数值分析
（复习）

第一章 绪论

1） 模型误差（也称描述误差）

数学建模时，忽略次要因素产生的误差

2） 观测误差（也称数据误差）

测量原始数据、参数值产生的误差称为观测误差

3） 截断误差（也称方法误差）

数学公式简化处理引入的误差

4） 舍入误差（也称计算误差）

计算过程中取有限位数字进行运算而引起的误差

绝对误差VS相对误差 & 绝对误差界VS相对误差界

近似值x_A的绝对误差：$x - x_A$

相对误差：$\frac{(x - x_A)}{x} \approx \frac{(x - x_A)}{x_A}$

近似值x_A的绝对误差界：$|x - x_A| \leq \varepsilon_A$

相对误差界：$\left|\frac{x - x_A}{x_A}\right| \leq \frac{\varepsilon_A}{x_A}$

误差的四则运算：

定理：假设 x* 和 y*分别是准确值 x 和 y的一个近似值，则有四则运算的绝对误差估计：

$$(1)\ e(x^* \pm y^*) = e(x^*) \pm e(y^*)$$

$$(2)\ e(x^* \cdot y^*) \approx y^* e(x^*) + x^* e(y^*)$$

$$(3)\ e\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{y^* e(x^*) - x^* e(y^*)}{(y^*)^2}$$

绝对误差界也具有类似的性质，不同点在于估计值取绝对值。

有效数字

$$|x - x_A| \leq 0.5 \times 10^{m-n}$$

误差界是某一位的半个单位。其中，m为整数的位数，n为具有的有效数字位数。$x_A = \pm \mathbf{0}.a_1a_2...a_n \times 10^m$，为规格化表示。

例： $x = \pi$。

若$x_A = 3.14$，则$|x - x_A| = 0.00159... \leq \varepsilon_A = \frac{1}{2} * 10^{-2}$

若$x_A = 3.142$，则$|x - x_A| = 0.0004074... \leq \varepsilon_A = \frac{1}{2} * 10^{-3}$

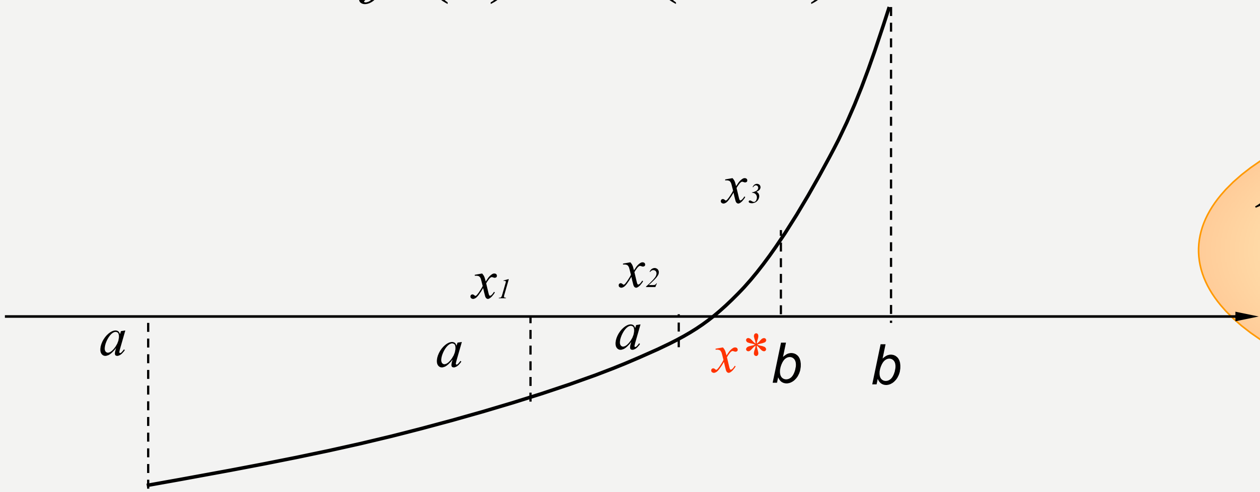
第二章

非线性方程求根方法

二分法

区间法——二分法

零点定理： 若 $f(x) \in C[a, b]$，且 $f(a)f(b) < 0$，则函数 $f(x)$在 (a, b) 上必有一根.



含根区间不断缩小，二分何时停止？

停止二分条件： $\left| x_{k+1} - x_k \right| < \varepsilon$

成都信息工程大学数值分析

成都信息工程大学数值分析

二分法公式构造

设连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 只有一个根，且 $f(a)f(b)<0$

1、记 $I_0=[a,b]$，取区间中点 $x_0=0.5(a+b)$

2、判别 $f(x_0)$ 的值

a. 若 $f(x_0)=0$, 则 $x^*=x_0$，停止

b. 若 $f(x_0)f(a)<0$, 记 $I_1=[a,x_0]$, 否则记 $I_1=[x_0,b]$

3、若记 $I_1=[a_1,b_1]$, 再取 $x_1=0.5(a_1+b_1)$

4、若 x_1 满足根的精度要求，则 $x^*\approx x_1$ 停止，否则 I_1 替代 I_0 转1

二分法需要记住的一些关系

$1、\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$　　事先估计

$2、\left|x^* - x_k\right| \le \left|x_k - x_{k-1}\right|$　　事后估计

3、满足精度要求的二分次数为$k > \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$。

成都信息工程大学数值分析

例题：用二分法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$

在区间[1.0, 1.5]内的一个实根，且要求有3位有效数字。试完成：

(1) 估计需要二分的次数；

(2) 将计算过程中数据填入表1.(填写到小数点后面3位）

解：容易知道方程在[1.0, 1.5]有且仅有一个实根。记此实根为 x^*，根据二分法误差估计公式有

$$|x_k-x^*|\le\frac{(b-a)}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+2}}$$

要使得近似解有 3 位有效数字，只需要有

$$\frac{1}{2^{k+2}}\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

从而可得 $k\ge6$，即满足精度要求的二分次数为 6 次。

简单迭代法

成都信息工程大学数值分析

简单迭代法的过程

1、选含有唯一根的区间[***a,b***];

2、选迭代函数***φ(x)***;

3、检验条件1和条件2，要给出具体L值；

4、检验条件不成立时，重选[***a,b***]或***φ(x)***再检验。

5、条件成立，根据迭代函数写出迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k) \qquad \boxed{x_0\in[a,b]}$$

1、$\forall x\in[a,b]\Rightarrow \underline{\varphi(x)\in[a,b]}$

$\boxed{2、|\varphi'(x)|\le L<1, x\in[a,b]}$

$1.\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow \varphi(x)\in[a,b]$

$2.\ \exists L\in(0,1), \forall x_1,x_2\in[a,b]\Rightarrow |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

成都信息工程大学数值分析

例5　用简单迭代法求方程 $x^3+2x^2+10x-20=0$

在$\boldsymbol{x}$ =1附近的根，计算结果准确到4位有效数字。

解：先确定含唯一根区间 $[a,\text{b}]$

令 $f\left(x\right)=x^3+2x^2+10x-20$

$$\because f(1)f(2)<0, f'(x)=3x^2+4x+10>0, x\in[1,2]$$

所以原方程 $\boldsymbol{f(x)=0}$ 在[1, 2] 内有唯一的根。

找迭代函数：

$$x^3+2x^2+10x-20=0 \Leftrightarrow x=\frac{20}{x^2+2x+10}$$

成都信息工程大学数值分析

得迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{20}{x^2+2x+10}$

$$\because \varphi'(x)=-\frac{20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}<0, x\in[1,2]\Rightarrow\varphi(x)\downarrow$$

$$x\in[1,2]\Rightarrow 1<\frac{10}{9}=\varphi(2)\le\varphi(x)\le\varphi(1)=\frac{20}{13}<2$$

$$\therefore x\in[1,2]\Rightarrow\varphi(x)\in[1,2]$$

$$\because |\varphi'(x)|=\frac{20(2x+2)}{(x^2+2x+10)^2}\le\frac{20(2\times2+2)}{(1^2+2\times1+10)^2}=\boxed{\frac{120}{169}=L<1}$$

由推论1，可得迭代格式

$$\forall x_0\in[1,2]\Rightarrow x_{k+1}=\frac{20}{x_k^2+2x_k+10}\updownarrow$$

用有效数字确定计算精度

由题意计算准确到4位有效数字，有n=4

$$x^* \in [1,2] \Rightarrow x^* = 1.\cdots \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \varepsilon = 0.5\times 10^{m-n} = \boxed{0.5\times 10^{-3}}$$

取 $\boxed{x_0 = 1,}$ 进行迭代计算有

$$x_1 = 1.538461538 \quad \boxed{|x_1 - x_0| = 0.538\cdots > 0.5\times 10^{-2}}$$

$$x_2 = 1.295019517 \quad |x_2 - x_1| = 0.2434\cdots > 0.5\times 10^{-2}$$

$$\cdots$$

$$x_{10} = 1.36869397 \Rightarrow |x_{10} - x_9| = 0.36\cdots\times 10^{-3} < 0.5\times 10^{-3}$$

$$\therefore x^* \approx x_{10} = 1.36869397$$

成都信息工程大学数值分析

牛顿迭代法（切线法）

成都信息工程大学数值分析

定理6 （收敛定理）

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有连续二阶导数 ，满足下列3个条件

1. $f(a)f(b)<0$
2. $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$
3. $f''(x), x\in[a,b]$不变号

$\Rightarrow \forall x_0\in[a,b]$, 只要$f(x_0)f''(x_0)>0$

则Newton迭代格式产生的数列一定收敛于$[a,b]$ 上的唯一根 。

牛顿迭代法的过程

成都信息工程大学数值分析

1、根据收敛定理，判断前3条是否成立；

2、条件成立，选择初始值$x_0 \in [a,b]$，判断是否满足

$$f(x_0)f''(x_0) > 0$$

3、满足上式，写出迭代格式 $\boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$ ，给初始值x_0进行迭代；

4、当$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$，$x_{k+1}$为所求结果。

成都信息工程大学数值分析

例题：用牛顿迭代法计算$\sqrt[3]{7}$的近似值。(取初值$x_0=2$,最终结果保留2位小数)。写出详细计算过程。

先判定

解：令 $x=\sqrt[3]{7}$，可得 $x^3-7=0$。再令 $f(x)=x^3-7$。容易知道

① $f(1)f(2)<0$；

② $f'(x)=3x^2>0, x\in[1,2]$；

③ $f''(x)=6x>0, x\in[1,2]$。

取 $x_0=2$，可知 $f(x_0)f''(x_0)>0$。从而可知牛顿迭代法在区间$[1,2]$上全局收敛，且收敛于方程 $x^3-7=0$ 的唯一实根 $x^*=\sqrt[3]{7}$。

再计算

取迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-7}{3x_k^2}=\frac{1}{3}\left(2x_k+\frac{7}{x_k^2}\right), x_0=2$$

第三章

线性方程组解法

成都信息工程大学数值分析

线性方程组问题的形式

一般表示：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

矩阵表示：

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

成都信息工程大学数值分析

迭代法

Jacobi 迭代

Seidel 迭代

Sor 迭代

直接法

高斯消元法

LU分解法——Doolittle

迭代法

先构造

再判断收敛

迭代至满足误差要求的解

构造——表达式法：

1. 写出不动点方程组

2. 改写格式

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases} \Rightarrow$$

Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}\underline{x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}\underline{x_1^{(k+1)}} - a_{n2}\underline{x_2^{(k+1)}} - \ldots - a_{nn-1}\underline{x_{n-1}^{(k+1)}}) \end{cases}$$

Sor $$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega\Delta x = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\tilde{x}^{(k+1)}$$

成都信息工程大学数值分析

构造——向量法：

1. 根据A矩阵写出L、D、U矩阵

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

成都信息工程大学数值分析

构造——向量法：

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

2. 根据L、D、U矩阵写出B矩阵和g向量

B为迭代矩阵

三种迭代对应的迭代矩阵为

雅克比迭代：

$$B_J = D^{-1}(L+U) = D^{-1}(D-A) = I - D^{-1}A$$

$$g_J = D^{-1}b$$

赛德尔迭代：

$$B_S = (D-L)^{-1}U \qquad g_S = (D-L)^{-1}b$$

Sor迭代：

$$B_J = D^{-1}(L+U) = D^{-1}(D-A) = I - D^{-1}A$$

怎么判断收敛

定理2：$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$对任意$x^{(0)}$都收敛$\Leftrightarrow \rho(B) < 1$

$A \in R^{n\times n}, \lambda_k$是$A$的特征值$, k = 1, 2, \cdots, n,$ 称 $\rho(A) = \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda_k|$

为矩阵A的谱半径。

Jacobi特征方程等价：

$$|\lambda I - B_J| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Seidel特征方程等价：

$$|\lambda I - B_S| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

成都信息工程大学数值分析

怎么判断收敛

判别条件I：若存在迭代矩阵B的某种矩阵范数满足$\|B\|<1$, 则$\forall x^{(0)}\in R^n, x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$产生的迭代序列都收敛于不动点。

常用的矩阵范数

1) 列范数：$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

2) 行范数：$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

3) F范数：$\|A\|_F=\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2}$

常用的（列）向量范数

1) $\|x\|_1=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$

2) $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$

3) $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k|$

4) 2范数：$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}}$ ，$\lambda_{\max}$是A^TA的最大特征值

成都信息工程大学数值分析

怎么判断收敛

判别条件II：若A为严格对角占优矩阵，则线性方程组Ax=b的Jacobi和Seidel迭代对任何初值$x^{(0)}$都收敛。

严格对角占优矩阵：对角线元素a_{ii}比该行或列其他元素绝对值之和大！！

判别条件III：若A为正定矩阵，则线性方程组Ax=b的Seidel迭代对任何初值$x^{(0)}$都收敛。

成都信息工程大学数值分析

需要迭代多少次？

误差估计：

定理4. 设矩阵B的某种矩阵范数||B||<1，则有

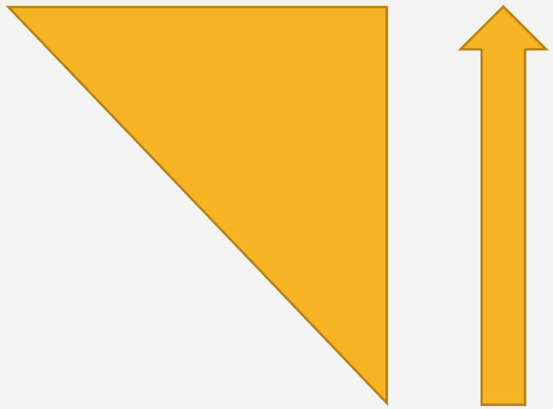
$$1、\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

事后估计

$$2、\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{\|B\|^{k}}{1-\|B\|}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

事先估计

直接法



可用判定

先消元

再回代

高斯消元法

Gauss消元法判定

定理1：$\forall k,\ a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \leftrightarrow$矩阵A的所有顺序主子式≠0。

定理2：矩阵A的所有顺序主子式≠0，则Gauss消元法可以使用。

消元——列主元消去法

利用增广矩阵+矩阵初等变化

$k = 1, 2, \cdots, n-1$计 算

$$m_{ik} = -a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \qquad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{ik} b_k^{(k-1)}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik} a_{kj}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, k+2, \cdots, n$$

成都信息工程大学数值分析

例、用列主元与全主元方法解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ 3x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

解：1）列主元法

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{5} & 4 & 10 & 0 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{5} & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -0.1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

成都信息工程大学数值分析

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & 1.2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2.5} & -5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & -2.5 & -5 & 2 \\ 0 & 1.2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -0.8 \\ 0 & 1.2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -0.8 \\ 0 & 0 & -1.4 & 49/25 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -1.4 \end{bmatrix}$$

得到解：$x_1 = 1.2, x_2 = 2, x_3 = -1.4$

LU分解法

Doolittle分解法判定

定理1：非奇异矩阵A的Doolittle分解是唯一的。

定理2：若A的各阶顺序主子式不为零，则A有唯一的Doolittle分解。

LU法消元
—Doolittle分解法

$$A=LU$$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix},U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

计算出L和U矩阵

（1）利用公式：

$$u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\ ,\quad i\le j;\qquad l_{ij}=\Big(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\Big)/u_{jj}\ ,\quad i>j$$

（2）利用紧凑格式：

$(a_{11})u_{11}$	$(a_{12})u_{12}$	$(a_{13})u_{13}$	$\cdots$	$(a_{1n})u_{1n}$	第 1 框
$(a_{21})l_{21}$	$(a_{22})u_{22}$	$(a_{23})u_{23}$	$\cdots$	$(a_{2n})u_{2n}$	第 2 框
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$(a_{n1})l_{n1}$	$(a_{n2})l_{n2}$			$(a_{nn})u_{nn}$	第 n 框

成都信息工程大学数值分析

LU法回代

$$A = LU \Rightarrow AX = b \Rightarrow LUX = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y^* \end{cases}$$

回代求解 $Ly = b$，得解 y^*

回代求解 $Ux = y^*$，得Ax=b的解 x

第四章

求矩阵特征值和特征向量

规范化幂法算m_k为按模最大的特征值，$u^{(k)}$为对应特征向量。

1) 输入矩阵$A, V^{(0)}$和精度ε, 使用中取$V^{(0)}=\{1,1,\cdots,1\}$

2）$k \Leftarrow 1$

3）$V^{(k)} \Leftarrow Au^{(k-1)}$

4）$m_k \Leftarrow \max\left(V^{(k)}\right), m_{k-1} \Leftarrow \max\left(V^{(k-1)}\right)$

5）$u^{(k)} \Leftarrow V^{(k)} / \mathrm{m}_k$

6）如果$\left|\mathrm{m_k} - \mathrm{m_{k-1}}\right| < \varepsilon$, 则输出$u^{(k)}, m_k$, 停止

7）$k \Leftarrow k+1, goto\quad 3)$

成都信息工程大学数值分析

成都信息工程大学数值分析

例1 用幂法求矩阵A的按模最大特征值和相应的特征向量。

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$ 取 $V^{(0)}=(0,-0.5,1)^T$，要求误差不超过 10^{-3}.

解：

	V	m=Max V	$u=V/m$
0	0 -0.5 1	1	0 -0.5000 1.0000
1	0.5000 -2.0000 2.5000	2.5000	0.2000 -0.8000 1.0000
:			
8	2.8436 -2.9993 2.9997	2.9997	0.9480 -0.9999 1.0000
9	2.8959 -2.9998 2.9999	2.9999	0.9666 -1.0000 1.0000

$|2.9999-2.9997|<10^{-3}$ $\Rightarrow \lambda_1=2.9999, x_1=(0.9666,-1.0000,1.0000)^T$

反幂法算法——求A^{-1}的幂法

1\\$m_k$为按模最小的特征值，$u^{(k)}$为对应特征向量。

1) 输入矩阵$A, V^{(0)}$和精度ε，使用中取$V^{(0)} = \{1, 1, \cdots, 1\}$

2）$k \Leftarrow 1$

3）$V^{(k)} \Leftarrow A^{-1} u^{(k-1)}$

4）$m_k \Leftarrow \max\left(V^{(k)}\right), m_{k-1} \Leftarrow \max\left(V^{(k-1)}\right)$

5）$u^{(k)} \Leftarrow V^{(k)} / \mathrm{m}_k$

6）如果$\left|\mathrm{m_k} - \mathrm{m_{k-1}}\right| < \varepsilon$，则输出$u^{(k)}, m_k$，停止

7）$k \Leftarrow k+1, goto \quad 3)$

成都信息工程大学数值分析

求逆矩阵的方法

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

方法一：矩阵的初等行变换

$$[A|I] = [I|A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

方法二：伴随矩阵法

$$A^{-1} = A^{*}/det(A)$$

$$A^{*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij}：方阵A去除第i行j列元素后，余下元素的行列式

第五章

插值与拟合

求某函数的近似函数

成都信息工程大学数值分析

拉格朗日插值法

1. n次插值多项式——选择n+1个插值点
2. 求拉格朗日插值基函数l_{in}
3. 带入拉格朗日插值多项式L_n
4. 计算插值余项，判断误差

成都信息工程大学数值分析

总结一下！！！

学习目的？

如何利用已知数据构造$f(x)$的近似函数？

怎么求？

拉格朗日插值法

具体怎么操作？

1. n次插值多项式——选择n+1个插值点
2. 求拉格朗日插值基函数l_{in}
3. 带入拉格朗日插值多项式L_n
4. 计算插值余项，判断误差

成都信息工程大学数值分析

如何选择插值点

N次插值选择n+1个插值节点
就近原则

如何求基函数 l_{in}

$$l_{in} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right), i = 0,1, \dots, n$$

n次插值多项式共有n+1个基函数。
l_{in}的乘积因子有n个。

怎么求插值多项式 L_n

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} y_i l_{in} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

成都信息工程大学数值分析

插值余项定理

$$\Rightarrow R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

1) $|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,\quad x\in[a,b]$

2) $|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}T_{n+1},\quad x\in[a,b]$

1）估计插值函数在某一点的误差；

2）估计插值函数在整个区间[a, b]上的误差。

牛顿插值法

1. n次插值多项式——选择n+1个插值点
2. 求差商（0-n）
3. 带入牛顿插值多项式N_n
4. 计算插值余项，判断误差

成都信息工程大学数值分析

1、差商定义

记$f[x]=f(x)$，$f[x]$称为**零阶差商**。

一阶差商：

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=\frac{f[x_i]-f[x_j]}{x_i-x_j}$$

二阶差商：

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

k 阶差商：

$$f[x_{i0},x_{i1},\ldots,x_{ik-1},x_{ik}]=\frac{f[x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ik}]-f[x_{i0},x_{i1},\ldots,x_{ik-1}]}{x_{ik}-x_{i0}}$$

成都信息工程大学数值分析

差商表

x	y=f(x)	1阶差商	2阶差商	…	n阶差商
x_0	y_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	…	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	y_n				

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\ldots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Newton 插值余项

成都信息工程大学数值分析

定理： 满足插值条件的n次Newton插值多项式的余项为

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(t) = (t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

拟合法

成都信息工程大学数值分析

求曲线拟合的算法

1)画出$(x_k, f(x_k))(k=0,1,\cdots,n)$的散点图

2) 选择合适的拟合函数类M;

3) 构造对应的法方程组，求解之得拟合函数。

形如 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k\varphi_k(x) \quad a_k\in R,\ \varphi_k(x)$已知

$$\sum_{i=0}^{m}a_i\boxed{\sum_{k=0}^{n}\omega_k\varphi_i(x_k)\varphi_j(x_k)}=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)\varphi_j(x_k)} \qquad (j=0,1,\cdots,m)$$

$$\text{记：}(h,g)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k h(x_k)g(x_k)$$

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_m)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\varphi_m,\varphi_0) & (\varphi_m,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_m,\varphi_m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_m,f)\end{pmatrix}$$

法方程组

或正规方程组

1. 多项式拟合

1、当$\varphi_k(x)=x^k$时 $\Rightarrow \varphi(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$

对应的法方程组为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^m \\ \sum_{i=0}^{n}\omega x_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^m & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

当$\varphi(x)$是m次多项式时，称为m次拟合曲线。

成都信息工程大学数值分析

线性拟合：m=1的法方程组

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i y_i \end{pmatrix}$$

特别$\omega_i = 1$

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}$$

成都信息工程大学数值分析

二次拟合：m=2的法方程组

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^3 & \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\omega_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

特别$\omega_i = 1$

$$\begin{pmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

2、可求解的非线性拟合类型

1）指数曲线拟合

$$\varphi(x)=ae^{bx}$$ 取对数 $\ln\varphi(x)=\ln a+bx$

令 $P(x)=\ln\varphi(x), A=\ln a$ 转化为 $\boldsymbol{P(x)=A+bx}$

求出最小二乘解：$P^*(x)=A^*+b^*x$

回代得 $\varphi^*(x)=e^{A^*+b^*x}=e^{A^*}e^{b^*x}$

2）分式曲线拟合

$$(h,g)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k h(x_k)g(x_k)$$

$$\varphi(x)=\frac{x}{ax+b}$$

取倒数 $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{ax+b}{x}=a+b\frac{1}{x}$

令 $P(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\Rightarrow P(x)=a+b\frac{1}{x}$

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,P)\\ (\varphi_1,P)\end{pmatrix}$$

取 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow P(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)$

求法方程组有 $P^*(x)=a^*+b^*\frac{1}{x}\Rightarrow\varphi^*(x)=\frac{1}{P^*(x)}=\frac{x}{a^*x+b^*}$