

概率论与数理统计

授课教师：唐宏岩

前言

本讲义基于清华大学数学系唐宏岩老师于 2023 - 2024 学年秋季学期开设的《概率论与数理统计》课程，用于辅助同学们课后复习，助教尽量做到每周课后两天内更新。

由于时间与能力所限，本讲义可能不会出现大段的文字论述（但会包含重要的定义、定理与公式等）。但是，对许多基本概念的深入理解是非常有必要的，同学们可以在浏览时检查自己是否能够回忆起课上的内容，对掌握不够扎实的地方，鼓励大家查阅参考书或在课程群提问以解决问题。

由于此为教学团队第一年尝试整理讲义，诸如格式编排、内容完整性方面可能存在许多不足，欢迎大家联系我提出宝贵的意见与建议。

曹子尧

2023 年 9 月

目录

第一部分

初等概率论

第一章 事件的概率

1.1 概率的发展史

赌博中的 de Méré's Problem: 连续掷一个均匀六面骰 4 次, 获得至少一次 “6” 的概率为 $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.5177$; 而连续掷两个均匀六面骰 24 次, 获得至少一次 “对 6” 的概率为 $1 - (35/36)^{24} \approx 0.4914$ 。

Pascal 和 Fermat 的通信中使用初等数学的方法, 首创了概率论相当多的数学理论, 虽然当时没有总结成通用的定理。

Laplace 创立了采用分析方法的分析概率论。

Kolmogorov 利用测度论方法发展了现代概率理论。

1.2 随机试验与事件

定义 1.1. 概率论中的随机试验指的是符合下面两个特点的试验:

1. 不能预先确知结果
2. 可以预测所有可能的结果

定义 1.2. 样本空间是指一个试验的所有可能结果的集合, 常用 Ω 表示。

定义 1.3. 事件是样本空间的一个良定义子集。

一次随机试验中, 一个事件可能发生或不发生。

下面是一些常见的事件:

1. 全事件 Ω (必然事件)
2. 空事件 \emptyset (不可能事件)
3. 基本事件 $\{a\}$, 其中 $a \in \Omega$, 即仅包含单一试验结果的事件

1.3 事件的运算

由于事件是集合，因此事件之间可以进行集合之间的运算，如：

1. 余 $A^c = \Omega \setminus A$
2. 和 $A + B = A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
3. 差 $A - B = A \setminus B$
4. 积 $AB = A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

集合的 De Morgan's laws 也适用于事件： $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c$ 。

事件的运算像集合的运算一样，可以用 Venn 图来表示。

1.4 概率的几种解释

对于概率这一数学概念，人们形成了几种从不同角度出发的解释：

1. 古典解释：基于等可能性的解释
2. 频率解释：基于大量重复试验的解释（频率学派采用的解释）
3. 主观解释：概率是一种对确信程度的度量（Bayes 学派采用的解释）

1.5 概率的公理化定义

我们用 2^Ω 表示 Ω 的幂集，即 Ω 的所有子集组成的集合。

定义 1.4. 事件集类 $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ 必须满足所谓 σ -代数的性质：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ （对补运算的封闭性）
3. $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$ （对可列并的封闭性）

例 1.1. $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ，以下是一些合法的事件集类：

1. $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega$
2. $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$
3. $\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

定义 1.5. (Kolmogorov) 概率函数 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 是满足以下三条公理的映射：

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$ （加法公理/可列可加性）

我们称 (Ω, \mathcal{F}, P) 是一个概率空间。

命题 1.1. 关于概率空间, 有如下性质:

1. $P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) + P(A^c) = 1$
4. $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (有限可加性)
5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (我们称事件 A 蕴含事件 B)
6. $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$ (容斥公式)

特别地, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

例 1.2. (配对问题)

有 n 个人, 每人有一顶帽子。现将所有帽子放到一起, 再随机分配给每人一顶, 考虑无人拿到自己的帽子的概率。

为此, 设事件 A_i 为“第 i 个人拿到自己的帽子”, 则 $P(A_i) = 1/n$ 。

利用容斥公式, 至少一人拿到自己帽子的概率为 $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$,

其中 $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!} \binom{n}{r} = \frac{1}{r!}$, 即 $P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ 。

所求概率 $P_n = 1 - P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}) \rightarrow e^{-1} (n \rightarrow \infty)$ 。

思考: 恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率?

1.6 条件概率

定义 1.6. 若 $P(B) > 0$, 定义条件概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 。

通常, 我们计算条件概率的方法有两种:

1. 在缩小 (受限) 的样本空间 (要求事件 B 发生) 上, 考虑事件 A 发生的概率
2. 根据定义计算

一种常用的形式是 $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, 这可以视作是求解两个事件的积的概率的方法 (乘法法则)。

例 1.3. 掷一个均匀六面骰, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5\}$, 则 $P(A) = 4/6, P(B) = 3/6, P(AB) = 2/6, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 2/3$ 。

例 1.4. 袋子中有 8 个红球和 4 个白球，无放回地取出两个球，利用组合数可知，两个都是红球的概率为 $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$ 。

用条件概率可以简化计算： $P(R_1 R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11}$ 。

更一般地，我们有 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ ，常用于序贯发生的一系列事件的积的概率求解。

例 1.5. 回忆上一节的“配对问题”。我们有 $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}|A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r}|A_{i_1} \cdots A_{i_{r-1}}) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{(n-r)!}{n!}$ 。

命题 1.2. 对于给定的事件 B ， $P(\cdot|B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 是概率函数，即 $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$ 仍是概率空间。

对于上述命题的证明，只需验证 $P(\cdot|B)$ 满足概率的三条公理即可。

这提示我们，条件概率也是一种概率，如果我们将 $P(A)$ 称为观察到事件 B 之前 A 的“先验概率”，则 $P(A|B)$ 就是相应的“后验概率”。

一个常见的迷思是：观测到事件 A 已经发生后，是否可以说事件 A 发生的概率 $P(A) = 1$ ？学过条件概率之后，我们知道答案是否定的，实际上是后验概率 $P(A|A) = 1$ 。

1.7 事件的独立性

定义 1.7. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称事件 A, B 相互独立。

如果 $P(B) > 0$ ，我们注意到 A, B 独立等价于 $P(A|B) = P(A)$ 。

命题 1.3. 若 A, B 独立，则 A^c, B 独立。

定义 1.8. 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ ，且 A, B, C 两两独立，则称事件 A, B, C 独立。

注意，仅有 A, B, C 两两独立，不能推出三者独立。

定义 1.9. 若对于事件列 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ ，任意取有限个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$ ，都有 $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_r})$ ，则称 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ 相互独立。

例 1.6. 每周开奖的彩票，各次中奖率均为 10^{-5} 且独立，问连续十年（520 周）不中奖的概率？令事件 A_i 为第 i 周不中奖，则 $P(A_i) = 1 - 10^{-5}$ ，故 $P(A_1 \cdots A_{520}) = (1 - 10^{-5})^{520} \approx 0.9948$ 。

定义 1.10. 若事件 A, B, E 满足 $P(AB|E) = P(A|E)P(B|E)$ ，则我们称 A, B 关于 E 条件独立。

注意，条件独立性和独立性之间没有蕴含关系。

1.8 Bayes 公式

定理 1.1. (全概率公式)

设 $\{B_i\}$ 是 Ω 的一个分割, 即

1. $\sum_i B_i = \Omega$
2. $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3. $P(B_i) > 0, \forall i$

则 $P(A) = P(\sum_i (AB_i)) = \sum_i P(AB_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$ 。

注: $\{B_i\}$ 可以是有限集合, 或可数无穷集合。

例 1.7. 对于调查问卷中的敏感问题 (如 “你是否有过某病史”), 被调查者可能会有所顾虑而做出虚假的回答。为保护被调查者的隐私, 同时取得其信任, 考虑引入一个 “保护性问题”, 即不具有敏感性的问题 (如 “你是否会游泳”), 并让被调查者以抛硬币的方式, 随机抽取一个问题回答。这样, 抽到敏感问题的、确有过该病史的被调查者在回答 “是” 时也无须有病史暴露之虞。

设人群中, 敏感问题答案为 “是” 的比例为 p (未知), 保护性问题答案为 “是” 的比例为 q (假设已知), 则若收集到 n 个被调查者的结果, 其中 k 个为 “是”, 我们便有 $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \approx \frac{k}{n}$, 可以据此得到 p 的估计。

定理 1.2. (Bayes 公式 / Bayes 准则)

设 $\{B_i\}$ 是 Ω 的一个分割, 则 $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$ 。

例 1.8. (假阳性悖论)

对于一种流行病, A 表示一个人检查呈阳性, B 表示此人确实患病。设 $P(B) = 10^{-4}$, $P(A|B) = 0.99$, $P(A|B^c) = 10^{-3}$, 则一个检查呈阳性的人真的患病的概率仅为 $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} \approx 9\%$ 。

如果再次检测仍呈阳性, 且两次检测效率不变, 结果彼此独立, 则此人真的患病的概率为

$$P(B|A_1 A_2) = \frac{P(A_1 A_2|B)P(B)}{P(A_1 A_2|B)P(B) + P(A_1 A_2|B^c)P(B^c)} = \frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B) + P(A_1|B^c)P(A_2|B^c)P(B^c)} \approx 99\%。$$

第二章 随机变量

2.1 一维随机变量

定义 2.1. 随机变量是样本空间上的实值函数。

注意，上述定义是不严格的。

更严谨的定义：若对于可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 和函数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，有 $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ，则称 X 是 (Ω, \mathcal{F}) 上的随机变量。其中“可测空间”是指 \mathcal{F} 是样本空间 Ω 上的 σ -代数。此处不要求“概率空间”，即随机变量的定义并不依赖概率测度 P 的存在。

例 2.1. 下表展示了两个随机变量。其中“像集”即 $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$ 。

| 试验 | 样本空间 Ω | 随机变量 X | 像集 |
|-------------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 随机调查 50 人对某议题支持与否 | $\Omega_1 = \{0, 1\}^{50}$ | $X_1 = \text{“1”的个数}$ | $\{0, 1, \dots, 50\}$ |
| 随机抽取一名北京成年市民 | $\Omega_2 = \text{所有北京成年市民之集}$ | $X_2 = \text{其年收入}$ | \mathbb{R} |

注意，我们经常用“ $X_1 = 20$ ”、“ $X_2 > 100000$ ”等简化的记号来表示事件。例如，前者实际上指的是 $\{\omega \in \Omega_1 | X_1(\omega) = 20\}$ 。

诸如此类的试验结果集合需是事件，这体现出前述的随机变量严谨定义的意义。事实上，如果满足该严谨定义，则对于任意可测集 $I \subset \mathbb{R}$ ，都有 $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$ 。

随机变量是试验结果的数值摘要，起到一种概括的作用。随机变量的“随机”要素来自于样本点 $\omega \in \Omega$ 的随机选择。在实际应用中，随机变量常常比样本空间具有更直观的意义。

随机变量可以分为：

1. 离散型：至多可数多个取值
2. 连续型：区间型取值（非严格定义）
3. 其他

“其他”中的一个非常特殊的子类是所谓的混合型随机变量。

定义 2.2. 对于随机变量 X 和 \mathbb{R} 的可测子集 I (例如 $I = (a, b]$), 令 $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\} \subset \Omega$ 为 I 的原像集, 我们定义记号 $P(X \in I)$ 表示 “ X 的取值在 I 中的概率”, 其值为 $P(X^{-1}(I))$ 。

例如, $P(a < X \leq b) = P(\{\omega | X(\omega) \in (a, b]\})$ 。

定义 2.3. $F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$ 称为随机变量 X 的累积分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF)。下标 X 在无歧义时可省略。

我们有 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ 。

例 2.2. 令 X 表示掷两个均匀六面骰所得的点数和, 则 X 的分布表 (详见 ?? 节) 为

| | | | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| P | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

相应的 CDF 见图 ??。

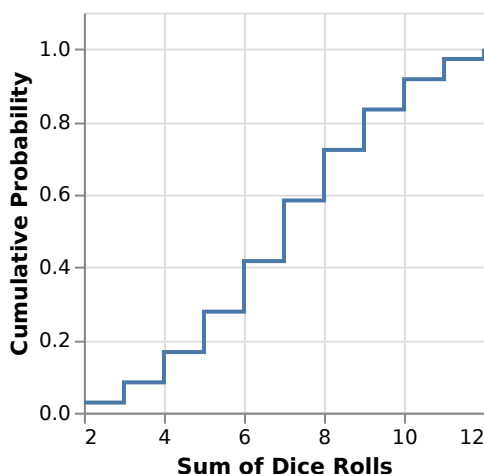


图 2.1: X 的 CDF 图象

注: 由于软件限制, 各个阶跃点的绘制方式不太规范, 实际上从其左侧逼近应该为一个空圈, 例如 $F(3) = 3/36$ 而不是 $1/36$ 。另外, $\forall x < 2, F(x) = 0; \forall x \geq 12, F(x) = 1$ 。

命题 2.1. CDF 的性质:

1. F 单调递增 (未必严格单调递增)
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. F 右连续

可以证明, 上述三条性质是任意函数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 成为 CDF 的充要条件。

思考: 如果我们将 CDF 的定义改为 $P(X < x)$, 上述性质会如何变化?

命题 2.2. 若 X, Y 为随机变量, 则 $aX + bY, XY, X/Y$ (需 $Y \neq 0$) 都是随机变量。一般地, 若 g 为可测函数, 则 $g(X, Y)$ 是随机变量。

定义 2.4. 设 X_1, X_2 的 CDF 分别为 F_1, F_2 , 我们称 X_1 与 X_2 同分布, 若 $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = F_2(x)$ 。

命题 2.3. 随机变量 X_1 与 X_2 同分布的一个充要条件是 \forall 可测集 $I \subset \mathbb{R}, P(X_1 \in I) = P(X_2 \in I)$ 。

注意, 同分布不等价于“同变量”, 即两个同分布的变量的取值不一定恒等。

例 2.3. 掷一次硬币, X 表示正面向上次数, Y 表示反面向上次数, 显然 X 与 Y 同分布, 但取值不等。

2.2 离散随机变量

定义 2.5. 离散随机变量 X 的概率质量函数 (Probability Mass Function, PMF) f 是指该随机变量取各个可能值的概率, 即 $f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$ 。可以用分布表的形式展示各个可能取值与概率的对应关系。

命题 2.4. 如果离散随机变量 X 的所有可能取值为 $\{x_i\}$, 则 X 的 PMF 具有如下性质:

1. $f(x_i) = p_i \geq 0, \forall i$
2. $\sum_i p_i = 1$
3. $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

定义 2.6. 离散随机变量 X 的期望定义为 $E(X) = \sum_i x_i p_i$ 。

我们称 X 的期望存在, 当且仅当 $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$ 。

当期望存在时, 其方差定义为 $\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

当方差有限时, 称其算术平方根为 X 的标准差, 记作 $\text{SD}(X)$ 。

注意, 通常我们所说的一个随机变量的均值指的就是期望。

标准化指的是对 X 作线性变换 $\frac{X - \mu}{\sigma}$, 其中 μ 和 σ 分别为 X 的期望和标准差, 得到均值为 0, 标准差为 1 的随机变量。

对于可测函数 g , $g(X)$ 也是随机变量, 其期望 $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i$ 。

期望反映了随机变量的集中趋势, 而方差反映了其分散程度。

2.3 常见离散分布

定义 2.7. 称一个随机变量 X 服从 *Bernoulli* 分布, 若 $\exists p \in (0, 1)$, X 的取值集合为 $\{0, 1\}$, 且 $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$. 记作 $X \sim B(p)$.

$B(p)$ 中的 p 称为该 *Bernoulli* 分布的参数。后续介绍的其他分布同理。

我们常将两种取值分别称为“成功”和“失败”。

计算可得, 若 $X \sim B(p)$, 则 $E(X) = p, \text{Var}(X) = p(1 - p)$ 。

定义 2.8. 称一个随机变量 X 服从二项分布, 若 $\exists N \in \mathbb{N}^*, p \in (0, 1)$, X 的取值集合为 $\{0, 1, \dots, N\}$, 且 $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k} (k \in \{0, 1, \dots, N\})$. 记作 $X \sim B(N, p)$ 。

我们常将 k 理解为“ N 次独立 *Bernoulli* 试验中的成功次数”。

计算可得, 若 $X \sim B(N, p)$, 则 $E(X) = Np, \text{Var}(X) = Np(1 - p)$ 。

定义 2.9. 称一个随机变量 X 服从 *Poisson* 分布, 若 $\exists \lambda > 0$, X 的取值集合为 \mathbb{N} , 且 $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k \in \mathbb{N})$. 记作 $X \sim P(\lambda)$ 。

计算可得, 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$ 。

对 *Poisson* 分布的一种常见理解是“一段时间内某个小概率事件发生的次数”所服从的分布。例如, 观察时间 $(0, 1]$ 内某路口的交通事故数 X , 将 $(0, 1]$ 区间等分成 n 个小区间, 即 $l_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。考虑到 n 很大时, 每个区间的长度很小, 我们作如下假设:

1. 每段区间内, 至多发生一次事故
2. l_i 上发生一次事故的概率与区间长度 $(1/n)$ 成正比, 为 $p = \lambda/n$
3. 各区间内是否发生事故彼此独立

则 $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (n \rightarrow +\infty)$, 即 $X \sim P(\lambda)$ 。

例 2.4. 设某医院平均每天出生婴儿数为 λ , 则接下来 t 天内出生婴儿数服从参数为 $t\lambda$ 的 *Poisson* 分布。

对于一般的二项分布 $X \sim B(N, p)$, 若 p 很小, N 很大, 而 $\lambda = Np$ 不太大, 则近似有 $X \sim P(\lambda)$, 且近似误差不超过 $\min\{p, Np^2\}$ 。

进一步, 若 N 次 *Bernoulli* 试验并非严格独立, 但满足弱相依条件, 则 *Poisson* 分布仍为一种较好的近似。

例 2.5. (配对问题)

A_i 表示第 i 个人拿到自己的帽子, 则 $P(A_i) = 1/n, P(A_i | A_j) = \frac{1}{n-1} (j \neq i)$, 当 n 很大时, $1/n$

和 $\frac{1}{n-1}$ 很接近, 可以认为满足弱相依条件。

记 X 为拿到自己帽子的人数, 则 X 近似服从参数为 $\lambda = np = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ 的 Poisson 分布, 即 $P(X = k) \approx \frac{e^{-1}}{k!}$ 。

我们用常规做法检查这种近似是否合理。首先考虑指定的某 k 人, 记事件 E 表示这 k 人拿到自己的帽子, 事件 F 表示其余 $(n - k)$ 人未拿到自己的帽子, 则 $P(EF) = P(E)P(F|E) = \frac{(n-k)!}{n!} \cdot P_{n-k}$, 其中 P_{n-k} 为 $(n - k)$ 人随机拿帽子时无人拿对的概率。那么我们有 $P(X = k) = \binom{n}{k} P(EF) = \frac{1}{k!} P_{n-k} \rightarrow \frac{e^{-1}}{k!} (n \rightarrow +\infty)$ 。这说明前述的近似是较好的。

2.4 连续随机变量

定义 2.10. 对随机变量 X , 若存在 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, 使得 \forall 可测集 $I \subset \mathbb{R}$, 都有 $P(X \in I) = \int_I f(x)dx$, 则称 X 为连续型随机变量, f 称为其概率密度函数 (Probability Density Function, PDF)。

命题 2.5. 连续随机变量 X 的 PDF 具有如下性质:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv 1$
2. $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$
4. 若 f 在 x_0 处连续, 则 $P(x_0 - \delta < X < x_0 + \delta) = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(t)dt \approx f(x_0) \cdot 2\delta$
5. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 连续, 且若 f 在 x 处连续, 有 $F'(x) = f(x)$
6. PDF 若存在, 则不唯一 (可以修改其在任意零测集上的值, 得到不同的 PDF)

定义 2.11. 连续随机变量 X 的期望定义为 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 。

我们称 X 的期望存在, 当且仅当 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$ 。

当期望存在时, 其方差定义为 $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

当方差有限时, 称其算术平方根为 X 的标准差, 记作 $\text{SD}(X)$ 。

对于可测函数 g , $g(X)$ 也是随机变量, 其期望 $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 。

2.5 常见连续分布

定义 2.12. 称一个连续型随机变量 X 服从均匀分布, 若其 PDF 为 $f(x) = \frac{1}{b-a}(x \in (a, b))$, f 在其余各处取 0。记作 $X \sim U(a, b)$ 。

我们常将 $X \sim U(0, 1)$ 称为随机数。

计算可得, 若 $X \sim U(a, b)$, 则 $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 。

定义 2.13. 称一个连续型随机变量 X 服从正态分布, 若其 PDF 为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($\sigma > 0$)。记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

计算可得, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ 。

著名的“经验法则”见图 ??。

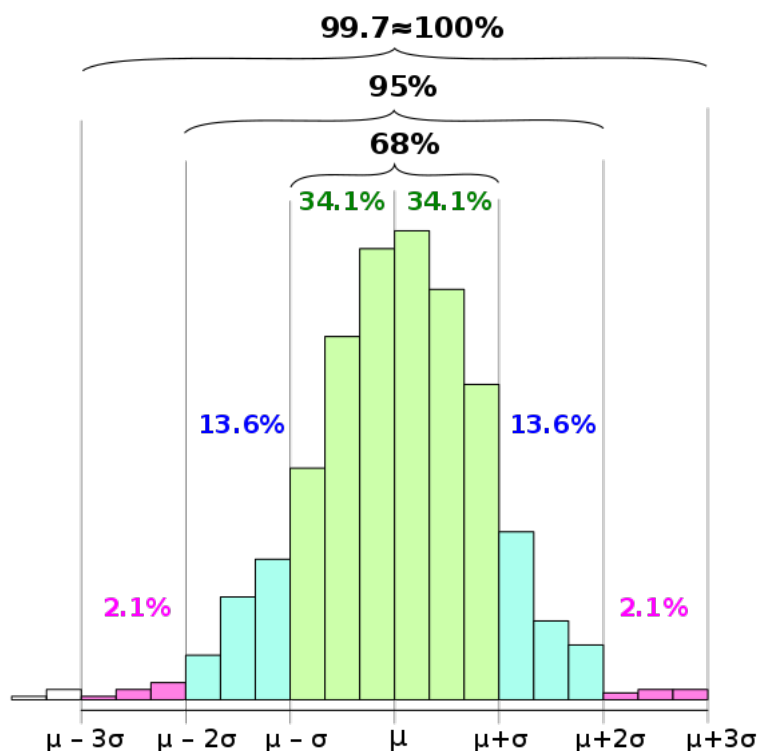


图 2.2: 经验法则

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的充要条件是 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。我们将 $N(0, 1)$ 称为标准正态分布。

定义 2.14. 称一个连续型随机变量 X 服从指数分布, 若其 PDF 为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0, x > 0$), f 在其余各处取 0。记作 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。

指数分布常用于刻画等待时间、寿命等。

计算可得, 若 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则 $E(X) = 1/\lambda$, $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$ 。

指数分布有另一种符号约定, 以 $\beta = 1/\lambda$ 为参数, 一些数学软件可能采用此种约定。

指数分布的 CDF 为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x > 0$), 所谓的“尾概率”为 $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ ($x > 0$)。

例 2.6. 设某医院平均每天出生婴儿数为 λ ，现在观察到一名婴儿出生，则接下来 t 天内有婴儿出生的概率为 $P(X \leq t)$ ，其中 X 表示到下一个婴儿出生所需等待的时间。

记 $N(t)$ 为 t 天内出生婴儿数，我们已经知道 $N(t) \sim P(t\lambda)$ ，则 $P(X > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ ，故 $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ 。我们发现 X 服从参数为 λ 的指数分布。

我们从另一个角度理解指数分布。

首先引入失效率或危险率的概念。设 X 为连续型随机变量（表示某种零件的寿命），其 CDF 为 $F(x)$ ，且 $F(0) = 0$ 。考虑条件概率 $P(x < X < x + dx | X > x) = \frac{P(x < X < x + dx)}{P(X > x)} = \frac{F(x+dx) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x)}{1 - F(x)} dx$ ，即“年龄”为 x 的零件不能继续工作的条件概率密度为 $\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$ ，我们称其为瞬时失效率 $\lambda(x)$ ，则 $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t) dt}$ 。

在“无老化”假设下，即 $\lambda(t) \equiv \lambda$ 不随时间变化，则 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x > 0)$ ， X 服从指数分布。

指数分布有所谓“无记忆性”： $P(X > t+s | X > s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = e^{-\lambda t} = P(X > t) (t, s > 0)$ 。

“无老化”假设并不总是成立。为此，我们可以进行一定程度的改进，例如令 $\lambda(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} (x > 0, \alpha, \beta > 0 \text{ 为常数})$ ，则 $F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} (x > 0)$ ，称之为 Weibull 分布。当 $\alpha = 1$ 时，Weibull 分布退化为参数为 $1/\beta$ 的指数分布。

总览至此我们介绍过的各个分布的参数，可以将其大致分为以下几类：

1. 位置参数：决定了分布平移到的位置，通常在 PMF/PDF 中体现为 $f(x) = g(x - \cdot)$ 的形式，如正态分布的参数 μ
2. 尺度参数：决定了分布伸缩的程度，通常在 PMF/PDF 中体现为 $f(x) = g(\frac{x}{\cdot})$ 的形式，如正态分布的参数 σ 、Weibull 分布的参数 β
3. 形状参数：决定了分布的形状，如 Weibull 分布的参数 α

2.6 随机变量的函数

对于随机变量 X 和可测函数 g ， $Y = g(X)$ 也是随机变量。特别地，若 X 为离散型随机变量，则 Y 也离散。但若 X 为连续型随机变量， Y 未必连续。

例 2.7. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ， $Y = \begin{cases} 0, & X \leq t_0, \\ 1, & X > t_0, \end{cases}$ 其中 $t_0 > 0$ 为常数，则 $Y \sim B(e^{-\lambda t_0})$ 。

例 2.8. 设 X 为连续型随机变量，PDF 为 $f(x)$ ，考虑 $Y = X^2$ 。

从 CDF 入手， $\forall y > 0, P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx$ ，我们有 Y 的 PDF 为 $l(y) = \frac{d}{dy} P(Y \leq y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) (y > 0)$ 。

特别地，若 $X \sim N(0, 1)$ ，称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2 -分布，读作“卡方分布”。

若 $Y = g(X)$ 为随机变量，我们可以计算 Y 的分布如下：

- $P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y))$
- $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y]))$

第三章 联合分布

3.1 随机向量

定义 3.1. 称 $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 $(n \text{ 维})$ 随机向量, 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 均为随机变量。

定义 3.2. n 维随机向量的 (联合) (累积) 分布函数 (CDF) 定义为 $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

对于 $n = 2$ (二元分布) 的情形, 我们常用 (X, Y) 来表示随机向量, 对应的 CDF 为 $F(x, y)$ 。

3.2 离散分布

定义 3.3. 称 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) 是离散的, 当且仅当 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 均为离散随机变量。

离散随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的 (联合) 概率质量函数 (PMF) 定义为 $f(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

命题 3.1. 离散随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的 PMF 具有如下性质:

1. $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
2. $\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}} f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$

注意第 2 条性质中求和的项数为至多可数, 原因是有限个至多可数集的笛卡尔积仍是至多可数集。

例 3.1. 设 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 为 Ω 的一个分割 (分割的定义见 ?? 节), $P(B_i) = p_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。

进行 N 次独立试验, 设 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, 有 X_i 个试验结果落在 B_i 中, 则若 $k_1 + \dots + k_n = N$, 其中 k_i 均为非负整数, 我们有 $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \binom{N}{k_1, \dots, k_n} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ 。其中 $\binom{N}{k_1, \dots, k_n} = \frac{N!}{k_1! \dots k_n!}$ 为多项式 $(a_1 + \dots + a_n)^N$ 中 $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$ 项的系数。

我们称 (X_1, \dots, X_n) 服从多项分布。

3.3 连续分布

定义 3.4. 对 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) , 若存在 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, 使得 \forall 可测集 $Q \subset \mathbb{R}^n$, 都有 $P((X_1, \dots, X_n) \in Q) = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$, 则称 (X_1, \dots, X_n) 为连续型随机向量, f 称为其 (联合) 概率密度函数 (PDF)。

命题 3.2. 连续随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的 PDF 具有如下性质:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \equiv 1$
2. 以 $n=2$ 为例, $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) ds dt$, $f(a, b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, b)$, a.e.

其中 a.e. 表示 “almost everywhere”。

例 3.2. 矩形域上的均匀分布的 PDF: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x, y) \in (a, b) \times (c, d), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

例 3.3. 二元正态分布 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的 PDF:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1.$$

令 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \end{bmatrix}$, $W = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$, $W = A^T A$ 为正定矩阵 W 的 Cholesky 分解, 则 $-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T W \mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = -\frac{1}{2}(A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x})$.

上述 Cholesky 分解的结果为 $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$ 或 $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} -1 & \rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$ 。

3.4 边际分布

对 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) , 称 $F_i(x) = P(X_i \leq x) = P(X_i \leq x, -\infty < X_j < +\infty, \forall j \neq i)$ 为 X_i 的边际分布。

例如, 若 $n=2$, 随机向量 (X, Y) 有 CDF $F(x, y)$, 则 X 的边际分布为 $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} P(X \leq x, -\infty < Y \leq y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 。

若 $n=3$, 随机向量 (X, Y, Z) 有 CDF $F(x, y, z)$, 则 X 的边际分布为 $F_X(x) = \lim_{y, z \rightarrow +\infty} F(x, y, z)$, (X, Y) 的边际分布为 $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y, -\infty < Z < +\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(x, y, z)$ 。

例 3.4. 设二维随机向量 (X, Y) 的 CDF 为 $F(x, y)$, 则 $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(X > a, Y > b) = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b)$ 。

对于离散型随机向量, 以 $n = 2$ 为例, 定义边际 PMF 为 $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$ 。

对于连续型随机向量, 以 $n = 2$ 为例, 设联合 PDF 为 $f(x, y)$, 则 $F_X(x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) ds dt$, 则 X 的边际 PDF 为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 。

例 3.5. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, 即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 。同理 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

3.5 条件分布

以 $n = 2$ 为例说明条件分布的概念, 考虑随机向量 (X, Y) 。

对于离散型随机向量, 设联合 PMF 为 $P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} \equiv 1$, 则在 $Y = b_j$ 条件下的 X 的条件 PMF 为 $P(X = a_i | Y = b_j) = \frac{P(X=a_i, Y=b_j)}{P(Y=b_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}$ 。条件 PMF 满足 $\sum_i P(X = a_i | Y = b_j) \equiv 1, \forall j$ 。

对于连续型随机向量, 设联合 PDF 为 $f(x, y)$, 首先考虑条件概率 $P(X \leq x | y \leq Y \leq y + dy) = \frac{P(X \leq x, y \leq Y \leq y + dy)}{P(y \leq Y \leq y + dy)} = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+dy} f(t, s) ds dt}{\int_y^{y+dy} f_Y(s) ds}$, 对 x 求导得 X 在 $y \leq Y \leq y + dy$ 条件下的条件 PDF 为 $\frac{\int_y^{y+dy} f(x, s) ds}{\int_y^{y+dy} f_Y(s) ds} \rightarrow \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} (dy \rightarrow 0)$ 。

定义 3.5. 对于连续型随机向量 (X, Y) , 设联合 PDF 为 $f(x, y)$, 若 $f_Y(y) > 0$, 则称 X 在 $Y = y$ 条件下的条件 PDF 为 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 。

可以验证 $f_{X|Y}(x|y)$ 满足 PDF 的各性质。

相应的条件 CDF 为 $F_{X|Y}(a|y) = P(X \leq a | Y = y) = \int_{-\infty}^a f_{X|Y}(x|y) dx$ 。

我们熟知的各个定理均有适用于连续型随机向量的版本:

1. $f(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ (乘法法则)
2. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy$ (全概率公式)
3. $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy}$ (Bayes 公式)

例 3.6. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}}$, 即 $Y|X = x \sim N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), (1 - \rho^2)\sigma_2^2)$ 。

3.6 独立性

定义 3.6. 设二维随机向量 (X, Y) 的 CDF 为 $F(x, y)$, 若 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, 则称 X, Y 相互独立。

可以证明, 对于二维离散型 (或连续型) 随机向量 (X, Y) , X, Y 相互独立的充要条件是 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, 其中 $f(x, y)$ 为联合 PMF (或 PDF)。

定义 3.7. 设 n 维随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的 CDF 为 $F(x_1, \dots, x_n)$, 若 $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, 则称 X_1, \dots, X_n 相互独立。

可以证明, 对于 n 维离散型 (或连续型) 随机向量 (X_1, \dots, X_n) , X_1, \dots, X_n 相互独立的充要条件是 $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, 其中 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为联合 PMF (或 PDF)。

定理 3.1. 1. 若 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则 $\forall m \in \{1, \dots, n-1\}$, 可测函数 g_1, g_2 , 有 $Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_m)$ 与 $Y_2 = g_2(X_{m+1}, \dots, X_n)$ 相互独立。
2. 若 n 维连续型随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的联合 PDF $f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \forall i \in \{1, \dots, n\}$, 则 X_1, \dots, X_n 相互独立且 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, X_i 的边际 PDF f_i 与 g_i 相差常数因子。

例 3.7. 设 (X, Y) 服从如图 ?? 的三角形域上的均匀分布, 即 $f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in \text{三角形域}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 X, Y 不独立。

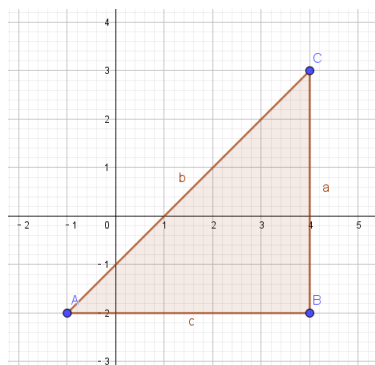


图 3.1: 三角形域上的均匀分布

3.7 随机向量的函数

本节中, 我们考虑给定随机向量 (X_1, \dots, X_n) 和可测函数 g , 如何求 $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ 的分布。

首先介绍 “直接法”。

例 3.8. $X_i \sim B(n_i, p) (i = 1, 2)$ 独立, $Y = X_1 + X_2$, 则 $\forall k \in \{0, 1, \dots, n_1 + n_2\}$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = k) &= P(X_1 + X_2 = k) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k P(X_1 = k_1, X_2 = k - k_1) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k P(X_1 = k_1)P(X_2 = k - k_1) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k \binom{n_1}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} \binom{n_2}{k-k_1} p^{k-k_1} (1-p)^{n_2-(k-k_1)} \\
 &= \left(\sum_{k_1=0}^k \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k-k_1} \right) p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\
 &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}
 \end{aligned}$$

因此 $Y \sim B(n_1 + n_2, p)$ 。

例 3.9. 随机向量 (X_1, X_2) 有联合 PDF $f(x_1, x_2)$, 且 $X_1 > 0$, 考虑 $Y = X_2/X_1$, 有 $\forall y \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq y) = P(\frac{X_2}{X_1} \leq y) = P(X_2 \leq X_1 y) = \int_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$, 作 $x_2 = x_1 t$ 换元得 $P(Y \leq y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x_1, x_1 t) x_1 dt dx_1$, 故 Y 的 PDF 为 $l(y) = \int_0^{+\infty} x_1 f(x_1, yx_1) dx_1$ 。

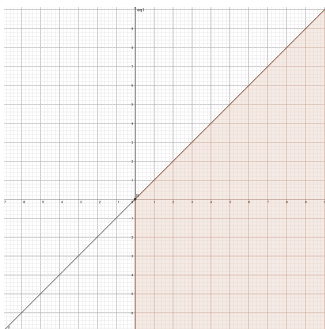


图 3.2: 区域 D 的范围, 其中边界线的斜率为 y

接下来介绍“密度函数变换法”。

设随机向量 (X_1, X_2) 有联合 PDF $f(x_1, x_2)$, 且有可逆可微的映射关系 $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases}$,

据此解出逆映射 $\begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$, 则对于任意可测集 A , 若 (h_1, h_2) 将 A 映射到集合 B , 则由可逆性可知 B 在 (g_1, g_2) 的映射下的值域为 A 。因此我们有 $P((Y_1, Y_2) \in A) = P((X_1, X_2) \in B)$ 。

$B) = \int_B f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_A f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) |J| dy_1 dy_2$, 其中 J 为 Jacobi 行列式 $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$, 因此 (Y_1, Y_2) 的联合 PDF 为 $l(y_1, y_2) = f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) |J|$ 。

例 3.10. 随机向量 (X_1, X_2) 有联合 PDF $f(x_1, x_2)$, 为求 $Y = X_1 + X_2$ 的 PDF, 引入 $Z = X_1$, 则 $\begin{cases} X_1 = Z \\ X_2 = Y - Z \end{cases}$, Jacobi 行列式为 $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$, 故 (Y, Z) 的联合 PDF 为 $f(z, y - z) | -1 | = f(z, y - z)$, Y 的边际 PDF 为 $l_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, y - z) dz$ 。

上例中, 若 X_1, X_2 相互独立, 则 $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \Rightarrow l_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z)f_2(y - z)dz$, 这称之为 f_1 和 f_2 的卷积, 记作 $f_1 * f_2$ 。

特别地, 若 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ 。

利用上述随机向量的函数的 PDF 求解方法, 可以得到所谓卡方分布 (χ^2 -分布)、 t -分布和 F -分布的 PDF。这些分布的表达式较为复杂, 在此不一一罗列。它们在统计推断部分会大量使用, 感兴趣的同学可以查阅资料, 简单了解一下它们与标准正态分布的联系。

第四章 随机变量的数字特征

4.1 期望

离散型和连续型随机变量的期望分别参见定义 ?? 和定义 ??。

对于随机向量，期望自然推广定义为 $E((X_1, \dots, X_n)) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ 。

命题 4.1. 期望有如下性质：

1. 离散型和连续型随机向量的函数的期望 $E(g(X_1, \dots, X_n))$ 分别等于

$$\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) \text{ 和 } \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

其中 g 为可测函数， f 分别为联合 PMF 与联合 PDF

2. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \forall$ 常数 $a, b \in \mathbb{R}$
3. 若 X_1, \dots, X_n 相互独立，则 $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$

4.2 分位数

定义 4.1. 设 X 为连续型随机变量，若 $P(X \leq m) = F(m) = 1/2$ ，则称 m 为 X 的中位数。

和均值一样，中位数也是随机变量集中趋势的一种刻画。中位数不一定唯一。

若 m 是连续型随机变量 X 的中位数，则 $P(X < m) = P(X > m) = 1/2$ 。

以下给出更一般的中位数定义。

定义 4.2. 对随机变量 X ，若 $P(X < m) \leq 1/2$ ，且 $P(X > m) \leq 1 - 1/2 = 1/2$ ，则称 m 为 X 的中位数。

例 4.1. 设离散型随机变量 X 的分布表为

| | | | | |
|-----|-----|-----|------|------|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 |
| P | 1/3 | 1/2 | 1/12 | 1/12 |

则其中位数为 2。

定义 4.3. 对随机变量 X , $\forall \alpha \in (0, 1)$, 若 $P(X < a) \leq \alpha$ 且 $P(X > a) \leq 1 - \alpha$, 则称 a 为 X 的 (下侧) α -分位数。

上述定义的 α -分位数是不唯一的。为了唯一性, 我们考虑定义 $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x | F(x) \geq \alpha\}$ 。

我们给出众数 (mode) 的方便定义: $f(x)$ 的最大值点, 其中 $f(x)$ 为 PMF 或 PDF。由于 PDF 可在任意零测集上修改取值, 故这一定义并非严谨的。

4.3 方差

离散型和连续型随机变量的方差分别参见定义 ?? 和定义 ??。

方差的意义: 若 X 为收益率, 则 $SD(X)$ 称为波动率, 刻画了风险的大小。我们定义变异系数 $CV = \frac{SD(X)}{\mu}$, 其中 $\mu = E(X) \neq 0$ 。

命题 4.2. 方差有如下性质:

1. $\text{Var}(C) \equiv 0, C$ 为常数
2. $\text{Var}(CX) = C^2 \text{Var}(X)$
3. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y)))$, 且若 X, Y 独立, 则 $E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0$

4.4 协方差与相关系数

对随机变量 X, Y , 设 $E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2, \text{Var}(X) = \sigma_1^2, \text{Var}(Y) = \sigma_2^2$ 。

定义 4.4. 称 X 与 Y 的协方差 $\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_1)(Y - \mu_2))$ 。

命题 4.3. 协方差有如下性质:

1. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
4. $\text{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a\text{Cov}(X_1, Y) + b\text{Cov}(X_2, Y), \forall$ 常数 $a, b, c \in \mathbb{R}$

定义 4.5. 称 X 与 Y 的 (线性) 相关系数 $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)$ 。

若 $\text{Corr}(X, Y) = 0$, 称 X, Y 不相关。

定理 4.1. 相关系数有如下性质:

1. 若 X, Y 相互独立, 则 X, Y 不相关 (反之未必成立)

2. $|\text{Corr}(X, Y)| \leq 1$, 且等号成立当且仅当 $\exists a, b, P(Y = aX + b) = 1$, 即 $Y = aX + b, \text{a.s.}$

其中 a.s. 表示 “almost surely”。

为证明上述定理的 (2), 首先我们利用 Cauchy-Schwartz 不等式证明引理: 对随机变量 U, V , 有 $E^2(UV) \leq E(U^2)E(V^2)$, 且等号成立当且仅当 $\exists t_0 \in \mathbb{R}, P(V = t_0 U) = 1$ 。接下来令 $U = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, V = \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$, 即得。

当 $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$, 可以证明 $a = \pm \sigma_2 / \sigma_1$ 。

例 4.2. $X \sim N(0, 1), Y = X^2$, 则 X 与 Y 不相关, 但不独立。

例 4.3. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则

$$\begin{aligned} \text{Corr}(X, Y) &= E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left(\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)} dx dy \end{aligned}$$

进行换元 $(u, v)^T = A\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^T$, 其中 A 的定义参见例 ??, 则指数上的项化为 $-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, 这一步实质上是进行了二次型的标准化。后续过程留作习题, 最终计算结果为 $\text{Corr}(X, Y) = \rho$ 。

4.5 矩

定义 4.6. 对 $k = 1, 2, \dots$, 称 $E((X - c)^k)$ 为 X 关于 c 点的 k 阶矩。特别地, $c = 0$ 的情况下称为 k 阶原点矩, $c = E(X)$ 的情况下称为 k 阶中心矩。

根据定义可知, $E(X)$ 为 1 阶原点矩, 而 1 阶中心矩恒等于 0; $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$ 为 2 阶中心矩。

若 $E(X) = \mu, \text{SD}(X) = \sigma$, 我们称 $E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^k\right) = \frac{E((X - \mu)^k)}{\sigma^k}$ 为 k 阶标准矩。

1 阶标准矩恒等于 0, 2 阶标准矩恒等于 1, 3 阶标准矩称为 X 的偏度系数, 记作 $\text{Skew}(X)$ 。

例 4.4. $X \sim N(0, 1)$, 则 $\text{Skew}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0$, 其中 f 为 X 的 PDF。

我们称偏度系数 < 0 的分布为 “负偏” 或 “左偏”, 如图 ??。

5 阶以上的奇数阶标准矩计算更复杂, 受噪声影响更大。

4 阶标准矩称为 X 的峰度系数, 记作 $\text{Kurt}(X)$ 。由于正态分布的峰度系数恒等于 3, 因此常定义超额峰度系数为 $\text{Kurt}(X) - 3$ 。

我们经常将 $\mu \pm \sigma$ 以内的范围称为 “峰”, 范围在 “峰” 以外但在 $\mu \pm 2\sigma$ 以内的范围称为 “肩”, 范围在 “肩” 以外的部分称为 “尾”。

通常, 峰度系数 > 3 表现为相对于正态分布 “尖峰厚尾”, 如图 ??。

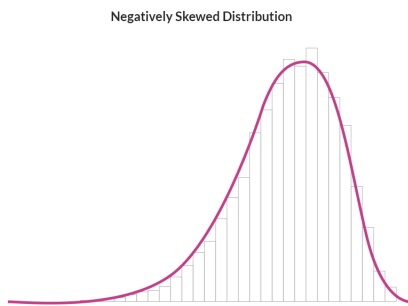
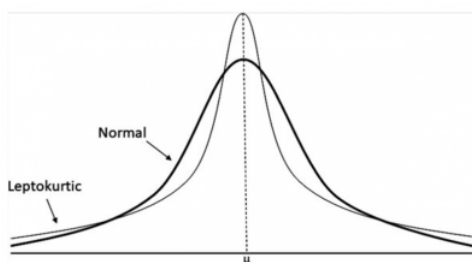


图 4.1: 负偏分布

图 4.2: “Leptokurtic” 一词的含义即峰度系数 > 3

4.6 矩母函数

定义 4.7. 记 $M_X(t) = E(e^{tX})$, 若 $M_X(t)$ 在 $t = 0$ 的某邻域内存在, 则称其为 X 的矩母函数 (Moment Generating Function, MGF), 否则称 X 的矩母函数不存在。

例 4.5. 若 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则 $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$ 。

例 4.6. 若 $X \sim N(0, 1)$, 则 $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$ 。

命题 4.4. 矩母函数有如下性质:

1. $M_X(0) \equiv 1$
2. $Y = aX + b$, 则 $M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb} M_X(at)$

例 4.7. 若 $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 令 $Y = \sigma X + \mu$, 则 $X \sim N(0, 1)$, 故 $M_Y(t) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}, t \in \mathbb{R}$ 。

矩母函数可以用于确定矩。

定理 4.2. 随机变量 X 的 n 阶 (原点) 矩与其矩母函数有如下关系: $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$ 。

证明. 由 Taylor 展开有 $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_X^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$, 又 $M_X(t) = E(e^{tX}) = E(\sum_{n=0}^{+\infty} X^n \frac{t^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n) \frac{t^n}{n!}$, 得到结论。 \square

例 4.8. 若 $X \sim N(0, 1)$, 则 $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, 因此我们得出 $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, $E(X^{2n+1}) \equiv 0$ ($n = 0, 1, \dots$)。

由此可以计算 $\text{Var}(X) = E(X^2) = 1$, $\text{Kurt}(X) = E(X^4) = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3$ 。

矩母函数还可以用于确定分布。

定理 4.3. 若存在 $a > 0$, 使得 $M_X(t) = M_Y(t), \forall t \in (-a, a)$, 则 X, Y 同分布。

例 4.9. 若随机变量 X 的矩母函数 $M_X(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{1}{8}e^{5t}$, 则 X 为离散型随机变量, 分布表为

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | -1 | 0 | 4 | 5 |
| P | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/8 |

一般地, 若离散型随机变量 X 有 PMF $P(X = k) = p_k$ ($\sum_k p_k \equiv 1$), 则其 MGF 为 $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} p_k$ 。

注意, 各阶矩均相同的随机变量未必同分布。

例 4.10. 设连续型随机变量 X_1 和 X_2 的 PDF 分别为 $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}, x > 0$ 和 $f_2(x) = f_1(x)(1 + \sin(2\pi \log x)), x > 0$ (X_1 服从对数正态分布), 则 $E(X_2^n) = E(X_1^n) + \int_0^{+\infty} x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) dx$, 其中后一项通过换元 $y = \log x - n$ 可以证明为 0, 即 X_1 和 X_2 同矩但不同分布。

下面我们运用矩母函数, 研究独立随机变量和的分布。

定理 4.4. 若随机变量 X, Y 独立, $Z = X + Y$, 则 $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ 。

证明. $M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$, 其中最后一个等号利用了独立性。□

推而广之, 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 相互独立, $Z = X_1 + \dots + X_n$, 则 $M_Z(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$ 。

例 4.11. 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 相互独立且服从正态分布, 则 $X_1 + \dots + X_n$ 也服从正态分布。

以 $n = 2$ 为例说明。设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2$), 则 $M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = e^{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t} e^{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t} = e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)t}$, 对应 $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的 MGF, 再由 MGF 确定分布可得结论。

定义随机向量 (X_1, \dots, X_n) 的 MGF 为 $M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$ 。

以下简介类似 MGF 的其他函数:

1. 概率母函数 (Probability Generating Function, PGF), 仅针对非负整数取值的离散型随机变量 X , 设其 PMF 为 $P(X = k) = p_k$, 则其 PGF 定义为 $E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k, t \in [-1, 1]$, 或对于 $t \in (0, 1]$, 等于 $E(e^{X \log t}) = M_X(\log t)$ 。
2. 特征函数, 定义为 $E(e^{itX})$, 其中 $i^2 = -1$ 。

4.7 条件期望

我们定义条件期望 $E(Y|X \in A) = \begin{cases} \sum_i y_i P(Y = y_i | X \in A) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|X \in A) dy \end{cases}$, 两种定义分别针对 Y 为离散型和连续型随机变量。

进而, 我们定义 $E(Y|x) = E(Y|X = x) = \begin{cases} \sum_i y_i P(Y = y_i | X = x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy \end{cases}$, 注意到这是一个 x

的函数, 记作 $h(x)$ 。将其作用在 X 上, 得到 $h(X) = E(Y|X)$, 这是一个 X 的函数 (称为 Y 对 X 的回归函数), 因此是一个新的随机变量。

例 4.12. $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $E(Y|x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ 。

例 4.13. 甲、乙两种同类产品, 平均使用寿命分别为 10 年和 15 年, 市场占有率分别为 60% 和 40%, 随机买一个, 则期望寿命是 $10 \times 60\% + 15 \times 40\% = 12$ 年, 我们发现这个计算过程可以表示为 $E(Y) = E(Y|X = 1)P(X = 1) + E(Y|X = 2)P(X = 2) = h(1)P(X = 1) + h(2)P(X = 2) = E(h(X)) = E(E(Y|X))$, 其中 $X = 1$ 表示抽到甲产品, $X = 0$ 表示抽到乙产品, Y 表示抽到的产品的寿命。

一般地, 我们有以下定理:

定理 4.5. (全期望公式)

对于随机向量 (X, Y) , 有 $E(Y) = E(E(Y|X))$ 。

证明. 以连续型为例。设 (X, Y) 的联合 PDF 为 $f(x, y)$, 有 $E(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$, 故 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|x) f_X(x) dx = E(E(Y|X))$ 。□

一般地, 对于可测函数 g , 我们有 $E(g(X, Y)) = E(E(g(X, Y)|X))$ 。

定理 4.6. 对于随机向量 (X, Y) 和任意可测函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 都有 $E((Y - g(X))^2) \geq E((Y - E(Y|X))^2)$, 即条件期望是均方误差意义下的最优预测。

证明. 类比期望的性质 $E((Y - c)^2) \geq E((Y - E(Y))^2), \forall c \in \mathbb{R}$, 我们有 $E((Y - g(X))^2|X) \geq E((Y - E(Y|X))^2|X), \forall g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 可测, 两边对 X 求期望即得。 \square

我们经常用到最优线性预测, 即 $\min_{a,b} E((Y - (aX + b))^2)$, 这种“均方意义上的最优”称之为最小二乘 (least square)。

第五章 不等式与极限定理

5.1 概率不等式

定理 5.1. (Markov 不等式)

若随机变量 $Y \geq 0$, 则 $\forall a > 0$, 有 $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$ 。

证明. 令 $I = \begin{cases} 1, & Y \geq a, \\ 0, & Y < a, \end{cases}$ 则 $I \leq Y/a$, 故 $P(Y \geq a) = E(I) \leq E(Y/a) = E(Y)/a$. □

一般地, 对于任意随机变量 X , 则 $\forall a > 0$, 有 $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$ 。

例 5.1. 令 X 表示从人群中随机抽的一个人的年收入, $X \geq 0$, 则 $P(X \geq kE(X)) \leq 1/k$ 。
直观理解是, 人群中随机抽到一个其年收入是人均收入 k 倍及以上的人的概率不超过 $1/k$ 。

定理 5.2. (Chebyshev 不等式)

若随机变量 Y 的方差 $\text{Var}(Y)$ 存在, 则 $\forall a > 0$ 有 $P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{a^2}$ 。