概率论与随机过程

授课教师：唐宏岩

前言

本讲义基于清华大学数学系唐宏岩老师于 2023 - 2024 学年秋季学期开设的《概率论与随机过程》课程，用于辅助同学们课后复习。

由于时间与能力所限，本讲义可能不会出现大段的文字论述（但会包含重要的定义、定理与公式等）。但是，对许多基本概念的深入理解是非常有必要的，同学们可以在浏览时检查自己是否能够回忆起课上的内容，对掌握不够扎实的地方，鼓励大家查阅参考书或在课程群提问以解决问题。

由于此为教学团队第一年尝试整理讲义，诸如格式编排、内容完整性方面可能存在许多不足，欢迎大家联系我提出宝贵的意见与建议。

曹子尧

2023 年 9 月

目录

第一部分

初等概率论

第一章　事件的概率

1.1　概率的发展史

赌博中的 de Méré's Problem：连续掷一个均匀六面骰 4 次，获得至少一次“6”的概率为 $1-(\frac{5}{6})^4\approx 0.5177$；而连续掷两个均匀六面骰 24 次，获得至少一次“对 6”的概率为 $1-(35/36)^{24}\approx 0.4914$。

Pascal 和 Fermat 的通信中使用初等数学的方法，首创了概率论相当多的数学理论，虽然当时没有总结成通用的定理。

Laplace 创立了采用分析方法的分析概率论。

Kolmogorov 利用测度论方法发展了现代概率理论。

1.2　随机试验与事件

定义 1.1. 概率论中的随机试验指的是符合下面两个特点的试验：

1. 不能预先确知结果
2. 可以预测所有可能的结果

定义 1.2. 样本空间是指一个试验的所有可能结果的集合，常用 Ω 表示。

定义 1.3. 事件是样本空间的一个良定义的子集。

一次随机试验中，一个事件可能发生或不发生。

下面是一些常见的事件：

1. 全事件 Ω（必然事件）
2. 空事件 $\emptyset$（不可能事件）
3. 基本事件 $\{a\}$，其中 $a\in\Omega$，即仅包含单一试验结果的事件

1.3 事件的运算

由于事件是集合，因此事件之间可以进行集合之间的运算，如：

1. 余 $A^c = \Omega \setminus A$
2. 和 $A + B = A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
3. 差 $A - B = A \setminus B$
4. 积 $AB = A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

集合的 De Morgan's laws 也适用于事件：$(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c$。

事件的运算像集合的运算一样，可以用 Venn 图来表示。

1.4 概率的几种解释

对于概率这一数学概念，人们形成了几种从不同角度出发的解释：

1. 古典解释：基于等可能性的解释
2. 频率解释：基于大量重复试验的解释（频率学派采用的解释）
3. 主观解释：概率是一种对确信程度的度量（Bayes 学派采用的解释）

1.5 概率的公理化定义

我们用 2^Ω 表示 Ω 的幂集，即 Ω 的所有子集组成的集合。

定义 1.4. 事件集类 $\mathscr{F} \subset 2^\Omega$ 必须满足所谓 σ-代数的性质：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$（对补运算的封闭性）
3. $A_i \in \mathscr{F}, \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathscr{F}$（对可列并的封闭性）

例 1.1. $\Omega = \{a, b, c, d\}$，以下是一些合法的事件集类：

1. $\mathscr{F}_1 = 2^\Omega$
2. $\mathscr{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$
3. $\mathscr{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

定义 1.5. (Kolmogorov) 概率函数 $P : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ 是满足以下三条公理的映射：

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_i \in \mathscr{F}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_iA_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$（加法公理/可列可加性）

我们称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间。

命题 1.1. 关于概率空间，有如下性质：

1. $P(A)\le 1,\ \forall A\in\mathscr{F}$
2. $P(\emptyset)=0$
3. $P(A)+P(A^c)=1$
4. $A_i\in\mathscr{F},\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$A_iA_j=\emptyset,\forall i\ne j\Rightarrow P(\sum_{i=1}^n A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i)$（有限可加性）
5. $A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$（我们称事件 A 蕴涵事件 B）
6. $$\begin{aligned}P(A_1+\cdots+A_n)=&\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}A_{i_2}) \qquad \text{（容斥公式）}\\ &+\cdots+(-1)^{r+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})\\ &+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n)\end{aligned}$$
   特别地，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

例 1.2. （配对问题）

有 n 个人，每人有一顶帽子。现将所有帽子放到一起，再随机分配给每人一顶，考虑无人拿到自己的帽子的概率。

为此，设事件 A_i 为“第 i 个人拿到自己的帽子”，则 $P(A_i)=1/n$。

利用容斥公式，至少一人拿到自己帽子的概率为

$$\begin{aligned}&P(A_1+\cdots+A_n)\\ =&\sum_{i=1}^n P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}A_{i_2})\\ &+\cdots+(-1)^{r+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})\\ &+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1\cdots A_n)\end{aligned}$$

其中 $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}\binom{n}{r}=\frac{1}{r!}$，即 $P(A_1+\cdots+A_n)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{r+1}\frac{1}{r!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$。

所求概率 $P_n=1-P(A_1+\cdots+A_n)=1-(1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!})\to e^{-1}(n\to+\infty)$。

思考：恰有 k 个人拿到自己的帽子的概率？

1.6 条件概率

定义 1.6. 若 $P(B)>0$，定义条件概率 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$。

通常，我们计算条件概率的方法有两种：

1. 在缩小（受限）的样本空间（要求事件 B 发生）上，考虑事件 A 发生的概率
2. 根据定义计算

一种常用的形式是 $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$，这可以视作是求解两个事件的积的概率的方法（乘法法则）。

例 1.3. 掷一个均匀六面骰，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, A=\{2,3,4,5\}, B=\{1,3,5\}$，则 $P(A)=4/6, P(B)=3/6, P(AB)=2/6, P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=2/3$。

例 1.4. 袋子中有 8 个红球和 4 个白球，无放回地取出两个球，利用组合数可知，两个都是红球的概率为 $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$。
用条件概率可以简化计算：$P(R_1R_2)=P(R_1)P(R_2|R_1)=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}$。

更一般地，我们有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$，常用于序贯发生的一系列事件的积的概率求解。

例 1.5. 回忆上一节的“配对问题”。我们有

$$\begin{aligned}
&P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})\\
=&P(A_{i_1})P(A_{i_2}|A_{i_1})\cdots P(A_{i_r}|A_{i_1}\cdots A_{i_{r-1}})\\
=&\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{n-(r-1)}\\
=&\frac{(n-r)!}{n!}.
\end{aligned}$$

命题 1.2. 对于给定的事件 B，$P(\cdot|B):\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 是概率函数，即 $(\Omega,\mathscr{F},P(\cdot|B))$ 仍是概率空间。

对于上述命题的证明，只需验证 $P(\cdot|B)$ 满足概率的三条公理即可。

这提示我们，条件概率也是一种概率，如果我们将 $P(A)$ 称为观察到事件 B 之前 A 的“先验概率”，则 $P(A|B)$ 就是相应的“后验概率”。

一个常见的迷思是：观测到事件 A 已经发生后，是否可以说事件 A 发生的概率 $P(A)=1$? 学过条件概率之后，我们知道答案是否定的，实际上是后验概率 $P(A|A)=1$。

1.7 事件的独立性

定义 1.7. 若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 相互独立。

如果 $P(B)>0$，我们注意到 A,B 独立等价于 $P(A|B)=P(A)$。

命题 1.3. 若 A, B 独立，则 A^c, B 独立。

定义 1.8. 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$，且 A, B, C 两两独立，则称事件 A, B, C 独立。

注意，仅有 A, B, C 两两独立，不能推出三者独立。

定义 1.9. 若对于事件列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$，任意取有限个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$，都有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r})$，则称 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立。

例 1.6. 每周开奖的彩票，各次中奖率均为 10^{-5} 且独立，问连续十年（520 周）不中奖的概率？令事件 A_i 为第 i 周不中奖，则 $P(A_i) = 1 - 10^{-5}$，故 $P(A_1 \cdots A_{520}) = (1 - 10^{-5})^{520} \approx 0.9948$。

定义 1.10. 若事件 A, B, E 满足 $P(AB|E) = P(A|E)P(B|E)$，则我们称 A, B 关于 E 条件独立。

注意，条件独立性和独立性之间没有蕴涵关系。

1.8 Bayes 公式

定理 1.1. （全概率公式）
设 $\{B_i\}$ 是 Ω 的一个分割，即

1. $\sum_i B_i = \Omega$
2. $B_iB_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3. $P(B_i) > 0, \forall i$

则 $P(A) = P(\sum_i (AB_i)) = \sum_i P(AB_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$。
注：$\{B_i\}$ 可以是有限集合，或可数无穷集合。

例 1.7. 对于调查问卷中的敏感问题（如“你是否有过某病史”），被调查者可能会有所顾虑而做出虚假的回答。为保护被调查者的隐私，同时取得其信任，考虑引入一个“保护性问题”，即不具有敏感性的问题（如“你是否会游泳”），并让被调查者以抛硬币的方式，随机抽取一个问题回答。这样，抽到敏感问题的、确有过该病史的被调查者在回答“是”时也无须有病史暴露之虞。
设人群中，敏感问题答案为“是”的比例为 p（未知），保护性问题答案为“是”的比例为 q（假设已知），则若收集到 n 个被调查者的结果，其中 k 个为“是”，我们便有 $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \approx \frac{k}{n}$，可以据此得到 p 的估计。

定理 1.2. （Bayes 公式 / Bayes 准则）
设 $\{B_i\}$ 是 Ω 的一个分割，则 $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$。

例 1.8. （假阳性悖论）

对于一种流行病，A 表示一个人检查呈阳性，B 表示此人确实患病。

设 $P(B)=10^{-4}, P(A|B)=0.99, P(A|B^c)=10^{-3}$,

则一个检查呈阳性的人真的患病的概率仅为 $P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)}\approx 9\%$。

如果再次检测仍呈阳性，且两次检测效率不变，结果彼此独立，则此人真的患病的概率为 $P(B|A_1A_2)=\frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|B^c)P(B^c)}=\frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)+P(A_1|B^c)P(A_2|B^c)P(B^c)}\approx 99\%$。

第二章　随机变量

2.1　一维随机变量

定义 2.1. 随机变量是样本空间上的实值函数。

注意，上述定义是不严格的。

更严谨的定义：若对于可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 和函数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$，有 $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega | X(\omega) \le x\} \in \mathscr{F}$，则称 X 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的随机变量。其中“可测空间”是指 $\mathscr{F}$ 是样本空间 Ω 上的 σ-代数。此处不要求“概率空间”，即随机变量的定义并不依赖概率测度 P 的存在。

例 2.1. 下表展示了两个随机变量。其中“像集”即 $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$。

试验	样本空间 Ω	随机变量 X	像集
随机调查 50 人对某议题支持与否	$\Omega_1 = \{0, 1\}^{50}$	$X_1 =$ “1” 的个数	$\{0, 1, \cdots, 50\}$
随机抽取一名北京成年市民	$\Omega_2 =$ 所有北京成年市民之集	$X_2 =$ 其年收入	$\mathbb{R}$

注意，我们经常用“$X_1 = 20$”、“$X_2 > 100000$”等简化的记号来表示事件。例如，前者实际上指的是 $\{\omega \in \Omega_1 | X_1(\omega) = 20\}$。

诸如此类的试验结果集合需是事件，这体现出前述的随机变量严谨定义的意义。事实上，如果满足该严谨定义，则对于任意可测集 $I \subset \mathbb{R}$，都有 $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\} \in \mathscr{F}$。

随机变量是试验结果的数值摘要，起到一种概括的作用。随机变量的“随机”要素来自于样本点 $\omega \in \Omega$ 的随机选择。在实际应用中，随机变量常常比样本空间具有更直观的意义。

随机变量可以分为：

1. 离散型：至多可数多个取值
2. 连续型：区间型取值（非严格定义）
3. 其他

“其他”中的一个非常特殊的子类是所谓的混合型随机变量。

定义 2.2. 对于随机变量 X 和 $\mathbb{R}$ 的可测子集 I（例如 $I=(a,b]$），令 $X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega|X(\omega)\in I\}\subset\Omega$ 为 I 的原像集，我们定义记号 $P(X\in I)$ 表示 "X 的取值在 I 中的概率"，其值为 $P(X^{-1}(I))$。

例如，$P(a<X\leq b)=P(\{\omega|X(\omega)\in(a,b]\})$。

定义 2.3. $F_X(x)=P(X\leq x),\forall x\in\mathbb{R}$ 称为随机变量 X 的*累积分布函数*（Cumulative Distribution Function, CDF）。下标 X 在无歧义时可省略。

我们有 $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$。

例 2.2. 令 X 表示掷两个均匀六面骰所得的点数和，则 X 的分布表（详见 **??** 节）为

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

相应的 CDF 见图 **??**。

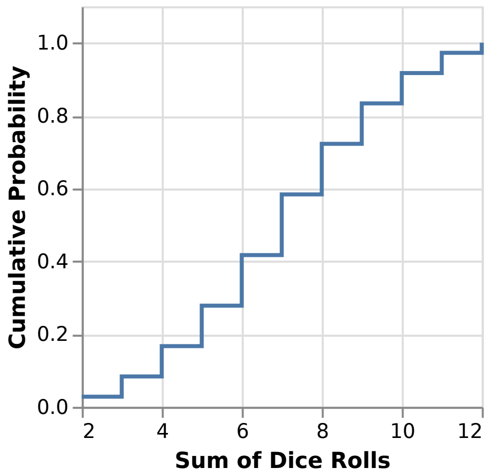


图 2.1: X 的 CDF 图象

注：由于软件限制，各个阶跃点的绘制方式不太规范，实际上从其左侧逼近应该为一个空圈，例如 $F(3)=3/36$ 而不是 $1/36$。另外，$\forall x<2,F(x)=0;\forall x\geq 12,F(x)=1$。

命题 2.1. CDF 的性质：

1. F 单调递增（未必严格单调递增）
2. $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1,\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$
3. F 右连续

可以证明，上述三条性质是任意函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 成为 CDF 的充要条件。

思考：如果我们将 CDF 的定义改为 $P(X<x)$，上述性质会如何变化？

命题 2.2. 若 X, Y 为随机变量，则 $aX + bY, XY, X/Y$ (需$Y \neq 0$) 都是随机变量。一般地，若 g 为可测函数，则 $g(X, Y)$ 是随机变量。

定义 2.4. 设 X_1, X_2 的 CDF 分别为 F_1, F_2，我们称 X_1 与 X_2 同分布，若 $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = F_2(x)$。

命题 2.3. 随机变量 X_1 与 X_2 同分布的一个充要条件是 $\forall$ 可测集$I \subset \mathbb{R}, P(X_1 \in I) = P(X_2 \in I)$。

注意，同分布不等价于"同变量"，即两个同分布的变量的取值不一定恒等。

例 2.3. 掷一次硬币，X 表示正面向上次数，Y 表示反面向上次数，显然 X 与 Y 同分布，但取值不等。

2.2 离散随机变量

定义 2.5. 离散随机变量 X 的*概率质量函数*（Probability Mass Function, PMF）f 是指该随机变量取各个可能值的概率，即 $f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$。可以用*分布表*的形式展示各个可能取值与概率的对应关系。

命题 2.4. 如果离散随机变量 X 的所有可能取值为 $\{x_i\}$，则 X 的 PMF 具有如下性质:

1. $f(x_i) = p_i \geq 0, \forall i$
2. $\sum_i p_i = 1$
3. $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

定义 2.6. 离散随机变量 X 的*期望*定义为 $\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i p_i$。
我们称 X 的*期望存在*，当且仅当 $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$。
当期望存在时，其*方差*定义为 $\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 p_i = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)$。
当方差有限时，称其算术平方根为 X 的*标准差*，记作 $\mathrm{SD}(X)$。

注意，通常我们所说的一个随机变量的均值指的就是期望。

*标准化*指的是对 X 作线性变换 $\frac{X-\mu}{\sigma}$，其中 μ 和 σ 分别为 X 的期望和标准差，得到均值为 0，标准差为 1 的随机变量。

对于可测函数 g，$g(X)$ 也是随机变量，其期望 $\mathrm{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i$。

期望反映了随机变量的集中趋势，而方差反映了其分散程度。

2.3　常见离散分布

定义 2.7. 称一个随机变量 X 服从 *Bernoulli 分布*，若 $\exists p \in (0,1)$，X 的取值集合为 $\{0,1\}$，且 $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$。记作 $X \sim B(p)$。

$B(p)$ 中的 p 称为该 Bernoulli 分布的参数。后续介绍的其他分布同理。

我们常将两种取值分别称为“成功”和“失败”。

计算可得，若 $X \sim B(p)$，则 $\mathrm{E}(X)=p, \mathrm{Var}(X)=p(1-p)$。

定义 2.8. 称一个随机变量 X 服从*二项分布*，若 $\exists N \in \mathbb{N}^*$，$p \in (0,1)$，$X$ 的取值集合为 $\{0,1,\cdots,N\}$，且 $P(X=k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}(k \in \{0,1,\cdots,N\})$。记作 $X \sim B(N,p)$。

我们常将 k 理解为“N 次独立 Bernoulli 试验中的成功次数”。

计算可得，若 $X \sim B(N,p)$，则 $\mathrm{E}(X)=Np, \mathrm{Var}(X)=Np(1-p)$。

定义 2.9. 称一个随机变量 X 服从 *Poisson 分布*，若 $\exists \lambda > 0$，X 的取值集合为 $\mathbb{N}$，且 $P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(k \in \mathbb{N})$。记作 $X \sim P(\lambda)$。

计算可得，若 $X \sim P(\lambda)$，则 $\mathrm{E}(X)=\lambda, \mathrm{Var}(X)=\lambda$。

对 Poisson 分布的一种常见理解是“一段时间内某个小概率事件发生的次数”所服从的分布。例如，观察时间 $(0,1]$ 内某路口的交通事故数 X，将 $(0,1]$ 区间等分成 n 个小区间，即 $l_i=(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}](i=1,2,\cdots,n)$。考虑到 n 很大时，每个区间的长度很小，我们作如下假设:

1. 每段区间内，至多发生一次事故
2. l_i 上发生一次事故的概率与区间长度（$1/n$）成正比，为 $p=\lambda/n$
3. 各区间内是否发生事故彼此独立

则 $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(n \to +\infty)$，即 $X \sim P(\lambda)$。

例 2.4. 设某医院平均每天出生婴儿数为 λ，则接下来 t 天内出生婴儿数服从参数为 $t\lambda$ 的 Poisson 分布。

对于一般的二项分布 $X \sim B(N,p)$，若 p 很小，N 很大，而 $\lambda=Np$ 不太大，则近似有 $X \sim P(\lambda)$，且近似误差不超过 $\min\{p, Np^2\}$。

进一步，若 N 次 Bernoulli 试验并非严格独立，但满足弱相依条件，则 Poisson 分布仍为一种较好的近似。

例 2.5. （配对问题）

A_i 表示第 i 个人拿到自己的帽子，则 $P(A_i)=1/n, P(A_i|A_j)=\frac{1}{n-1}(j \neq i)$，当 n 很大时，$1/n$

和 $\frac{1}{n-1}$ 很接近，可以认为满足弱相依条件。

记 X 为拿到自己帽子的人数，则 X 近似服从参数为 $\lambda = np = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ 的 Poisson 分布，即 $P(X=k) \approx \frac{e^{-1}}{k!}$。

我们用常规做法检查这种近似是否合理。首先考虑指定的某 k 人，记事件 E 表示这 k 人拿到自己的帽子，事件 F 表示其余 $(n-k)$ 人未拿到自己的帽子，则 $P(EF) = P(E)P(F|E) = \frac{(n-k)!}{n!} \cdot P_{n-k}$，其中 P_{n-k} 为 $(n-k)$ 人随机拿帽子时无人拿对的概率。那么我们有 $P(X=k) = \binom{n}{k} P(EF) = \frac{1}{k!} P_{n-k} \to \frac{e^{-1}}{k!} (n \to +\infty)$。这说明前述的近似是较好的。

2.4 连续随机变量

定义 2.10. 对随机变量 X，若存在 $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$，使得 $\forall$ 可测集 $I \subset \mathbb{R}$，都有 $P(X \in I) = \int_I f(x)\mathrm{d}x$，则称 X 为*连续型随机变量*，f 称为其*概率密度函数*（Probability Density Function, PDF）。

命题 2.5. 连续随机变量 X 的 PDF 具有如下性质:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \equiv 1$
2. $P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$
4. 若 f 在 x_0 处连续，则 $P(x_0 - \delta < X < x_0 + \delta) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)\mathrm{d}t \approx f(x_0) \cdot 2\delta$
5. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 连续，且若 f 在 x 处连续，有 $F'(x) = f(x)$
6. PDF 若存在，则不唯一（可以修改其在任意零测集上的值，得到不同的 PDF）

定义 2.11. 连续随机变量 X 的*期望*定义为 $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$。

我们称 X 的期望存在，当且仅当 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\mathrm{d}x < +\infty$。

当期望存在时，其*方差*定义为 $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}(x))^2 f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)$。

当方差有限时，称其算术平方根为 X 的*标准差*，记作 $\mathrm{SD}(X)$。

对于可测函数 g，$g(X)$ 也是随机变量，其期望 $\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$。

2.5 常见连续分布

定义 2.12. 称一个连续型随机变量 X 服从*均匀分布*，若其 PDF 为 $f(x) = \frac{1}{b-a} (x \in (a, b))$，$f$ 在其余各处取 0。记作 $X \sim U(a, b)$。

我们常将 $X \sim U(0,1)$ 称为随机数。

计算可得，若 $X \sim U(a,b)$，则 $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$。

定义 2.13. 称一个连续型随机变量 X 服从正态分布，若其 PDF 为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}(\sigma > 0)$。记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。

计算可得，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\mathrm{E}(X) = \mu, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$。

著名的"经验法则"见图 ??。

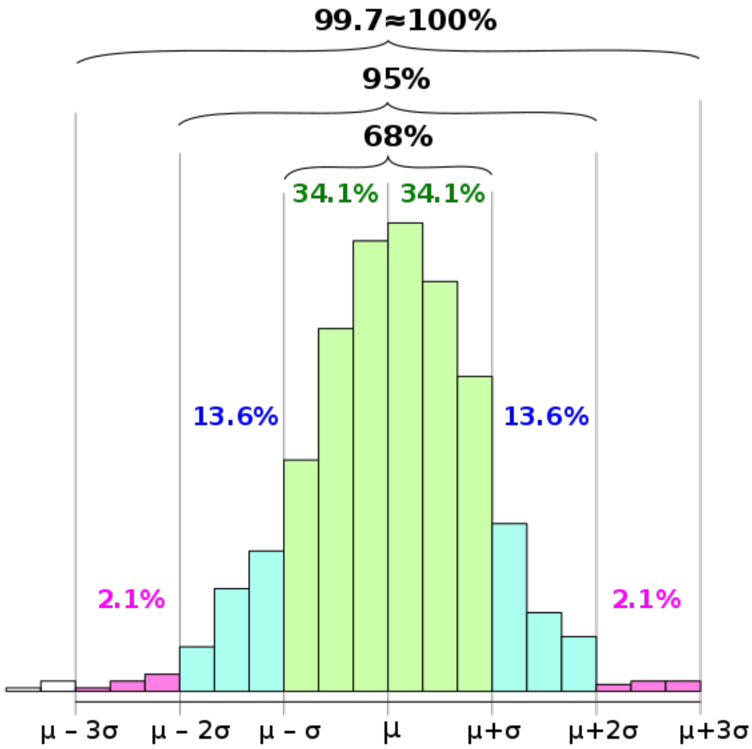


图 2.2: 经验法则

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的充要条件是 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。我们将 $N(0,1)$ 称为标准正态分布。

定义 2.14. 称一个连续型随机变量 X 服从指数分布，若其 PDF 为 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}(\lambda > 0, x > 0)$，$f$ 在其余各处取 0。记作 $X \sim Exp(\lambda)$。

指数分布常用于刻画等待时间、寿命等。

计算可得，若 $X \sim Exp(\lambda)$，则 $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda, \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$。

指数分布有另一种符号约定，以 $\beta = 1/\lambda$ 为参数，一些数学软件可能采用此种约定。

指数分布的 CDF 为 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}(x > 0)$，所谓的"尾概率"为 $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}(x > 0)$。

例 2.6. 设某医院平均每天出生婴儿数为 λ，现在观察到一名婴儿出生，则接下来 t 天内有婴儿出生的概率为 $P(X \le t)$，其中 X 表示到下一个婴儿出生所需等待的时间。
记 $N(t)$ 为 t 天内出生婴儿数,我们已经知道 $N(t) \sim P(t\lambda)$,则 $P(X > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$，故 $P(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$。我们发现 X 服从参数为 λ 的指数分布。

我们从另一个角度理解指数分布。

首先引入失效率或危险率的概念。设 X 为连续型随机变量（表示某种零件的寿命），其 CDF 为 $F(x)$，且 $F(0) = 0$。考虑条件概率 $P(x < X < x + \mathrm{d}x | X > x) = \frac{P(x<X<x+\mathrm{d}x)}{P(X>x)} = \frac{F(x+\mathrm{d}x)-F(x)}{1-F(x)} \approx \frac{F'(x)}{1-F(x)}\mathrm{d}x$，即“年龄”为 x 的零件不能继续工作的条件概率密度为 $\frac{F'(x)}{1-F(x)}$，我们称其为瞬时失效率 $\lambda(x)$，则 $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\mathrm{d}t}$。

在“无老化”假设下，即 $\lambda(t) \equiv \lambda$ 不随时间变化，则 $F(x) = 1 - e^{-\lambda t}(x > 0)$，$X$ 服从指数分布。

指数分布有所谓“无记忆性”: $P(X > t+s | X > s) = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = e^{-\lambda t} = P(X > t)(t, s > 0)$。

“无老化”假设并不总是成立。为此，我们可以进行一定程度的改进，例如令 $\lambda(x) = \alpha\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}(x > 0, \alpha, \beta > 0$ 为常数)，则 $F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}(x > 0)$，称之为 *Weibull* 分布。当 $\alpha = 1$ 时，Weibull 分布退化为参数为 $1/\beta$ 的指数分布。

总览至此我们介绍过的各个分布的参数，可以将其大致分为以下几类:

1. 位置参数：决定了分布平移到的位置，通常在 PMF/PDF 中体现为 $f(x) = g(x - \cdot)$ 的形式，如正态分布的参数 μ
2. 尺度参数：决定了分布伸缩的程度，通常在 PMF/PDF 中体现为 $f(x) = g(\frac{x}{\cdot})$ 的形式，如正态分布的参数 σ、Weibull 分布的参数 β
3. 形状参数：决定了分布的形状，如 Weibull 分布的参数 α

2.6 随机变量的函数

对于随机变量 X 和可测函数 g，$Y = g(X)$ 也是随机变量。特别地，若 X 为离散型随机变量，则 Y 也离散。但若 X 为连续型随机变量，Y 未必连续。

例 2.7. $X \sim Exp(\lambda)$，$Y = \begin{cases} 0, & X \le t_0, \\ 1, & X > t_0, \end{cases}$ 其中 $t_0 > 0$ 为常数，则 $Y \sim B(e^{-\lambda t_0})$。

例 2.8. 设 X 为连续型随机变量，PDF 为 $f(x)$，考虑 $Y = X^2$。
从 CDF 入手，$\forall y > 0, P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\mathrm{d}x$，我们有 Y 的 PDF 为 $l(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}P(Y \le y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))(y > 0)$。
特别地，若 $X \sim N(0, 1)$，称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2-分布，读作“卡方分布”。

若 $Y = g(X)$ 为随机变量，我们可以计算 Y 的分布如下：

- $P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y))$
- $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y]))$

第三章　联合分布

3.1　随机向量

定义 3.1. 称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 为（n 维）随机向量，若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 均为随机变量。

定义 3.2. n 维随机向量的（联合）（累积）分布函数（CDF）定义为 $F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n), \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。

对于 $n = 2$（二元分布）的情形，我们常用 (X, Y) 来表示随机向量，对应的 CDF 为 $F(x, y)$。

3.2　离散分布

定义 3.3. 称 n 维随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 是离散的，当且仅当 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 均为离散随机变量。
离散随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的（联合）概率质量函数（PMF）定义为 $f(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n), \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。

命题 3.1. 离散随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的 PMF 具有如下性质:

1. $f(x_1, \cdots, x_n) \geq 0, \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
2. $\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega\}, \forall i \in \{1, \cdots, n\}} f(x_1, \cdots, x_n) \equiv 1$

注意第 2 条性质中求和的项数为至多可数，原因是有限个至多可数集的笛卡尔积仍是至多可数集。

例 3.1. 设 $\{B_i\}_{i=1}^n$ 为 Ω 的一个分割（分割的定义见 **??** 节），$P(B_i) = p_i \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$，$\sum_{i=1}^n p_i = 1$。
进行 N 次独立试验，设 $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$，有 X_i 个试验结果落在 B_i 中，则若 $k_1 + \cdots + k_n = N$，其中 k_i 均为非负整数，我们有 $P(X_1 = k_1, \cdots, X_n = k_n) = \binom{N}{k_1, \cdots, k_n} p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$。其中 $\binom{N}{k_1, \cdots, k_n} = \frac{N!}{k_1! \cdots k_n!}$ 为多项式 $(a_1 + \cdots + a_n)^N$ 中 $a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$ 项的系数。
我们称 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从多项分布。

3.3 连续分布

定义 3.4. 对 n 维随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$，若存在 $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$，使得 $\forall$ 可测集 $Q\subset\mathbb{R}^n$，都有 $P((X_1,\cdots,X_n)\in Q)=\int_Q f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$，则称 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为连续型随机向量，f 称为其（联合）概率密度函数（PDF）。

命题 3.2. 连续随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 PDF 具有如下性质：

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\equiv 1$
2. 以 $n=2$ 为例，$F(x,y)=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, f(a,b)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(a,b)$, a.e.

其中 a.e. 表示“almost everywhere”。

例 3.2. 矩形域上的均匀分布的 PDF：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x,y)\in(a,b)\times(c,d),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 3.3. 二元正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的 PDF：
$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\sigma_1,\sigma_2>0,|\rho|<1$。
令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\end{bmatrix}, W=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}1 & -\rho\\ -\rho & 1\end{bmatrix}$，$W=A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵 W 的 Cholesky 分解，则 $-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}W\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=-\frac{1}{2}(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x})$。
上述 Cholesky 分解的结果为 $A=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix}1 & -\rho\\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2}\end{bmatrix}$ 或 $A=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix}-1 & \rho\\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2}\end{bmatrix}$。

3.4 边际分布

对 n 维随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$，称 $F_i(x)=P(X_i\le x)=P(X_i\le x,-\infty<X_j<+\infty,\forall j\ne i)$ 为 X_i 的边际分布。

例如，若 $n=2$，随机向量 (X,Y) 有 CDF $F(x,y)$，则 X 的边际分布为 $F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y\in\mathbb{R})=\lim\limits_{y\to+\infty}P(X\le x,-\infty<Y\le y)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$。

若 $n=3$，随机向量 (X,Y,Z) 有 CDF $F(x,y,z)$，则 $F_X(x)=\lim\limits_{y,z\to+\infty}F(x,y,z)$，而 (X,Y) 的边际分布为 $F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=P(X\le x,Y\le y,-\infty<Z<+\infty)=\lim\limits_{z\to+\infty}F(x,y,z)$。

例 3.4. 设二维随机向量 (X,Y) 的 CDF 为 $F(x,y)$，则 $\forall a,b\in\mathbb{R},P(X>a,Y>b)=1-F_X(a)-F_Y(b)+F(a,b)$。

对于离散型随机向量, 以 $n=2$ 为例, 定义边际 *PMF* 为 $P(X=x)=\sum\limits_y P(X=x,Y=y)$。

对于连续型随机向量, 以 $n=2$ 为例, 设联合 PDF 为 $f(x,y)$, 则 $F_X(x)=P(X\le x,Y\in\mathbb{R})=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$, 则 X 的边际 *PDF* 为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$。

例 3.5. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, 即 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$。同理 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。

3.5 条件分布

以 $n=2$ 为例说明条件分布的概念, 考虑随机向量 (X,Y)。

对于离散型随机向量, 设联合 PMF 为 $P(X=a_i,Y=b_j)=p_{ij}\ge 0,\sum_{i,j}p_{ij}\equiv 1$, 则在 $Y=b_j$ 条件下的 X 的条件 *PMF* 为 $P(X=a_i|Y=b_j)=\frac{P(X=a_i,Y=b_j)}{P(Y=b_j)}=\frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}$。条件 PMF 满足 $\sum_i P(X=a_i|Y=b_j)\equiv 1,\forall j$。

对于连续型随机向量, 设联合 PDF 为 $f(x,y)$, 首先考虑条件概率 $P(X\le x|y\le Y\le y+\mathrm{d}y)=\frac{P(X\le x,y\le Y\le y+\mathrm{d}y)}{P(y\le Y\le y+\mathrm{d}y)}=\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\mathrm{d}y}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\int_{y}^{y+\mathrm{d}y}f_Y(s)\mathrm{d}s}$, 对 x 求导得 X 在 $y\le Y\le y+\mathrm{d}y$ 条件下的条件 PDF 为 $\frac{\int_{y}^{y+\mathrm{d}y}f(x,s)\mathrm{d}s}{\int_{y}^{y+\mathrm{d}y}f_Y(s)\mathrm{d}s}\to\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}(\mathrm{d}y\to 0)$。

定义 3.5. 对于连续型随机向量 (X,Y), 设联合 PDF 为 $f(x,y)$, 若 $f_Y(y)>0$, 则称 X 在 $Y=y$ 条件下的条件 *PDF* 为 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

可以验证 $f_{X|Y}(x|y)$ 满足 PDF 的各性质。

相应的条件 *CDF* 为 $F_{X|Y}(a|y)=P(X\le a|Y=y)=\int_{-\infty}^{a}f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x$。

我们熟知的各个定理均有适用于连续型随机向量的版本:

1. $f(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$ (乘法法则)
2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}y$ (全概率公式)
3. $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\mathrm{d}y}$ (Bayes 公式)

例 3.6. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}}$, 即 $Y|X=x\sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)$。

3.6 独立性

定义 3.6. 设二维随机向量 (X,Y) 的 CDF 为 $F(x,y)$, 若 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$, 则称 X,Y 相互独立。

可以证明，对于二维离散型（或连续型）随机向量 (X,Y)，X,Y 相互独立的充要条件是 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$，其中 $f(x,y)$ 为联合 PMF（或 PDF）。

定义 3.7. 设 n 维随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 CDF 为 $F(x_1,\cdots,x_n)$，若 $F(x_1,\cdots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n),\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，则称 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立。

可以证明，对于 n 维离散型（或连续型）随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$，$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是 $f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n),\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$，其中 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为联合 PMF（或 PDF）。

定理 3.1.

1. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $\forall m\in\{1,\cdots,n-1\}$，可测函数 g_1,g_2，有 $Y_1=g_1(X_1,\cdots,X_m)$ 与 $Y_2=g_2(X_{m+1},\cdots,X_n)$ 相互独立。
2. 若 n 维连续型随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的联合 PDF 满足

$$f(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1)\cdots g_n(x_n),\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R},$$

其中 $g_i:\mathbb{R}\to[0,+\infty),\forall i\in\{1,\cdots,n\}$，则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且 X_i 的边际 PDF f_i 与 g_i 相差常数因子，$\forall i\in\{1,\cdots,n\}$。

例 3.7. 设 (X,Y) 服从如图 ?? 的三角形域 D 上的均匀分布，即 $f(x,y)=\begin{cases}c, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 X,Y 不独立。

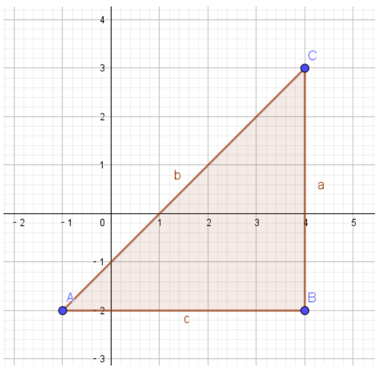


图 3.1: 三角形域上的均匀分布

3.7 随机向量的函数

本节中，我们考虑给定随机向量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 和可测函数 g，如何求 $Y=g(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布。

首先介绍“直接法”。

例 3.8. $X_i \sim B(n_i, p)(i=1,2)$ 独立，$Y = X_1 + X_2$，则 $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n_1+n_2\}$，

$$\begin{aligned}
&P(Y=k)\\
=&P(X_1+X_2=k)\\
=&\sum_{k_1=0}^{k} P(X_1=k_1, X_2=k-k_1)\\
=&\sum_{k_1=0}^{k} P(X_1=k_1)P(X_2=k-k_1)\\
=&\sum_{k_1=0}^{k} \tbinom{n_1}{k_1}p^{k_1}(1-p)^{n_1-k_1}\tbinom{n_2}{k-k_1}p^{k-k_1}(1-p)^{n_2-(k-k_1)}\\
=&\left(\sum_{k_1=0}^{k}\tbinom{n_1}{k_1}\tbinom{n_2}{k-k_1}\right)p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}\\
=&\tbinom{n_1+n_2}{k}p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}
\end{aligned}$$

因此 $Y \sim B(n_1+n_2, p)$。

例 3.9. 随机向量 (X_1, X_2) 有联合 PDF $f(x_1, x_2)$，且 $X_1 > 0$，考虑 $Y = X_2/X_1$，有 $\forall y \in \mathbb{R}, P(Y \le y) = P(\frac{X_2}{X_1} \le y) = P(X_2 \le X_1 y) = \int_D f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$，作 $x_2 = x_1 t$ 换元得 $P(Y \le y) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x_1, x_1 t)x_1\mathrm{d}t\mathrm{d}x_1$，故 Y 的 PDF 为 $l(y) = \int_0^{+\infty} x_1 f(x_1, yx_1)\mathrm{d}x_1$。

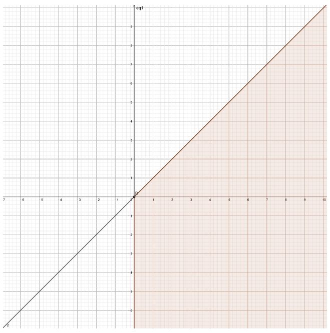


图 3.2: 区域 D 的范围，其中边界线的斜率为 y

接下来介绍“密度函数变换法”。

设随机向量 (X_1, X_2) 有联合 PDF $f(x_1, x_2)$，且有可逆可微的映射关系 $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases}$，据此解出逆映射 $\begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$，则对于任意可测集 A，若 (h_1, h_2) 将 A 映射到集合 B，则

由可逆性可知 B 在 (g_1,g_2) 的映射下的值域为 A。因此我们有 $P((Y_1,Y_2)\in A)=P((X_1,X_2)\in B)=\int_B f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_A f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$，其中 J 为 Jacobi 行列式 $\det\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}$，因此 (Y_1,Y_2) 的联合 PDF 为 $l(y_1,y_2)=f(h_1(y_1,y_2),h_2(y_1,y_2))|J|$。

例 3.10. 随机向量 (X_1,X_2) 有联合 PDF $f(x_1,x_2)$，为求 $Y=X_1+X_2$ 的 PDF，引入 $Z=X_1$，则 $\begin{cases}X_1=Z\\ X_2=Y-Z\end{cases}$，Jacobi 行列式为 $\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=-1$，故 (Y,Z) 的联合 PDF 为 $f(z,y-z)|-1|=f(z,y-z)$，Y 的边际 PDF 为 $l_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z,y-z)\mathrm{d}z$。

上例中，若 X_1,X_2 相互独立，则 $f(x_1,x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)\Rightarrow l_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(z)f_2(y-z)\mathrm{d}z$，这称之为 f_1 和 f_2 的卷积，记作 f_1*f_2。

特别地，若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$。

利用上述随机向量的函数的 PDF 求解方法，可以得到所谓卡方分布（χ^2-分布）、t-分布和 F-分布的 PDF。这些分布的表达式较为复杂，在此不一一罗列。感兴趣的同学可以查阅资料，简单了解一下它们与标准正态分布的联系。

第四章　随机变量的数字特征

4.1　期望

离散型和连续型随机变量的期望分别参见定义 ?? 和定义 ??。

对于随机向量，期望自然推广定义为 $\mathrm{E}((X_1,\cdots,X_n))=(\mathrm{E}(X_1),\cdots,\mathrm{E}(X_n))$。

命题 4.1. 期望有如下性质：

1. 离散型和连续型随机向量的函数的期望 $\mathrm{E}(g(X_1,\cdots,X_n))$ 分别等于
   $\sum_{x_i\in\{X_i(\omega)|\omega\in\Omega\},\forall i\in\{1,\cdots,n\}} g(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)$
   和 $\int_{\mathbb{R}^n} g(x_1,\cdots,x_n)f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$，
   其中 g 为可测函数，f 分别为联合 PMF 与联合 PDF
2. $\mathrm{E}(aX+bY)=a\mathrm{E}(X)+b\mathrm{E}(Y),\forall$ 常数 $a,b\in\mathbb{R}$
3. 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $\mathrm{E}(X_1\cdots X_n)=\mathrm{E}(X_1)\cdots\mathrm{E}(X_n)$

4.2　分位数

定义 4.1. 设 X 为连续型随机变量，若 $P(X\leq m)=F(m)=1/2$，则称 m 为 X 的中位数。

和均值一样，中位数也是随机变量集中趋势的一种刻画。中位数不一定唯一。

若 m 是连续型随机变量 X 的中位数，则 $P(X<m)=P(X>m)=1/2$。

以下给出更一般的中位数定义。

定义 4.2. 对随机变量 X，若 $P(X<m)\leq 1/2$，且 $P(X>m)\leq 1-1/2=1/2$，则称 m 为 X 的中位数。

例 4.1. 设离散型随机变量 X 的分布表为

X	1	2	3	4
P	1/3	1/2	1/12	1/12

则其中位数为 2。

定义 4.3. 对随机变量 X，$\forall\alpha \in (0,1)$，若 $P(X < a) \leq \alpha$ 且 $P(X > a) \leq 1-\alpha$，则称 a 为 X 的（下侧）α-分位数。

上述定义的 α-分位数是不唯一的。为了唯一性，我们考虑定义 $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x|F(x) \geq \alpha\}$。

我们给出众数（mode）的方便定义：$f(x)$ 的最大值点，其中 $f(x)$ 为 PMF 或 PDF。由于 PDF 可在任意零测集上修改取值，故这一定义并非严谨的。

4.3 方差

离散型和连续型随机变量的方差分别参见定义 **??** 和定义 **??**。

方差的意义：若 X 为收益率，则 $\mathrm{SD}(X)$ 称为*波动率*，刻画了风险的大小。我们定义*变异系数* $\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{SD}(X)}{\mu}$，其中 $\mu = \mathrm{E}(X) \neq 0$。

命题 4.2. 方差有如下性质：

1. $\mathrm{Var}(C) \equiv 0, C$ 为常数
2. $\mathrm{Var}(CX) = C^2\mathrm{Var}(X)$
3. $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$，且若 X, Y 独立，则 $\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) = 0$

4.4 协方差与相关系数

对随机变量 X, Y，设 $\mathrm{E}(X) = \mu_1, \mathrm{E}(Y) = \mu_2, \mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2, \mathrm{Var}(Y) = \sigma_2^2$。

定义 4.4. 称 X 与 Y 的*协方差* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X-\mu_1)(Y-\mu_2))$。

命题 4.3. 协方差有如下性质：

1. $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$
2. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$
3. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
4. $\mathrm{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a\mathrm{Cov}(X_1,Y) + b\mathrm{Cov}(X_2,Y), \forall$ 常数 $a, b, c \in \mathbb{R}$

定义 4.5. 称 X 与 Y 的*（线性）相关系数* $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2} = \mathrm{E}(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2})$。

若 $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$，称 X, Y 不相关。

定理 4.1. 相关系数有如下性质：

1. 若 X, Y 相互独立，则 X, Y 不相关（反之未必成立）

2. $|\mathrm{Corr}(X,Y)| \le 1$，且等号成立当且仅当 $\exists a,b, P(Y=aX+b)=1$，即 $Y=aX+b$, a.s.

其中 a.s. 表示“almost surely”。

为证明上述定理的 (2)，首先我们利用 Cauchy-Schwartz 不等式证明引理：对随机变量 U,V，有 $\mathrm{E}^2(UV) \le \mathrm{E}(U^2)\mathrm{E}(V^2)$，且等号成立当且仅当 $\exists t_0 \in \mathbb{R}, P(V=t_0U)=1$。接下来令 $U=\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}, V=\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$，即得。

当 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\pm 1$，可以证明 $a=\pm\sigma_2/\sigma_1$。

例 4.2. $X \sim N(0,1), Y=X^2$，则 X 与 Y 不相关，但不独立。

例 4.3. $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Corr}(X,Y)\\
=&\mathrm{E}(\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2})\\
=&\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

进行换元 $(u,v)^{\mathrm{T}}=A(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^{\mathrm{T}}$，其中 A 的定义参见例 **??**，则指数上的项化为 $-\frac{1}{2}(u^2+v^2)$，这一步实质上是进行了二次型的标准化。后续过程留作习题，最终计算结果为 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$。

4.5 矩

定义 4.6. 对 $k=1,2,\cdots$，称 $\mathrm{E}((X-c)^k)$ 为 X 关于 c 点的 k 阶矩。特别地，$c=0$ 的情况下称为 k 阶原点矩，$c=\mathrm{E}(X)$ 的情况下称为 k 阶中心矩。

根据定义可知，$\mathrm{E}(X)$ 为 1 阶原点矩，而 1 阶中心矩恒等于 0；$\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)$ 为 2 阶中心矩。

若 $\mathrm{E}(X)=\mu, \mathrm{SD}(X)=\sigma$，我们称 $\mathrm{E}((\frac{X-\mu}{\sigma})^k)=\frac{\mathrm{E}((X-\mu)^k)}{\sigma^k}$ 为 k 阶标准矩。

1 阶标准矩恒等于 0, 2 阶标准矩恒等于 1, 3 阶标准矩称为 X 的偏度系数, 记作 $\mathrm{Skew}(X)$。

例 4.4. $X \sim N(0,1)$，则 $\mathrm{Skew}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=0$，其中 f 为 X 的 PDF。

我们称偏度系数 <0 的分布为“负偏”或“左偏”，如图 **??**。

5 阶以上的奇数阶标准矩计算更复杂，受噪声影响更大。

4 阶标准矩称为 X 的峰度系数，记作 $\mathrm{Kurt}(X)$。由于正态分布的峰度系数恒等于 3，因此常定义超额峰度系数为 $\mathrm{Kurt}(X)-3$。

我们经常将 $\mu\pm\sigma$ 以内的范围称为“峰”，范围在“峰”以外但在 $\mu\pm 2\sigma$ 以内的范围称为“肩”，范围在“肩”以外的部分称为“尾”。

通常，峰度系数 >3 表现为相对于正态分布“尖峰厚尾”，如图 **??**。

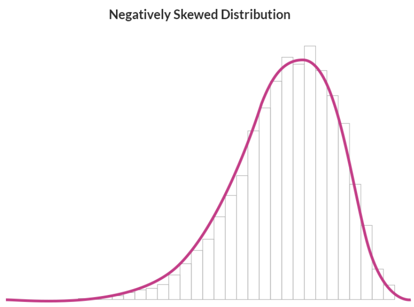


图 4.1: 负偏分布

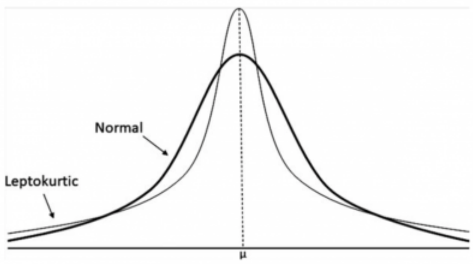


图 4.2: “Leptokurtic” 一词的含义即峰度系数 >3

4.6 矩母函数

定义 4.7. 记 $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})$，若 $M_X(t)$ 在 $t=0$ 的某邻域内存在，则称其为 X 的矩母函数 (Moment Generating Function, MGF)，否则称 X 的矩母函数不存在。

例 4.5. 若 $X\sim Exp(\lambda)$，则 $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\int_0^{+\infty}e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\lambda-t},t<\lambda$。

例 4.6. 若 $X\sim N(0,1)$，则 $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=e^{\frac{t^2}{2}},t\in\mathbb{R}$。

命题 4.4. 矩母函数有如下性质:

1. $M_X(0)\equiv 1$
2. $Y=aX+b$，则 $M_Y(t)=\mathrm{E}(e^{tY})=\mathrm{E}(e^{t(aX+b)})=e^{tb}M_X(at)$

例 4.7. 若 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $Y=\sigma X+\mu$，则 $X\sim N(0,1)$，故 $M_Y(t)=e^{\mu t}M_X(\sigma t)=e^{\mu t}e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}}=e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t},t\in\mathbb{R}$。

矩母函数可以用于确定矩。

定理 4.2. 随机变量 X 的 n 阶（原点）矩与其矩母函数有如下关系：$\mathrm{E}(X^n)=M_X^{(n)}(0)$。

证明. 由 Taylor 展开有 $M_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}M_X^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$，又 $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\mathrm{E}(\sum_{n=0}^{+\infty}X^n\frac{t^n}{n!})=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{E}(X^n)\frac{t^n}{n!}$，得到结论。 □

例 4.8. 若 $X \sim N(0,1)$，则 $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$，因此我们得出 $\mathrm{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \mathrm{E}(X^{2n+1}) \equiv 0 \ (n = 0, 1, \cdots)$。
由此可以计算 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) = 1, \mathrm{Kurt}(X) = \mathrm{E}(X^4) = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3$。

矩母函数还可以用于确定分布。

定理 4.3. 若存在 $a > 0$，使得 $M_X(t) = M_Y(t), \forall t \in (-a, a)$，则 X, Y 同分布。

例 4.9. 若随机变量 X 的矩母函数 $M_X(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{1}{8}e^{5t}$，则 X 为离散型随机变量，分布表为

X	-1	0	4	5
P	1/2	1/4	1/8	1/8

一般地，若离散型随机变量 X 有 PMF $P(X = k) = p_k$ ($\sum_k p_k \equiv 1$)，则其 MGF 为 $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} p_k$。

注意，各阶矩均相同的随机变量未必同分布。

例 4.10. 设连续型随机变量 X_1 和 X_2 的 PDF 分别为 $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}, x > 0$ 和 $f_2(x) = f_1(x)(1 + \sin(2\pi \log x)), x > 0$（$X_1$ 服从对数正态分布），则 $\mathrm{E}(X_2^n) = \mathrm{E}(X_1^n) + \int_0^{+\infty} x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) \mathrm{d}x$，其中后一项通过换元 $y = \log x - n$ 可以证明为 0，即 X_1 和 X_2 同矩但不同分布。

下面我们运用矩母函数，研究独立随机变量和的分布。

定理 4.4. 若随机变量 X, Y 独立，$Z = X + Y$，则 $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$。

证明. $M_Z(t) = \mathrm{E}(e^{tZ}) = \mathrm{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathrm{E}(e^{tX}e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$，其中最后一个等号利用了独立性。 □

推而广之，若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 相互独立，$Z = X_1 + \cdots + X_n$，则 $M_Z(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$。

例 4.11. 若 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 相互独立且服从正态分布，则 $X_1 + \cdots + X_n$ 也服从正态分布。
以 $n = 2$ 为例说明。设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, 2)$，则 $M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = e^{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t} e^{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t} = e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (\mu_1 + \mu_2)t}$，对应 $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的 MGF，再由 MGF 确定分布可得结论。

定义随机向量 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的 MGF 为 $M_{X_1,\cdots,X_n}(t_1, \cdots, t_n) = \mathrm{E}(e^{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n})$。
以下简介类似 MGF 的其他函数:

1. 概率母函数 (Probability Generating Function, PGF), 仅针对非负整数取值的离散型随机变量 X, 设其 PMF 为 $P(X=k)=p_k$, 则其 PGF 定义为 $\mathrm{E}(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_k t^k, t\in[-1,1]$, 或对于 $t\in(0,1]$, 等于 $\mathrm{E}(e^{X\log t})=M_X(\log t)$。
2. 特征函数，定义为 $\mathrm{E}(e^{itX})$，其中 $i^2=-1$。

4.7 条件期望

我们定义条件期望 $\mathrm{E}(Y|X\in A)=\begin{cases}\sum\limits_i y_i P(Y=y_i|X\in A)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|X\in A)\mathrm{d}y\end{cases}$，两种定义分别针对 Y 为离散型和连续型随机变量。

进而，我们定义 $\mathrm{E}(Y|x)=\mathrm{E}(Y|X=x)=\begin{cases}\sum\limits_i y_i P(Y=y_i|X=x)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y\end{cases}$，注意到这是一个 x 的函数，记作 $h(x)$。将其作用在 X 上，得到 $h(X)=\mathrm{E}(Y|X)$，这是一个 X 的函数（称为 Y 对 X 的回归函数)，因此是一个新的随机变量。

例 4.12. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $\mathrm{E}(Y|x)=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$。

例 4.13. 甲、乙两种同类产品, 平均使用寿命分别为 10 年和 15 年, 市场占有率分别为 60% 和 40%，随机买一个，则期望寿命是 $10\times60\%+15\times40\%=12$ 年，我们发现这个计算过程可以表示为 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(Y|X=1)P(X=1)+\mathrm{E}(Y|X=2)P(X=2)=h(1)P(X=1)+h(2)P(X=2)=\mathrm{E}(h(X))=\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$，其中 $X=1$ 表示抽到甲产品，$X=0$ 表示抽到乙产品，Y 表示抽到的产品的寿命。

一般地，我们有以下定理:

定理 4.5. （全期望公式）
对于随机向量 (X,Y)，有 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$。

证明. 以连续型为例。设 (X,Y) 的联合 PDF 为 $f(x,y)$，有 $\mathrm{E}(Y|x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$，故 $\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{E}(Y|x)f_X(x)\mathrm{d}x=\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))$。 □

一般地，对于可测函数 g，我们有 $\mathrm{E}(g(X,Y))=\mathrm{E}(\mathrm{E}(g(X,Y)|X))$。

定理 4.6. 对于随机向量 (X,Y) 和任意可测函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，都有 $\mathrm{E}((Y-g(X))^2)\geq\mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y|X))^2)$，即条件期望是均方误差意义下的最优预测。

证明. 类比期望的性质 $\mathrm{E}((Y-c)^2) \geq \mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y))^2), \forall c \in \mathbb{R}$，我们有 $\mathrm{E}((Y-g(X))^2|X) \geq \mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y|X))^2|X), \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测，两边对 X 求期望即得。 □

我们经常用到最优线性预测，即 $\min\limits_{a,b} \mathrm{E}((Y-(aX+b))^2)$，这种“均方意义上的最优”称之为最小二乘（least square）。

命题 4.5. 记 $\hat{Y} = \mathrm{E}(Y|X)$ 为已知 X 的条件下对 Y 的最优估计，$\tilde{Y}$ 为估计误差 $\hat{Y} - Y$，则 $\mathrm{E}(\tilde{Y}) = 0, \mathrm{E}(\tilde{Y}\hat{Y}) = 0$，进而有 $\mathrm{Cov}(\hat{Y}, \tilde{Y}) = 0, \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\hat{Y}) + \mathrm{Var}(\tilde{Y})$。

第五章　不等式与极限定理

5.1　概率不等式

定理 5.1. （Markov 不等式）
若随机变量 $Y \geq 0$，则 $\forall a > 0$，有 $P(Y \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(Y)}{a}$。

证明. 取示性变量 $I = \begin{cases} 1, & Y \geq a, \\ 0, & Y < a, \end{cases}$ 则 $I \leq Y/a$，故 $P(Y \geq a) = \mathrm{E}(I) \leq \mathrm{E}(Y/a) = \mathrm{E}(Y)/a$。 □

定理 5.2. （Chebyshev 不等式）
若随机变量 Y 的方差 $\mathrm{Var}(Y)$ 存在，则 $\forall a > 0$ 有 $P(|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{a^2}$。

证明. $P(|Y - \mathrm{E}(Y)| \geq a) = P((Y - \mathrm{E}(Y))^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathrm{E}((Y-\mathrm{E}(Y))^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(Y)}{a^2}$. □

这告诉我们，如果 $\mathrm{Var}(Y) = 0$，则 $P(Y = \mathrm{E}(Y)) = 1$（即 a.s.）。

定理 5.3. （Chernoff 不等式）
对于任意随机变量 Y，$\forall a > 0, t > 0$，有 $P(Y \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(e^{tY})}{e^{ta}}$。

证明. $\forall t > 0, P(Y \geq a) = P(e^{tY} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathrm{E}(e^{tY})}{e^{ta}}$. □

例 5.1. 若 $X \sim N(0,1)$，则

1. 根据 Markov 不等式，$P(|X| \geq 3) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.27$；
2. 根据 Chebyshev 不等式，$P(|X| \geq 3) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{3^2} = \frac{1}{9} \approx 0.11$；
3. 根据 Chernoff 不等式，$\forall t > 0, P(|X| \geq 3) = 2P(X \geq 3) \leq 2\frac{\mathrm{E}(e^{tX})}{e^{3t}} = 2e^{\frac{t^2}{2}-3t}$，取最小值点 $t = 3$，得 $P(|X| \geq 3) \leq 2e^{-\frac{9}{2}} \approx 0.022$；
4. 根据经验法则，$P(|X| \geq 3) \approx 0.003$。

5.2 大数定律

设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，均值 $\mathrm{E}(X_i) = \mu$，方差 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$，则样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，其均值 $\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$，方差 $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0(n \to +\infty)$。

定理 5.4. （Khinchin 弱大数定律）
设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，均值 $\mathrm{E}(X_i) = \mu$，方差 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$，则 $\forall \epsilon > 0$，有 $\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 0$，或等价地，$\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) = 1$。

证明. 由 Chebyshev 不等式，$P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X})}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n}\frac{1}{\epsilon^2} \to 0(n \to +\infty)$。 □

$\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0$，如果我们将 ϵ 和 $(1-\alpha)$ 分别称为精度和置信度，则根据 Khinchin 弱大数定律，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当 $n \geq N$ 时，$P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \alpha$，即 $\bar{X}$ 至少以概率 $(1-\alpha)$ 落在区间 $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$ 内。

换句话说，当样本量足够大时，有很大的概率 $\bar{X} \approx \mu$，其中 μ 为未知的总体均值。

我们将 $X_i \sim B(p)$ 这一特例称之为 *Bernoulli* 大数定律。

通过更进一步的讨论可以证明，上述定理中关于方差的条件可以去掉，结论仍正确。

此外，我们还有对 Khinchin 弱大数定律的若干推广，如

1. 要求 X_i 两两不相关，$\mathrm{Var}(X_i)$ 一致有界，我们就得到了 Chebyshev 大数定律；
2. 要求 $\mathrm{Var}(\bar{X}) \to 0(n \to +\infty)$，我们就得到了 Markov 大数定律。

定义 5.1. 我们称 Y_n 依概率收敛于 Y，记作 $Y_n \xrightarrow{P} Y$，如果 $\forall \epsilon > 0$，有 $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) = 0$。

用上述定义，弱大数定律可以表述为 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$。

定理 5.5. （Kolmogorov 强大数定律）
设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，均值 $\mathrm{E}(X_i) = \mu$，则 $P(\lim_{n\to+\infty} \bar{X} = \mu) = 1$。

考虑 $X_i \sim B(p)$ 的特殊情形，则 $\bar{X}$ 称之为频率，由强大数定律，$P(\lim_{n\to+\infty} \bar{X} = p) = 1$，这说明概率的频率解释是合理的。

定义 5.2. 我们称 Y_n 以概率 1 收敛于 Y，又称几乎必然收敛于 Y，记作 $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$，如果 $P(\lim_{n\to+\infty} Y_n = Y) = 1$。

用上述定义，强大数定律可以表述为 $\bar{X} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$。

例 5.2. （Monte Carlo 积分）

设我们要计算 $g(x)>0$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，首先取一个适当的 $c>\sup\{g(x)|x\in[a,b]\}$，设 (X_i,Y_i) 独立且服从区域 $[a,b]\times[0,c]$ 上的均匀分布，记 $I_i=\begin{cases}1, & Y_i\le g(X_i),\\ 0, & Y_i>g(X_i),\end{cases}$，则 $I_i\sim B(p)$，其中 $p=\frac{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}{c(b-a)}$，于是 $\bar{I}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_i\approx p$，从而 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\approx c(b-a)\bar{I}$。

例 5.3. 我们通过一个例子来考察一下上面介绍的两种收敛性的区别。

设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$，其中 $\Omega=[0,1]$，ω 在 Ω 上均匀分布。定义随机变量序列 $\forall\omega\in\Omega, Y_1(\omega)=\omega+I_{[0,1]}(\omega), Y_2(\omega)=\omega+I_{[0,1/2]}(\omega), Y_3(\omega)=\omega+I_{[1/2,1]}(\omega), Y_4(\omega)=\omega+I_{[0,1/3]}(\omega), Y_5(\omega)=\omega+I_{[1/3,2/3]}(\omega), Y_6(\omega)=\omega+I_{[2/3,1]}(\omega),\cdots$，则 $Y_n(\omega)$ 依概率收敛于 $Y(\omega)=\omega$，但不以概率 1 收敛于 $Y(\omega)$，因为 $\forall\omega_0\in\Omega$，$Y_n(\omega_0)$ 无极限。

5.3 中心极限定理

定理 5.6. 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，均值 $\mathrm{E}(X_i)=\mu$，方差 $\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2>0$，则 $\forall x\in\mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的 CDF。或等价地，$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x)$。

证明. 只对 X_i 的 MGF 存在的情形给出证明。

不失一般性，假设 $\mu=0,\sigma^2=1$，令 $M(t)=\mathrm{E}(e^{tX_i})$，则 $M(0)=1, M'(0)=0, M''(0)=1$，于是 $\mathrm{E}(e^{t\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}})=M^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$，而根据 Taylor 展开，$M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=1+0+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2+o\left(\frac{t^2}{n}\right)$，故 $\mathrm{E}(e^{t\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}})=(1+\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n}))^n\to e^{t^2/2}(n\to+\infty)$，此为 $N(0,1)$ 的 MGF，这说明 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ 的分布趋近于 $N(0,1)$。 □

上述定理通常称为 Lindeberg-Lévy CLT，可推广至不同分布的情形。

如果将定理中的 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 理解为标准化的过程，则不难得出 $\bar{X}$ 近似服从 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$X_1+\cdots+X_n$ 近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$。

例 5.4. （De Moivre-Laplace CLT）

设 $X_i\sim B(p)$，则 $\sum_{i=1}^n X_i\sim B(n,p)$，当 n 充分大时，可以近似地认为 $\sum_{i=1}^n X_i\sim N(np,np(1-p))$，于是我们可近似计算 $P(t_1\le\sum_{i=1}^n X_i\le t_2)=P\left(\frac{t_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{\sum_{i=1}^n X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{t_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)\approx\Phi(y_2)-\Phi(y_1)$，其中 $y_1=\frac{t_1-np-\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}, y_2=\frac{t_2-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}$，其中 $\frac{1}{2}$ 是连续性修正项。

定义 5.3. （依分布收敛）

我们称 Y_n 依分布收敛于 Y，记作 $Y_n\xrightarrow{d}Y$，如果 $\lim_{n\to+\infty}F_{Y_n}(x)=F_Y(x),\forall x\in\mathbb{R}$。

用上述定义，CLT 可以表述为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$，其中 $Z \sim N(0,1)$，或简记为 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$。

例 5.5. （选举问题）

设 p 为选民真实支持度（未知），随机抽样调查 n 人（假设 n 远远小于总人数 N，可以近似有放回抽样），样本支持比例 $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$，其中 $X_i \sim B(p)$ 且独立，表示第 i 个人是否支持。

设置精度 $\epsilon = 0.03$，置信度 $1-\alpha = 95\%$，则至少需要 n 为多少，才能保证 $P(|P_n - p| < \epsilon) \geq 1-\alpha$？根据 CLT，我们有 $P(|P_n - p| \geq \epsilon) \approx 2\left(1 - \Phi(\frac{\epsilon}{\sqrt{p(1-p)/n}})\right) \leq \alpha$，于是 $n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{\epsilon^2}$，其中 $z_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的上 $\alpha/2$ 分位数，代入最大值点 $p = \frac{1}{2}$，我们得到 $n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{4}\epsilon^2$，代入 $\epsilon = 0.03, \alpha = 0.05$，得到 $n \geq 1068$。这一结果与 N 无关！

第二部分

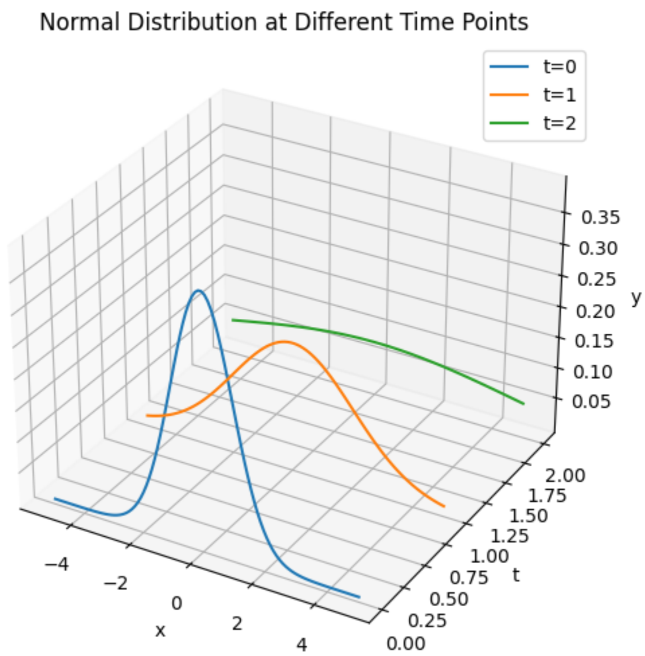
随机过程

随机过程引言

定义. 给定一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，若对于某个集合 T（称之为指标集），$\forall t \in T$，都有一个随机变量 X_t，则称 $\{X_t\}_{t\in T}$ 为一个随机过程（Stochastic Process），也记作 $\{X_t, t \in T\}$。称 X_t 为该随机过程在 t 时刻的状态，有时也记作 $X(t)$，其取值集合 S 称为状态空间，即 $\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$。$\forall \omega_0 \in \Omega$，称 $\{X_t(\omega_0), t \in T\}$ 为该随机过程的一条样本轨道（Sample Path）。

随机变量是 Ω 上的函数，而随机过程是一列随机变量，因此 $X_t(\omega)$ 可以视为 t, ω 的函数。

例. 设 X_0, U 独立且均服从 $N(0,1)$，令 $X_t = X_0 + tU$，则 $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ 是一个随机过程，$\forall t \in \mathbb{R}, X_t \sim N(0, t^2+1)$，如下图所示。



$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ 的分布

例. 设 $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立同分布，且 $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$，令 $Y_0 = 0, X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i$，则 $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是一个随机过程，称之为一维随机游走（Random Walk）。

如果一个随机过程的 T 是离散的，常称之为时间序列（Time Series）。而如果 S 是离散的，有时用链（Chain）来称呼这样的随机过程。

定义. 若 $\forall n, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n \ (t_1, \cdots, t_n \in T)$，满足 $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立，则称 $\{X_t, t \in T\}$ 为独立增量过程。若 T 中包含最小指标 t_0，则要求 $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立。

定义. 若 $\forall t \in T, \forall \tau$ s.t. $t + \tau \in T$，满足 $X_{t+\tau} - X_t$ 只依赖 τ（不依赖 t），则称 $\{X_t, t \in T\}$ 为平稳增量过程。

一个随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 是平稳增量过程, 等价于 $\forall t_1, t_2 \in T, \forall \tau$ s.t. $t_i + \tau \in T \ (i = 1, 2)$，总有 $X_{t_1+\tau} - X_{t_1}$ 与 $X_{t_2+\tau} - X_{t_2}$ 同分布。

第六章　Poisson 过程

6.1　基本概念

加入引言后，似乎“基本概念”这一节无内容了，有待确认。

6.2　Bernoulli 过程

定义 6.1. 设 $T = \mathbb{N}^*$，$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的随机变量，且 $P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p$，则称 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为参数为 p 的 *Bernoulli* 过程。

定义中提到的 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相互独立，指的是 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，都有 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立。

如果在每个离散时刻 n，将事件 $X_n = 1$ 即“第 n 次试验成功”理解为该时刻有一个顾客到达某商店，则 Bernoulli 过程属于一种到达过程。

本章的主要内容 Poisson 过程也是一种到达过程。

6.3　Poisson 过程

定义 6.2. 称一个随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程，若其满足：

1. $N(t) \in \mathbb{N}$
2. $\forall t > s \geq 0, N(t) \geq N(s)$
3. $N(t) - N(s)$ 为 $(s, t]$ 时间内发生的事件数

定义 6.3. 称一个计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为 *Poisson* 过程，若其满足：

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 有平稳增量性和独立增量性
3. $\exists \lambda > 0$，当 $h \to 0$ 时，$P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4. 当 $h \to 0$ 时，$P(N(h) \geq 2) = o(h)$

利用平稳增量性可知，$\forall t\geq 0, P(N(t+h)-N(t)=1)=\lambda h+o(h), P(N(t+h)-N(t)\geq 2)=o(h)$。

考虑 $(0,t]$ 时间段，将其分成 n 个长度为 $\frac{t}{n}$ 的子区间，当 $n\gg 1$ 时，每个小区间上发生 2 次及以上事件的概率趋于 0，而发生 1 次事件的概率 $p\approx\lambda\frac{t}{n}$，因此近似有 $N(t)\sim B(n,p)$，而我们知道当 $n\to\infty$ 时，$B(n,p)$ 会趋向于 Poisson 分布，即 $N(t)\sim P(\lambda t)$。稍后我们将严格证明这一结论。

称 λ 为 Poisson 过程的强度或到达率。

定理 6.1. 若 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是 Poisson 过程，则 $\forall t\geq 0, N(t)\sim P(\lambda t)$。

证明. 记 $P_n(t)=P(N(t)=n)$ $(n\in\mathbb{N})$，则 $P_0(t+h)=P(N(t+h)=0)=P(N(t+h)-N(t)=0,N(t)=0)=P(N(t+h)-N(t)=0)P(N(t)=0)=(1-\lambda h+o(h))P_0(t)$，即 $\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}$。当 $h\to 0$ 时，$\frac{o(h)}{h}\to 0$，因此 $\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}\to -\lambda P_0(t)$，即 $P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$，由边界条件 $P_0(0)=P(N(0)=0)=1$ 解得 $P_0(t)=e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}$。同理，

$$
\begin{aligned}
&P_n(t+h)\\
=&P(N(t+h)=n)\\
=&P(N(t+h)-N(t)=0,N(t)=n)+P(N(t+h)-N(t)=1,N(t)=n-1)\\
&+P(N(t+h)-N(t)\geq 2,N(t+h)=n)\\
=&P(N(t+h)-N(t)=0)P(N(t)=n)+P(N(t+h)-N(t)=1)P(N(t)=n-1)\\
&+P(N(t+h)-N(t)\geq 2,N(t+h)=n)\\
=&P(N(h)=0)P_n(t)+P(N(h)=1)P_{n-1}(t)+o(h)\\
&(\because P(N(t+h)-N(t)\geq 2,N(t+h)=n)\leq P(N(t+h)-N(t)\geq 2)\\
&=P(N(h)\geq 2)=o(h))\\
=&(1-\lambda h+o(h))P_n(t)+(\lambda h+o(h))P_{n-1}(t)+o(h)\\
=&P_n(t)+\lambda h(P_{n-1}(t)-P_n(t))+o(h)
\end{aligned}
$$

因此 $\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=\lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))+\frac{o(h)}{h}$，当 $h\to 0$ 时，$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}\to\lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))$，即 $P_n'(t)=\lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))$。由数学归纳法可证明 $P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\forall n\in\mathbb{N}$，即 $N(t)\sim P(\lambda t)$。 □

于是我们有 $\mathrm{E}(N(t))=\lambda t,\mathrm{Var}(N(t))=\lambda t$。

下面给出 Poisson 过程的一个等价定义。

定义 6.4. 称一个计数过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为 *Poisson* 过程，若其满足：

1. $N(0)=0$
2. $\{N(t),t\geq 0\}$ 有独立增量性
3. $\exists\lambda>0,\forall t>s\geq 0,n\in\mathbb{N},P(N(t+s)-N(s)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$, 即 $N(t+s)-N(s)\sim P(\lambda t)$

记 T_1 为首次到达时刻，则 $P(T_1\leq t)=1-P(T_1>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$，因此 $T_1\sim Exp(\lambda)$。再记 T_2 为第二次到达时刻，则在 $T_1=t_0$ 条件下，T_2-T_1 的分布 $P(T_2-T_1\leq t)=P(T_2-t_0\leq t)=1-P(T_2-t_0>t)=1-P(N(t_0+t)-N(t_0)=0)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$，因此 $T_2-T_1\sim Exp(\lambda)$，且 T_2-T_1 与 T_1 相互独立。一般地，记 T_i 为第 i 次到达时刻，$W_i=T_i-T_{i-1}$ 为相邻两次到达间隔时间，约定 $T_0=0$，则 $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立且 $W_i\sim Exp(\lambda)$，而 $T_k=\sum_{i=1}^{k}W_i$，称 T_k 服从参数为 k 和 λ 的 *Gamma* 分布，记作 $T_k\sim\Gamma(k,\lambda)$，$\mathrm{E}(T_k)=\frac{k}{\lambda},\mathrm{Var}(T_k)=\frac{k}{\lambda^2}$。$T_k$ 服从的分布又称之为 *Erlang* 分布。事实上，Erlang 分布是 Gamma 分布在 $k\in\mathbb{N}^*$ 时的特例。$\Gamma(1,\lambda)$ 就是 $Exp(\lambda)$。

利用 $\forall t\geq 0,P(T_k\leq t)=P(N(t)\geq k)=1-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$，求导可得 T_k 的 PDF 为 $f_{T_k}(t)=\frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}(t\geq 0)$。

Poisson 过程还有一个等价定义如下。

定义 6.5. 称一个计数过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为 *Poisson* 过程，若其满足：

1. $N(0)=0$
2. $\exists\lambda>0$，各相邻两次到达间隔时间 $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立且 $W_i\sim Exp(\lambda)$

这提示我们，生成 Poisson 过程的一种方法便是从独立同分布的 $Exp(\lambda)$ 中抽取相邻两次到达间隔时间，据此给出各到达时刻，即可确定一 Poisson 过程。

例 6.1. 拨打服务热线时，被告知除了正在接受服务的人以外，前面还有 55 人在等待。假设呼叫者离开服从 Poisson 过程，$\lambda=2$ 人/min，则平均等待时间为 $T_{56}=\sum_{i=1}^{56}W_i$，其中 $W_i\sim Exp(2)$ 且相互独立，因此平均等待时间为 $\mathrm{E}(T_{56})=\frac{56}{2}=28$ min，且 $\mathrm{Var}(T_{56})=\frac{56}{4}=14\ \mathrm{min}^2$。等待时间超过 30 分钟的概率为 $P(T_{56}>30)=\int_{30}^{+\infty}f_{T_{56}}(t)\mathrm{d}t$。根据 CLT，近似有 $T_{56}\sim N(28,14)$，故有 $P(T_{56}>30)\approx P(Z>\frac{30-28}{\sqrt{14}})=1-\Phi(\frac{2}{\sqrt{14}})$，其中 $Z\sim N(0,1)$。

6.4 Poisson 过程的进一步性质

首先介绍 Poisson 过程的分裂。

定理 6.2. 假设某 Poisson 过程每次发生的事件分为 I 类和 II 类，每个事件独立地以概率 p 成为 I 类事件，以概率 $1-p$ 成为 II 类事件，记 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为 $(0,t]$ 内 I 类和 II 类事件的个数，则

1. $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
2. $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 均为 Poisson 过程，且到达率分别为 λp 和 $\lambda(1-p)$
3. 这两个过程相互独立

证明. 仅对第二条给出简要证明。$\forall h > 0, P(N_1(h) = 1) = P(N_1(h) = 1|N(h) = 1)P(N(h) = 1) + P(N_1(h) = 1|N(h) \geq 2)P(N(h) \geq 2) = p(\lambda h + o(h)) + o(h) = \lambda ph + o(h)$，而 $P(N_1(h) \geq 2) \leq P(N(h) \geq 2) = o(h)$，因此 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程，且到达率为 λp。同理可证 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程，且到达率为 $\lambda(1-p)$。 □

例 6.2. 设 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立同分布且服从 $Exp(\lambda)$，N 服从参数为 p 的几何分布，且与 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 相互独立，令 $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$。为求出 Y 的分布，设每次事件都独立地以概率 p 成为“特殊事件”，则 N 可视为首次发生“特殊事件”时的事件总数，Y 为特殊事件首次发生的时刻。由定理 **??**，特殊事件的发生是一个 Poisson 过程，到达率为 λp，因此 $Y \sim Exp(\lambda p)$。

下面介绍 Poisson 过程的合并。

定理 6.3. 若 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是两个独立的 Poisson 过程，且到达率分别为 λ_1 和 λ_2，则 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 也是 Poisson 过程，且到达率为 $\lambda_1 + \lambda_2$。

证明.

1. 显然有 $N(0) = 0$。
2. 由 $N(t+s) - N(t) = (N_1(t+s) - N_1(t)) + (N_2(t+s) - N_2(t))$ 易验证独立增量性。
3. 由于 $N_i(t+s) - N_i(s) \sim P(\lambda_i t), i = 1, 2$ 且独立，因此 $N(t+s) - N(s) \sim P((\lambda_1 + \lambda_2)t)$。

□

定理 6.4. 记定理 **??** 中的两类事件的首达时刻分别为 $T^{(1)}$ 和 $T^{(2)}$，则 $P(T^{(1)} < T^{(2)}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$。

例 6.3. 设 $X \sim Exp(\lambda)$，而在 $X = x$ 的条件下，$Y - 1 \sim P(x)$。为求出 Y 的分布，首先考虑到达率为 λ 的“成功”过程，则 X 可视为首次成功的时刻。再考虑到达率为 1 的“失败”过程，则 $(0, x]$ 内“失败”的次数服从 $P(x)$，因此 $Y - 1$ 可视为首次“成功”之前“失败”的次数，即 Y 为首次“成功”时的事件总数。合并两个过程，得到一个参数为 $\lambda + 1$ 的 Poisson 过程，且每个事件属于“成功”的概率为 $p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$，因此 Y 服从参数为 p 的几何分布，即 $P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$。

最后介绍在 Poisson 过程在条件作用下的性质。

记 T_i 为第 i 次到达时刻，计算可得对于 $0 \leq s \leq t$，条件概率 $P(T_1 \leq s|N(t) = 1) = \frac{P(T_1 \leq s, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(s)=1, N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(s)=1)P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\frac{(\lambda s)^1}{1!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$，即在 $N(t) = 1$ 的条件下，$T_1 \sim U(0, t)$。

一般地，我们有如下定理。

定理 6.5. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程，则 $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2$，在 $N(t_2) = n$ 的条件下，有 $N(t_1) \sim B(n, \frac{t_1}{t_2})$。

证明. 由 Poisson 过程性质知，$N(t_1) \sim P(\lambda t_1)$，而 $N(t_2) - N(t_1) \sim P(\lambda(t_2 - t_1))$，且 $N(t_1)$ 和 $N(t_2) - N(t_1)$ 相互独立。据此，$\forall 0 \leq k \leq n$，有

$$\begin{aligned}
&P(N(t_1) = k | N(t_2) = n) \\
=&\frac{P(N(t_1) = k, N(t_2) = n)}{P(N(t_2) = n)} \\
=&\frac{P(N(t_1) = k) P(N(t_2) - N(t_1) = n - k)}{P(N(t_2) = n)} \\
=&\frac{\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{\frac{(\lambda t_2)^n}{n!} e^{-\lambda t_2}} \\
=&\tbinom{n}{k} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

事实上，上述讨论适用于任何长度为 t_1 的子区间。因此，以 $N(t_2) = n$ 为条件，相当于在 $(0, t_2]$ 上以均匀分布随机放置 n 个到达点，第 i 次到达时刻就是这 n 个独立且服从 $U(0, t_2)$ 的随机变量的第 i 个次序统计量。

一般地，考虑随机样本 $X_1, \cdots, X_n$，将它们从小到大排序，记为 $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$，则称 $X_{(i)}$ 为 $X_1, \cdots, X_n$ 的第 i 个次序统计量，$X_{(1)} = \min\{X_1, \cdots, X_n\}, X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$。严谨地说，$X_{(1)}$ 定义为 $\forall \omega \in \Omega, X_{(1)}(\omega) = \min\{X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\}$，其余同理。

命题 6.1. 若连续型随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，且 CDF 为 $F(x)$，PDF 为 $f(x)$，则

1. $X_{(k)}$ 的 PDF 为 $f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} f(x)$
2. $(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})$ 的联合 PDF 为 $f_{X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}}(x_1, \cdots, x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n) \mathbf{1}_{x_1 \leq \cdots \leq x_n}$

证明. 考虑小区间 $(x, x + \mathrm{d}x]$，当 $\mathrm{d}x$ 充分小时，有两个及以上随机变量落入其中的概率极小，因此事件 $X_{(k)} \in (x, x + \mathrm{d}x]$ 的概率近似为 $\binom{n}{k-1, 1, n-k} F^{k-1}(x) f(x) \mathrm{d}x (1 - F(x))^{n-k}$，即有 $(k-1)$ 个随机变量落入 $(-\infty, x]$，1 个随机变量落入 $(x, x + \mathrm{d}x]$，$(n-k)$ 个随机变量落入 $(x + \mathrm{d}x, +\infty)$ 的概率。于是 $X_{(k)}$ 的 PDF 为 $f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k} f(x)$。类似讨论可知，$(X_{(1)}, \cdots, X_{(n)})$ 的联合 PDF 为 $\binom{n}{1, \cdots, 1} f(x_1) \cdots f(x_n) \mathbf{1}_{x_1 \leq \cdots \leq x_n} = n! f(x_1) \cdots f(x_n) \mathbf{1}_{x_1 \leq \cdots \leq x_n}$。

□

定理 6.6. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程，则在 $N(t) = n$ 的条件下，事件发生时刻 $T_1, \cdots, T_n$ 的联合 PDF 为 $f_{T_1, \cdots, T_n | N(t)}(t_1, \cdots, t_n | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq t}$。

证明. 直接应用命题 ?? 的结论即得。我们另给出一种直接的证明。

由于 $\{T_1 = t_1, T_2 = t_2, \cdots, T_n = t_n, N(t) = n\}$ 等价于 $\{W_1 = t_1, W_2 = t_2 - t_1, \cdots, W_n = t_n - t_{n-1}, W_{n+1} > t - t_n\}$，其中 W_i 为相邻两次到达间隔时间，且 $W_1, \cdots, W_n, W_{n+1}$ 相互独立，且 $W_i \sim Exp(\lambda)$。因此

$$\begin{aligned}
&f_{T_1,\cdots,T_n|N(t)}(t_1,\cdots,t_n|N(t)=n)\\
=&\frac{\lambda e^{-\lambda t_1}\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdots\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\cdot e^{-\lambda(t-t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}}\mathbf{1}_{0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t}\\
=&\frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t}.
\end{aligned}$$

□

这个定理的证明让我有点疑惑。难道不需要取 n 个小区间严谨讨论吗？为什么可以直接用 $W_1, \cdots, W_n$ 的 PDF？

这提示我们生成 Poisson 过程的另一种方法。首先从 $P(\lambda t)$ 中采样 n 为 $(0, t]$ 内事件发生数，然后从 $(0, t]$ 中均匀采样 n 个点，即取 $U_1, \cdots, U_n$ 独立同分布且服从 $U(0, t)$，令 $T_k = U_{(k)}$ 为各事件发生时刻，即可确定一 Poisson 过程。

例 6.4. 乘客到达火车站可视为一 Poisson 过程，设到达率为 λ。火车在 t 时刻出发，则 $(0, t]$ 内到达的乘客总等待时间的期望为 $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)))$。而 $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n) = nt - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}T_i|N(t)=n) = nt - \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}U_i) = nt - n\cdot\frac{t}{2} = \frac{n}{2}t$，因此 $\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)) = \mathrm{E}(\frac{N(t)}{2}t) = \frac{\lambda t^2}{2}$。

6.5 Poisson 过程的推广

首先介绍非齐次 Poisson 过程。

定义 6.6. 称一个计数过程 $\{N(t), t \ge 0\}$ 为到达率 $\lambda(t) > 0$ 的*非齐次 Poisson 过程*，若其满足：

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \ge 0\}$ 有独立增量性
3. $\forall t \ge 0, P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4. $\forall t \ge 0, P(N(t+h) - N(t) \ge 2) = o(h)$

令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$，可以证明 $P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(m(t+s)-m(s))^n}{n!}e^{-(m(t+s)-m(s))}$。

然后介绍复合 Poisson 过程。

定义 6.7. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是 Poisson 过程，$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 独立同分布且与 $\{N(t), t \geq 0\}$ 独立，记 $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$，则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一复合 *Poisson* 过程。

最后介绍更新过程。我们知道，Poisson 过程的相邻两次到达间隔时间服从参数为 λ 的指数分布。如果将其推广为一般分布，就得到了更新过程。

第七章　离散时间 Markov 链

7.1　基本概念