Analisis Numérico

Prueba 2

Eros Cedeño
16-10216.

1. Observamos que tenemos 5 puntos en la tabla, no equidistantes procedemos a obtener una definición general de la derivada del polinomio de lagrange con 5 puntos.

Por definición de polinomio interpolante de lagrange se tiene:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_{n,j}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

Derivando:

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l'_{n,j}(x) + D_x\left[\frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{(n+1)!}\right] f^{(n+1)}(\xi(x)) + \frac{\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)}{(n+1)!} D_x\left[f^{(n+1)}(\xi(x))\right].$$

Ignorando el termino del error...

$$f'(x) \approx \sum_{j=0}^{n} y_i l'_{n,j}(x)$$ por lo que se deben determinar $l'_{n,j}(x)$.

En nuestro caso, con $n=4$ se tiene:

$$l'_{4,j} = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n}(x_j-x_k)} D_x\left[(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_4)\right]$$

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}$$, calculamos l_0'

$$l_0' = D_x\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_3)(x_0-x_4)}\right]$$

$$\boxed{l_0' = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_3)(x_0-x_4)} + \frac{2x-x_3-x_4}{(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}$$

Igual manera obtenemos l_2', l_3', l_4', l_1'.

$$l_1' = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot \frac{(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \frac{2x - x_3 - x_4}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$l_2' = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \frac{2x - x_3 - x_4}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$l_3' = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + \frac{2x - x_2 - x_4}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}$$

$$l_4' = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)} \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} + \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_4 - x_0)(x_4 - x_1)}$$

Por otro lado, el termino del error en el punto x_j sera:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k) \quad \text{con } n = 4 \text{ es:}$$

$$\boxed{\frac{f^{(5)}(\xi(x_j))}{5!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{4} (x_j - x_4)}$$

Se procede a programar computacionalmente estos resultados.

Teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \cos(\pi x) - 2\,\mathrm{Sen}(2\pi x) \quad \text{derivando} \ldots$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\left(\pi\,\mathrm{Sen}(\pi x) + 4\pi \cos(2\pi x)\right)$$

Finalmente. la tabla que da respuesta a los preguntas 1 y 2 es la siguiente:

x	$f(x)$	$f'(x)$	Error
0.0	1.0	-17,2270	4,661
0.25	-1.2929	-1,016	1,2051
0.45	-0.4616	8,064	0,7843
0.63	1,0608	6,9175	1,1984
0.85	0,7270	-14,2705	5,45801

Para la pregunta 3 se calcula el valor de la integral definida de la función $f(x)$ entre los puntos $x_0 = 0$ y $x_4 = 0,85$.

Para esto se utilizará la regla del trapecio compuesto para intervalos no regulares.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{x_1 - a}{2}\left[f(a) + f(x_1)\right] + \frac{x_2 - x_1}{2}\left[f(x_1) + f(x_0)\right]$$

$$\cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\left[f(x_n) + f(x_{n-1})\right] + \frac{b - x_n}{2}\left[f(x_n) + f(b)\right]$$

esta ecuación consiste en sumar el área de los trapecios en cada segmento. Se procede a programar el algoritmo para obtener estos somas, y obtener una aproximación sin usar la forma analítica real de f. El algoritmo nos retorna:

$$\boxed{\int_0^{0,85} f(x)\,dx \approx 0,0385} \longrightarrow \text{utilizando regla del trapecio compuesto}$$

Ahora, para conocer el error cometido se procederá a calcular analíticamente la integral dado que f es conocido.

$$\int_{a=0}^{b=0,85} \cos(\pi x) - 2\operatorname{Sen}(2\pi x)\, dx$$

$$= \int_a^b \cos(\pi x)\,dx - \int_a^b \operatorname{Sen}(2\pi x)\,(2dx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos(\pi x)(\pi\,dx) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \operatorname{Sen}(2\pi x)(2\pi\,dx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Sen}(\pi x)\Big]_{a=0}^{b=0,85} + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x)\Big]_{a=0}^{b=0,85}.$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\operatorname{Sen}(\pi\cdot(0,85)) + \cos(2\cdot\pi\cdot 0,85) - 1\Big] =$$

$$= \boxed{0,013298}$$

Luego el error total cometido fue de

$$\text{Error} = |x - \bar{x}| = |0,0385 - 0,013298| =$$

$$\boxed{\text{Error} = 0,0252}$$

Para el ejercicio 24.4 se pide utilizar integración numérica para evaluar la ecuación a continuación dada una tabla de puntos:

$$M = Q\int_{t_0}^{t_f} c\,dt \qquad \text{con} \quad Q = 4\ m^3/min$$

Se observa que aunque los intervalos de tiempo no son equidistantes es posible crear una partición de intervalos equidistantes. Estos se muestran a continuación:

t	c
0	10
10	36
20	55
30	52

$h = 10$

y

t	c
30	52
35	41
40	37
45	33
50	34

$h = 5$.

Por otro lado

$$\int_{t_0}^{t_f} c\,dt = \int_{t=0}^{t=30} c\,dt + \int_{t=30}^{t=50} c\,dt.$$

y se procede a calcular ambas integrales utilizando el método de Simpson.

Para la segunda se utilizará la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesto y para la primera la regla de Simpson $\frac{3}{8}$.

b) $$\int_{t=30}^{t=50} c\,dt \approx \frac{(5)}{3}\left[52 + 2(37) + 4(41+33) + 34\right]$$

$$= 760 \left[\frac{mg \cdot min}{m^3}\right]$$

a) $$\int_{t=0}^{t=30} c\,dt \approx \frac{3}{8}(10)\left[10 + 3\cdot 36 + 3\cdot 55 + 52\right]$$

$$= 1256,25 \left[\frac{mg \cdot min}{m^3}\right]$$

finalmente $M = 4 \frac{m^3}{min}\left[1256,2 + 760\right]\frac{mg \cdot min}{m^3} = \boxed{8064\ mg}$

En el ejercicio 24.7 se pide calcular $\frac{dV}{dt}$ para cada tiempo tabulado con un error de $O(h^2)$.

Al igual que con el ejercicio anterior se observa que una sección de la table tiene intervalos de longitud $h=10$ y otra sección tiene $h=15$. El punto de cambio es $t=30$.

Utilizaremos las formulas de diferencias divididas de orden $O(h^2$

$$f'(x=0) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x=0)+4f(x=10)-f(x=20)\right]$$

$$= \frac{1}{2(10)}\left[-3(0{,}4)+4(0{,}7)-0{,}8\right] = 0{,}04$$

$$f'(x=10) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x=10)+4f(x=20)-f(x=30)\right]$$

$$= \frac{1}{2(10)}\left[-3(0{,}7)+4(0{,}8)-0{,}9\right] = 0{,}01$$

$$f'(x=20) \approx \frac{1}{2h}\left[f(0)-4f(x=10)+3f(x=20)\right]$$

$$= \frac{1}{2h}\left[0{,}4-4(0{,}7)+3(0{,}8)\right] = 0$$

Para el punto de cambio de longitud del intervalo se utilizará el resultado general proveniente de la derivación del polinomio de lagrange dado 3 puntos evaluado en el punto intermedio.

$$f'(x) = f(x_{i-1})\frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}$$

$$+ f(x_i)\frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + f(x_{i+1})\frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}$$

sustituyendo $x = x_i = 30$, $x_{i-1} = 20$ y $x_{i+1} = 45$.

$$f'(x=30) \approx (0{,}8)\frac{2(30)-30-45}{(20-30)(20-45)} + (0{,}9)\frac{2(30)-20-45}{(30-20)(30-45)}$$

$$+ (1{,}05)\frac{2(30)-20-30}{(45-20)(45-30)}$$

$$f'(x=30) \approx -\frac{6}{125} + \frac{3}{100} + \frac{7}{250} = 0{,}01$$

Continuamos con las formulas de diferencias divididas para el resto.

$$f'(x=45) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x=45) + 4f(x=60) - f(x=75)\right]$$

$$= \frac{1}{2(15)}\left[-3(1{,}05) + 4(1{,}2) - 1{,}35\right] = 0{,}01$$

$$f'(x=60) = \frac{1}{2h}\left[f(x=30) - 4f(x=45) + 3f(x=60)\right]$$

$$= \frac{1}{2(15)}\left[0{,}9 - 4(1{,}05) + 3(1{,}2)\right] = 0{,}01$$

$$f'(x=75) = \frac{1}{2h}\left[f(x=45) - 4f(x=60) + 3f(x=75)\right]$$

$$= \frac{1}{2(15)}\left[1{,}05 - 4(1{,}2) + 3(1{,}35)\right] = 0{,}01$$

Con esto queda calculada la tasa de flujo Q para cada punto con un error de $O(h_1^2 + h_2^2)$