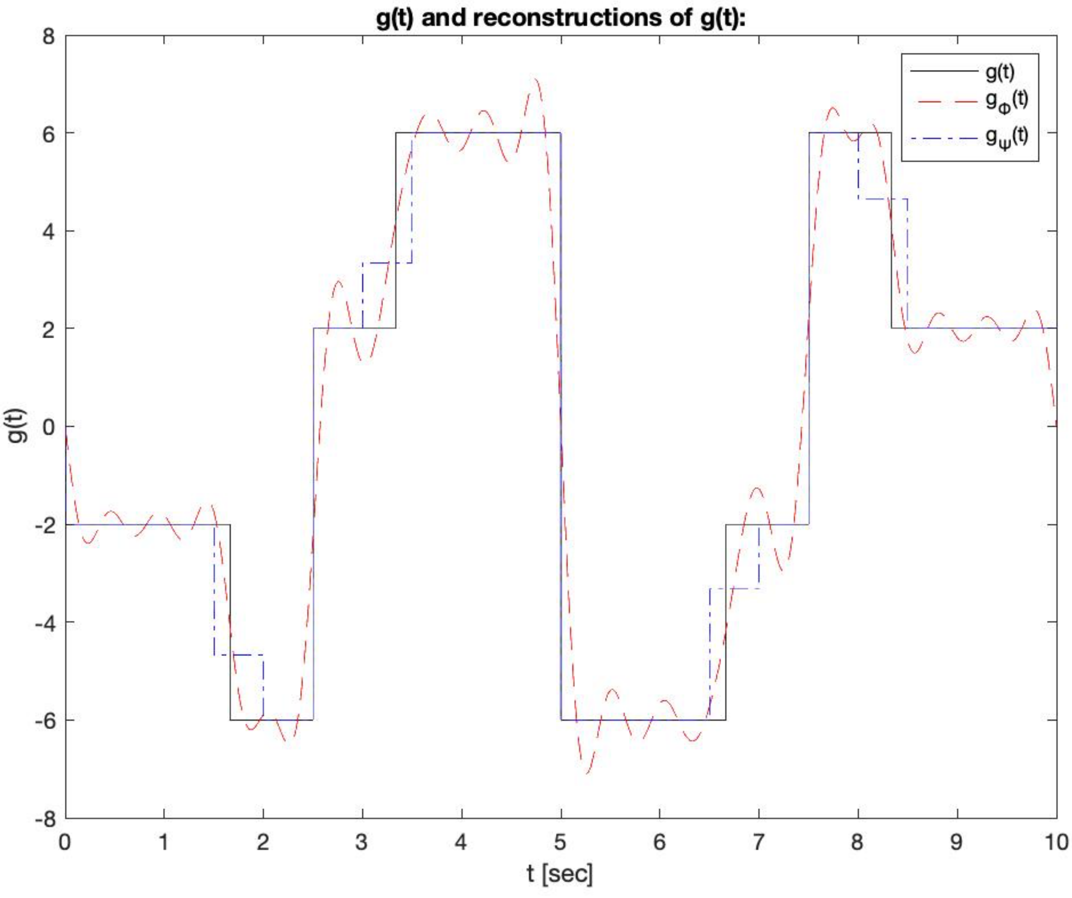
$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \phi_n(t)$$

הציגו את האות המקורי ואת האותות ששחזרתם בגרף אחד עבור $f(t)$ ובגרף נוסף עבור $g(t)$, עבור מחזור אחד.

- האם מתקבל שחזור מדויק בכל אחד מהמקרים?
- בשחזור האות $g(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\phi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?
- בשחזור האות $f(t)$ מתוך מקדמי ההטלה על $\psi_n(t)$, האם ניתן לקבל שיחזור מדויק (ללא שגיאה) על ידי הוספת מקדמים מעבר לאלו שחושבו? כיצד ניתן לשפר את דיוק השחזור?

הגרפים המתקבלים משחזור האות המקורי עבור כל אחת מפונקציות הבסיס:





- כאמור $f(t)$ היא פונקציה מחזורית, על כן ניתנת לייצוג ע"י טור פורייה, בפרט ע"י מספר סופי של מקדמי פורייה כסכום של פונקציות סינוסואידליות, כלומר, ניתן לפרוש אותה ע"י פונקציית הבסיס ϕ_n (אקספוננטים) בלי לאבד מידע בשחזור.
כפי שאנו רואים ישנה חפיפה מלאה בגרף לכן השחזור הוא מלא.
לעומת זאת, למרות שהשחזור שקיבלנו עבור ψ_n הוא הקירוב הטוב ביותר ל- $f(t)$ במרחב הנפרש ע"י פונקציות ψ_n, פונקציות הבסיס ψ_n אינן פורשות את $f(t)$ ולכן לא מן הנמנע שנאבד מידע בשחזור וכך אכן קורה כפי שניתן לראות בגרף.

  הוספת מקדמי הטלה על ψ_n לשחזור האות $f(t)$ לא תביא לשחזור מדויק של האות שכן הוספת מקדמים של פונקציית הבסיס רק תהיה הוספה של אחת מהפונקציות הנתונות עם הזזה, לכן לא תעזור לדיוק השחזור.
לעומת זאת, כן ניתן לשפר את הדיוק ע"י הגדלת הפרמטר N – מספר הדגימות שלנו במחזור, נוכל לצמצם את מרווח השגיאה שלנו עם הקטנת רוחב החלונות בדגימה, כך נתכנס לתשובה מדויקת יותר.

- כאמור $g(t)$ היא סכום פונקציות סימן עם פרמטרים – לכן מהווה פונקציית מדרגות, על כן ניתנת לייצוג מדויק ע"י ψ_n – שהיא בעצמה פונקציית מדרגות , אמנם לא קיבלנו ייצוג מדויק כאן אך קיבלנו גרף מאוד קרוב לגרף המקורי ויהיה ניתן לקבל אותו אם נוסיף עוד מספר דגימות סופי (נגדיל את N).

  בנוסף, אנו יודעים ש $g(t)$ אות מחזורי לכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה, $g(t)$ אינו אות חסום סרט ולכן יכיל אינסוף איברים בטור.
השחזור שקיבלנו לפי ϕ_n כפי שניתן לראות אינו מדויק אך אכן ישנה אפשרות לשפר את הדיוק ע"י הוספת מקדמי פורייה שכתוצאה מכך תגדיל את טווח התדרים שאנו משחזרים, אך חשוב לציין שבמצב זה שחזור מדויק לא אפשרי (בכלים פיזיים וב-MATLAB בפרט) מכיוון שעל מנת לקבל שחזור מדויק נצטרך להוסיף אינסוף מקדמי פורייה וזה כמובן בלתי אפשרי מבחינתנו (תמיד נהיה קרובים לתוצאה בכל נק' דגימה עד כדי אפסילון שגיאה).

ד. (5 נק'). הסבר/י:

- באיזה בסיס עדיף להשתמש עבור כל אחד מהאותות הנתונים?
- מהם היתרונות והחסרונות בכל אחד מהבסיסים?
- האם השימוש בבסיס $\psi_n(t)$ זהה לשחזור ZOH?

כפי שראינו בתוצאות של סעיף ג' עדיף להשתמש בפונקציות הבסיס ϕ_n עבור השחזור של $f(t)$ ובפונקציות הבסיס ψ_n עבור השחזור של $g(t)$.
הסבר:
$f(t)$ הוא אות מחזורי חסום סרט ולכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה כסכום סופי של אקספוננטים, כלומר, ניתן לייצוג ע"י סכום פונקציות הבסיס ϕ_n, לכן ϕ_n פורשות את המרחב שבו נמצאת הפונקציה $f(t)$ ונותנות לנו שחזור מדויק עם מספר סופי וקטן של איברי בסיס.
ψ_n לא פורשות את המרחב של $f(t)$ – נוכל תמיד לקבל קירוב אך לא שחזור מדויק.
סכום פונקציות מדרגה לא יניב אות רציף אלא רק קירוב שלו.

$g(t)$ גם הוא אות מחזורי אך הוא אות מחזורי חסום סרט (פונקציית מדרגות) לכן ניתן לייצוג ע"י טור פורייה כסכום אינסופי של אקספוננטים.
$g(t)$ נפרשת ע"י ψ_n בצורה מדויקת, זאת אם נוסיף מספר סופי של דגימות ונקבל שחזור מדויק.
לעומת זאת ϕ_n לא פורש את המרחב של $g(t)$ שכן כפי שציינו על מנת לפרוש את המרחב של g נצטרך אינסוף פונקציות מהבסיס ϕ_n כמובן דבר בלתי ישים.
יתרון בשימוש בבסיס ϕ_n:
כל פונקציה מחזורית חסומת סרט ניתנת לייצוג ע"י סכום אקספוננטים לכן ניתנת לשחזור מדויק ע"י איברי הבסיס ϕ_n .
חסרון:
לא ניתן לשחזר עם הבסיס אותות בדידים – לא חסומי סרט.

יתרון בשימוש בבסיס ψ_n:
כל פונקציה מחזורית לא חסומת סרט (בדידה) ניתנת לייצוג מלא ע"י איברי הבסיס ובמספר יחסית קטן של איברי בסיס ולכן ניתנת לשחזור מדויק ובקלות.
חסרון:
שחזור בעזרת פונקציות בסיס אלו תמיד יהיה בעל רוחב סרט אינסופי, דבר בעייתי בשחזור אותות מוגבלי סרט (לא ניתן לשחזר במדויק אותות רציפים).

השימוש בפונקציית הבסיס ψ_n מזכיר את ZOH אך אינו זהה לו, עבור ZOH אנחנו מקבעים את הערך הדגום בכל תחילת מחזור דגימה עד סופו עבור כל אחת מבין הדגימות שאנו מבצעים ואילו עבור ψ_n עבור כל מחזור אנחנו סוכמים מס' דגימות מהמחזור, מחלקים את הסכום באורך המחזור ומקבלים תוצאה שהיא ממוצע המחזור.
אתה התוצאה הזו אנחנו מקבעים לאורך המחזור בשונה מערך שרירותי בתחילת הדגימה שקורית ב- ZOH .