

**Paso 3** Si  $i \neq 0$  entonces haga

$$Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}.$$

**Paso 4** Para  $i = 2, 3, \dots, 2n + 1$

$$\text{para } j = 2, 3, \dots, i \text{ haga } Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}.$$

**Paso 5** SALIDA ( $Q_{0,0}, Q_{1,1}, \dots, Q_{2n+1,2n+1}$ );  
PARE.



## 3.5 Interpolación de spline cúbico<sup>1</sup>

Las secciones previas se preocuparon por la aproximación de las funciones arbitrarias en intervalos cerrados usando un polinomio individual. Sin embargo, los polinomios de orden superior pueden oscilar erráticamente; es decir, una fluctuación menor sobre una pequeña parte del intervalo puede inducir fluctuaciones grandes sobre todo el rango. Observaremos un buen ejemplo de esto en la figura 3.14 al final de esta sección.

Un enfoque alternativo es dividir el intervalo de aproximación en un conjunto de subintervalos y construir (en general) un polinomio de aproximación diferente en cada subintervalo. Esto se llama **aproximación polinomial por tramos**.

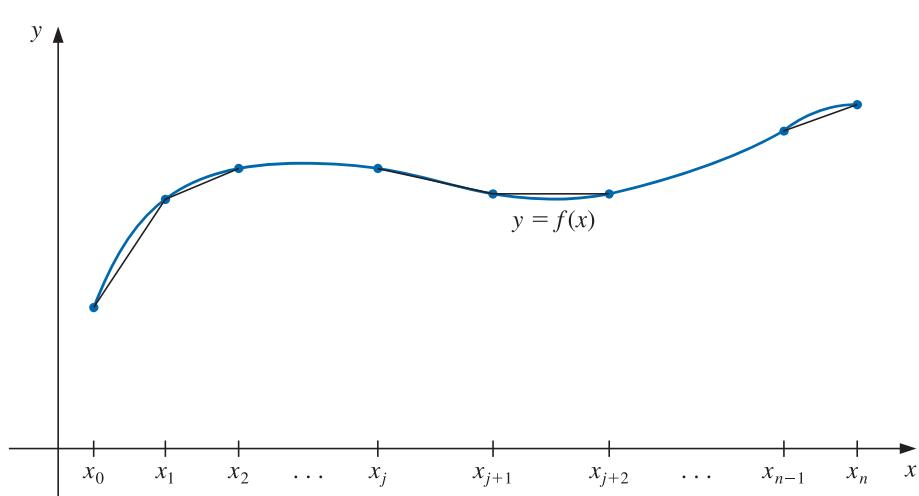
### Aproximación de polinomio por tramos

La aproximación polinomial por tramos más simple es la interpolación **lineal por tramos**, la cual consiste en unir un conjunto de puntos de datos

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$$

mediante una serie de líneas rectas, como se muestra en la figura 3.7.

**Figura 3.7**



Una desventaja de la aproximación mediante funciones lineales es que probablemente no existe diferenciabilidad en los extremos de los subintervalos, lo que, en un contexto

<sup>1</sup>Las pruebas de los teoremas en esta sección dependen de los resultados en el capítulo 6.

geométrico, significa que la función de interpolación no es “suave”. A menudo es claro, a partir de las condiciones físicas, que se requiere suavidad, por lo que la función de aproximación debe ser continuamente diferenciable.

Un procedimiento alterno es usar un polinomio por tramos de tipo Hermite. Por ejemplo, si se conocen los valores de  $f$  y de  $f'$  en cada uno de los puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , se puede usar un polinomio cúbico de Hermite en cada uno de los subintervalos  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  para obtener una función que tiene una derivada continua en un intervalo  $[x_0, x_n]$ .

Determinar el polinomio cúbico de Hermite adecuado en un intervalo dado es simplemente cuestión de calcular  $H_3(x)$  para ese intervalo. Los polinomios de interpolación de Lagrange necesarios para determinar  $H_3$ , son de primer grado, por lo que esto se puede lograr sin mayor dificultad. Sin embargo, para usar los polinomios por tramos de Hermite para la interpolación general, necesitamos conocer la derivada de la función que se va a aproximar y esto con frecuencia no está disponible.

El resto de esta sección considera que la aproximación usa polinomios por tramos que no requieren información específica sobre la derivada excepto, tal vez, en los extremos del intervalo en el que la función se aproxima.

El tipo más simple de función polinomial por tramos diferenciable en un intervalo completo  $[x_0, x_1]$  es la función obtenida al ajustar un polinomio cuadrático entre cada par sucesivo de nodos. Esto se hace al construir una cuadrática en  $[x_0, x_1]$  que concuerda con la función en  $x_0$  y  $x_1$ , otra cuadrática en  $[x_1, x_2]$  que concuerda con la función en  $x_1$  y  $x_2$ , y así sucesivamente. Un polinomio cuadrático general tiene tres constantes arbitrarias: el término constante, el coeficiente de  $x$  y el coeficiente de  $x^2$ , y sólo se requieren dos condiciones para ajustar los datos en los extremos de cada subintervalo. Por lo tanto, existe flexibilidad que permite seleccionar las cuadráticas de tal forma que el interpolante tenga una derivada continua en  $[x_0, x_n]$ . La dificultad surge porque generalmente necesitamos especificar condiciones sobre la derivada del interpolante en los extremos  $x_0$  y  $x_n$ . No hay un número suficiente de constantes para garantizar que las condiciones se satisfagan (consulte el ejercicio 34).

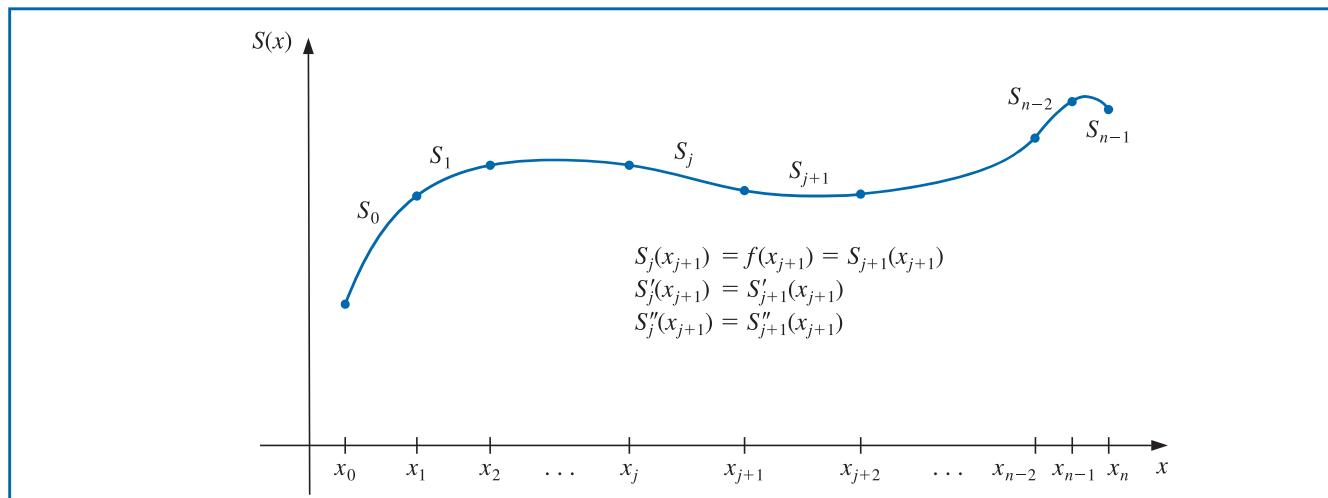
Isaac Jacob Schoenberg (1903–1990) desarrolló su trabajo sobre splines durante la Segunda Guerra Mundial mientras estaba de licencia en la Universidad de Pennsylvania para trabajar en el Army's Ballistic Research Laboratory (Laboratorio de Investigación de Balística del Ejército) en Aberdeen, Maryland. Su trabajo original implicaba procedimientos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. La aplicación mucho más amplia de los splines en las áreas de ajuste de datos y diseño de geometría asistida por computador se volvieron evidentes con la disponibilidad generalizada de las computadoras en la década de 1960.

La raíz de la palabra “spline” es la misma que la de “splint”. Originalmente, era una tira pequeña de madera que se puede utilizar para unir dos tablas. Más adelante, la palabra se usó para dibujar curvas suaves y continuas al forzar que la tira pasara a través de puntos específicos y siguiera a lo largo de la curva.

### Splines cúbicos

La aproximación polinomial por tramos más común usa polinomios cúbicos entre cada par sucesivo de nodos y recibe el nombre de **interpolación de spline cúbico**. Un polinomio cúbico general implica cuatro constantes, por lo que existe suficiente flexibilidad en el procedimiento de spline cúbico para garantizar que el interpolante no sólo es continuamente diferenciable en el intervalo, sino también tiene una segunda derivada continua. Sin embargo, la construcción del spline cúbico no supone que las derivadas del interpolante concuerden con las de la función en su aproximación, incluso en los nodos (consulte la figura 3.8.).

Figura 3.8



**Definición 3.10**

Dada una función  $f$  definida en  $[a, b]$  y un conjunto de nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , un **interpolante de spline cúbico**  $S$  para  $f$  es una función que satisface las siguientes condiciones:

**Un spline natural no tiene condiciones impuestas para la dirección en sus extremos, por lo que la curva toma la forma de una línea recta después de pasar por los puntos de interpolación más cercanos a sus extremos. El nombre deriva del hecho de que ésta es la forma natural que asume una tira flexible, si es forzada a pasar por los puntos de interpolación específicos sin restricciones adicionales (consulte la figura 3.9.)**



Figura 3.9

- a)  $S(x)$  es un polinomio cúbico, que se denota  $S_j(x)$ , en el subintervalo  $[x_j, x_{j+1}]$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- b)  $S_j(x_j) = f(x_j)$  y  $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- c)  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ; (*implícito en b.*)
- d)  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
- e)  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ ;
- f) Uno de los siguientes conjuntos de condiciones de frontera se satisface:
  - i)  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  (**frontera natural**) (*o libre*);
  - ii)  $S'(x_0) = f'(x_0)$  y  $S'(x_n) = f'(x_n)$  (**frontera condicionada**).

Aunque los splines cúbicos se definen con otras condiciones de frontera, las condiciones dadas en la parte f) son suficientes para nuestros propósitos. Cuando se presentan condiciones de frontera libres, el spline recibe el nombre de **spline natural** y su gráfica se aproxima a la forma que una varilla flexible y larga asumiría si fuera forzada a pasar por los puntos de datos  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ .

En general, las condiciones de frontera condicionada conducen a aproximaciones más precisas porque incluyen más información sobre la función. Sin embargo, para mantener este tipo de condición de frontera, es necesario tener, ya sea los valores de la derivada en los extremos o una aproximación precisa para esos valores.

**Ejemplo 1** Construya un spline cúbico natural que pase por los puntos  $(1, 2), (2, 3)$  y  $(3, 5)$ .

**Solución** Este spline consiste en dos cúbicos. El primero para el intervalo  $[1, 2]$ , que se denota

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - 1) + c_0(x - 1)^2 + d_0(x - 1)^3,$$

y el otro para  $[2, 3]$ , que se denota

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - 2) + c_1(x - 2)^2 + d_1(x - 2)^3.$$

Existen ocho constantes que se van a determinar y esto requiere ocho condiciones. Cuatro condiciones a partir del hecho de que los splines deben concordar con los datos en los nodos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2 &= f(1) = a_0, & 3 &= f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0, & 3 &= f(2) = a_1, & y \\ 5 &= f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1. \end{aligned}$$

Dos más provienen del hecho de que  $S'_0(2) = S'_1(2)$  y  $S''_0(2) = S''_1(2)$ . Estos son

$$S'_0(2) = S'_1(2) : \quad b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \quad y \quad S''_0(2) = S''_1(2) : \quad 2c_0 + 6d_0 = 2c_1.$$

Los dos finales provienen de las condiciones de frontera natural:

$$S''_0(1) = 0 : \quad 2c_0 = 0 \quad y \quad S''_1(3) = 0 : \quad 2c_1 + 6d_1 = 0.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos el spline

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{4}(x - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)^3, & \text{para } x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x - 2) + \frac{3}{4}(x - 2)^2 - \frac{1}{4}(x - 2)^3, & \text{para } x \in [2, 3]. \end{cases}$$
■

### Construcción de un spline cúbico

Como lo demuestra el ejemplo previo, un spline definido en un intervalo que se ha dividido en  $n$  subintervalos requerirá determinar  $4n$  constantes. Para construir el spline cúbico que se interpola para una función dada  $f$ , las condiciones en la definición se aplican a los polinomios cúbicos

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Puesto que  $S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$ , la condición c) se puede aplicar para obtener

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 2$ .

Como los términos  $x_{j+1} - x_j$  son usados repetidamente en este desarrollo, es conveniente introducir una notación más simple

$$h_j = x_{j+1} - x_j,$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Si también definimos  $a_n = f(x_n)$ , entonces la ecuación

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \quad (3.15)$$

se mantiene para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

De manera similar, defina  $b_n = S'(x_n)$  y observe que

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

implica que  $S'_j(x_j) = b_j$ , para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Al aplicar la condición en la parte d) obtenemos

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \quad (3.16)$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Otra relación entre los coeficientes de  $S_j$  se obtiene al definir  $c_n = S''(x_n)/2$  y aplicar la condición en la parte e). Entonces, para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ ,

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j. \quad (3.17)$$

Resolviendo para  $d_j$  en la ecuación (3.17) y sustituyendo este valor en las ecuaciones (3.15) y (3.16) obtenemos, para cada  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , las nuevas ecuaciones

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad (3.18)$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \quad (3.19)$$

La relación final que involucra los coeficientes se obtiene al resolver la ecuación adecuada en la forma de la ecuación (3.18), primero para  $b_j$ ,

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad (3.20)$$

y entonces, con una reducción del índice, para  $b_{j-1}$ . Esto nos da

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

Al sustituir estos valores en la ecuación obtenida de la ecuación (3.19), con el índice reducido en uno, obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}), \quad (3.21)$$

Para cada  $j = 1, 2, \dots, n-1$ . Este sistema sólo tiene los  $\{c_j\}_{j=0}^n$  como incógnitas. Los valores de  $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$  y  $\{a_j\}_{j=0}^n$  están dados, respectivamente, por el espaciado de los nodos  $\{x_j\}_{j=0}^n$  y los valores de  $f$  en los nodos. Por lo que, una vez que se determinan los valores de  $\{c_j\}_{j=0}^n$ , es sencillo encontrar el resto de las constantes  $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$  a partir de la ecuación (3.20) y  $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$  a partir de la ecuación (3.17). Entonces podemos construir los polinomios cúbicos  $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ .

La pregunta más importante que surge en relación con esta construcción es si los valores de  $\{c_j\}_{j=0}^n$  se pueden encontrar usando el sistema de ecuaciones dado en la ecuación (3.21) y, en este caso, si estos valores son únicos. Los siguientes teoremas indican que éste es el caso cuando se impone cualquiera de las condiciones de frontera dadas en la parte f) de la definición. Las demostraciones de estos teoremas requieren material a partir del álgebra lineal, la cual se analiza en el capítulo 6.

### Splines naturales

**Teorema 3.11** Si  $f$  se define en  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , entonces  $f$  tiene un spline natural único que interpola  $S$  en los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; es decir, un spline interpolante que satisface las condiciones de frontera natural  $S''(a) = 0$  y  $S''(b) = 0$ .

**Demostración** Las condiciones de frontera en este caso implican que  $c_n = S''(x_n)/2 = 0$  y que

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0),$$

por lo que  $c_0 = 0$ . Las dos ecuaciones  $c_0 = 0$  y  $c_n = 0$  junto con las ecuaciones en (3.21) producen un sistema lineal descrito por la ecuación matriz-vector  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde  $A$  es la matriz  $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & 1 \end{bmatrix},$$

y  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x}$  son los vectores

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

La matriz  $A$  es estrictamente dominante de manera diagonal; es decir, en cada fila, la magnitud de la entrada diagonal excede la suma de las magnitudes de todas las otras entradas en la fila. Un sistema lineal con una matriz de esta forma se mostrará mediante el teorema 6.21 en la sección 6.6 para tener una única solución para  $c_0, c_1, \dots, c_n$ . ■

La solución para el problema del spline cúbico con las condiciones de frontera  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$  se puede obtener al aplicar el algoritmo 3.4.

#### ALGORITMO

### 3.4

#### Spline cúbico natural

Para construir el spline cúbico interpolante  $S$  para la función  $f$ , definido en los números  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , que satisfacen  $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ :

**ENTRADA**  $n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$ .

**SALIDA**  $a_j, b_j, c_j, d_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

(Nota:  $S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$  para  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ .)

**Paso 1** Para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  haga  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

**Paso 2** Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  haga

$$\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}).$$

**Paso 3** Determine  $l_0 = 1$ ; (*Los pasos 3, 4 y 5 y parte del paso 6 resuelven un sistema lineal tridiagonal con un método descrito en el algoritmo 6.7.*)

$$\mu_0 = 0;$$

$$z_0 = 0.$$

**Paso 4** Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\text{haga } l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1};$$

$$\mu_i = h_i/l_i;$$

$$z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i.$$

**Paso 5** Haga  $l_n = 1$ ;

$$z_n = 0;$$

$$c_n = 0.$$

**Paso 6** Para  $j = n - 1, n - 2, \dots, 0$

$$\text{haga } c_j = z_j - \mu_j c_{j+1};$$

$$b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3;$$

$$d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j).$$

**Paso 7** SALIDA  $(a_j, b_j, c_j, d_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1)$ ;

PARE. ■

**Ejemplo 2** Al inicio del capítulo 3, proporcionamos algunos polinomios de Taylor para aproximar la exponencial  $f(x) = e^x$ . Use los puntos  $(0, 1)$ ,  $(1, e)$ ,  $(2, e^2)$ , y  $(3, e^3)$  para formar un spline natural  $S(x)$  que se aproxima a  $f(x) = e^x$ .

**Solución** Tenemos  $n = 3$ ,  $h_0 = h_1 = h_2 = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = e$ ,  $a_2 = e^2$ , y  $a_3 = e^3$ . Por lo que, la matriz A y los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x}$  determinados en el teorema 3.11 tienen las formas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(e^2 - 2e + 1) \\ 3(e^3 - 2e^2 + e) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

La ecuación matriz-vector  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es equivalente al sistema de ecuaciones

$$c_0 = 0,$$

$$c_0 + 4c_1 + c_2 = 3(e^2 - 2e + 1),$$

$$c_1 + 4c_2 + c_3 = 3(e^3 - 2e^2 + e),$$

$$c_3 = 0.$$

Este sistema tiene la solución  $c_0 = c_3 = 0$ , y para cinco lugares decimales,

$$c_1 = \frac{1}{5}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) \approx 0.75685, \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1}{5}(4e^3 - 9e^2 + 6e - 1) \approx 5.83007.$$

Al resolver para las constantes restantes obtenemos

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) \\ &= (e - 1) - \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) \approx 1.46600, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) \\ &= (e^2 - e) - \frac{1}{15}(2e^3 + 3e^2 - 12e + 7) \approx 2.22285, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) \\ &= (e^3 - e^2) - \frac{1}{15}(8e^3 - 18e^2 + 12e - 2) \approx 8.80977, \end{aligned}$$

$$d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{15}(-e^3 + 6e^2 - 9e + 4) \approx 0.25228,$$

$$d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{3}(e^3 - 3e^2 + 3e - 1) \approx 1.69107,$$

y

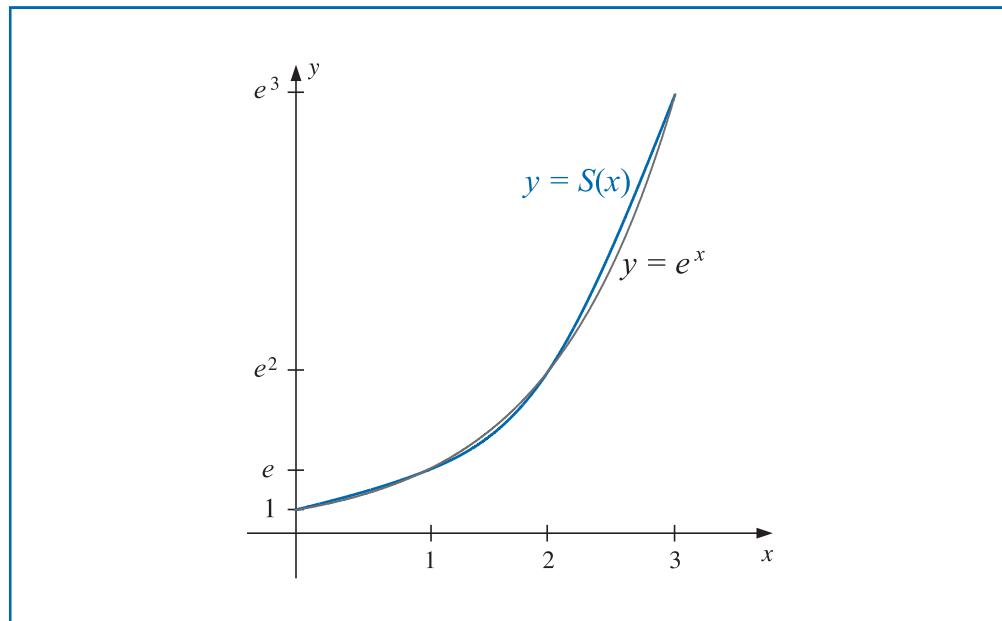
$$d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_2) = \frac{1}{15}(-4e^3 + 9e^2 - 6e + 1) \approx -1.94336.$$

El spline cúbico natural se describe por tramos mediante

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 1.46600x + 0.25228x^3, & \text{para } x \in [0, 1], \\ 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3, & \text{para } x \in [1, 2], \\ 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3, & \text{para } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

El spline y  $f(x) = e^x$  se muestran en la figura 3.10. ■

**Figura 3.10**



Una vez que hemos determinado un spline para una aproximación de una función, podemos usarlo para aproximar otras propiedades de la función. La siguiente ilustración implica la integral del spline que encontramos en el ejemplo previo.

**Ilustración** Para aproximar la integral de  $f(x) = e^x$  en  $[0, 3]$ , que tiene el valor

$$\int_0^3 e^x dx = e^3 - 1 \approx 20.08553692 - 1 = 19.08553692,$$

podemos integrar por tramos el spline que approxima  $f$  en este intervalo. Esto nos da

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(x) dx &= \int_0^1 1 + 1.46600x + 0.25228x^3 dx \\ &\quad + \int_1^2 2.71828 + 2.22285(x-1) + 0.75685(x-1)^2 + 1.69107(x-1)^3 dx \\ &\quad + \int_2^3 7.38906 + 8.80977(x-2) + 5.83007(x-2)^2 - 1.94336(x-2)^3 dx. \end{aligned}$$

Integrando y calculando los valores de las potencias obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 S(x) dx &= \left[ x + 1.46600 \frac{x^2}{2} + 0.25228 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
 &\quad + \left[ 2.71828(x-1) + 2.22285 \frac{(x-1)^2}{2} + 0.75685 \frac{(x-1)^3}{3} + 1.69107 \frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^2 \\
 &\quad + \left[ 7.38906(x-2) + 8.80977 \frac{(x-2)^2}{2} + 5.83007 \frac{(x-2)^3}{3} - 1.94336 \frac{(x-2)^4}{4} \right]_2^3 \\
 &= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2} (1.46600 + 2.22285 + 8.80977) \\
 &\quad + \frac{1}{3} (0.75685 + 5.83007) + \frac{1}{4} (0.25228 + 1.69107 - 1.94336) \\
 &= 19.55229.
 \end{aligned}$$

Puesto que los nodos están espaciados de manera equivalente en este ejemplo, la aproximación de la integral es simplemente

$$\int_0^3 S(x) dx = (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2). \quad (3.22)$$

■

### Splines condicionados

**Ejemplo 3** En el ejemplo 1 encontramos un spline natural  $S$  que pasa por los puntos  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  y  $(3, 5)$ . Construir un spline condicionado  $s$  que pase por esos puntos y que cumpla  $s'(1) = 2$  y  $s'(3) = 1$ .

**Solución** Si

$$s_0(x) = a_0 + b_0(x-1) + c_0(x-1)^2 + d_0(x-1)^3$$

es el cúbico en  $[1, 2]$  y el cúbico en  $[2, 3]$  es

$$s_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3.$$

Entonces, la mayoría de las condiciones para determinar ocho constantes son iguales a las del ejemplo 1. Es decir,

$$\begin{aligned}
 2 &= f(1) = a_0, & 3 &= f(2) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0, & 3 &= f(2) = a_1, & \text{y} \\
 5 &= f(3) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.
 \end{aligned}$$

$$s'_0(2) = s'_1(2) : b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 \quad \text{y} \quad s''_0(2) = s''_1(2) : 2c_0 + 6d_0 = 2c_1$$

Sin embargo, las condiciones de frontera ahora son

$$s'_0(1) = 2 : \quad b_0 = 2 \quad \text{y} \quad s'_1(3) = 1 : \quad b_1 + 2c_1 + 3d_1 = 1.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos el spline como

$$s(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2}(x-1)^3, & \text{para } x \in [1, 2] \\ 3 + \frac{3}{2}(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^3, & \text{para } x \in [2, 3] \end{cases}.$$

En el caso general de las condiciones de frontera condicionada, tenemos un resultado que es similar al teorema para las condiciones de frontera natural descritas en el teorema 3.11.

**Teorema 3.12** Si  $f$  se define en  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  y es diferenciable en  $a$  y  $b$ , entonces  $f$  tiene un único spline interpolante  $S$  condicionado en los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; es decir, un spline interpolante que satisface las condiciones de frontera condicionada  $S'(a) = f'(a)$  y  $S'(b) = f'(b)$ .

**Demostración** Puesto que  $f'(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$ , la ecuación (3.20) con  $j = 0$  implica que

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1).$$

Por consiguiente,

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a).$$

De igual forma,

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n),$$

por lo que la ecuación (3.20) con  $j = n - 1$  implica que

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n), \end{aligned}$$

y

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$

Las ecuaciones (3.21) junto con las ecuaciones

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

y

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

determinan el sistema lineal  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \\ \vdots & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad \text{y } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Esta matriz  $A$  también es estrictamente dominante de manera diagonal, por lo que satisface las condiciones del teorema 6.21 en la sección 6.6. Por lo tanto, el sistema lineal tiene una solución única para  $c_0, c_1, \dots, c_n$ . ■

La solución del problema de spline cúbico con condiciones de frontera  $S'(x_0) = f'(x_0)$  y  $S'(x_n) = f'(x_n)$  se puede obtener al aplicar el algoritmo 3.5.

### ALGORITMO

## 3.5

### Spline cúbico condicionado

Para construir el spline cúbico interpolante  $S$  para la función  $f$  definida en los números  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , que satisfacen  $S'(x_0) = f'(x_0)$  y  $S'(x_n) = f'(x_n)$ :

**ENTRADA**  $n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n); FPO = f'(x_0); FPN = f'(x_n)$ .

**SALIDA**  $a_j, b_j, c_j, d_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

(Nota:  $S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$  para  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ .)

**Paso 1** Para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  haga  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

**Paso 2** Haga  $\alpha_0 = 3(a_1 - a_0)/h_0 - 3FPO$ ;  
 $\alpha_n = 3FPN - 3(a_n - a_{n-1})/h_{n-1}$ .

**Paso 3** Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\text{haga } \alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}).$$

**Paso 4** Haga  $l_0 = 2h_0$ ; (*Los pasos 4, 5 y 6 y parte del paso 7 resuelven un sistema lineal tridiagonal con un método descrito en el algoritmo 6.7.*)

$$\mu_0 = 0.5;$$

$$z_0 = \alpha_0/l_0.$$

**Paso 5** Para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\text{haga } l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1};$$

$$\mu_i = h_i/l_i;$$

$$z_i = (\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1})/l_i.$$

**Paso 6** Haga  $l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1})$ ;  
 $z_n = (\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1})/l_n$ ;  
 $c_n = z_n$ .

**Paso 7** Para  $j = n-1, n-2, \dots, 0$   
haga  $c_j = z_j - \mu_j c_{j+1}$ ;  
 $b_j = (a_{j+1} - a_j)/h_j - h_j(c_{j+1} + 2c_j)/3$ ;  
 $d_j = (c_{j+1} - c_j)/(3h_j)$ .

**Paso 8** SALIDA ( $a_j, b_j, c_j, d_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n-1$ );  
PARE.

**Ejemplo 4** En el ejemplo 2 se usó un spline natural y los puntos de datos  $(0, 1), (1, e), (2, e^2)$  y  $(3, e^3)$  para formar una nueva función de aproximación  $S(x)$ . Determine el spline condicionado  $s(x)$  que utiliza estos datos y la información adicional,  $f'(x) = e^x$ ,  $f'(0) = 1$  y  $f'(3) = e^3$ .

**Solución** Como en el ejemplo 2, tenemos  $n = 3, h_0 = h_1 = h_2 = 1, a_0 = 0, a_1 = e, a_2 = e^2$ , y  $a_3 = e^3$ . Esto, junto con la información que  $f'(0) = 1$  y  $f'(3) = e^3$ , da la matriz  $A$  y los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{x}$  con las formas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3(e-2) \\ 3(e^2-2e+1) \\ 3(e^3-2e^2+e) \\ 3e^2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

La ecuación matriz-vector  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2c_0 + c_1 &= 3(e-2), \\ c_0 + 4c_1 + c_2 &= 3(e^2-2e+1), \\ c_1 + 4c_2 + c_3 &= 3(e^3-2e^2+e), \\ c_2 + 2c_3 &= 3e^2. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema simultáneamente para  $c_0, c_1, c_2$  y  $c_3$  obtenemos, con cinco lugares decimales,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{15}(2e^3 - 12e^2 + 42e - 59) = 0.44468, \\ c_1 &= \frac{1}{15}(-4e^3 + 24e^2 - 39e + 28) = 1.26548, \\ c_2 &= \frac{1}{15}(14e^3 - 39e^2 + 24e - 8) = 3.35087, \\ c_3 &= \frac{1}{15}(-7e^3 + 42e^2 - 12e + 4) = 9.40815. \end{aligned}$$

Al resolver para las constantes restantes de la misma manera que en el ejemplo 2 obtenemos

$$b_0 = 1.00000, \quad b_1 = 2.71016, \quad b_2 = 7.32652,$$

y

$$d_0 = 0.27360, \quad d_1 = 0.69513, \quad d_2 = 2.01909.$$

Esto nos da el spline cúbico condicionado

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x + 0.44468x^2 + 0.27360x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2.71828 + 2.71016(x-1) + 1.26548(x-1)^2 + 0.69513(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 7.38906 + 7.32652(x-2) + 3.35087(x-2)^2 + 2.01909(x-2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

La gráfica del spline condicionado y  $f(x) = e^x$  son tan similares que no es posible observar diferencias. ■

También podemos aproximar la integral de  $f$  en  $[0, 3]$  al integrar el spline condicionado. El valor exacto de la integral es

$$\int_0^3 e^x dx = e^3 - 1 \approx 20.08554 - 1 = 19.08554.$$

Puesto que los datos están igualmente espaciados, integrar por tramos el spline condicionado resulta en la misma fórmula que en (3.22); es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^3 s(x) dx &= (a_0 + a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_0 + b_1 + b_2) \\ &\quad + \frac{1}{3}(c_0 + c_1 + c_2) + \frac{1}{4}(d_0 + d_1 + d_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación de integral es

$$\begin{aligned} \int_0^3 s(x) dx &= (1 + 2.71828 + 7.38906) + \frac{1}{2}(1 + 2.71016 + 7.32652) \\ &\quad + \frac{1}{3}(0.44468 + 1.26548 + 3.35087) + \frac{1}{4}(0.27360 + 0.69513 + 2.01909) \\ &= 19.05965. \end{aligned}$$

El error absoluto en la aproximación integral usando los splines naturales y condicionados es

$$\text{Natural: } |19.08554 - 19.55229| = 0.46675$$

y

$$\text{Condicionado: } |19.08554 - 19.05965| = 0.02589.$$

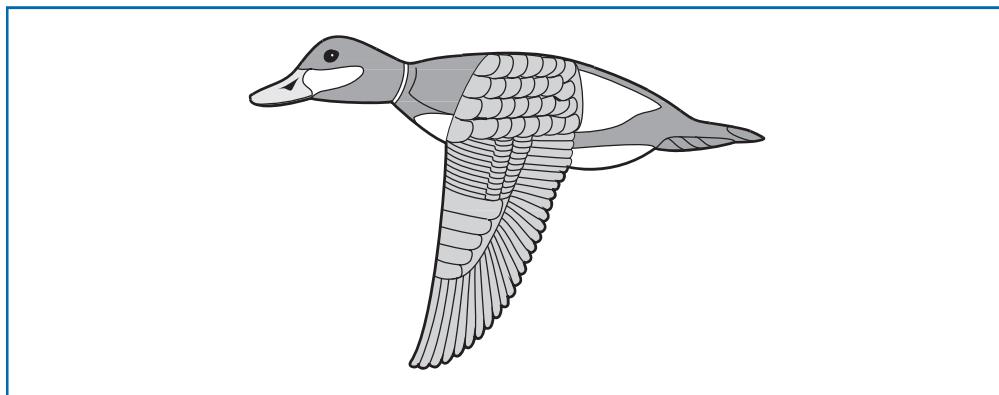
Para propósitos de integración, el spline condicionado es inmensamente superior. Esto no debería ser una sorpresa porque las condiciones de frontera para el spline condicionado son exactas, mientras que para el spline natural fundamentalmente asumimos que,  $f''(x) = e^x$ ,

$$0 = S''(x) \approx f''(0) = e^1 = 1 \quad \text{y} \quad 0 = S''(3) \approx f''(3) = e^3 \approx 20.$$

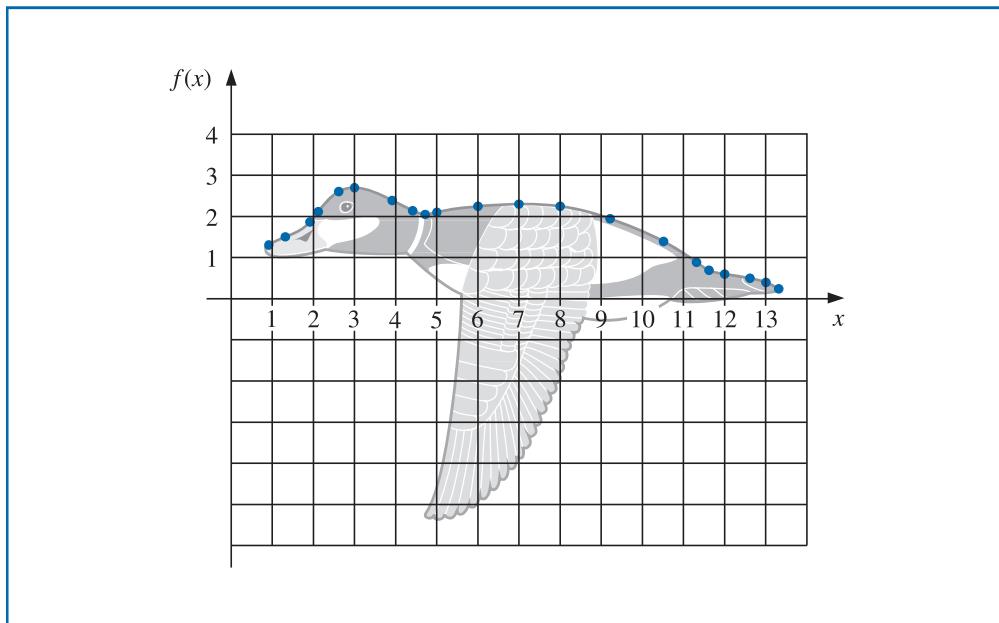
La siguiente ilustración usa un spline para aproximar una curva que no tiene una representación funcional.

### Ilustración

La figura 3.11 muestra un pato malvasía en vuelo. Para aproximar el perfil superior del pato hemos seleccionado puntos a lo largo de la curva por los cuales queremos que pase la curva de aproximación. La tabla 3.18 enumera las coordenadas de 21 puntos de datos relativos al sistema de coordenadas superpuesto que se muestra en la figura 3.12. Observe que se usan más puntos cuando la curva cambia rápidamente que cuando lo hace más despacio.

**Figura 3.11****Tabla 3.18**

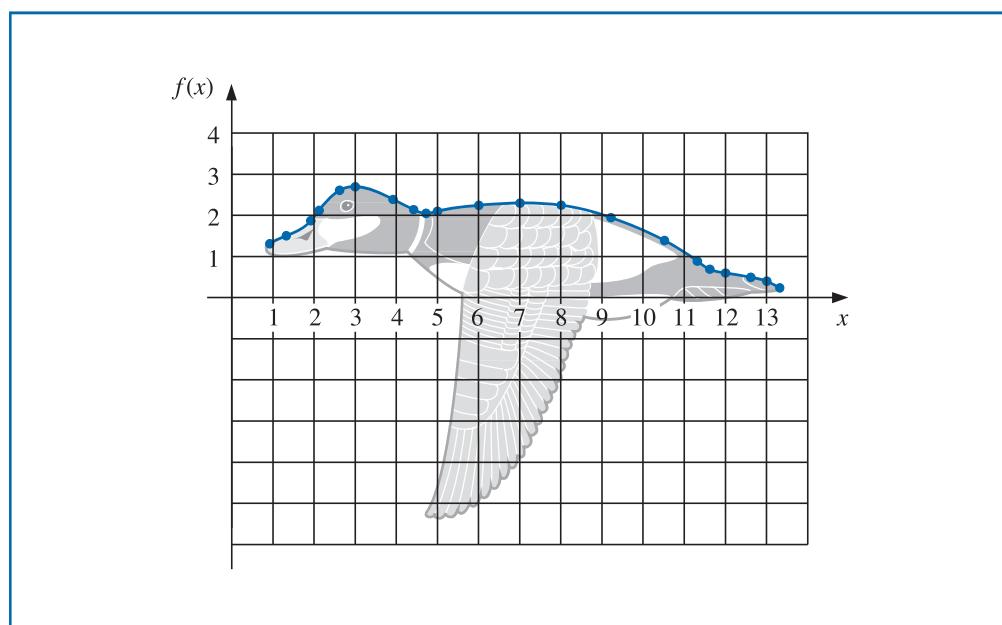
$x$	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
$f(x)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25

**Figura 3.12**

El uso del algoritmo 3.4 para generar el spline cúbico natural para estos datos produce los coeficientes que se muestran en la tabla 3.19. Esta curva spline es casi idéntica al perfil, como se muestra en la figura 3.13.

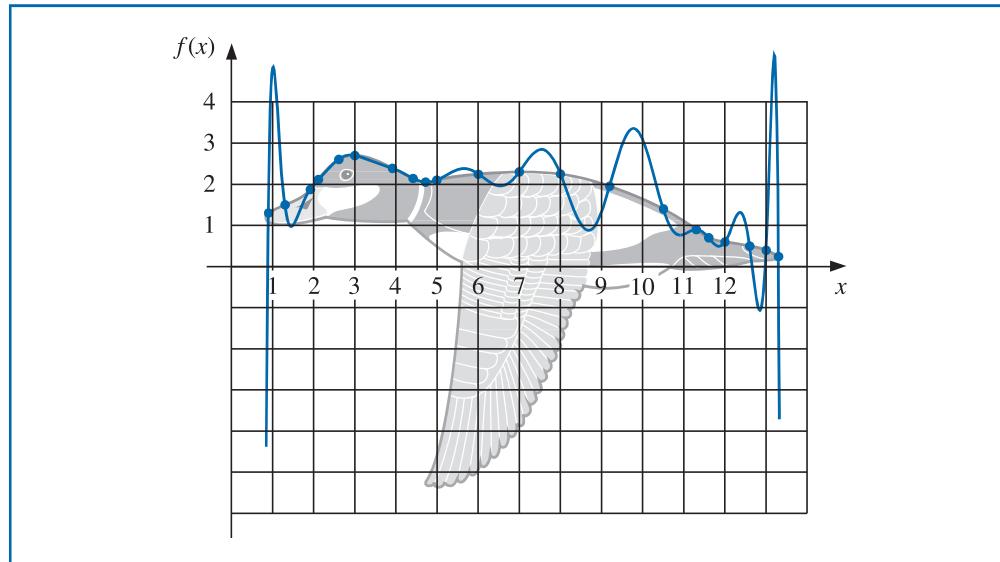
**Tabla 3.19**

$j$	$x_j$	$a_j$	$b_j$	$c_j$	$d_j$
0	0.9	1.3	0.54	0.00	-0.25
1	1.3	1.5	0.42	-0.30	0.95
2	1.9	1.85	1.09	1.41	-2.96
3	2.1	2.1	1.29	-0.37	-0.45
4	2.6	2.6	0.59	-1.04	0.45
5	3.0	2.7	-0.02	-0.50	0.17
6	3.9	2.4	-0.50	-0.03	0.08
7	4.4	2.15	-0.48	0.08	1.31
8	4.7	2.05	-0.07	1.27	-1.58
9	5.0	2.1	0.26	-0.16	0.04
10	6.0	2.25	0.08	-0.03	0.00
11	7.0	2.3	0.01	-0.04	-0.02
12	8.0	2.25	-0.14	-0.11	0.02
13	9.2	1.95	-0.34	-0.05	-0.01
14	10.5	1.4	-0.53	-0.10	-0.02
15	11.3	0.9	-0.73	-0.15	1.21
16	11.6	0.7	-0.49	0.94	-0.84
17	12.0	0.6	-0.14	-0.06	0.04
18	12.6	0.5	-0.18	0.00	-0.45
19	13.0	0.4	-0.39	-0.54	0.60
20	13.3	0.25			

**Figura 3.13**

Para propósitos de comparación, la figura 3.14 proporciona una ilustración de la curva que se genera con un polinomio de interpolación de Lagrange para ajustar los datos provistos en la tabla 3.18. En este caso, el polinomio de interpolación es de grado 20 y oscila en forma desordenada. Produce una ilustración muy extraña de la espalda del pato, en vuelo o de otra forma.

Figura 3.14



Al utilizar un spline condicionado para aproximar esta curva, necesitaríamos derivar aproximaciones para los extremos. Incluso si estas aproximaciones están disponibles, podríamos esperar poca mejora debido al acuerdo cerrado del spline cúbico natural para la curva del perfil superior. ■

Construir un spline cúbico para aproximar el perfil inferior del pato malvasía sería más difícil porque la curva para esta parte no se puede expresar como una función de  $x$ , y en ciertos puntos la curva no parece ser suave. Estos problemas se pueden resolver usando splines separados para representar varias partes de la curva, pero en la siguiente sección se considera un enfoque más eficaz para aproximar las curvas de este tipo.

En general, al aproximar funciones mediante splines cúbicos son preferibles las condiciones de frontera condicionada, por lo que la derivada de la función debe conocerse o aproximarse en los extremos del intervalo. Cuando los nodos están espaciados uniformemente cerca de ambos extremos, es posible obtener las aproximaciones con cualquiera de las fórmulas adecuadas provistas en las secciones 4.1 y 4.2. Cuando los nodos no están espaciados de manera uniforme, el problema es considerablemente más difícil.

Para concluir esta sección, listamos una fórmula de la cota de error para el spline cúbico sujeto a condiciones de frontera. La prueba de este resultado se puede encontrar en [Schul], pp. 57–58.

**Teorema 3.13** Sea  $f \in C^4[a, b]$  con  $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = M$ . Si  $S$  es el único spline cúbico condicionado interpolante para  $f$  respecto a los nodos  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , entonces, para todas las  $x$  en  $[a, b]$ .

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5M}{384} \max_{0 \leq j \leq n-1} (x_{j+1} - x_j)^4.$$

Un resultado de la cota del error de cuarto orden también se mantiene para el caso de las condiciones de frontera natural, pero es más difícil de expresar (consulte [BD], pp. 827–835).

En general, las condiciones de frontera natural proporcionarán resultados menos precisos que las de frontera condicionada cerca de los extremos del intervalo  $[x_0, x_n]$  a menos que la función  $f$  satisfaga  $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$ . Una alternativa para la condición de frontera natural que no requiere conocimiento de la derivada de  $f$  es la condición *sin nudo* (consulte [Deb2], pp. 55–56). Esta condición requiere que  $S'''(x)$  sea continua en  $x_1$  y  $x_{n-1}$ .

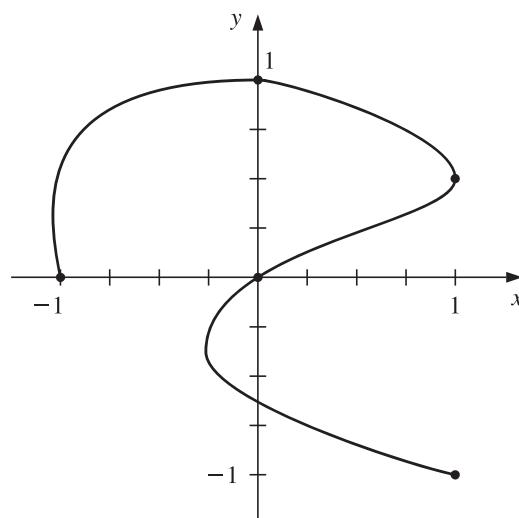
**La sección Conjunto de ejercicios 3.5 está disponible en línea. Encuentre la ruta de acceso en las páginas preliminares.**



## 3.6 Curvas paramétricas

Ninguna de las técnicas desarrolladas en este capítulo puede usarse para generar curvas de la forma que se muestra en la figura 3.15, porque esta curva no se puede expresar como una función de una variable coordenada en términos de la otra. En esta sección veremos cómo representar curvas generales al usar un parámetro para expresar tanto las variables  $x$  como  $y$ . Cualquier buen libro sobre gráficas computacionales mostrará cómo es posible ampliar esta técnica para representar curvas generales y superficies en el espacio (consulte, por ejemplo, [FVFH].)

**Figura 3.15**



Una técnica paramétrica sencilla para determinar un polinomio o un polinomio por tramos para conectar los puntos  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  en el orden provisto consiste en usar un parámetro  $t$  en un intervalo  $[t_0, t_n]$ , con  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  y construir funciones de aproximación con

$$x_i = x(t_i) \quad y \quad y_i = y(t_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, n.$$

El siguiente ejemplo muestra la técnica en el caso en que ambas funciones de aproximación son polinomios de interpolación de Lagrange.

**Ejemplo 1** Construya un par de polinomios de Lagrange para aproximar la curva que se muestra en la figura 3.15, usando los puntos de datos en la curva.

**Solución** Existe flexibilidad al seleccionar el parámetro y nosotros elegiremos los puntos  $\{t_i\}_{i=0}^4$  igualmente espaciados en  $[0, 1]$ , lo cual provee los datos en la tabla 3.20.

**Tabla 3.20**

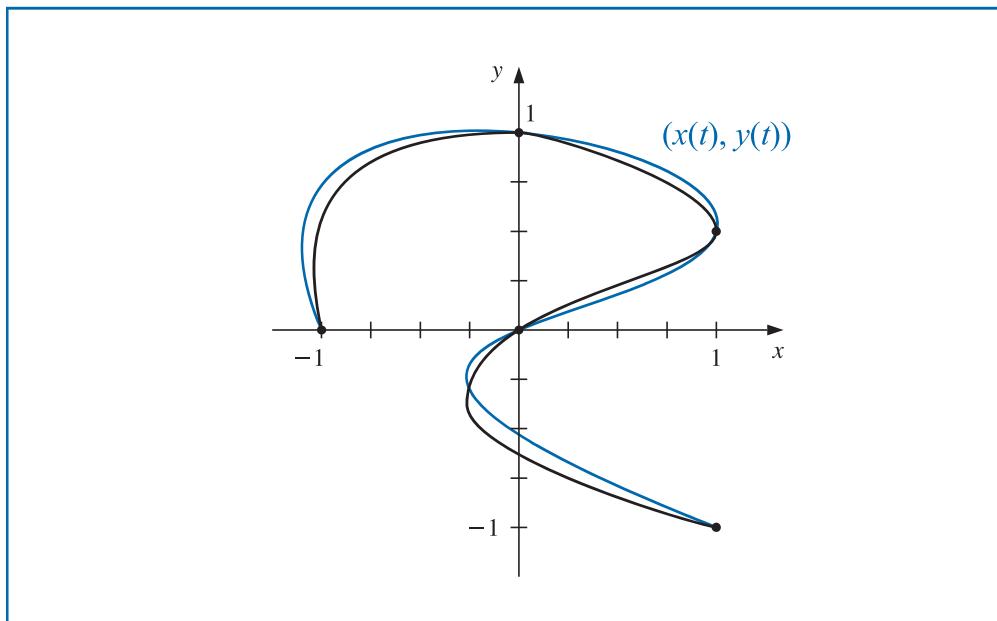
$i$	0	1	2	3	4
$t_i$	0	0.25	0.5	0.75	1
$x_i$	-1	0	1	0	1
$y_i$	0	1	0.5	0	-1

Esto produce los polinomios de interpolación

$$x(t) = (((64t - \frac{352}{3})t + 60)t - \frac{14}{3})t - 1 \quad \text{y} \quad y(t) = (((-\frac{64}{3}t + 48)t - \frac{116}{3})t + 11)t.$$

Trazar este sistema paramétrico produce la gráfica que se muestra en azul en la figura 3.16. Aunque pasa por los puntos requeridos y tiene la misma forma básica, es una aproximación bastante burda para la curva original. Una aproximación más precisa requeriría nodos adicionales, con el consiguiente incremento en computación. ■

**Figura 3.16**



Las curvas paramétricas de Hermite y de spline se pueden generar de forma similar, pero esto también requiere un gran esfuerzo computacional.

Las aplicaciones de gráficas computacionales requieren la generación rápida de curvas suaves que se pueden modificar de manera fácil y rápida. Por razones tanto estéticas como computacionales, cambiar una parte de estas curvas debería tener un efecto pequeño o ningún efecto en otras partes de las curvas. Esto elimina el uso de polinomios de interpolación y splines ya que cambiar una parte de estas curvas afecta su totalidad.

La selección de la curva para usarla en gráficas computacionales es, en general, una forma de polinomio Hermite cúbico por tramos. Cada parte de un polinomio de Hermite cúbico se completa totalmente al especificar sus extremos y las derivadas en estos extremos. Por consiguiente, una parte de la curva se puede cambiar mientras la mayor parte de la misma se deja igual. Sólo las partes adyacentes necesitan modificarse para garantizar la suavidad en los extremos. Los cálculos se pueden realizar rápidamente y es posible cambiar una sección de la curva a la vez.

El problema con la interpolación de Hermite es la necesidad de especificar las derivadas en los extremos de cada sección de la curva. Suponga que la curva tiene  $n + 1$  puntos de datos  $(x(t_0), y(t_0)), \dots, (x(t_n), y(t_n))$  y deseamos parametrizar el cúbico para permitir características complejas. Entonces, debemos especificar  $x'(t_i)$  y  $y'(t_i)$ , para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ . Esto no es tan difícil como parece ya que cada parte se genera de manera independiente. Sólo debemos garantizar que las derivadas en los extremos de cada parte coincidan con los de la parte adyacente. En esencia, entonces, podemos simplificar el proceso en uno que determine un par de polinomios de Hermite cúbicos en el parámetro  $t$ , donde  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1$ , dados los datos del extremo  $(x(0), y(0))$  y  $(x(1), y(1))$  y las derivadas  $dy/dx$  (en  $t = 0$ ) y  $dy/dx$  (en  $t = 1$ ).

**Un sistema de diseño computacional exitoso necesita estar basado en una teoría matemática formal, de tal manera que los resultados sean predecibles, pero esta teoría debería realizarse en segundo plano para que el artista pueda basar el diseño en la estética.**

Sin embargo, observe que sólo especificamos seis condiciones y los polinomios cúbicos en  $x(t)$  y  $y(t)$ , cada uno tiene cuatro parámetros, para un total de ocho. Esto proporciona flexibilidad al seleccionar el par cúbico de polinomios de Hermite para satisfacer las condiciones porque la forma natural para determinar  $x(t)$  y  $y(t)$  requiere que especifiquemos  $x'(0)$ ,  $x'(1)$ ,  $y'(0)$ , y  $y'(1)$ . La curva de Hermite explícita en  $x$  y  $y$  requiere especificar solamente los cocientes

$$\frac{dy}{dx}(t=0) = \frac{y'(0)}{x'(0)} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx}(t=1) = \frac{y'(1)}{x'(1)}.$$

Al multiplicar  $x'(0)$  y  $y'(0)$  por un factor de escala común, la recta tangente para la curva en  $(x(0), y(0))$  permanece igual, pero la forma de la curva varía. Mientras más grande sea el factor de escala, más cerca está la curva de aproximación a la recta tangente en las cercanías de  $(x(0), y(0))$ . Existe una situación similar en el otro extremo  $(x(1), y(1))$ .

Para simplificar más el proceso en las gráficas computacionales interactivas, la derivada en un punto extremo se especifica usando un segundo punto, llamado *punto guía*, en una recta tangente deseada. Mientras más lejos esté del nodo, más cerca se approxima la curva a la recta tangente cerca del nodo.

En la figura 3.17 los nodos se presentan en  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ , el punto guía para  $(x_0, y_0)$  es  $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ , y el punto guía para  $(x_1, y_1)$  es  $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$ . El polinomio de Hermite cúbico  $x(t)$  en  $[0, 1]$  satisface

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad x'(0) = \alpha_0, \quad \text{y} \quad x'(1) = \alpha_1.$$

El único polinomio cúbico que satisface estas condiciones es

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - (\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + \alpha_0 t + x_0. \quad (3.23)$$

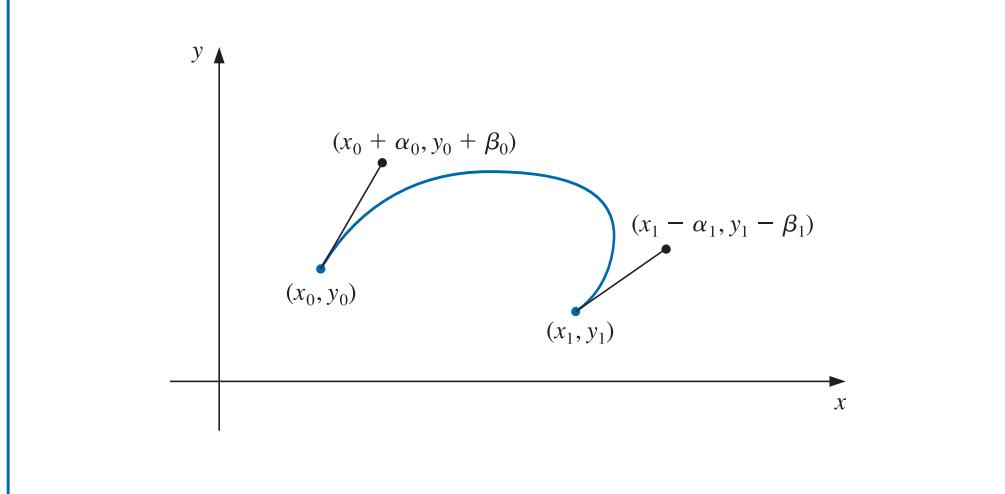
De manera similar, el único polinomio cúbico que satisface

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad y'(0) = \beta_0, \quad \text{y} \quad y'(1) = \beta_1$$

es

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - (\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + \beta_0 t + y_0. \quad (3.24)$$

**Figura 3.17**



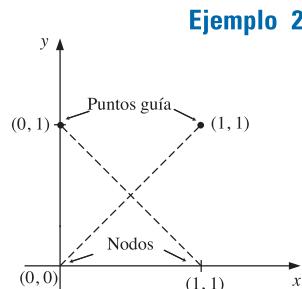


Figura 3.18

Pierre Etienne Bézier (1910–1999) fue director de diseño y producción de los automóviles Renault durante la mayor parte de su vida profesional. Comenzó su investigación en diseño y fabricación asistidos por computadora en 1960, desarrollando herramientas interactivas para el diseño de curvas y superficies, e inició el bobinado generado por computadora para modelado de automóviles. Las curvas de Bézier que llevan su nombre tienen la ventaja de estar basadas en una teoría matemática rigurosa que no necesita ser reconocida explícitamente por el practicante, quien sólo quiere crear una curva o superficie agradable desde el punto de vista estético. Éstas son las curvas que son la base del poderoso sistema Adobe Postscript y producen curvas a mano alzada generadas en la mayoría de los paquetes gráficos computacionales suficientemente potentes.

**Ejemplo 2** Determine la gráfica de la curva paramétrica generada por las ecuaciones (3.23) y (3.24) cuando los extremos son  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y  $(x_1, y_1) = (1, 0)$  y los puntos guía respectivos, como se muestra en la figura 3.18 son  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$ .

**Solución** La información del extremo implica que  $x_0 = 0, x_1 = 1, y_0 = 0, y y_1 = 0$ , y los puntos guía  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$  implican que  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1$ , y  $\beta_1 = -1$ . Observe que las pendientes de las rectas guía en  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son, respectivamente,

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{1}{1} = 1 \quad y \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Las ecuaciones (3.23) y (3.24) implican que para  $t \in [0, 1]$ , tenemos

$$x(t) = [2(0 - 1) + (1 + 1)]t^3 + [3(0 - 0) - (1 + 2 \cdot 1)]t^2 + 1 \cdot t + 0 = t$$

y

$$y(t) = [2(0 - 0) + (1 + (-1))]t^3 + [3(0 - 0) - (-1 + 2 \cdot 1)]t^2 + 1 \cdot t + 0 = -t^2 + t.$$

Esta gráfica se muestra como a) en la figura 3.19, junto con algunas otras posibilidades de curvas producidas por las ecuaciones (3.23) y (3.24) cuando los nodos son  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  y las pendientes de estos nodos son  $1$  y  $-1$ , respectivamente. ■

El procedimiento estándar para determinar las curvas en un modo gráfico interactivo es utilizar primero un mouse (o ratón) o touchpad (panel táctil) y establecer los nodos y los puntos guía para generar una primera aproximación a la curva. Esto se puede hacer de manera manual, pero muchos sistemas de gráficas permiten utilizar su dispositivo de entrada para trazar la curva en una pantalla a mano alzada y seleccionar los nodos y puntos guía adecuados para su curva a mano alzada.

A continuación, los nodos y los puntos guía se pueden manipular en una posición que genera una curva agradable desde el punto de vista estético. Puesto que los cálculos son mínimos, la curva se puede determinar tan rápido que el cambio resultante se aprecia de inmediato. Además, todos los datos necesarios para calcular las curvas están incorporados en las coordenadas de los nodos y puntos guía, por lo que no se requiere que el usuario tenga conocimiento analítico.

Figura 3.19

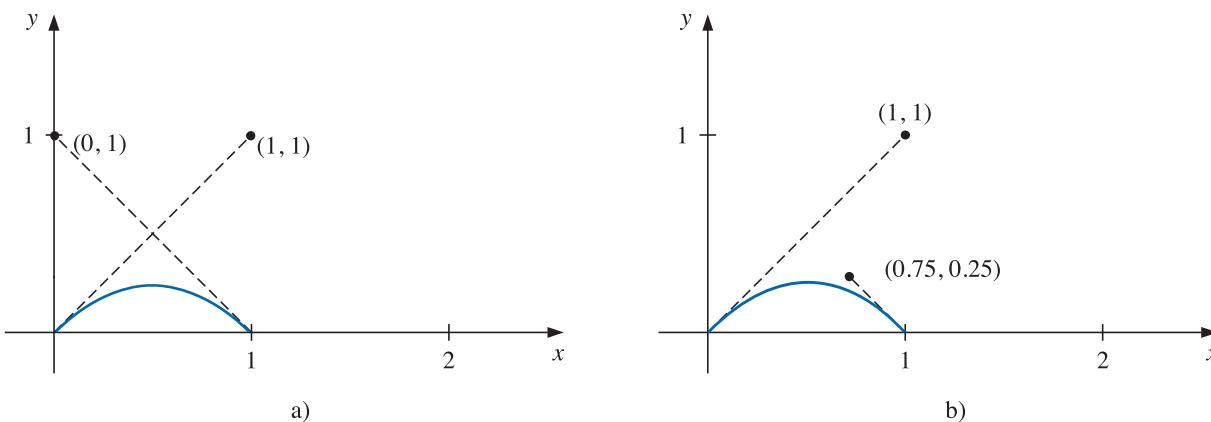
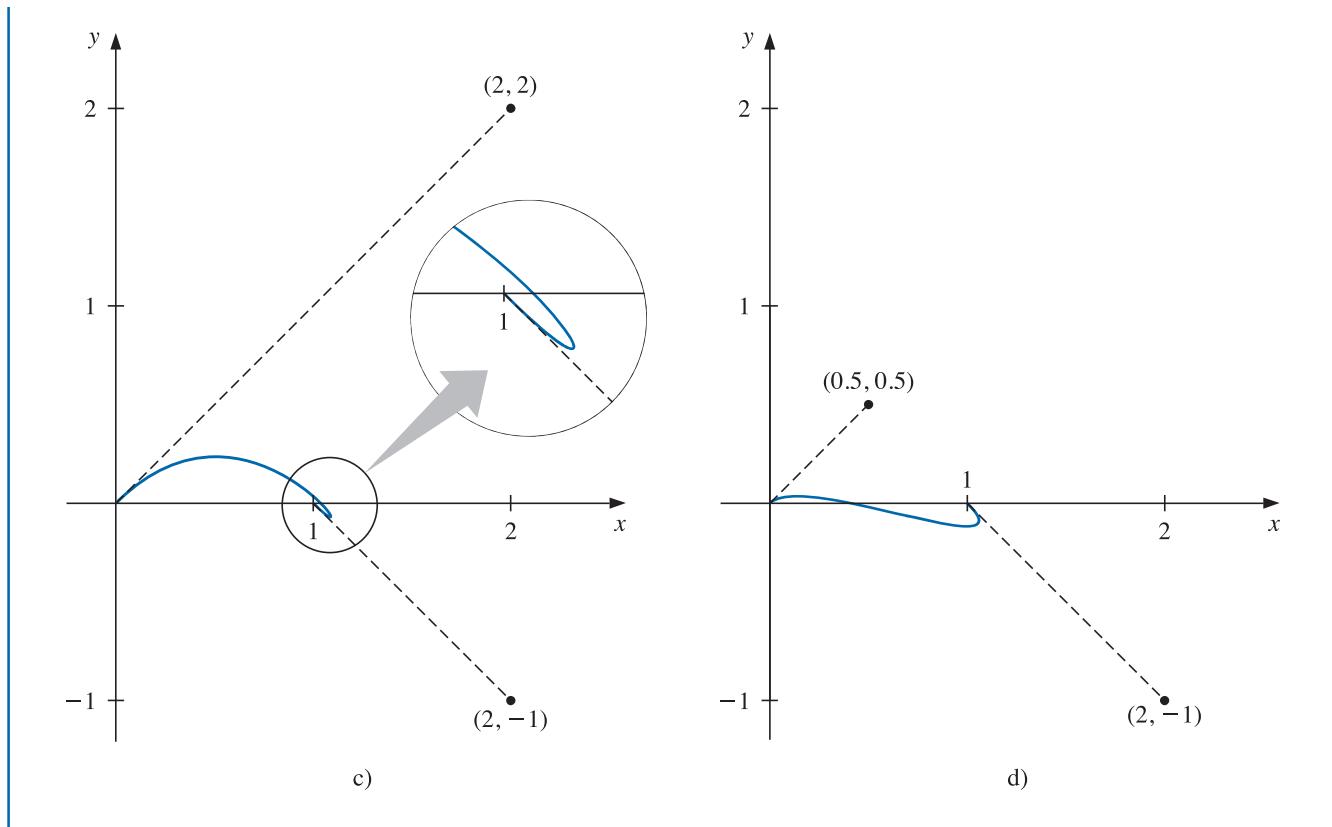


Figura 3.19



Los programas de gráficos populares usan este tipo de sistema para sus representaciones gráficas a mano alzada en una forma ligeramente modificada. Los cúbicos de Hermite se describen como **polinomios de Bézier**, los cuales incluyen un factor de escala de tres al calcular las derivadas en los extremos. Esto modifica las ecuaciones paramétricas para

$$x(t) = [2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1)]t^3 + [3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0)]t^2 + 3\alpha_0 t + x_0 \quad (3.25)$$

y

$$y(t) = [2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1)]t^3 + [3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0)]t^2 + 3\beta_0 t + y_0, \quad (3.26)$$

para  $0 \leq t \leq 1$ , pero este cambio es transparente para el usuario del sistema.

El algoritmo 3.6 construye un conjunto de curvas de Bézier con base en las ecuaciones paramétricas en las ecuaciones (3.25) y (3.26).



### Curva de Bézier

Para construir las curvas cúbicas de Bézier  $C_0, \dots, C_{n-1}$  en forma paramétrica, donde  $C_i$  está representado por

$$(x_i(t), y_i(t)) = (a_0^{(i)} + a_1^{(i)}t + a_2^{(i)}t^2 + a_3^{(i)}t^3, b_0^{(i)} + b_1^{(i)}t + b_2^{(i)}t^2 + b_3^{(i)}t^3),$$

para  $0 \leq t \leq 1$ , como se determina mediante el extremo izquierdo  $(x_i, y_i)$ , el punto guía  $(x_i^+, y_i^+)$ , el extremo derecho  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , y el punto guía derecho  $(x_{i+1}^-, y_{i+1}^-)$  para cada  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ :

**ENTRADA**  $n; (x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n); (x_0^+, y_0^+), \dots, (x_{n-1}^+, y_{n-1}^+); (x_1^-, y_1^-), \dots, (x_n^-, y_n^-)$ .

**SALIDA** coeficientes  $\{a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}\}$ , para  $0 \leq i \leq n - 1\}$ .

**Paso 1** Para cada  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  haga los pasos 2 y 3.

$$\begin{aligned}\textbf{Paso 2} \quad & \text{Haga } a_0^{(i)} = x_i; \\ & b_0^{(i)} = y_i; \\ & a_1^{(i)} = 3(x_i^+ - x_i); \\ & b_1^{(i)} = 3(y_i^+ - y_i); \\ & a_2^{(i)} = 3(x_i + x_{i+1}^- - 2x_i^+); \\ & b_2^{(i)} = 3(y_i + y_{i+1}^- - 2y_i^+); \\ & a_3^{(i)} = x_{i+1} - x_i + 3x_i^+ - 3x_{i+1}^-; \\ & b_3^{(i)} = y_{i+1} - y_i + 3y_i^+ - 3y_{i+1}^-;\end{aligned}$$

**Paso 3** SALIDA  $(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)})$ .

**Paso 4** PARE. ■

Las curvas tridimensionales se generan de la misma forma al especificar adicionalmente terceros componentes  $z_0$  y  $z_1$  para los nodos y  $z_0 + \gamma_0$  y  $z_1 - \gamma_1$  para los puntos guía. El problema más difícil que implica la representación de las curvas tridimensionales se preocupa por la pérdida de la tercera dimensión cuando la curva se proyecta en una pantalla bidimensional de computadora. Se utilizan varias técnicas de proyección, pero este tema se encuentra dentro del campo de las gráficas por computador. Para una introducción a este tema y las maneras en las que la técnica se puede modificar para las representaciones de superficie, consulte alguno de los muchos libros sobre métodos gráficos por computadora como [FVFH].

**La sección Conjunto de ejercicios 3.6 está disponible en línea. Encuentre la ruta de acceso en las páginas preliminares.**

## 3.7 Software numérico y revisión del capítulo

Las rutinas de interpolación incluidas en la Biblioteca IMSL se basan en el libro *A practical Guide to Splines (Una guía práctica para splines)* de Carl de Boor [Deb] y usan la interpolación mediante splines cúbicos. Existen splines cúbicos para minimizar las oscilaciones y preservar la concavidad. Los métodos para interpolación bidimensional mediante splines bicubícos también se incluyen.

La biblioteca NAG contiene subrutinas para la interpolación polinomial y de Hermite, para interpolación de spline cúbico y para interpolación de Hermite cúbico por tramos. NAG también contiene subrutinas para funciones de interpolación de dos variables.

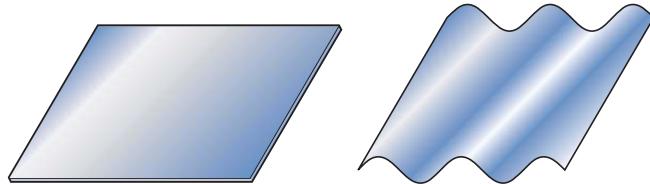
La biblioteca netlib contiene las subrutinas para calcular el spline cúbico con varias condiciones de extremo. Un paquete produce los coeficientes de diferencia dividida de Newton para un conjunto discreto de puntos de datos y existen diferentes rutinas para evaluar los polinomios por tramos de Hermite.

**Las secciones Preguntas de análisis, Conceptos clave y Revisión del capítulo están disponibles en línea. Encuentre la ruta de acceso en las páginas preliminares.**

# Diferenciación numérica e integración

## Introducción

Una hoja de tejado corrugado se construye al presionar una hoja plana de aluminio dentro de otra cuya sección transversal tiene la forma de una onda senoidal.



Se necesita una hoja corrugada de 4 pies de largo, la altura de cada onda es de 1 pulgada desde la línea central y cada onda tiene un periodo de aproximadamente  $2\pi$ . El problema de encontrar la longitud de la hoja plana inicial consiste en encontrar la longitud de la curva determinada por  $f(x) = \operatorname{sen} x$  desde  $x = 0$  pulgadas hasta  $x = 48$  pulgadas. A partir del cálculo, sabemos que esta longitud es

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2} dx,$$

por lo que el problema se reduce a evaluar esta integral. A pesar de que la función senoidal es una de las funciones matemáticas más comunes, el cálculo de su longitud implica una integral elíptica de segunda clase, que no se puede evaluar de manera explícita. En este capítulo se desarrollan métodos para aproximar la solución a los problemas de este tipo. Este problema particular se considera en el ejercicio 21 de la sección 4.4, en el ejercicio 15 de la sección 4.5 y en el ejercicio 10 de la sección 4.7.

En la introducción del capítulo 3 mencionamos que una razón para usar polinomios algebraicos para aproximar un conjunto arbitrario de datos es que, dada cualquier función continua definida dentro de un intervalo cerrado, existe un polinomio que está arbitrariamente cerca de la función en cada punto del intervalo. Además, las derivadas y las integrales de los polinomios se obtienen y evalúan con facilidad. No debería sorprender, entonces, que muchos procedimientos para aproximar derivadas e integrales utilicen los polinomios que aproximan la función.