

Chapitre 4

Inférence de types

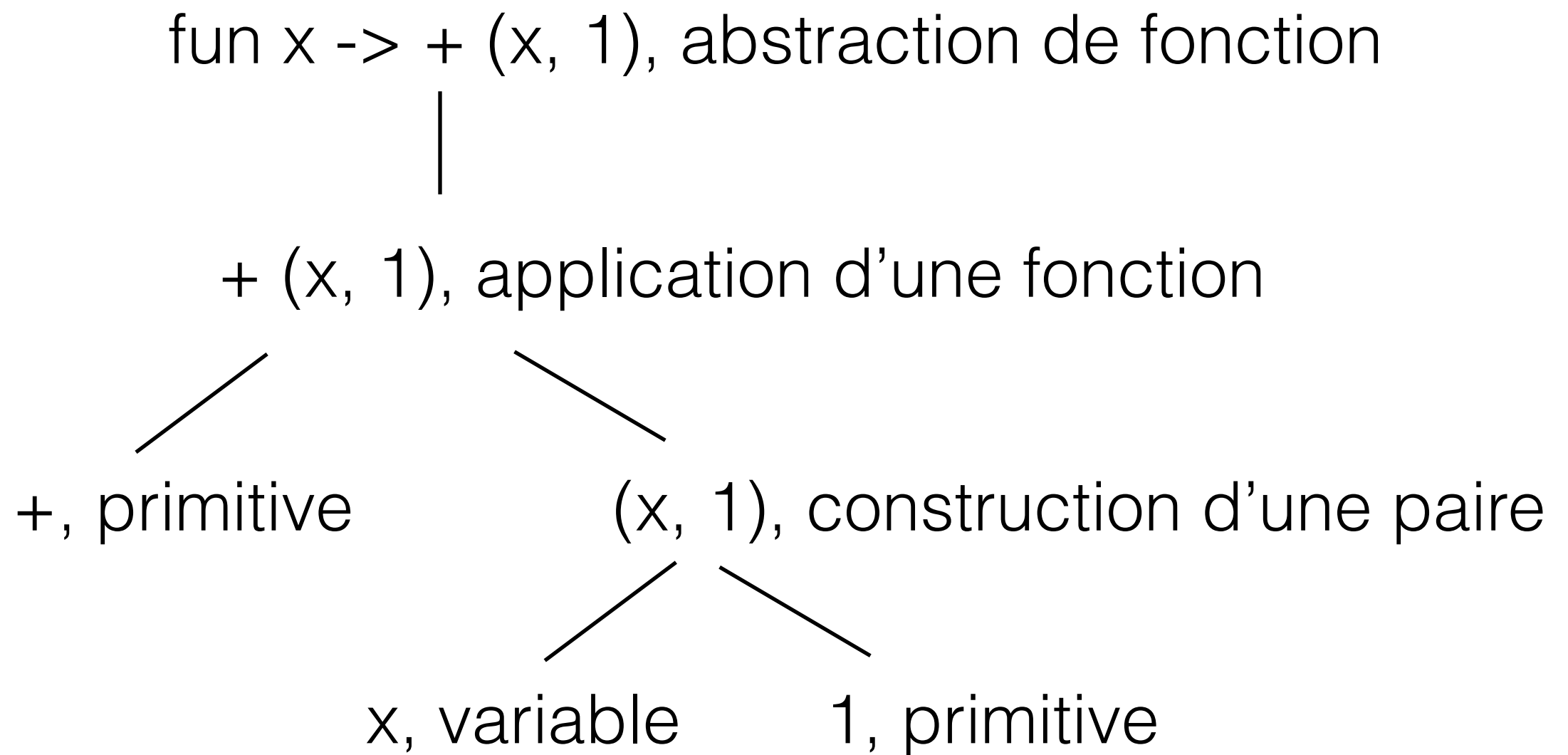
Programmation fonctionnelle, Licence d'informatique, 2022

Mini ML

Notons $a, a_1, a_2 \dots$ les expressions de mini ML

$a := x$	variable
c	primitive
$\text{fun } x \rightarrow a$	abstraction de fonction
$a_1 a_2$	application de fonction
(a_1, a_2)	construction d'une paire
$\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2$	déclaration locale

Exemple d'expression

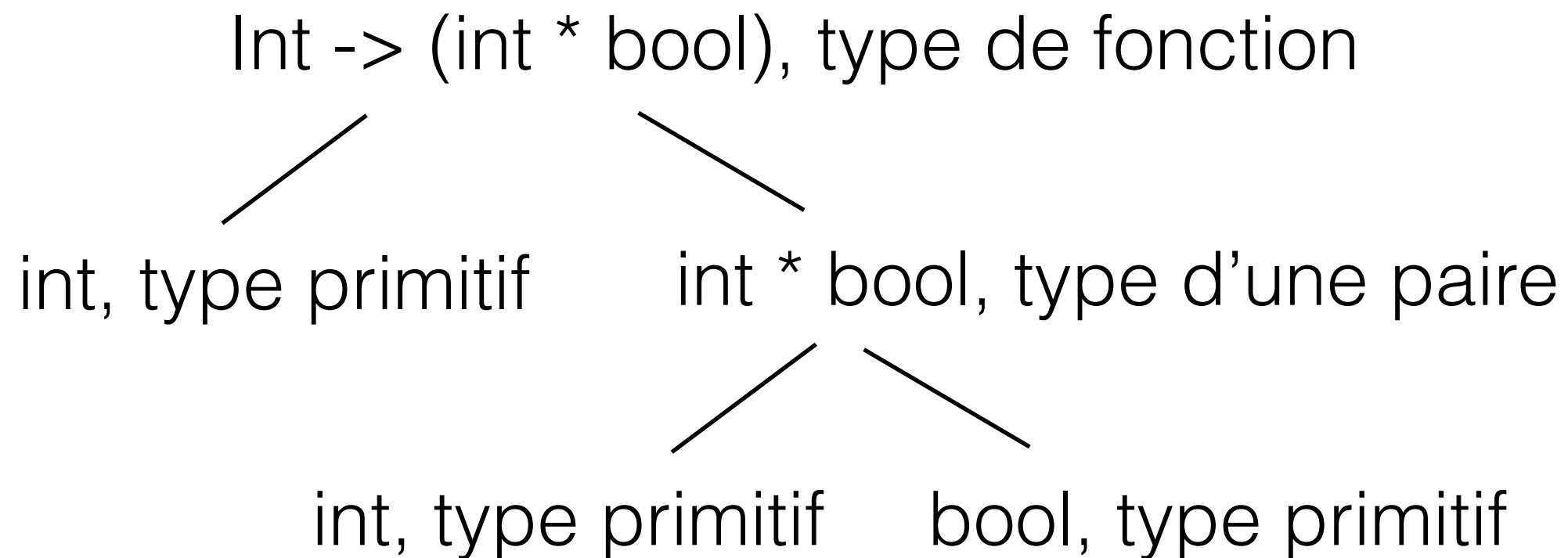


Types de mini ML

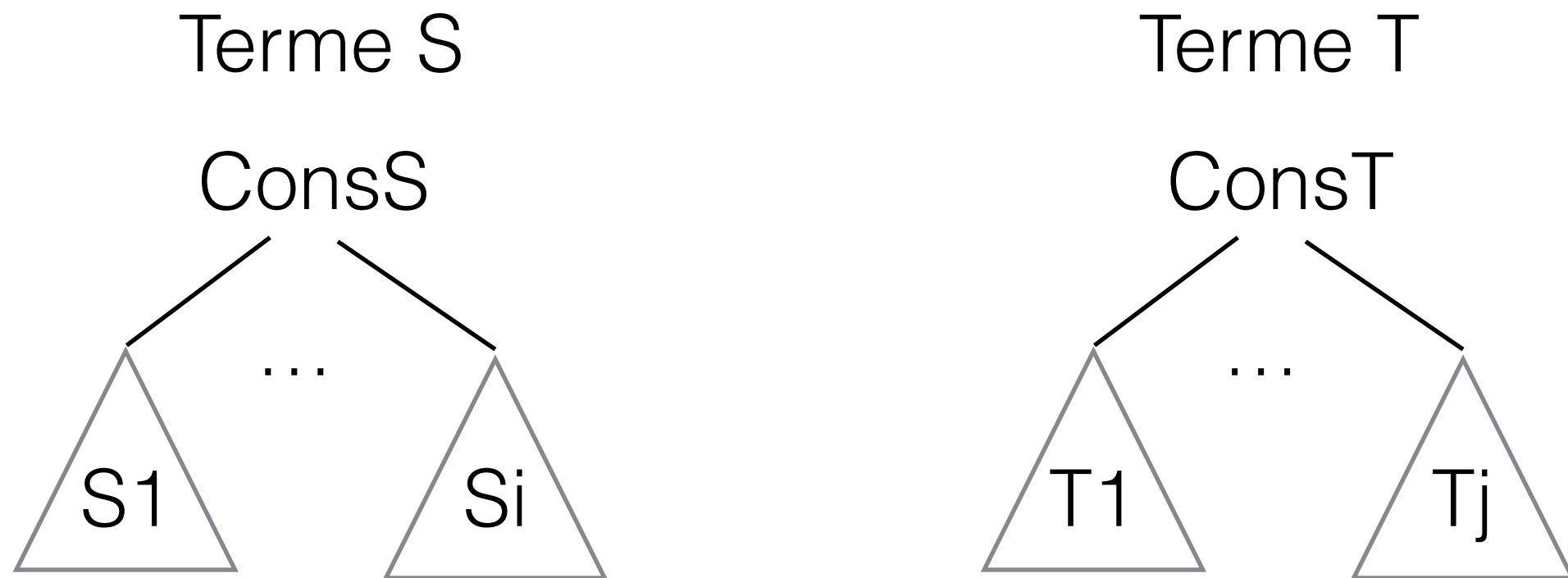
Notons $t, t_1, t_2 \dots$ les types

$t := T$	type primitif (int, bool, char...)
'a	variable de type
$t_1 \rightarrow t_2$	type des fonctions de t_1 vers t_2
$t_1 * t_2$	type des paires de t_1 et t_2

Exemple de type



Unification



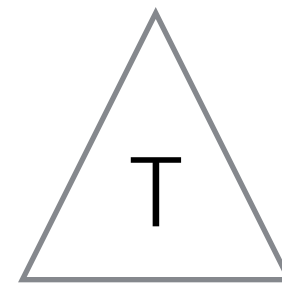
S et T s'unifient
si $\text{ConsS} = \text{ConsT}$ (et donc $i=j$),
et S1 unifie T1 et ... et Si unifie Tj
sinon, échec de l'unification

Unification

Variable S

S

Terme T



L'unification est en succès et $S \leftarrow T$

Variable S

S

Variable T

T

L'unification est en succès et $S \leftarrow U$ et $T \leftarrow U$
(où U est une nouvelle variable)

Exemple

- $\text{mgu}('a, \text{int})$ est la substitution $['a \leftarrow \text{int}]$
- $\text{mgu}('a \rightarrow 'a, 'b \rightarrow \text{int})$ est $['a \leftarrow 'c, 'b \leftarrow 'c], ['c \leftarrow \text{int}]$
- $\text{mgu}('a \rightarrow 'a, \text{int} \rightarrow \text{bool})$ échoue, car int et bool ne peuvent être unifiés

Exercice

- Calculer les unifications suivantes :
 - $\text{mgu}('a \rightarrow ('b \rightarrow 'a), 'c \rightarrow \text{int})$
 - $\text{mgu}('a \rightarrow 'b, 'c^* 'd)$
 - $\text{mgu}(\text{int}^* \text{char} \rightarrow 'a, 'b \rightarrow \text{bool})$

Règles de typage monomorphe

$$E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$$

$$\frac{E \cup \{x : t_1\} \vdash a : t_2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a) : t_1 \rightarrow t_2} \text{ (fun)}$$

$$E \vdash c : t_c \text{ (primitive)}$$

$$\frac{E \vdash a_1 : t_1 \rightarrow t_2 \quad E \vdash a_2 : t_1}{E \vdash a_1 a_2 : t_2} \text{ (app)}$$

$$\frac{E \vdash a_1 : t_1 \quad E \vdash a_2 : t_2}{E \vdash (a_1, a_2) : t_1 * t_2} \text{ (paire)}$$

$$\frac{E \vdash a_1 : t_1 \quad E \cup \{x : t_1\} \vdash a_2 : t_2}{E \vdash (\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2) : t_2} \text{ (let)}$$

Exemple de typage

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a : t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a) : t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

$$t1 = 'b, t2 = 'c$$

$$\text{mgu}('a, 'b \rightarrow 'c) = ['a \leftarrow ('b \rightarrow 'c)]$$

$$(6) \vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'a$$

Exemple de typage

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a : t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a) : t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

$t1 = 'b, t2 = 'c$

(5) $\{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$

(6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$

Exemple de typage

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$

$$t1 = 'd, t2 = 'c$$

$$(5) \{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$$

$$(6) \vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$$

Exemple de typage

$$\begin{array}{c} (1) \{x : 'b\} \vdash + : 'd \rightarrow 'c \quad E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1 \\ \hline E \vdash a1 \ a2 : t2 \quad \text{(app)} \\ t1 = 'd, t2 = 'c \end{array}$$

$$(4) \{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'd$$

$$(5) \{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c \text{ (app (1) et (4))}$$

$$(6) \vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$$

Exemple de typage

$$\begin{array}{c}
 (1) \{x : 'b\} \vdash + : 'd \rightarrow 'c \qquad \frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)} \\
 t1 = 'e, t2 = 'f \\
 \text{mgu}('d, 'e * 'f) = ['d \leftarrow 'e * 'f]
 \end{array}$$

$$(4) \{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'd$$

$$(5) \{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c \text{ (app (1) et (4))}$$

$$(6) \vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$$

Exemple de typage

- (1) $\{x : 'b\} \vdash + : 'e * 'f \rightarrow 'c$
- (2) $\{x : 'b\} \vdash x : 'e$
- (3) $\{x : 'b\} \vdash 1 : 'f$
- (4) $\{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'e * 'f$ (paire (2) et (3))
- (5) $\{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$ (app (1) et (4))
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c$ (fun (5))
- $$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$
- $t1 = 'e, t2 = 'f$

Exemple de typage

- (1) $\{x : 'b\} \vdash + : 'e * 'f \rightarrow 'c$ $E \vdash c : t_c$ (primitive)
- (2) $\{x : 'b\} \vdash x : 'e$ $c = 1, t_c = \text{int}$
 $\text{mgu}('f, \text{int}) = ['f \leftarrow \text{int}]$
- (3) $\{x : 'b\} \vdash 1 : 'f$
- (4) $\{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'e * 'f$ (paire (2) et (3))
- (5) $\{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$ (app (1) et (4))
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c$ (fun (5))

Exemple de typage

- (1) $\{x : 'b\} \vdash + : 'e * \text{int} \rightarrow 'c$ $E \vdash c : t_c$ (primitive)
- (2) $\{x : 'b\} \vdash x : 'e$ $c = 1, t_c = \text{int}$
- (3) $\{x : 'b\} \vdash 1 : \text{int}$ (primitive)
- (4) $\{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'e * \text{int}$ (paire (2) et (3))
- (5) $\{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$ (app (1) et (4))
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c$ (fun (5))

Exemple de typage

- (1) $\{x : 'b\} \vdash + : 'e * \text{int} \rightarrow 'c$ $E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$
- (2) $\{x : 'b\} \vdash x : 'e$ $x = x, t = 'b$
 $\text{mgu}('b, 'e) = ['b \leftarrow 'g, 'e \leftarrow 'g]$
- (3) $\{x : 'b\} \vdash 1 : \text{int}$ (primitive)
- (4) $\{x : 'b\} \vdash (x, 1) : 'e * \text{int}$ (paire (2) et (3))
- (5) $\{x : 'b\} \vdash + (x, 1) : 'c$ (app (1) et (4))
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'b \rightarrow 'c$ (fun (5))

Exemple de typage

- (1) $\{x : 'g\} \vdash + : 'g * \text{int} \rightarrow 'c$ $E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$
 $x = x, t = 'b$
- (2) $\{x : 'g\} \vdash x : 'g \text{ (var)}$
- (3) $\{x : 'g\} \vdash 1 : \text{int} \text{ (primitive)}$
- (4) $\{x : 'g\} \vdash (x, 1) : 'g * \text{int} \text{ (paire (2) et (3))}$
- (5) $\{x : 'g\} \vdash + (x, 1) : 'c \text{ (app (1) et (4))}$
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'g \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$

Exemple de typage

(1) $\{x : 'g\} \vdash + : 'g * \text{int} \rightarrow 'c$

$E \vdash c : t_c$ (primitive)

(2) $\{x : 'g\} \vdash x : 'g$ (var)

$c = +, t_{\text{op}} = \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$

(3) $\{x : 'g\} \vdash 1 : \text{int}$ (const) $\text{mgu}('g * \text{int} \rightarrow 'c, \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int})$
 $= ['g \leftarrow \text{int}, 'c \leftarrow \text{int}]$

(4) $\{x : 'g\} \vdash (x, 1) : 'g * \text{int}$ (paire (2) et (3))

(5) $\{x : 'g\} \vdash + (x, 1) : 'c$ (app (1) et (4))

(6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : 'g \rightarrow 'c$ (fun (5))

Exemple de typage

- (1) $\{x : \text{int}\} \vdash + : \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$ (primitive)
 $E \vdash c : t_c$ (primitive)
 $c = +, t_{\text{op}} = \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$
- (2) $\{x : \text{int}\} \vdash x : \text{int}$ (var)
- (3) $\{x : \text{int}\} \vdash 1 : \text{int}$ (primitive)
- (4) $\{x : \text{int}\} \vdash (x, 1) : \text{int} * \text{int}$ (paire (2) et (3))
- (5) $\{x : \text{int}\} \vdash + (x, 1) : \text{int}$ (app (1) et (4))
- (6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : \text{int} \rightarrow \text{int}$ (fun (5))

Exemple de typage

(1) $\{x : \text{int}\} \vdash + : \text{int} * \text{int} \rightarrow \text{int}$ (op)

(2) $\{x : \text{int}\} \vdash x : \text{int}$ (var)

(3) $\{x : \text{int}\} \vdash 1 : \text{int}$ (const)

(4) $\{x : \text{int}\} \vdash (x, 1) : \text{int} * \text{int}$ (paire (2) et (3))

(5) $\{x : \text{int}\} \vdash + (x, 1) : \text{int}$ (app (1) et (4))

(6) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow + (x, 1)) : \mathbf{int} \rightarrow \mathbf{int}$ (fun (5))

Autre exemple

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \cup \{x : t1\} \vdash a2 : t2}{E \vdash (\text{let } x = a1 \text{ in } a2) : t2} \text{ (let)}$$

$t2 = 'a, t1 = 'b$

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a$

Autre exemple

$$(2) \vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b \quad \frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \cup \{x : t1\} \vdash a2 : t2}{E \vdash (\text{let } x = a1 \text{ in } a2) : t2} \text{ (let)}$$

$t2 = 'a, t1 = 'b$

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a$

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a \text{ (let (2) et (8))}$

Autre exemple

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$

$$t1 = 'c, t2 = 'd$$

$$\text{mgu}('a, 'c * 'd) = ['a \leftarrow 'c * 'd]$$

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a$

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a \text{ (let (2) et (8))}$

Autre exemple

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$

$t1 = 'c, t2 = 'd$

(5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$

(7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (paire (5) et (7))

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (let (2) et (8))

Autre exemple

$$(2) \vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$$

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$

$$t1 = 'e, t2 = 'd$$

$$(5) \{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$$

$$(7) \{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$$

$$(8) \{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd \text{ (paire (5) et (7))}$$

$$(9) \vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd \text{ (let (2) et (8))}$$

Autre exemple

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$

(3) $\{f : 'b\} \vdash f : 'e \rightarrow 'd$

$t1 = 'e, t2 = 'd$

(5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$

(6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : 'e$

(7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$ (app (3) et (6))

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (paire (5) et (7))

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (let (2) et (8))

Autre exemple

- (2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$ $E \vdash c : t_c$ (primitive)
- (3) $\{f : 'b\} \vdash f : 'e \rightarrow 'd$ $c = \text{true}, t_c = \text{bool}$
 $\text{mgu}('e, \text{bool}) = ['e \leftarrow \text{bool}]$
- (5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$
- (6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : 'e$
- (7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$ (app (3) et (6))
- (8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (paire (5) et (7))
- (9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (let (2) et (8))

Autre exemple

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$ $E \vdash c : t_c$ (primitive)

(3) $\{f : 'b\} \vdash f : \text{bool} \rightarrow 'd$ $c = \text{true}, t_c = \text{bool}$

(5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$

(6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$ (app (3) et (6))

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (paire (5) et (7))

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (let (2) et (8))

Autre exemple

- $$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$
- (2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$
- (3) $\{f : 'b\} \vdash f : \text{bool} \rightarrow 'd$
- $t1 = \text{bool}, t2 = 'c$
 $\text{mgu}('d, 'c) = ['d \leftarrow 'e, 'c \leftarrow 'e]$
- (5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'c$
- (6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)
- (7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'd$ (app (3) et (6))
- (8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (paire (5) et (7))
- (9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'c * 'd$ (let (2) et (8))

Autre exemple

- $$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$
- (2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$
- (3) $\{f : 'b\} \vdash f : \text{bool} \rightarrow 'e$
- (4) $\{f : 'b\} \vdash 1 : \text{bool}$
- (5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'e$ (app (3) et (4))
- (6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)
- (7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'e$ (app (3) et (6))
- (8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'e * 'e$ (paire (5) et (7))
- (9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'e * 'e$ (let (2) et (8))

Autre exemple

$E \vdash c : t_c$ (primitive)

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'b$

$c = 1, t_c = \text{int}$

(3) $\{f : 'b\} \vdash f : \text{bool} \rightarrow 'e$

$\text{mgu}(\text{bool}, \text{int}) = \mathbf{Echec !}$

(4) $\{f : 'b\} \vdash \mathbf{1 : bool (primitive)}$

(5) $\{f : 'b\} \vdash f \ 1 : 'e$ (app (3) et (4))

(6) $\{f : 'b\} \vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(7) $\{f : 'b\} \vdash f \ \text{true} : 'e$ (app (3) et (6))

(8) $\{f : 'b\} \vdash (f \ 1, f \ \text{true}) : 'e * 'e$ (paire (5) et (7))

(9) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'e * 'e$ (let (2) et (8))

Exercices

- Inférer les types des expressions suivantes :
 - `fun x -> (&& (x, true))`
 - `fun f -> (f f)`

Règles de typage polymorphe

$$E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$$
$$E \vdash c : t_c \text{ (primitive)}$$
$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$
$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a : t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a) : t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$
$$\frac{E \vdash a1 : t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2 : t1}{E \vdash a1 \ a2 : t2} \text{ (app)}$$
$$\frac{E \vdash a2[x \leftarrow a1] : t2}{E \vdash (\text{let } x = a1 \text{ in } a2) : t2} \text{ (let-sub)}$$

Example

$$\frac{E \vdash a2[x \leftarrow a1]:t2}{E \vdash (\text{let } x = a1 \text{ in } a2):t2} \text{(let-sub)}$$

$t2 = 'a$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f\ 1, f\ \text{true}) : 'a$

Example

$$\frac{E \vdash a2[x \leftarrow a1]:t2}{E \vdash (\text{let } x = a1 \text{ in } a2):t2} \text{(let-sub)}$$

$t2 = 'a$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'a$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$

$$t1 = 'b, t2 = 'c$$

$$\text{mgu}('a, 'b * 'c) = ['a <- 'b * 'c]$$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'a$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'a \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$$\frac{E \vdash a1 : t1 \quad E \vdash a2 : t2}{E \vdash (a1, a2) : t1 * t2} \text{ (paire)}$$

$t1 = 'b, t2 = 'c$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{ true} : 'c$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{ true}) : 'b * 'c \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{ true}) : 'b * 'c \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$$\frac{E \vdash a1:t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2:t1}{E \vdash a1 \ a2:t2} \text{(app)}$$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ 1 : 'b$

$t1 = 'd, t2 = 'c$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true} : 'c$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'b * 'c$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'b * 'c$ (let-sub (9))

Exemple

$$\frac{E \vdash a1:t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2:t1}{E \vdash a1 \ a2:t2} \text{(app)}$$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ 1 : 'b$

$t1 = 'd, t2 = 'c$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'd \rightarrow 'c$

(7) $\vdash \text{true} : 'd$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true} : 'c$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'b * 'c$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'b * 'c$ (let-sub (9))

Exemple

$E \vdash c : t_c$ (primitive)
 $c = \text{true}, t_c = \text{bool}$
 $\text{mgu}('d, \text{bool}) = ['d \leftarrow \text{bool}]$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'd \rightarrow 'c$

(7) $\vdash \text{true} : 'd$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : 'c$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * 'c$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * 'c$ (let-sub (9))

Exemple

$E \vdash c : t_c$ (primitive)
 $c = \text{true}, t_c = \text{bool}$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow 'c$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : 'c$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * 'c$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * 'c$ (let-sub (9))

Exemple

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a:t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a):t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

$t1 = \text{bool}, t2 = 'c$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow 'c$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : 'c$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * 'c$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * 'c$ (let-sub (9))

Exemple

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a:t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a):t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

$$t1 = \text{bool}, t2 = 'c$$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : 'c$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : 'c \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * 'c \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * 'c \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$

$x = x, t = \text{bool}$

$\text{mgu}('c, \text{bool}) = ['c \leftarrow \text{bool}]$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : 'c$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow 'c \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : 'c \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * 'c \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * 'c \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$

$t = \text{bool}$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool} \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$$\frac{E \vdash a1:t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2:t1}{E \vdash a1 \ a2:t2} \text{(app)}$$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ 1 : 'b$

$t1 = 'd, t2 = 'b$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool} \text{ (var)}$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true} : \text{bool} \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

$$\frac{E \vdash a1:t1 \rightarrow t2 \quad E \vdash a2:t1}{E \vdash a1 \ a2:t2} \text{(app)}$$

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'd \rightarrow 'b$

(3) $\vdash 1 : 'd$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ 1 : 'b$ (app (2) et (3)) $t1 = 'd, t2 = 'b$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$ (var)

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$ (fun (5))

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true} : \text{bool}$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) \ 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \ \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f \ 1, f \ \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (let-sub (9))

Exemple

$E \vdash c : t_c$ (primitive)

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : 'd \rightarrow 'b$

(3) $\vdash 1 : 'd$

$c = 1, t_c = \text{int}$

$\text{mgu}('d, \text{int}) = ['d \leftarrow \text{int}]$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$ (app (2) et (3))

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$ (var)

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$ (fun (5))

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (const)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool}$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (let-sub (9))

Exemple

$E \vdash c : t_c$ (primitive)

$c = 1, t_c = \text{int}$

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow 'b$

(3) $\vdash 1 : \text{int}$ (primitive)

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$ (app (2) et (3))

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$ (var)

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$ (fun (5))

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool}$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (let-sub (9))

Exemple

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow 'b$

(3) $\vdash 1 : \text{int}$ (primitive)

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b$ (app (2) et (3))

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$ (var)

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$ (fun (5))

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool}$ (app (6) et (7))

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (paire (4) et (8))

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool}$ (let-sub (9))

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a:t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a):t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

$t1 = \text{int}, t2 = 'b$

Exemple

(1) $\{x : \text{int}\} \vdash x : 'b$

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow 'b \text{ (fun (1))}$

(3) $\vdash 1 : \text{int} \text{ (primitive)}$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b \text{ (app (2) et (3))}$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool} \text{ (var)}$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool} \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (let-sub (9))}$

$$\frac{E \cup \{x : t1\} \vdash a:t2}{E \vdash (\text{fun } x \rightarrow a):t1 \rightarrow t2} \text{ (fun)}$$

$t1 = \text{int}, t2 = 'b$

Exemple

- (1) $\{x : \text{int}\} \vdash x : 'b$
- (2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow 'b \text{ (fun (1))}$
- (3) $\vdash 1 : \text{int} \text{ (primitive)}$
- (4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b \text{ (app (2) et (3))}$
- (5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool} \text{ (var)}$
- (6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \text{ (fun (5))}$
- (7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$
- (8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool} \text{ (app (6) et (7))}$
- (9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (paire (4) et (8))}$
- (10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : 'b * \text{bool} \text{ (let-sub (9))}$
- $E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$
 $x = x, t = \text{int}$
 $\text{mgu}('b, \text{int}) = ['b \leftarrow \text{int}]$

Exemple

$E \cup \{x : t\} \vdash x : t \text{ (var)}$

$t = \text{int}$

(1) $\{x : \text{int}\} \vdash x : \text{int} \text{ (var)}$

(2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow \text{int} \text{ (fun (1))}$

(3) $\vdash 1 : \text{int} \text{ (primitive)}$

(4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : 'b \text{ (app (2) et (3))}$

(5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool} \text{ (var)}$

(6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \text{ (fun (5))}$

(7) $\vdash \text{true} : \text{bool} \text{ (primitive)}$

(8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool} \text{ (app (6) et (7))}$

(9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : \text{int} * \text{bool} \text{ (paire (4) et (8))}$

(10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : \text{int} * \text{bool} \text{ (let-sub (9))}$

Exemple

- (1) $\{x : \text{int}\} \vdash x : \text{int}$ (var)
- (2) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{int} \rightarrow \text{int}$ (fun (1))
- (3) $\vdash 1 : \text{int}$ (primitive)
- (4) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) 1 : \text{'b}$ (app (2) et (3))
- (5) $\{x : \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}$ (var)
- (6) $\vdash \text{fun } x \rightarrow x : \text{bool} \rightarrow \text{bool}$ (fun (5))
- (7) $\vdash \text{true} : \text{bool}$ (primitive)
- (8) $\vdash (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true} : \text{bool}$ (app (6) et (7))
- (9) $\vdash ((\text{fun } x \rightarrow x) 1, (\text{fun } x \rightarrow x) \text{true}) : \text{int} * \text{bool}$ (paire (4) et (8))
- (10) $\vdash \text{let } f = \text{fun } x \rightarrow x \text{ in } (f 1, f \text{true}) : \mathbf{int} * \mathbf{bool}$ (let-sub (9))

Exercices

- Inférer les types l'expression suivante :
 - `let x = (1, true) in (fun y -> x)`