

Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне - вариант 42

Зевде Эйоб Аманте

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Выполнение лабораторной работы	6
3.1	Условие задачи	8
3.2	Код программы (Julia)	8
3.3	Код программы (Python)	10
3.4	Решение	13
4	Выводы	16
	Список литературы	17

List of Figures

3.1	траектории для случая 1 (Python)	13
3.2	траектории для случая 1 (Julia)	13
3.3	траектории для случая 2 (Python)	14
3.4	траектории для случая 2 (Julia)	15

1 Цель работы

Приведем один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Например, рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

2 Задание

1. Провести необходимые рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

3 Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0$, $X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0$ ($\theta = x_0 = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2 , задачу будем решать для двух случаев.

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \text{ при } \theta = 0$$

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \text{ при } \theta = -\pi$$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер

удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$. Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r \frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v , то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_t = v \sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r \frac{d\theta}{dt} = v \sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = v \sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3.1 Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 20 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5 раза больше скорости браконьерской лодки

3.2 Код программы (Julia)

```
using DifferentialEquations
using Plots
```

```
n = 5
s = 20
fi = 3/4*pi
```

```
function f(r, p, t)
    dr = r/sqrt(n^2-1)
    return dr
end
```

```
function f2(t)
    xt = tan(fi+pi)*t
    return xt
end
```

```
r0 = s/(n+1)
```



```

theta0 = collect(LinRange(0, 2*pi, 10000))
prob = ODEProblem(f, r0, (0, 2*pi))
sol = solve(prob, saveat=theta0)

t = collect(LinRange(0.000000001, 8, 1000))
r1=[]
tetha1=[]
for i in t
    push!(r1, sqrt(i^2 + f2(i)^2))
    push!(tetha1, atan(f2(i)/i))
end

plot(sol, proj=:polar, label="катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label="лодка")

savefig("01jl.png")

r0 = s/(n-1)

theta0 = collect(LinRange(0, 2*pi, 10000))
prob = ODEProblem(f, r0, (0, 2*pi))
sol = solve(prob, saveat=theta0)
t = collect(LinRange(0.000000001, 15, 1000))
r1=[]
tetha1=[]
for i in t
    push!(r1, sqrt(i^2 + f2(i)^2))
    push!(tetha1, atan(f2(i)/i))
end

```

```

plot(sol, proj=:polar, label="катер")
plot!(tetha1, r1, proj=:polar, label="лодка")

savefig("02jl.png")

```

3.3 Код программы (Python)

```

from math import *
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plot

n=5 #разница в скорости
s= 20 #расстояние обнаружения
fi=pi*3/4 #угол движения

def f(tetha, r): #уравнение катера
    dr=r/sqrt(n**2 - 1)
    return dr

def f2(t): #лодка браконьеров
    xt = tan(fi+pi)*t
    return xt

r0=s/(n+1) #первый случай

#решение диф уравнения для катера
tetha = np.arange(0, 2*pi, 0.01)

```

```

r = odeint(f, r0, tetha)

#вычисление траектории лодки
t=np.arange(0.000000000000001, 20)
r1=np.sqrt(t**2 + f2(t)**2)
tetha1=np.arctan(f2(t)/t)

plot.rcParams["figure.figsize"] = (10, 10)

plot.polar(tetha, r, 'red', label = 'катер')
plot.polar(tetha1, r1, 'green', label = 'лодка')

#вычисление точки пересечения
tmp=0
for i in range(len(tetha)):
    if round(tetha[i], 2) == round(fi+pi, 2):
        tmp=i
print("Teta:", tetha[tmp], "r:", r[tmp][0])
print("X:", r[tmp][0]/sqrt(2), "Y:", -r[tmp][0]/sqrt(2))

plot.legend()
plot.savefig("01.png",dpi=100)

r0=s/(n-1) #второй случай

#решение диф уравнения для катера
tetha = np.arange(0, 2*pi, 0.01)
r = odeint(f, r0, tetha)

```

```

#вычисление траектории лодки
t=np.arange(0.0000000000000001, 20)
r1=np.sqrt(t**2 + f2(t)**2)
tetha1=np.arctan(f2(t)/t)

plot.rcParams["figure.figsize"] = (8, 8)

plot.polar(tetha, r, 'red', label = 'катер')
plot.polar(tetha1, r1, 'green', label = 'лодка')

#вычисление точки пересечения
tmp=0
for i in range(len(tetha)):
    if round(tetha[i], 2) == round(fi+pi, 2):
        tmp=i
print("Teta:", tetha[tmp], "r:", r[tmp][0])
print("X:", r[tmp][0]/sqrt(2), "Y:", -r[tmp][0]/sqrt(2))

plot.legend()
plot.savefig("02.png",dpi=100)

```

3.4 Решение

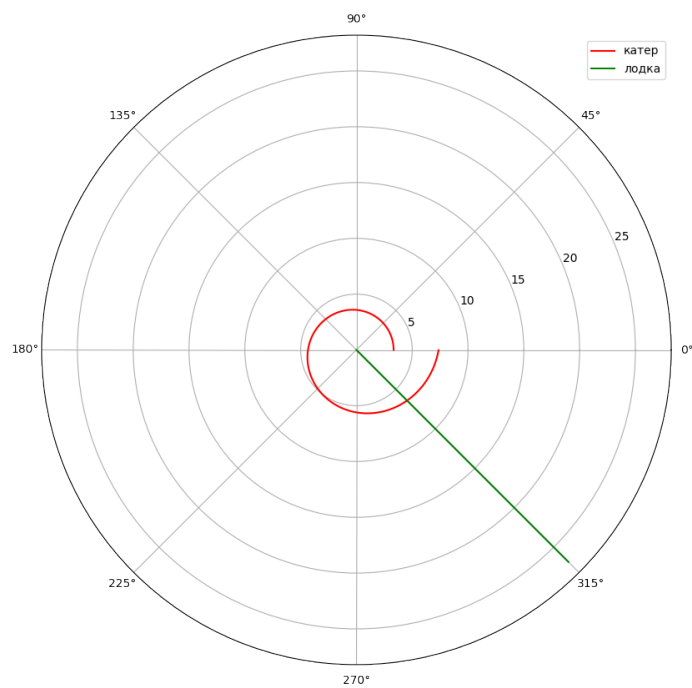


Figure 3.1: траектории для случая 1 (Python)

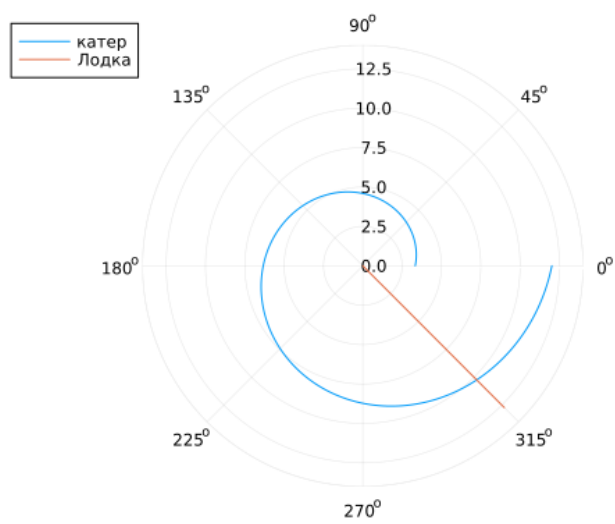


Figure 3.2: траектории для случая 1 (Julia)

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет координаты

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 6.42 \end{cases}$$

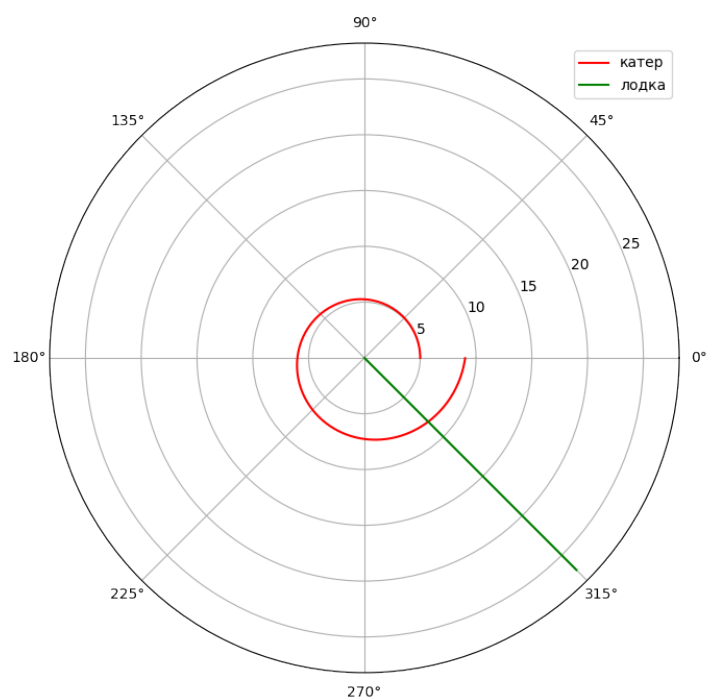


Figure 3.3: траектории для случая 2 (Python)

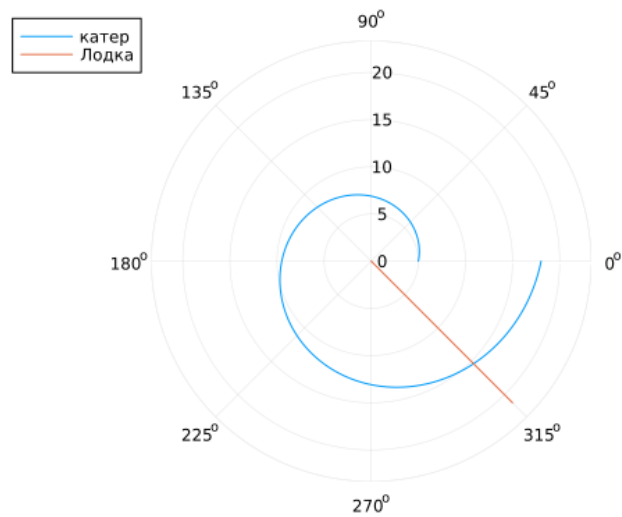


Figure 3.4: траектории для случая 2 (Julia)

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет координаты

$$\begin{cases} \theta = 315 \\ r = 8.08 \end{cases}$$

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели требуется пройти меньшее расстояние.

4 Выводы

Рассмотрели задачу о погоне. Провели анализ и вывод дифференциальных уравнений. Смоделировали ситуацию.

Список литературы

1. Задача о погоне