## 概率论与数理统计

授课教师: 唐宏岩

## 前言

本讲义基于清华大学数学系唐宏岩老师于 2023 - 2024 学年秋季学期开设的《概率论与数理统计》课程,用于辅助同学们课后复习,助教尽量做到每周课后两天内更新。

由于时间与能力所限,本讲义可能不会出现大段的文字论述(但会包含重要的定义、定理与公式等)。但是,对许多基本概念的深入理解是非常有必要的,同学们可以在浏览时检查自己是否能够回忆起课上的内容,对掌握不够扎实的地方,鼓励大家查阅参考书或在课程群提问以解决问题。

由于此为教学团队第一年尝试整理讲义,诸如格式编排、内容完整性方面可能存在许多不足,欢迎大家联系我提出宝贵的意见与建议。

曹子尧 2023 年 9 月

# 目录

第一部分

初等概率论

## 第一章 事件的概率

## 1.1 概率的发展史

赌博中的 de Méré's Problem: 连续掷一个均匀六面骰 4 次,获得至少一次"6"的概率为  $1-(\frac{5}{6})^4\approx 0.5177$ ; 而连续掷两个均匀六面骰 24 次,获得至少一次"对 6"的概率为  $1-(35/36)^{24}\approx 0.4914$ 。

Pascal 和 Fermat 的通信中使用初等数学的方法,首创了概率论相当多的数学理论,虽然当时没有总结成通用的定理。

Laplace 创立了采用分析方法的分析概率论。

Kolmogorov 利用测度论方法发展了现代概率理论。

## 1.2 随机试验与事件

定义 1.1. 概率论中的随机试验指的是符合下面两个特点的试验:

- 1. 不能预先确知结果
- 2. 可以预测所有可能的结果

**定义 1.2.** 样本空间是指一个试验的所有可能结果的集合,常用  $\Omega$  表示。

定义 1.3. 事件是样本空间的一个良定义的子集。

一次随机试验中,一个事件可能发生或不发生。

下面是一些常见的事件:

- 1. 全事件  $\Omega$  (必然事件)
- 2. 空事件 ∅ (不可能事件)
- 3. 基本事件  $\{a\}$ , 其中  $a \in \Omega$ , 即仅包含单一试验结果的事件

## 1.3 事件的运算

由于事件是集合,因此事件之间可以进行集合之间的运算,如:

- 2.  $A + B = A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
- 3. 差  $A B = A \setminus B$
- $4. \, \Re AB = A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

集合的 De Morgan's laws 也适用于事件:  $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c$ 。 事件的运算像集合的运算一样,可以用 Venn 图来表示。

## 1.4 概率的几种解释

对于概率这一数学概念,人们形成了几种从不同角度出发的解释:

- 1. 古典解释: 基于等可能性的解释
- 2. 频率解释:基于大量重复试验的解释(频率学派采用的解释)
- 3. 主观解释: 概率是一种对确信程度的度量(Bayes 学派采用的解释)

## 1.5 概率的公理化定义

我们用  $2^{\Omega}$  表示  $\Omega$  的幂集, 即  $\Omega$  的所有子集组成的集合。

**定义 1.4.** 事件集类  $\mathscr{F} \subset 2^{\Omega}$  必须满足所谓  $\sigma$ -代数的性质:

- 1.  $\Omega \in \mathscr{F}$
- 2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  (对补运算的封闭性)
- 3.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  (对可列并的封闭性)

**例 1.1.**  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ , 以下是一些合法的事件集类:

- 1.  $\mathscr{F}_1 = 2^{\Omega}$
- 2.  $\mathscr{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$
- 3.  $\mathscr{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

定义 1.5. (Kolmogorov) 概率函数  $P: \mathscr{F} \to \mathbb{R}$  是满足以下三条公理的映射:

- 1.  $P(A) \ge 0, \forall A \in \mathscr{F}$
- 2.  $P(\Omega) = 1$
- 3.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (加法公理/可列可加性)

我们称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个概率空间。

### 命题 1.1. 关于概率空间, 有如下性质:

- 1.  $P(A) \leq 1, \ \forall A \in \mathscr{F}$
- 2.  $P(\emptyset) = 0$
- 3.  $P(A) + P(A^c) = 1$
- 4.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \ A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$  (有限可加性)
- 5.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$  (我们称事件 A 蕴含事件 B)
- 6.  $P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n)$  (容斥公式) 特别地,P(A+B) = P(A) + P(B) P(AB)。

#### 例 1.2. (配对问题)

有 n 个人,每人有一顶帽子。现将所有帽子放到一起,再随机分配给每人一顶,考虑无人拿到自己的帽子的概率。

为此,设事件  $A_i$  为 "第 i 个人拿到自己的帽子",则  $P(A_i) = 1/n$ 。

利用容斥公式,至少一人拿到自己帽子的概率为  $P(A_1+\cdots+A_n)=\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{i_1< i_2} P(A_{i_1}A_{i_2})+\cdots+(-1)^{r+1}\sum_{i_1< i_2< \cdots< i_r} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n),$ 

其中  $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!} \binom{n}{r} = \frac{1}{r!}$ ,即  $P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ 。

所求概率  $P_n = 1 - P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}) \to e^{-1}(n \to \infty)$ 。

思考: 恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率?

## 1.6 条件概率

定义 1.6. 若 P(B) > 0,定义条件概率  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 。

通常, 我们计算条件概率的方法有两种:

- 1. 在缩小(受限)的样本空间(要求事件 B 发生)上,考虑事件 A 发生的概率
- 2. 根据定义计算
- 一种常用的形式是 P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),这可以视作是求解两个事件的积的概率的方法(乘法法则)。
- 例 1.3. 掷一个均匀六面骰, $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{2,3,4,5\}, B=\{1,3,5\}$ ,则  $P(A)=4/6, P(B)=3/6, P(AB)=2/6, P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=2/3$ 。

**例 1.4.** 袋子中有 8 个红球和 4 个白球,无放回地取出两个球,利用组合数可知,两个都是红球的概率为  $\binom{8}{(12)}$  。

用条件概率可以简化计算:  $P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11}$ .

更一般地,我们有  $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$ ,常用于序贯发生的一系列事件的积的概率求解。

**例 1.5.** 回忆上一节的"配对问题"。我们有  $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=P(A_{i_1})P(A_{i_2}|A_{i_1})\cdots P(A_{i_r}|A_{i_1}\cdots A_{i_{r-1}})=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{n-(r-1)}=\frac{(n-r)!}{n!}$ 。

**命题 1.2.** 对于给定的事件  $B,\ P(\cdot|B): \mathscr{F} \to \mathbb{R}$  是概率函数,即  $(\Omega,\mathscr{F},P(\cdot|B))$  仍是概率空间。

对于上述命题的证明,只需验证  $P(\cdot|B)$  满足概率的三条公理即可。

这提示我们,条件概率也是一种概率,如果我们将 P(A) 称为观察到事件 B 之前 A 的 "先验概率",则 P(A|B) 就是相应的"后验概率"。

一个常见的迷思是: 观测到事件 A 已经发生后, 是否可以说事件 A 发生的概率 P(A) = 1? 学过条件概率之后, 我们知道答案是否定的, 实际上是后验概率 P(A|A) = 1.

### 1.7 事件的独立性

**定义 1.7.** 若 P(AB) = P(A)P(B),则称事件 A, B 相互独立。

如果 P(B) > 0,我们注意到 A, B 独立等价于 P(A|B) = P(A)。

**命题 1.3.** 若 A, B 独立,则  $A^{c}, B$  独立。

定义 1.8. 若 P(ABC) = P(A)P(B)P(C), 且 A, B, C 两两独立,则称事件 A, B, C 独立。

注意, 仅有 A, B, C 两两独立, 不能推出三者独立。

**定义 1.9.** 若对于事件列  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,任意取有限个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$ ,都有  $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r})$ ,则称  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  相互独立。

**例 1.6.** 每周开奖的彩票,各次中奖率均为  $10^{-5}$  且独立,问连续十年(520 周)不中奖的概率? 令事件  $A_i$  为第 i 周不中奖,则  $P(A_i) = 1 - 10^{-5}$ ,故  $P(A_1 \cdots A_{520}) = (1 - 10^{-5})^{520} \approx 0.9948$ 。

**定义 1.10.** 若事件 A, B, E 满足 P(AB|E) = P(A|E)P(B|E),则我们称 A, B 关于 E 条件独立。

注意,条件独立性和独立性之间没有蕴含关系。

## 1.8 Bayes 公式

### **定理 1.1.** (全概率公式)

设  $\{B_i\}$  是  $\Omega$  的一个分割,即

- 1.  $\sum_{i} B_i = \Omega$
- 2.  $B_i B_i = \emptyset, \forall i \neq j$
- 3.  $P(B_i) > 0, \forall i$

 $\mathbb{M} P(A) = P(\sum_{i} (AB_i)) = \sum_{i} P(AB_i) = \sum_{i} P(A|B_i) P(B_i).$ 

注:  $\{B_i\}$  可以是有限集合,或可数无穷集合。

**例 1.7.** 对于调查问卷中的敏感问题(如"你是否有过某病史"),被调查者可能会有所顾虑而做出虚假的回答。为保护被调查者的隐私,同时取得其信任,考虑引入一个"保护性问题",即不具有敏感性的问题(如"你是否会游泳"),并让被调查者以抛硬币的方式,随机抽取一个问题回答。这样,抽到敏感问题的、确有过该病史的被调查者在回答"是"时也无须有病史暴露之虞。

设人群中,敏感问题答案为"是"的比例为 p (未知),保护性问题答案为"是"的比例为 q (假设已知),则若收集到 n 个被调查者的结果,其中 k 个为"是",我们便有  $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q\approx\frac{k}{n}$ ,可以据此得到 p 的估计。

**定理 1.2.** (Bayes 公式 / Bayes 准则)

设  $\{B_i\}$  是  $\Omega$  的一个分割,则  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}$ 。

#### **例 1.8.** (假阳性悖论)

对于一种流行病, A 表示一个人检查呈阳性, B 表示此人确实患病。设  $P(B)=10^{-4}$ , P(A|B)=0.99,  $P(A|B^c)=10^{-3}$ , 则一个检查呈阳性的人真的患病的概率仅为  $P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}\approx9\%$ 。

如果再次检测仍呈阳性,且两次检测效率不变,结果彼此独立,则此人真的患病的概率为  $P(B|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|B^c)P(B^c)} = \frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)+P(A_1|B^c)P(A_2|B)P(B^c)} \approx 99\%.$ 

## 第二章 随机变量

### 2.1 一维随机变量

定义 2.1. 随机变量是样本空间上的实值函数。

注意,上述定义是不严格的。

更严谨的定义: 若对于可测空间  $(\Omega, \mathscr{F})$  和函数  $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ,有  $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{F}$ ,则称 X 是  $(\Omega, \mathscr{F})$  上的随机变量。其中"可测空间"是指  $\mathscr{F}$  是样本空间  $\Omega$  上的  $\sigma$ -代数。此处不要求"概率空间",即随机变量的定义并不依赖概率测度 P 的存在。

**例 2.1.** 下表展示了两个随机变量。其中"像集"即  $\{X(\omega)|\omega\in\Omega\}$ 。

试验	样本空间 Ω	随机变量 X	像集	
随机调查 50 人对	O (0.1)50	V "1" 的人来	[0.1 50]	
某议题支持与否	$\Omega_1 = \{0, 1\}^{50}$	$X_1 = "1"$ 的个数	$\{0,1,\cdots,50\}$	
随机抽取一名北	0	V 甘东地 i	Π	
京成年市民	$\Omega_2 = $ 所有北京成年市民之集	$X_2 = $ 其年收入	$\mathbb{R}$	

注意,我们经常用 " $X_1=20$ "、" $X_2>100000$ " 等简化的记号来表示事件。例如,前者实际上指的是  $\{\omega\in\Omega_1|X_1(\omega)=20\}$ 。

诸如此类的试验结果集合需是事件,这体现出前述的随机变量严谨定义的意义。事实上,如果满足该严谨定义,则对于任意可测集  $I\subset\mathbb{R}$ ,都有  $\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in I\}\in\mathscr{F}$ 。

随机变量是试验结果的数值摘要,起到一种概括的作用。随机变量的"随机"要素来自于 样本点  $\omega \in \Omega$  的随机选择。在实际应用中,随机变量常常比样本空间具有更直观的意义。

随机变量可以分为:

1. 离散型: 至多可数多个取值

2. 连续型:区间型取值(非严格定义)

3. 其他

"其他"中的一个非常特殊的子类是所谓的混合型随机变量。

**定义 2.2.** 对于随机变量 X 和  $\mathbb{R}$  的可测子集 I (例如 I = (a, b]),令  $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}$   $\subset \Omega$  为 I 的原像集,我们定义记号  $P(X \in I)$  表示 "X 的取值在 I 中的概率",其值为  $P(X^{-1}(I))$ 。

例如,  $P(a < X \le b) = P(\{\omega | X(\omega) \in (a, b]\})$ 。

**定义 2.3.**  $F_X(x) = P(X \le x), \forall x \in \mathbb{R}$  称为随机变量 X 的累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF)。下标 X 在无歧义时可省略。

我们有  $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ 。

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

相应的 CDF 见图 ??。

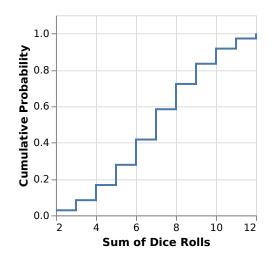


图 2.1: X 的 CDF 图象

注:由于软件限制,各个阶跃点的绘制方式不太规范,实际上从其左侧逼近应该为一个空圈,例如 F(3)=3/36 而不是 1/36。另外, $\forall x<2, F(x)=0; \forall x\geq 12, F(x)=1$ 。

#### 命题 2.1. CDF 的性质:

- 1. F 单调递增(未必严格单调递增)
- 2.  $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ,  $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- 3. F 右连续

可以证明,上述三条性质是任意函数  $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  成为 CDF 的充要条件。

思考:如果我们将 CDF 的定义改为 P(X < x),上述性质会如何变化?

**命题 2.2.** 若 X, Y 为随机变量,则 aX + bY, XY, X/Y (需 $Y \neq 0$ ) 都是随机变量。一般地,若 g 为可测函数,则 g(X, Y) 是随机变量。

**定义 2.4.** 设  $X_1, X_2$  的 CDF 分别为  $F_1, F_2$ , 我们称  $X_1 与 X_2$  同分布, 若  $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = F_2(x)$ .

**命题 2.3.** 随机变量  $X_1$  与  $X_2$  同分布的一个充要条件是  $\forall$  可测集 $I \subset \mathbb{R}$ ,  $P(X_1 \in I) = P(X_2 \in I)$ 。

注意,同分布不等价于"同变量",即两个同分布的变量的取值不一定恒等。

**例 2.3.** 掷一次硬币,X 表示正面向上次数,Y 表示反面向上次数,显然 X 与 Y 同分布,但取值不等。

## 2.2 离散随机变量

**定义 2.5.** 离散随机变量 X 的概率质量函数(Probability Mass Function, PMF)f 是指该随机变量取各个可能值的概率,即  $f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$ 。可以用分布表的形式展示各个可能取值与概率的对应关系。

**命题 2.4.** 如果离散随机变量 X 的所有可能取值为  $\{x_i\}$ ,则 X 的 PMF 具有如下性质:

- 1.  $f(x_i) = p_i \ge 0, \forall i$
- 2.  $\sum_{i} p_{i} = 1$
- 3.  $F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$

**定义 2.6.** 离散随机变量 X 的期望定义为  $E(X) = \sum_{i} x_{i} p_{i}$ 。

我们称 X 的期望存在,当且仅当  $\sum_{i} |x_{i}| p_{i} < +\infty$ 。

当期望存在时,其方差定义为  $Var(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。 当方差有限时,称其算术平方根为 X 的标准差,记作 SD(X)。

注意,通常我们所说的一个随机变量的均值指的就是期望。

标准化指的是对 X 作线性变换  $\frac{X-\mu}{\sigma}$ , 其中  $\mu$  和  $\sigma$  分别为 X 的期望和标准差,得到均值 为 0,标准差为 1 的随机变量。

对于可测函数 g, g(X) 也是随机变量, 其期望  $E(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i$ 。期望反映了随机变量的集中趋势, 而方差反映了其分散程度。

## 2.3 常见离散分布

**定义 2.7.** 称一个随机变量 X 服从 Bernoulli 分布,若  $\exists p \in (0,1), X$  的取值集合为  $\{0,1\},$  且 P(X=1)=p, P(X=0)=1-p。记作  $X \sim B(p)$ 。

B(p) 中的 p 称为该 Bernoulli 分布的参数。后续介绍的其他分布同理。

我们常将两种取值分别称为"成功"和"失败"。

计算可得, 若  $X \sim B(p)$ , 则 E(X) = p, Var(X) = p(1-p)。

**定义 2.8.** 称一个随机变量 X 服从二项分布,若  $\exists N \in \mathbb{N}^*, p \in (0,1), X$  的取值集合为  $\{0,1,\cdots,N\}$ ,且  $P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} (k \in \{0,1,\cdots,N\})$ 。记作  $X \sim B(N,p)$ 。

我们常将 k 理解为 "N 次独立 Bernoulli 试验中的成功次数"。

计算可得, 若  $X \sim B(N, p)$ , 则 E(X) = Np, Var(X) = Np(1-p)。

**定义 2.9.** 称一个随机变量 X 服从 Poisson 分布,若  $\exists \lambda > 0$ ,X 的取值集合为  $\mathbb{N}$ ,且  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k \in \mathbb{N})$ 。记作  $X \sim P(\lambda)$ 。

计算可得, 若  $X \sim P(\lambda)$ , 则  $E(X) = \lambda$ ,  $Var(X) = \lambda$ .

对 Poisson 分布的一种常见理解是"一段时间内某个小概率事件发生的次数"所服从的分布。例如,观察时间 (0,1] 内某路口的交通事故数 X,将 (0,1] 区间等分成 n 个小区间,即  $l_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}](i=1,2,\cdots,n)$ 。考虑到 n 很大时,每个区间的长度很小,我们作如下假设:

- 1. 每段区间内,至多发生一次事故
- 2.  $l_i$  上发生一次事故的概率与区间长度 (1/n) 成正比,为  $p = \lambda/n$
- 3. 各区间内是否发生事故彼此独立 则  $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (n \to +\infty)$ ,即  $X \sim P(\lambda)$ 。

**例 2.4.** 设某医院平均每天出生婴儿数为  $\lambda$ ,则接下来 t 天内出生婴儿数服从参数为  $t\lambda$  的 Poisson 分布。

对于一般的二项分布  $X \sim B(N,p)$ ,若 p 很小,N 很大,而  $\lambda = Np$  不太大,则近似有  $X \sim P(\lambda)$ ,且近似误差不超过  $\min\{p,Np^2\}$ 。

进一步,若 N 次 Bernoulli 试验并非严格独立,但满足弱相依条件,则 Poisson 分布仍为一种较好的近似。

### 例 2.5. (配对问题)

 $A_i$  表示第 i 个人拿到自己的帽子,则  $P(A_i) = 1/n, P(A_i|A_j) = \frac{1}{n-1}(j \neq i)$ ,当 n 很大时,1/n

和  $\frac{1}{n-1}$  很接近,可以认为满足弱相依条件。

记 X 为拿到自己帽子的人数,则 X 近似服从参数为  $\lambda=np=n\cdot\frac{1}{n}=1$  的 Poisson 分布,即  $P(X=k)\approx\frac{e^{-1}}{k!}$  。

我们用常规做法检查这种近似是否合理。首先考虑指定的某 k 人,记事件 E 表示这 k 人拿到自己的帽子,事件 F 表示其余 (n-k) 人未拿到自己的帽子,则  $P(EF) = P(E)P(F|E) = \frac{(n-k)!}{n!} \cdot P_{n-k}$ ,其中  $P_{n-k}$  为 (n-k) 人随机拿帽子时无人拿对的概率。那么我们有  $P(X=k) = \binom{n}{k} P(EF) = \frac{1}{k!} P_{n-k} \to \frac{e^{-1}}{k!} (n \to +\infty)$ 。这说明前述的近似是较好的。

## 2.4 连续随机变量

**定义 2.10.** 对随机变量 X,若存在  $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ ,使得  $\forall$  可测集  $I \subset \mathbb{R}$ ,都有  $P(X \in I) = \int_I f(x) dx$ ,则称 X 为 连续型随机变量,f 称为其概率密度函数 (Probability Density Function, PDF)。

### **命题 2.5.** 连续随机变量 X 的 PDF 具有如下性质:

- 1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv 1$
- 2.  $P(a < X \le b) = \int_a^b f(x) dx = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
- 3.  $P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- 4. 若 f 在  $x_0$  处连续,则  $P(x_0 \delta < X < x_0 + \delta) = \int_{x_0 \delta}^{x_0 + \delta} f(t) dt \approx f(x_0) \cdot 2\delta$
- 5.  $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$  连续,且若 f 在 x 处连续,有 F'(x) = f(x)
- 6. PDF 若存在,则不唯一(可以修改其在任意零测集上的值,得到不同的 PDF)

定义 2.11. 连续随机变量 X 的期望定义为  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ .

我们称 X 的期望存在,当且仅当  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$ 。

当期望存在时,其方差定义为  $Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

当方差有限时,称其算术平方根为X的标准差,记作 $\mathrm{SD}(X)$ 。

对于可测函数 g, g(X) 也是随机变量, 其期望  $\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$ .

## 2.5 常见连续分布

**定义 2.12.** 称一个连续型随机变量 X 服从均匀分布,若其 PDF 为  $f(x) = \frac{1}{b-a}(x \in (a,b))$ , f 在其余各处取 0。记作  $X \sim U(a,b)$ 。

我们常将  $X \sim U(0,1)$  称为随机数。

计算可得,若  $X \sim U(a,b)$ ,则  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ , $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 。

**定义 2.13.** 称一个连续型随机变量 X 服从正态分布,若其 PDF 为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\sigma > 0)$ 。记作  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

计算可得,若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,则  $E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2$ 。 著名的"经验法则"见图 ??。

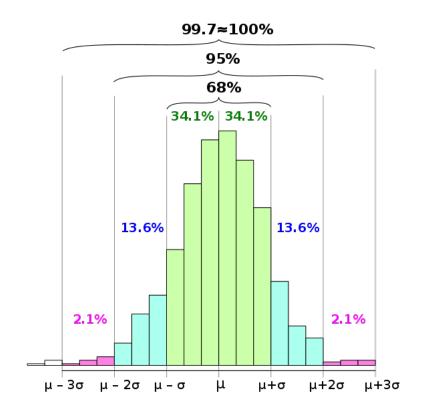


图 2.2: 经验法则

 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的充要条件是  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。我们将 N(0, 1) 称为标准正态分布。

定义 2.14. 称一个连续型随机变量 X 服从指数分布,若其 PDF 为  $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(\lambda>0,x>0)$ , f 在其余各处取 0。记作  $X\sim Exp(\lambda)$ 。

指数分布常用于刻画等待时间、寿命等。

计算可得,若  $X \sim Exp(\lambda)$ ,则  $E(X) = 1/\lambda$ ,  $Var(X) = 1/\lambda^2$ 。

指数分布有另一种符号约定,以  $\beta = 1/\lambda$  为参数,一些数学软件可能采用此种约定。

指数分布的 CDF 为  $F(x)=1-e^{-\lambda x}(x>0)$ ,所谓的 "尾概率" 为  $P(X>x)=1-F(x)=e^{-\lambda x}(x>0)$ 。

**例 2.6.** 设某医院平均每天出生婴儿数为  $\lambda$ ,现在观察到一名婴儿出生,则接下来 t 天内有婴儿出生的概率为  $P(X \le t)$ ,其中 X 表示到下一个婴儿出生所需等待的时间。

记 N(t) 为 t 天内出生婴儿数,我们已经知道  $N(t) \sim P(t\lambda)$ ,则  $P(X > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ , 故  $P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$ 。我们发现 X 服从参数为  $\lambda$  的指数分布。

我们从另一个角度理解指数分布。

首先引入失效率或危险率的概念。设 X 为连续型随机变量(表示某种零件的寿命),其 CDF 为 F(x),且 F(0)=0。考虑条件概率  $P(x < X < x + \mathrm{d}x | X > x) = \frac{P(x < X < x + \mathrm{d}x | X > x)}{P(X > x)} = \frac{F(x + \mathrm{d}x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x)}{1 - F(x)} \mathrm{d}x$ ,即 "年龄" 为 x 的零件不能继续工作的条件概率密度为  $\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$ ,我们称其为瞬时失效率  $\lambda(x)$ ,则  $F(x)=1-e^{-\int_0^x \lambda(t) \mathrm{d}t}$ 。

在 "无老化" 假设下,即  $\lambda(t) \equiv \lambda$  不随时间变化,则  $F(x) = 1 - e^{-\lambda t}(x > 0)$ ,X 服从指数分布。

指数分布有所谓"无记忆性":  $P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = e^{-\lambda t} = P(X > t)(t, s > 0)$ 。 "无老化" 假设并不总是成立。为此,我们可以进行一定程度的改进,例如令  $\lambda(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}}(x > 0, \alpha, \beta > 0$  为常数),则  $F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^{\alpha}}(x > 0)$ ,称之为 Weibull 分布。当  $\alpha = 1$  时,Weibull 分布退化为参数为  $1/\beta$  的指数分布。

总览至此我们介绍过的各个分布的参数,可以将其大致分为以下几类:

- 1. 位置参数: 决定了分布平移到的位置,通常在 PMF/PDF 中体现为  $f(x) = g(x \cdot)$  的形式,如正态分布的参数  $\mu$
- 2. 尺度参数: 决定了分布伸缩的程度,通常在 PMF/PDF 中体现为  $f(x) = g(\frac{x}{x})$  的形式,如正态分布的参数  $\sigma$ 、Weibull 分布的参数  $\beta$
- 3. 形状参数: 决定了分布的形状, 如 Weibull 分布的参数  $\alpha$

## 2.6 随机变量的函数

对于随机变量 X 和可测函数 g, Y = g(X) 也是随机变量。特别地,若 X 为离散型随机变量,则 Y 也离散。但若 X 为连续型随机变量,Y 未必连续。

例 2.7. 
$$X \sim Exp(\lambda)$$
,  $Y = \begin{cases} 0, & X \le t_0, \\ 1, & X > t_0, \end{cases}$  其中  $t_0 > 0$  为常数,则  $Y \sim B(e^{-\lambda t_0})$ 。

**例 2.8.** 设 X 为连续型随机变量, PDF 为 f(x), 考虑  $Y = X^2$ 。

从 CDF 入手,  $\forall y > 0, P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx$ ,我们有 Y 的 PDF 为  $l(y) = \frac{d}{dy} P(Y \le y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))(y > 0)$ 。

特别地, 若  $X \sim N(0,1)$ , 称 Y 服从自由度为 1 的  $\chi^2$ -分布, 读作"卡方分布"。

若 Y = g(X) 为随机变量,我们可以计算 Y 的分布如下:

- $P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y))$
- $P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y]))$

## 第三章 联合分布

### 3.1 随机向量

**定义 3.1.** 称  $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$  为  $(n \, \mathfrak{t})$  随机向量,若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  均为随机变量。

**定义 3.2.** n 维随机向量的(联合)(累积)分布函数(CDF)定义为  $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

对于 n=2 (二元分布) 的情形, 我们常用 (X,Y) 来表示随机向量, 对应的 CDF 为 F(x,y)。

## 3.2 离散分布

**定义 3.3.** 称 n 维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  是离散的,当且仅当  $\{X_i\}_{i=1}^n$  均为离散随机变量。 离散随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 (联合) 概率质量函数 (PMF) 定义为  $f(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

**命题 3.1.** 离散随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 PMF 具有如下性质:

- 1.  $f(x_1, \dots, x_n) \ge 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- 2.  $\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}} f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$

注意第2条性质中求和的项数为至多可数,原因是有限个至多可数集的笛卡尔积仍是至多可数集。

**例 3.1.** 设  $\{B_i\}_{i=1}^n$  为  $\Omega$  的一个分割(分割的定义见 ?? 节), $P(B_i) = p_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。

进行 N 次独立试验,设  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,有  $X_i$  个试验结果落在  $B_i$  中,则若  $k_1 + \dots + k_n = N$ ,其中  $k_i$  均为非负整数,我们有  $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \binom{N}{k_1, \dots, k_n} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ 。其中  $\binom{N}{k_1, \dots, k_n} = \frac{N!}{k_1! \dots k_n!}$  为多项式  $(a_1 + \dots + a_n)^N$  中  $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$  项的系数。

我们称  $(X_1, \cdots, X_n)$  服从多项分布。

#### 3.3 连续分布

**定义 3.4.** 对 n 维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ ,若存在  $f: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ ,使得  $\forall$  可测集  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , 都有  $P((X_1, \dots, X_n) \in Q) = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ ,则称  $(X_1, \dots, X_n)$  为连续型随机向 量, f 称为其 (联合) 概率密度函数 (PDF)。

**命题 3.2.** 连续随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 PDF 具有如下性质:

- 1.  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \equiv 1$
- 2. 以 n=2 为例,  $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, f(a,b)=\frac{\partial^{2}F}{\partial x\partial y}(a,b)$ , a.e.

其中 a.e. 表示 "almost everywhere"。

**例 3.2.** 矩形域上的均匀分布的 PDF: 
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x,y) \in (a,b) \times (c,d), \\ 0, &$$
其他.

例 3.3. 二元正态分布 
$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$
 的 PDF: 
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1.$$
 令  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \end{bmatrix}, W = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}, W = A^T A$  为正定矩阵  $W$  的 Cholesky 分解,则 
$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T W \boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x} = -\frac{1}{2}(A\boldsymbol{x})^T (A\boldsymbol{x}).$$
 上述 Cholesky 分解的结果为  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$  或  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} -1 & \rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$  。

对 n 维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ , 称  $F_i(x) = P(X_i \le x) = P(X_i \le x, -\infty < X_i < +\infty, \forall j \ne x)$ i) 为  $X_i$  的边际分布。

例如, 若 n=2, 随机向量 (X,Y) 有 CDF F(x,y), 则 X 的边际分布为  $F_X(x)=P(X\leq$  $x) = P(X \le x, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{y \to +\infty} P(X \le x, -\infty < Y \le y) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y).$ 

若 n=3,随机向量 (X,Y,Z) 有 CDF F(x,y,z),则 X 的边际分布为  $F_X(x)=\lim_{y,z\to+\infty}F(x,y,z)$ , (X,Y) 的边际分布为  $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x, Y \le y, -\infty < Z < +\infty) =$  $\lim_{z \to +\infty} F(x, y, z) \,.$ 

**例 3.4.** 设二维随机向量 (X,Y) 的 CDF 为 F(x,y), 则  $\forall a,b \in \mathbb{R}, P(X>a,Y>b)=1$  $F_X(a) - F_Y(b) + F(a,b)$ .

对于离散型随机向量,以 n=2 为例,定义边际 PMF 为  $P(X=x)=\sum_{x}P(X=x,Y=y)$ 。 对于连续型随机向量,以 n=2 为例,设联合 PDF 为 f(x,y),则  $F_X(x)=P(X\leq x,Y\in X)$  $\mathbb{R}$ ) =  $\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s) ds dt$ , 则 X 的边际 PDF 为  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy$ 。

**例 3.5.**  $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ ,则  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ ,即  $X \sim$  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ . 同理  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

### 3.5 条件分布

以 n=2 为例说明条件分布的概念,考虑随机向量 (X,Y)。

对于离散型随机向量,设联合 PMF 为  $P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij} \ge 0, \sum_{i,j} p_{ij} \equiv 1$ ,则在  $Y=b_j$  条件下的 X 的条件 PMF 为  $P(X=a_i|Y=b_j)=\frac{P(X=a_i,Y=b_j)}{P(Y=b_j)}=\frac{p_{ij}}{\sum_k p_{ki}}$ 。条件 PMF 满 足  $\sum_{i} P(X = a_i | Y = b_i) \equiv 1, \forall j$ .

对于连续型随机向量,设联合 PDF 为 f(x,y),首先考虑条件概率  $P(X \le x|y \le Y \le y)$  $y+\mathrm{d}y)=\tfrac{P(X\leq x,y\leq Y\leq y+\mathrm{d}y)}{P(y\leq Y\leq y+\mathrm{d}y)}=\tfrac{\int_{-\infty}^x\int_y^{y+\mathrm{d}y}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_y^{y+\mathrm{d}y}f_Y(s)\mathrm{d}s},\ \ \text{对}\ x$  求导得 X 在  $y\leq Y\leq y+\mathrm{d}y$  条件下的条 件 PDF 为  $\frac{\int_y^{y+\mathrm{d}y} f(x,s)\mathrm{d}s}{\int_y^{y+\mathrm{d}y} f_Y(s)\mathrm{d}s} \to \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}(\mathrm{d}y \to 0)$ 。

**定义 3.5.** 对于连续型随机向量 (X,Y), 设联合 PDF 为 f(x,y), 若  $f_Y(y) > 0$ , 则称 X 在 Y = y 条件下的条件 PDF 为  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{Y}(y)}$ .

可以验证  $f_{X|Y}(x|y)$  满足 PDF 的各性质。

相应的条件 CDF 为  $F_{X|Y}(a|y) = P(X \le a|Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_{X|Y}(x|y) dx$ .

我们熟知的各个定理均有适用于连续型随机向量的版本:

- 1.  $f(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$  (乘法法则)
- 2.  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$  (全概率公式) 3.  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy}$  (Bayes 公式)

例 3.6. 
$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$
,则  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}}$ ,則  $Y|X=x \sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)$ 。

#### 独立性 3.6

**定义 3.6.** 设二维随机向量 (X,Y) 的 CDF 为 F(x,y),若  $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$ , 则称 X,Y 相互独立。

可以证明,对于二维离散型(或连续型)随机向量 (X,Y), X,Y 相互独立的充要条件是  $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$ ,其中 f(x,y) 为联合 PMF(或 PDF)。

**定义 3.7.** 设 n 维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 CDF 为  $F(x_1, \dots, x_n)$ ,若  $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,则称  $X_1, \dots, X_n$  相互独立。

可以证明,对于 n 维离散型(或连续型)随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_1, \dots, X_n$  相互独立的充要条件是  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ ,  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 其中  $f(x_1, \dots, x_n)$  为联合PMF(或 PDF)。

- **定理 3.1.** 1. 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立,则  $\forall m \in \{1, \dots, n-1\}$ ,可测函数  $g_1, g_2$ ,有  $Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_m)$  与  $Y_2 = g_2(X_{m+1}, \dots, X_n)$  相互独立。

**例 3.7.** 设 (X,Y) 服从如图 **??** 的三角形域上的均匀分布,即  $f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in 三角形域, \\ 0, & 其他, \end{cases}$  则 X,Y 不独立。

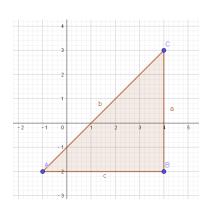


图 3.1: 三角形域上的均匀分布

## 3.7 随机向量的函数

本节中,我们考虑给定随机向量  $(X_1,\cdots,X_n)$  和可测函数 g,如何求  $Y=g(X_1,\cdots,X_n)$  的分布。

首先介绍"直接法"。

例 3.8.  $X_i \sim B(n_i, p) (i = 1, 2)$  独立,  $Y = X_1 + X_2$ , 则  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n_1 + n_2\}$ ,

$$P(Y = k)$$

$$= P(X_1 + X_2 = k)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k} P(X_1 = k_1, X_2 = k - k_1)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k} P(X_1 = k_1) P(X_2 = k - k_1)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{k} {n_1 \choose k_1} p^{k_1} (1 - p)^{n_1 - k_1} {n_2 \choose k - k_1} p^{k - k_1} (1 - p)^{n_2 - (k - k_1)}$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{k} {n_1 \choose k_1} {n_2 \choose k - k_1}\right) p^k (1 - p)^{n_1 + n_2 - k}$$

$$= {n_1 + n_2 \choose k} p^k (1 - p)^{n_1 + n_2 - k}$$

因此  $Y \sim B(n_1 + n_2, p)$ 。

**例 3.9.** 随机向量  $(X_1, X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1, x_2)$ , 且  $X_1 > 0$ , 考虑  $Y = X_2/X_1$ , 有  $\forall y \in$  $\mathbb{R}, P(Y \le y) = P(\frac{X_2}{X_1} \le y) = P(X_2 \le X_1 y) = \int_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$ 作  $x_2 = x_1 t$  换元得  $P(Y \le y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x_1, x_1 t) x_1 dt dx_1$ , 故 Y 的 PDF 为 l(y) = $\int_0^{+\infty} x_1 f(x_1, yx_1) \mathrm{d}x_1.$ 



图 3.2: 区域 D 的范围,其中边界线的斜率为 y

接下来介绍"密度函数变换法"。

设随机向量  $(X_1,X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1,x_2)$ ,且有可逆可微的映射关系  $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1,X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1,X_2) \end{cases}$ 据此解出逆映射  $\begin{cases} X_1 = h_1(Y_1,Y_2) \\ X_2 = h_2(Y_1,Y_2) \end{cases}$ ,则对于任意可测集 A,若  $(h_1,h_2)$  将 A 映射到集合 B,则由可流性可加及之 由可逆性可知 B 在  $(g_1, g_2)$  的映射下的值域为 A。因此我们有  $P((Y_1, Y_2) \in A) = P((X_1, X_2) \in A)$ 

3.7 随机向量的函数

 $B) = \int_B f(x_1,x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_A f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)) |J| \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2, \ \ \sharp \ \mathrm{P} \ \ J \ \ \mathrm{Jacobi} \ \ \mathrm{行列式}$   $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \ \ \mathrm{But} \ (Y_1,Y_2) \ \mathrm{的联合} \ \mathrm{PDF} \ \ \mathcal{B} \ \ l(y_1,y_2) = f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2)) |J| \, \mathrm{o}$ 

例 3.10. 随机向量  $(X_1,X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1,x_2)$ ,为求  $Y=X_1+X_2$  的 PDF,引入  $Z=X_1$ ,则  $\begin{cases} X_1=Z\\ X_2=Y-Z \end{cases}$ ,Jacobi 行列式为  $\det\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$  ,故 (Y,Z) 的联合 PDF 为 f(z,y-z)|-1|=f(z,y-z),Y 的边际 PDF 为  $l_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,y-z)\mathrm{d}z$ 。

上例中,若  $X_1, X_2$  相互独立,则  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \Rightarrow l_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2(y-z) dz$ , 这称之为  $f_1$  和  $f_2$  的卷积,记作  $f_1 * f_2$ 。

特别地,若  $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ,则  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ 。 利用上述随机向量的函数的 PDF 求解方法,可以得到所谓卡方分布( $\chi^2$ -分布)、t-分布和 F-分布的 PDF。这些分布的表达式较为复杂,在此不一一罗列。它们在统计推断部分会大量使用,感兴趣的同学可以查阅资料,简单了解一下它们与标准正态分布的联系。

## 第四章 随机变量的数字特征

## 4.1 期望

离散型和连续型随机变量的期望分别参见定义 ?? 和定义 ??。 对于随机向量,期望自然推广定义为  $\mathrm{E}((X_1,\cdots,X_n))=(\mathrm{E}(X_1),\cdots,\mathrm{E}(X_n))$ 。

### 命题 4.1. 期望有如下性质:

- 1. 离散型和连续型随机向量的函数的期望  $E(g(X_1,\dots,X_n))$  分别等于  $\sum_{x_i\in\{X_i(\omega)|\omega\in\Omega\},\forall i\in\{1,\dots,n\}}g(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)$  和  $\int_{\mathbb{R}^n}g(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$ , 其中 g 为可测函数,f 分别为联合 PMF 与联合 PDF
- 2.  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \forall$  常数  $a, b \in \mathbb{R}$
- 3. 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立,则  $E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$

### 4.2 分位数

**定义 4.1.** 设 X 为连续型随机变量, 若  $P(X \le m) = F(m) = 1/2$ , 则称 m 为 X 的中位数。

和均值一样,中位数也是随机变量集中趋势的一种刻画。中位数不一定唯一。若 m 是连续型随机变量 X 的中位数,则 P(X < m) = P(X > m) = 1/2。以下给出更一般的中位数定义。

**定义 4.2.** 对随机变量 X,若  $P(X < m) \le 1/2$ ,且  $P(X > m) \le 1 - 1/2 = 1/2$ ,则称 m 为 X 的中位数。

### **例 4.1.** 设离散型随机变量 X 的分布表为

X	1	2	3	4
P	1/3	1/2	1/12	1/12

则其中位数为 2。

定义 4.3. 对随机变量 X,  $\forall \alpha \in (0,1)$ , 若  $P(X < a) \le \alpha$  且  $P(X > a) \le 1 - \alpha$ , 则称 a 为 X 的(下侧) $\alpha$ -分位数。

上述定义的  $\alpha$ -分位数是不唯一的。为了唯一性,我们考虑定义  $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x | F(x) \ge \alpha\}$ 。 我们给出众数(mode)的方便定义: f(x) 的最大值点,其中 f(x) 为 PMF 或 PDF。由于 PDF 可在任意零测集上修改取值,故这一定义并非严谨的。

## 4.3 方差

离散型和连续型随机变量的方差分别参见定义??和定义??。

方差的意义: 若 X 为收益率,则  $\mathrm{SD}(X)$  称为波动率,刻画了风险的大小。我们定义变异系数  $\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{SD}(X)}{\mu}$ ,其中  $\mu = \mathrm{E}(X) \neq 0$ 。

### 命题 4.2. 方差有如下性质:

- 1.  $Var(C) \equiv 0, C$  为常数
- 2.  $Var(CX) = C^2Var(X)$
- 3. Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E((X E(X))(Y E(Y))),且若 X, Y 独立,则 E((X E(X))(Y E(Y))) = 0

## 4.4 协方差与相关系数

对随机变量 X, Y,设  $E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2, Var(X) = \sigma_1^2, Var(Y) = \sigma_2^2$ 。

定义 4.4. 称 X 与 Y 的协方差  $Cov(X,Y) = E((X - \mu_1)(Y - \mu_2))$ 。

#### 命题 4.3. 协方差有如下性质:

- 1. Cov(X, X) = Var(X)
- 2. Cov(X, Y) = Cov(Y, X)
- 3. Cov(X, Y) = E(XY) E(X)E(Y)

若 Corr(X,Y) = 0,称 X,Y 不相关。

4.  $Cov(aX_1 + bX_2 + c, Y) = aCov(X_1, Y) + bCov(X_2, Y), \forall$  常数  $a, b, c \in \mathbb{R}$ 

定义 4.5. 称 X 与 Y 的(线性)相关系数  $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = E(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2})$ 。

### 定理 4.1. 相关系数有如下性质:

1. 若 X, Y 相互独立,则 X, Y 不相关(反之未必成立)

2.  $|\operatorname{Corr}(X,Y)| \le 1$ ,且等号成立当且仅当  $\exists a,b,P(Y=aX+b)=1$ ,即 Y=aX+b, a.s. 其中 a.s. 表示 "almost surely"。

为证明上述定理的(2),首先我们利用 Cauchy-Schwartz 不等式证明引理: 对随机变量 U,V,有  $E^2(UV) \leq E(U^2)E(V^2)$ ,且等号成立当且仅当  $\exists t_0 \in \mathbb{R}, P(V=t_0U)=1$ 。接下来令  $U=\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}, V=\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$ ,即得。

当  $Corr(X,Y) = \pm 1$ ,可以证明  $a = \pm \sigma_2/\sigma_1$ 。

**例 4.2.**  $X \sim N(0,1), Y = X^2$ ,则 X 与 Y 不相关,但不独立。

**例 4.3.**  $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ ,则

$$\begin{aligned} & \operatorname{Corr}(X,Y) \\ &= \operatorname{E}(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}((\frac{x - \mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y - \mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2})} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \end{aligned}$$

进行换元  $(u,v)^{\mathrm{T}} = A(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^{\mathrm{T}}$ , 其中 A 的定义参见例 ??,则指数上的项化为  $-\frac{1}{2}(u^2+v^2)$ ,这一步实质上是进行了二次型的标准化。后续过程留作习题,最终计算结果为  $\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho$ 。

### 4.5 矩

**定义 4.6.** 对  $k=1,2,\cdots$ ,称  $\mathrm{E}((X-c)^k)$  为 X 关于 c 点的 k 阶矩。特别地,c=0 的情况下称为 k 阶原点矩, $c=\mathrm{E}(X)$  的情况下称为 k 阶中心矩。

根据定义可知, $\mathrm{E}(X)$  为 1 阶原点矩,而 1 阶中心矩恒等于 0;  $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)$  为 2 阶中心矩。

若  $\mathrm{E}(X) = \mu, \mathrm{SD}(X) = \sigma$ ,我们称  $\mathrm{E}((\frac{X-\mu}{\sigma})^k) = \frac{\mathrm{E}((X-\mu)^k)}{\sigma^k}$  为 k 阶标准矩。

1 阶标准矩恒等于 0,2 阶标准矩恒等于 1,3 阶标准矩称为 X 的偏度系数,记作 Skew(X)。

**例 4.4.**  $X \sim N(0,1)$ ,则 Skew $(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0$ ,其中 f 为 X 的 PDF。

我们称偏度系数 < 0 的分布为"负偏"或"左偏",如图??。

- 5 阶以上的奇数阶标准矩计算更复杂, 受噪声影响更大。
- 4 阶标准矩称为 X 的峰度系数,记作 Kurt(X)。由于正态分布的峰度系数恒等于 3,因此常定义超额峰度系数为 Kurt(X) 3。

我们经常将  $\mu \pm \sigma$  以内的范围称为"峰", 范围在"峰"以外但在  $\mu \pm 2\sigma$  以内的范围称为"肩", 范围在"肩"以外的部分称为"尾"。

通常, 峰度系数 > 3 表现为相对于正态分布"尖峰厚尾", 如图??。



图 4.1: 负偏分布



图 4.2: "Leptokurtic" 一词的含义即峰度系数 > 3

## 4.6 矩母函数

**定义 4.7.** 记  $M_X(t) = E(e^{tX})$ ,若  $M_X(t)$  在 t = 0 的某邻域内存在,则称其为 X 的矩母函数 (Moment Generating Function, MGF),否则称 X 的矩母函数不存在。

例 4.5. 若  $X \sim Exp(\lambda)$ ,则  $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$ 。

例 4.6. 若  $X \sim N(0,1)$ ,则  $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$ 。

命题 4.4. 矩母函数有如下性质:

1.  $M_X(0) \equiv 1$ 

2. 
$$Y = aX + b$$
, 则  $M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb}M_X(at)$ 

例 4.7. 若  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 令  $Y = \sigma X + \mu$ ,则  $X \sim N(0, 1)$ ,故  $M_Y(t) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$ , $t \in \mathbb{R}$ 。

矩母函数可以用于确定矩。

**定理 4.2.** 随机变量 X 的 n 阶(原点)矩与其矩母函数有如下关系:  $\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$ 。

证明. 由 Taylor 展开有  $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_X^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$ ,又  $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}(\sum_{n=0}^{+\infty} X^n \frac{t^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}(X^n) \frac{t^n}{n!}$ ,得到结论。

**例 4.8.** 若  $X \sim N(0,1)$ ,则  $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ ,因此我们得出  $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ , $E(X^{2n+1}) \equiv 0 \ (n=0,1,\cdots)$ 。

由此可以计算  $Var(X) = E(X^2) = 1$ ,  $Kurt(X) = E(X^4) = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3$ .

矩母函数还可以用于确定分布。

**定理 4.3.** 若存在 a > 0,使得  $M_X(t) = M_Y(t), \forall t \in (-a, a)$ ,则 X, Y 同分布。

**例 4.9.** 若随机变量 X 的矩母函数  $M_X(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{1}{8}e^{5t}$ ,则 X 为离散型随机变量,分布表为

X	-1	0	4	5	
P	1/2	1/4	1/8	1/8	

一般地,若离散型随机变量 X 有 PMF  $P(X=k)=p_k$  ( $\sum_k p_k\equiv 1$ ),则其 MGF 为  $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\sum_k e^{tk}p_k$ 。

注意,各阶矩均相同的随机变量未必同分布。

**例 4.10.** 设连续型随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的 PDF 分别为  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}, x > 0$  和  $f_2(x) = f_1(x)(1 + \sin(2\pi \log x)), x > 0$  ( $X_1$  服从对数正态分布) ,则  $E(X_2^n) = E(X_1^n) + \int_0^{+\infty} x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) dx$ ,其中后一项通过换元  $y = \log x - n$  可以证明为 0,即  $X_1$  和  $X_2$  同矩但不同分布。

下面我们运用矩母函数,研究独立随机变量和的分布。

**定理 4.4.** 若随机变量 X, Y 独立, Z = X + Y, 则  $M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t)$ 。

证明.  $M_Z(t) = \mathrm{E}(e^{tZ}) = \mathrm{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathrm{E}(e^{tX}e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$ ,其中最后一个等号利用了独立性。

推而广之,若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  相互独立, $Z = X_1 + \cdots + X_n$ ,则  $M_Z(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$ 。

**例 4.11.** 若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  相互独立且服从正态分布,则  $X_1 + \cdots + X_n$  也服从正态分布。

以 n=2 为例说明。设  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  (i=1,2),则  $M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)=e^{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}+\mu_1 t}e^{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}+\mu_2 t}=e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(\mu_1+\mu_2)t}$ ,对应  $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$  的 MGF,再由 MGF 确定分布可得结论。

定义随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 MGF 为  $M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$ 。 以下简介类似 MGF 的其他函数:

- 1. 概率母函数 (Probability Generating Function, PGF), 仅针对非负整数取值的离散型随机 变量 X, 设其 PMF 为  $P(X=k)=p_k$ , 则其 PGF 定义为  $E(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_kt^k, t\in[-1,1]$ , 或对于  $t \in (0,1]$ , 等于  $E(e^{X \log t}) = M_X(\log t)$ .
- 2. 特征函数, 定义为  $E(e^{itX})$ , 其中  $i^2 = -1$ 。

## 4.7 条件期望

我们定义条件期望  $\mathrm{E}(Y|X\in A)=\left\{egin{array}{ll} \sum_{i}y_{i}P(Y=y_{i}|X\in A)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|X\in A)\mathrm{d}y \end{array}\right.$ ,两种定义分别针对 Y 为离

散型和连续型随机变量。

型和连续型随机变量。 
$$\exists \text{ } \exists \text{ } \exists$$

的函数,记作 h(x)。将其作用在 X 上,得到 h(X) = E(Y|X),这是一个 X 的函数 对 X 的回归函数),因此是一个新的随机变量。

例 4.12. 
$$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$
,则  $E(Y|x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ 。

例 4.13. 甲、乙两种同类产品, 平均使用寿命分别为 10 年和 15 年, 市场占有率分别为 60% 和 40%, 随机买一个, 则期望寿命是  $10 \times 60\% + 15 \times 40\% = 12$  年, 我们发现这个计算过程可以 表示为 E(Y) = E(Y|X=1)P(X=1) + E(Y|X=2)P(X=2) = h(1)P(X=1) + h(2)P(X=1)(2) = E(h(X)) = E(E(Y|X)),其中 (X) = 1 表示抽到甲产品,(X) = 0 表示抽到乙产品,(Y) 表示 抽到的产品的寿命。

一般地,我们有以下定理:

### **定理 4.5.** (全期望公式)

对于随机向量 (X,Y),有 E(Y) = E(E(Y|X))。

证明. 以连续型为例。设 (X,Y) 的联合 PDF 为 f(x,y), 有  $\mathrm{E}(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) \mathrm{d}y =$  $\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \mathrm{d}y, \quad \text{if} \quad \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}(Y|x) f_X(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}(Y|x)$  $E(E(Y|X))_{\circ}$ 

一般地,对于可测函数 g,我们有 E(g(X,Y)) = E(E(g(X,Y)|X))。

**定理 4.6.** 对于随机向量 (X,Y) 和任意可测函数  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ,都有  $\mathrm{E}((Y-g(X))^2)\geq \mathrm{E}((Y-g(X))^2)$  $E(Y|X))^2$ ),即条件期望是均方误差意义下的最优预测。

证明. 类比期望的性质  $\mathrm{E}((Y-c)^2)\geq \mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y))^2), \forall c\in\mathbb{R},\$ 我们有  $\mathrm{E}((Y-g(X))^2|X)\geq \mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y|X))^2|X), \forall g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  可测,两边对 X 求期望即得。

我们经常用到最优线性预测,即  $\min_{a,b} \mathrm{E}((Y-(aX+b))^2)$ ,这种"均方意义上的最优"称 之为最小二乘(least square)。

## 第五章 不等式与极限定理

## 5.1 概率不等式

**定理 5.1.** (Markov 不等式)

若随机变量  $Y \ge 0$ , 则  $\forall a > 0$ , 有  $P(Y \ge a) \le \frac{E(Y)}{a}$ .

一般地,对于任意随机变量 X,则  $\forall a>0$ ,有  $P(|X|\geq a)\leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{a}$ 。

**定理 5.2.** (Chebyshev 不等式)

若随机变量 Y 的方差  $\mathrm{Var}(Y)$  存在,则  $\forall a>0$  有  $P(|Y-\mathrm{E}(Y)|\geq a)\leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{a^2}$ 。