Spline Cuadrático.

Se desea determinar una función definida a trozos S que interpole los puntos (x_i, y_i) con $0 \leq i \leq n$.

En total son $n+1$ puntos por lo que se tendrán n trozos.

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x-x_0) + c_0(x-x_0)^2 & \text{si } x \in [x_0, x_1) \\ a_1 + b_1(x-x_1) + c_1(x-x_1)^2 & \text{si } x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} + b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1}(x-x_{n-1})^2 & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n \end{cases}$$

La tarea es encontrar los coeficientes de los polinomios. Dado que S es un interpolador de los puntos este debe pasar por ellos. Considerando unicamente el extremo izquierdo en cada rama se cumple:

$$S_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 = a_i = y_i$$

$$(1) \quad a_i = y_i \qquad \text{con } 0 \leq i < n$$

Por lo tanto los a_i ya son conocidos. Considerando ahora los extremos derechos de cada rama.

$$S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = y_{i+1}.$$

sea $h_i = x_{i+1} - x_i$ y $u_i = y_{i+1} - a_i$ tenemos

$$(2) \quad b_i h_i + c_i h_i^2 = u_i \qquad \text{con } 0 \leq i < n$$

Determinemos la derivada de cada rama:

$S_i(x) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2$ Notese que

$S_i'(x) = b_i + 2c_i h_i$ $S_i'(x_i) = b_i$

Como buscamos que la transición entre cada rama sea suave se tiene que $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ por lo tanto

$$S_i'(x_{i+1}) = b_i + 2c_ih_i = S_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1}$$

$$(3) \quad b_{i+1} = b_i + 2c_ih_i \qquad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

Pero aún falta una ecuación para que el sistema tenga solución única, por lo que definimos una condición adicional arbitraria $S_0''(x_0) = 0$. esto implica lo siguiente:

$$S_0''(x)\Big|^{x=x_0} = 2c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \qquad (4).$$

Sustituyendo (2) en (3) teniendo en cuenta además que al despejar b_i en (2) se tiene $b_i = \frac{u_i}{h_i} - c_ih_i$ obtenemos

$$\frac{u_{i+1}}{h_{i+1}} - c_{i+1}h_{i+1} = \frac{u_i}{h_i} - c_ih_i + 2c_ih_i$$

$$\equiv \quad \langle \text{aplicando aritmética y agrupando} \rangle$$

$$c_ih_i + c_{i+1}h_{i+1} = \frac{u_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{u_i}{h_i} \qquad (5)$$

Desarrollando cada ecuación tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_0 + 0 + \dots = 0 \\ c_0h_0 + c_1h_1 + 0 + \dots = \frac{u_1}{h_1} - \frac{u_0}{h_0} \\ 0 + c_1h_1 + c_2h_2 + 0 + \dots = \frac{u_2}{h_2} - \frac{u_1}{h_1} \\ \vdots \\ 0 + \dots + c_{n-2}h_{n-2} + c_{n-1}h_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{h_{n-2}}. \end{cases}$$

ribiendo en forma matricial se tiene..

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 & \cdots & & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & h_{n-2} & h_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_1}{h_1} - \frac{u_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{u_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}$$

Con lo anterior ya es posible determinar todos los coeficientes a_i, b_i, c_i de los polinomios.

El polinomio tambien puede reescribirse como:

$$a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$$

$$= a_i + b_i x - b_i x_i + c_i x^2 + c_i x_i^2 - 2 x x_i c_i$$

$$= (a_i - b_i x_i + c_i x_i^2) + (b_i - 2 x_i c_i) x + c_i x^2$$

$$= c_i x^2 + (b_i - 2 x_i c_i) x + (a_i - b_i x_i + c_i x_i^2)$$