UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DPTO. COMPUTO CIENTÍFICO Y ESTADÍSTICA
CO5212

Aplicación de Métodos Numéricos en Problema de Física

Estudiantes
EROS CEDEÑO

Profesor
JHONNATHAN ARTEAGA

29 de agosto de 2023

Contenido General

1. Introducción

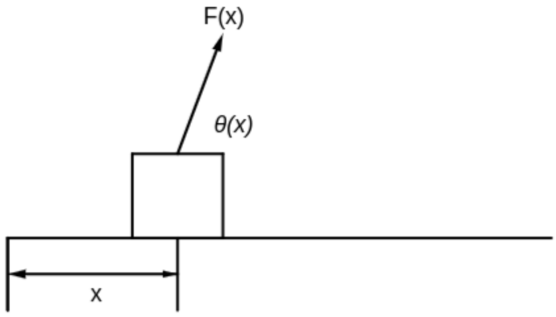
A lo largo del curso se han aprendido una amplia gama de métodos numéricos con distintas utilidades en el manejo y análisis de datos. Por lo tanto una excelente manera para poner en practica este conjunto de métodos es mediante la resolución practica de un problema real.

2. Planteamiento del Problema

2.1. Problema a resolver

En el área de la física experimental es común encontrarse con conjunto de datos puntuales que caracterizan a un fenómeno físico particular. En este caso se plantea el siguiente escenario:

Supóngase un cuerpo puntual alojado sobre una superficie plana sin fricción. Este cuerpo tiene una cuerda de masa despreciable e inextensible atada en su parte mas alta. Del otro extremo de la cuerda es aplicada una fuerza $\vec{F}(x)$ formando un ángulo de $\theta(x)$ respecto al eje horizontal paralelo al plano.



En el laboratorio se obtuvieron los siguientes datos que caracterizan tanto a $\vec{F}(x)$ como a $\theta(x)$ además de registrar la posición del móvil en el tiempo.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\|\vec{x}(t)\|$	0	0.86	2.96	5.08	6	5.178	3.09	0.96	0
$\theta(x)$	1.047	1.3089	1.5707	1.832	2.0943	1.842	1.58	1.3251	1.047
$\|\vec{F}(x)\|$	9	5.1	0.02	4.35	9	4.8	0.02	4.7	9

Se hará lo siguiente:

- Determinar el polinomio interpolador de menor grado para $\vec{F}(x)$.
- Como se observa que es un movimiento periódico simple se sabe que $\vec{x}(t) = x_0 Cos(\omega t) + \alpha$ se desea determinar x_0, ω y α.
- Sabiendo que $\vec{x}(t) = x_0 Cos(\omega t) + \alpha$ se determinara el tiempo t tal que el móvil alcance el centro de oscilación, esto es $x = 3$.
- Por definición $W = \int_{x_0}^{x_f} \vec{F}(x) \cdot dx$ se desea determinar el trabajo total realizado por $\vec{F}$.
- Por definición $\vec{v_x} = \frac{d}{dx}\vec{x}$. Se quiere determinar la velocidad del móvil para cada t.

2.2. Métodos Numéricos a utilizar

- Se utilizara el polinomio interpolante de Lagrange para interpolar los puntos de $\vec{F}(x)$.
- Se utilizara el método de la Secante para determinar la solución de la ecuación no lineal $\vec{x}(t) = x_0 Cos(\omega t) + \alpha = d/2$ donde d es la amplitud del movimiento armónico.
- Se utilizara la regla de Simpson para determinar una aproximación para $\int_{x_0}^{x_f} \vec{F}(x) \cdot dx$ con $\vec{F}(x)$ definida según el polinomio interpolante obtenido anteriormente.
- Se empleara la formulación de la derivada mediante diferencias finitas en cada punto para encontrar una estimación de $\frac{d}{dx}\vec{x}$.

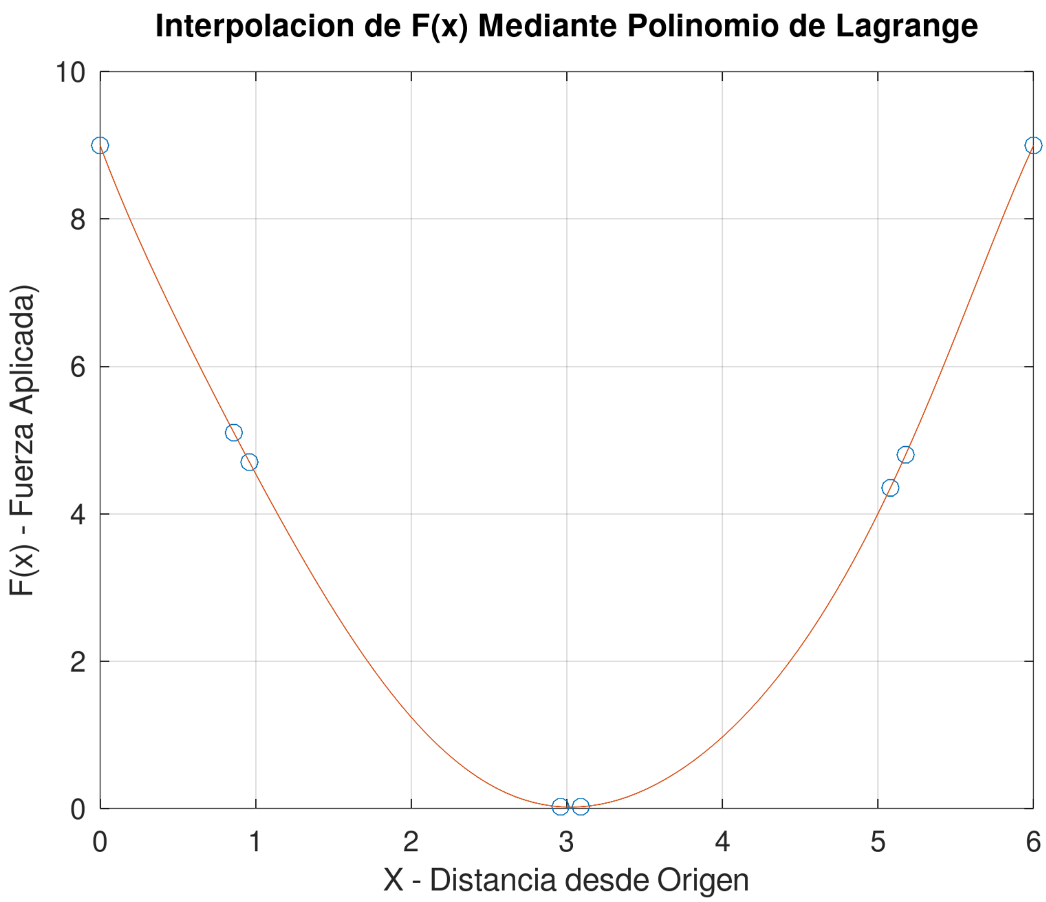
3. Solución Y Resultados

3.1. Polinomio Interpolante para F(x)

En los resultados experimentales se obtuvo una caracterización del modulo de la fuerza aplicada sobre el extremo superior de la cuerda y se tabulo dichos resultados, por lo tanto resulta conveniente contar con una forma analítica para $|\vec{F}(x)|$.

Se elaboro para ello una función de octave *lagrange.m* que dados los puntos a interpolar retorna el polinomio de lagrange correspondiente como un vector de coeficientes del polinomio.

En el programa principal *main.m* se interpola los puntos de la tabla y se genera una gráfica del polinomio obtenido, esta se muestra a continuación.



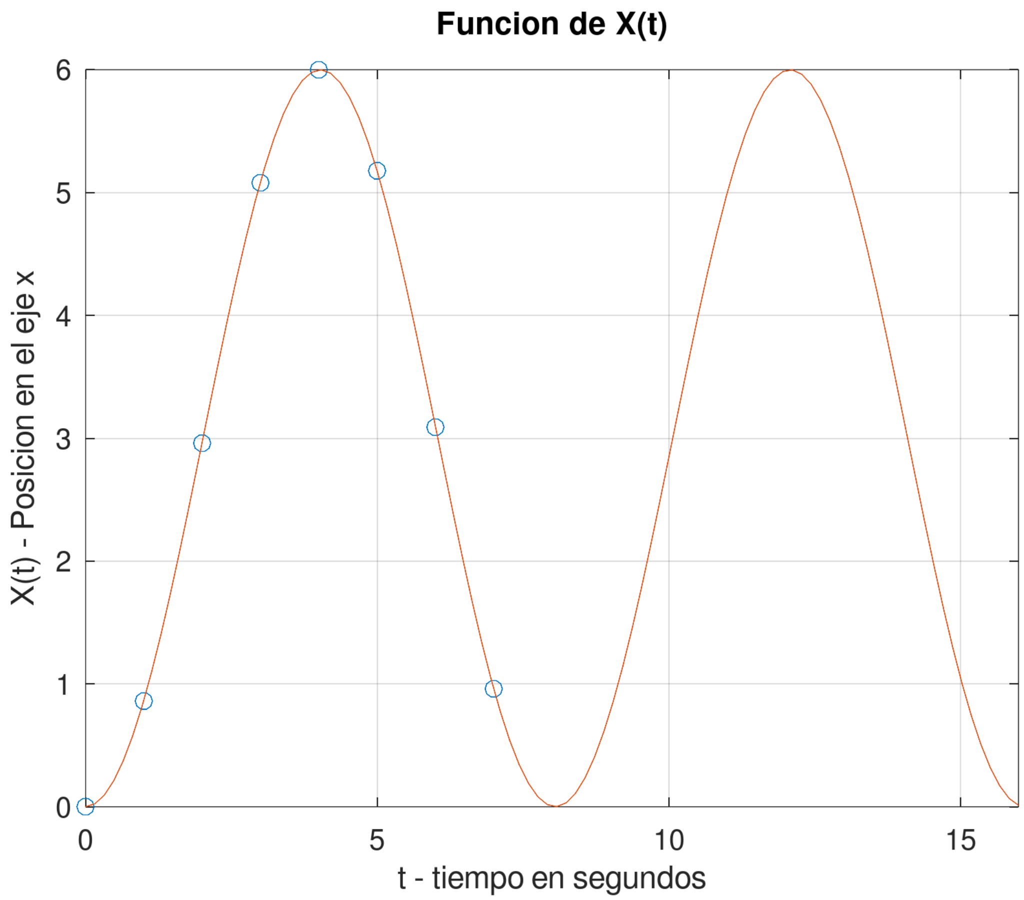
Se eligió utilizar el polinomio interpolante de Lagrange dado que tiene como ventaja que retorna un polinomio único y es independiente al tamaño de los intervalos y si son regulares o no.

3.2. Forma Analítica del Movimiento Armónico Simple Estudiado

Si se analiza la tabla de datos se observa que el móvil oscila describiendo un ciclo de un movimiento armónico simple. Se sabe por definición que $\vec{x}(t)$ vendrá representada como una función sinusoidal, como se observa que el móvil no parte del centro del movimiento sino que del extremo izquierdo se considera prudente representarlo en función del Coseno.

Entonces, la formula general para la posición respecto al tiempo en el caso de estudio es: $\vec{x}(t) = x_0 Cos(\omega t) + \alpha$. Por definición se tiene que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y según los datos recibidos el móvil retorna a la posición inicial a los 8 segundos por lo que $T = 8s$ y $\omega = \frac{2\pi}{8} = 0{,}785\ s^{-1}$. Por otro lado α corresponde a un desplazamiento en el eje de las coordenadas respecto al centro de oscilación por lo que desplazar el eje de referencia al extremo izquierdo implica que $\alpha = 3$. El coeficiente x_0 corresponde a la elongación máxima respecto al centro del movimiento, en este caso $x = 3$ sin embargo, debido a la periodicidad del coseno para $t = 0$ la posición respecto al eje de oscilación es -3 por lo que $x_0 = -3$.

Finalmente se obtuvo que $\vec{x}(t) = -3Cos(0{,}785t) + 3$ y su gráfica se muestra a continuación.



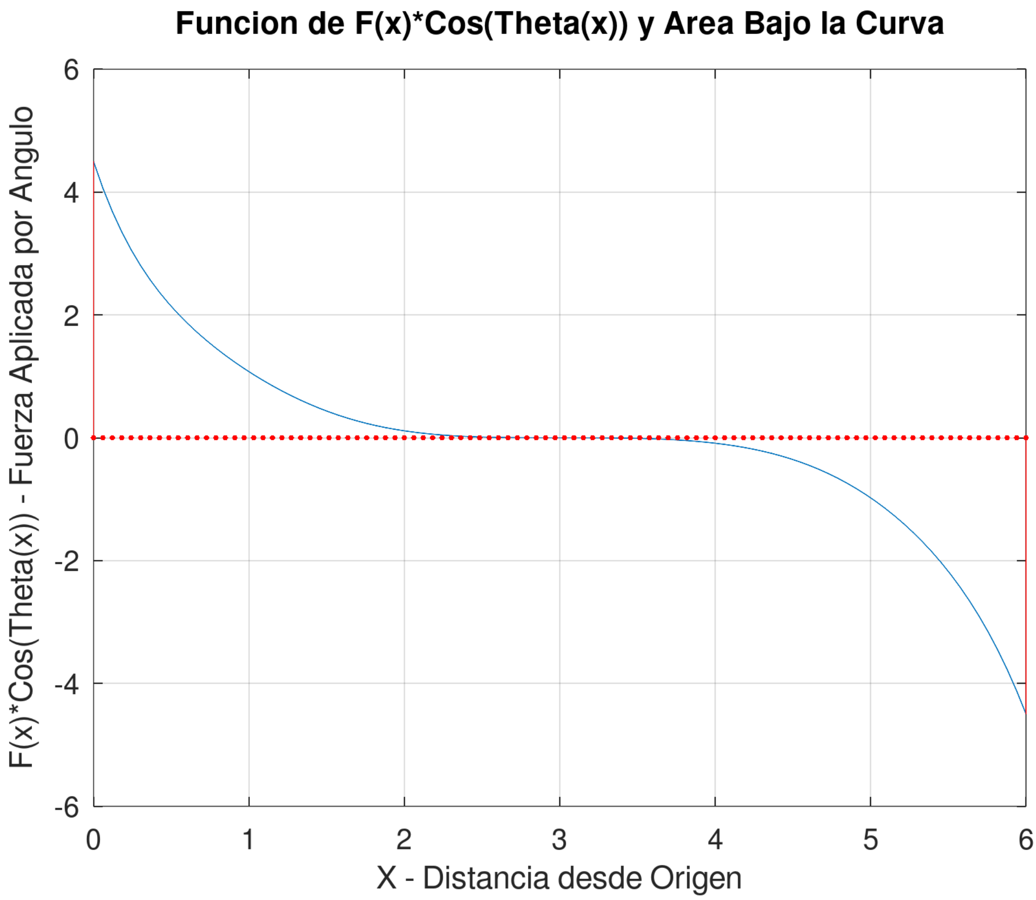
3.3. Tiempo en el que se alcanza el centro de oscilación

Encontrar el tiempo en el cual el móvil pasa por el centro de oscilación por primera vez consiste en resolver la ecuación no lineal $-3Cos(0{,}785t) + 3 = 3$ que por simplificaciones es equivalente a $-3Cos(0{,}785t) = 0$. Para resolver esta ecuación se recurre al método de la secante. Este método se programo en el archivo *secante.m* y se emplea en el archivo principal *main.m* arrojando como resultado que la solución a la ecuación es $t \approx 2{,}0138$ con un error de $error = 1{,}9303 \times 10^{-9}$ convergiendo en 5 iteraciones.

3.4. Trabajo realizado por la fuerza F

Por definición de trabajo se tiene que $W = \int_{x_0}^{x_f} \vec{F}(x) \cdot dx$ desarrollando el producto escalar se tiene que $W = \int_{x_0}^{x_f} F(x)Cos(\theta(x))\ dx$. De igual manera se encuentra un polinomio interpolador que represente $\theta(x)$ para poder estimar la integral. Finalmente se utiliza la función *Simpson.m* para encontrar una aproximación adecuada del trabajo total realizado por la Fuerza F.

Para ilustrar, se realizo la gráfica de $F(x)Cos(\theta(x))$ que se muestra a continuación y se obtuvo como aproximación para el trabajo $W = 0{,}06\ J$ lo cual es bastante cercano a 0 y esto no es de sorprender dada la naturaleza de la fuerza F.



3.5. Velocidad del Cuerpo en cada punto

La velocidad estimada en cada punto puede ser estimada basándose únicamente en la tabla recibida aplicando el método de diferencias finitas en cada punto. Para obtener mejores resultados se utilizan diferencias centrales en los puntos intermedios y de segundo orden en los extremos.

Por otro lado, desde el punto de vista analítico $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d}{dt}(-3Cos(0{,}785t) + 3) = 2{,}355 * Sen(0{,}785t)$. Utilizando la expresion analitica y los valores estimados de la velocidad en cada punto se calcula el error cometido.

Se implemento el método de diferencias finitas de segundo orden en el archivo *difdev.m* y se utilizo en el archivo principal para obtener los resultados que se muestran a continuación. Como se puede apreciar las aproximaciones son bastante certeras teniendo errores absolutos bastante bajos.

$\bar{v}$	0.2400	1.4800	2.1100	1.5200	0.0490	-1.4550	-2.1090	-1.5450	-0.3750
v	0	1.6646	2.3550	1.6672	0.0038	-1.6619	-2.3550	-1.6699	-0.0075
error	0.2400	0.1846	0.2450	0.1472	0.0452	0.2069	0.2460	0.1249	0.3675

4. Conclusión

Durante el desarrollo del proyecto quedo en evidencia que las técnicas y métodos numéricos aprendidos a lo largo del curso son una herramienta bastante poderosa para la resolución y análisis de problemas y fenómenos físicos. No son conceptos abstractos aislados sino que se pueden encontrar en problemas reales y de uso cotidiano para los ingenieros y científicos en general.