

# 概率论与随机过程

授课教师：唐宏岩

# 前言

本讲义基于清华大学数学系唐宏岩老师于 2023 - 2024 学年秋季学期开设的《概率论与随机过程》课程，用于辅助同学们课后复习。

由于时间与能力所限，本讲义可能不会出现大段的文字论述（但会包含重要的定义、定理与公式等）。但是，对许多基本概念的深入理解是非常有必要的，同学们可以在浏览时检查自己是否能够回忆起课上的内容，对掌握不够扎实的地方，鼓励大家查阅参考书或在课程群提问以解决问题。

由于此为教学团队第一年尝试整理讲义，诸如格式编排、内容完整性方面可能存在许多不足，欢迎大家联系我提出宝贵的意见与建议。

曹子尧

2023 年 9 月

# 目录

前言	i
第一部分 初等概率论	1
第一章 事件的概率	2
1.1 概率的发展史	2
1.2 随机试验与事件	2
1.3 事件的运算	3
1.4 概率的几种解释	3
1.5 概率的公理化定义	3
1.6 条件概率	5
1.7 事件的独立性	6
1.8 Bayes 公式	6
第二章 随机变量	8
2.1 一维随机变量	8
2.2 离散随机变量	10
2.3 常见离散分布	11
2.4 连续随机变量	12
2.5 常见连续分布	12
2.6 随机变量的函数	14
第三章 联合分布	16
3.1 随机向量	16
3.2 离散分布	16
3.3 连续分布	17

3.4	边际分布	17
3.5	条件分布	18
3.6	独立性	18
3.7	随机向量的函数	19
<b>第四章</b>	<b>随机变量的数字特征</b>	<b>22</b>
4.1	期望	22
4.2	分位数	22
4.3	方差	23
4.4	协方差与相关系数	23
4.5	矩	24
4.6	矩母函数	25
4.7	条件期望	27
<b>第五章</b>	<b>不等式与极限定理</b>	<b>29</b>
5.1	概率不等式	29
5.2	大数定律	30
5.3	中心极限定理	31
<b>第二部分</b>	<b>随机过程</b>	<b>33</b>
<b>第六章</b>	<b>Poisson 过程</b>	<b>36</b>
6.1	基本概念	36
6.2	到达时间与到达间隔	37
6.3	进一步性质	38
6.4	Poisson 过程推广	41
<b>第七章</b>	<b>离散时间 Markov 链</b>	<b>42</b>
7.1	基本概念	42
7.2	Chapman-Kolmogorov 方程	44
7.3	状态分类	45
7.4	稳态性质	48
7.5	可逆性	51
7.6	MCMC	51

---

<b>第八章 Brown 运动</b>	<b>53</b>
8.1 基本概念 . . . . .	53
8.2 简单性质 . . . . .	53
8.3 首中时与最大值 . . . . .	55
8.4 变形与推广 . . . . .	56
8.5 Itô 积分 . . . . .	57

# **第一部分**

## **初等概率论**

# 第一章 事件的概率

## 1.1 概率的发展史

赌博中的 de Méré's Problem: 连续掷一个均匀六面骰 4 次, 获得至少一次 “6” 的概率为  $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.5177$ ; 而连续掷两个均匀六面骰 24 次, 获得至少一次 “对 6” 的概率为  $1 - (35/36)^{24} \approx 0.4914$ 。

Pascal 和 Fermat 的通信中使用初等数学的方法, 首创了概率论相当多的数学理论, 虽然当时没有总结成通用的定理。

Laplace 创立了采用分析方法的分析概率论。

Kolmogorov 利用测度论方法发展了现代概率理论。

## 1.2 随机试验与事件

**定义 1.1.** 概率论中的随机试验指的是符合下面两个特点的试验:

1. 不能预先确知结果
2. 可以预测所有可能的结果

**定义 1.2.** 样本空间是指一个试验的所有可能结果的集合, 常用  $\Omega$  表示。

**定义 1.3.** 事件是样本空间的一个良定义子集。

一次随机试验中, 一个事件可能发生或不发生。

下面是一些常见的事件:

1. 全事件  $\Omega$  (必然事件)
2. 空事件  $\emptyset$  (不可能事件)
3. 基本事件  $\{a\}$ , 其中  $a \in \Omega$ , 即仅包含单一试验结果的事件

## 1.3 事件的运算

由于事件是集合，因此事件之间可以进行集合之间的运算，如：

1. 余  $A^c = \Omega \setminus A$
2. 和  $A + B = A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
3. 差  $A - B = A \setminus B$
4. 积  $AB = A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

集合的 De Morgan's laws 也适用于事件： $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c$ 。

事件的运算像集合的运算一样，可以用 Venn 图来表示。

## 1.4 概率的几种解释

对于概率这一数学概念，人们形成了几种从不同角度出发的解释：

1. 古典解释：基于等可能性的解释
2. 频率解释：基于大量重复试验的解释（频率学派采用的解释）
3. 主观解释：概率是一种对确信程度的度量（Bayes 学派采用的解释）

## 1.5 概率的公理化定义

用  $2^\Omega$  表示  $\Omega$  的幂集，即  $\Omega$  的所有子集组成的集合。

**定义 1.4.** 事件集类  $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$  必须满足所谓  $\sigma$ -代数的性质：

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ （对补运算的封闭性）
3.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$ （对可列并的封闭性）

**例 1.1.**  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ，以下是一些合法的事件集类：

1.  $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega$
2.  $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$
3.  $\mathcal{F}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$

**定义 1.5.** (Kolmogorov) 概率函数  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  是满足以下三条公理的映射：

1.  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
2.  $P(\Omega) = 1$



3.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}^*, A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (加法公理/可列可加性)

称  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是一个概率空间。

**命题 1.1.** 关于概率空间, 有如下性质:

1.  $P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$
2.  $P(\emptyset) = 0$
3.  $P(A) + P(A^c) = 1$
4.  $A_i \in \mathcal{F}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, A_i A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$  (有限可加性)

5.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$  (称事件  $A$  蕴涵事件  $B$ )

$$6. P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} A_{i_2}) \quad (\text{容斥公式})$$

$$+ \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

特别地,  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 。

**例 1.2.** (配对问题)

有  $n$  个人, 每人有一顶帽子。现将所有帽子放到一起, 再随机分配给每人一顶, 考虑无人拿到自己的帽子的概率。

为此, 设事件  $A_i$  为“第  $i$  个人拿到自己的帽子”, 则  $P(A_i) = 1/n$ 。

利用容斥公式, 至少一人拿到自己帽子的概率为

$$P(A_1 + \dots + A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} A_{i_2})$$

$$+ \dots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

其中  $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!} \binom{n}{r} = \frac{1}{r!}$ , 即  $P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{r+1} \frac{1}{r!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ 。

所求概率  $P_n = 1 - P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}) \rightarrow e^{-1} (n \rightarrow +\infty)$ 。

思考: 恰有  $k$  个人拿到自己的帽子的概率?

## 1.6 条件概率

**定义 1.6.** 若  $P(B) > 0$ , 定义条件概率  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 。

通常, 计算条件概率的方法有两种:

1. 在缩小 (受限) 的样本空间 (要求事件  $B$  发生) 上, 考虑事件  $A$  发生的概率
2. 根据定义计算

一种常用的形式是  $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ , 这可以视作是求解两个事件的积的概率的方法 (乘法法则)。

**例 1.3.** 掷一个均匀六面骰,  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ , 则  $P(A) = 4/6$ ,  $P(B) = 3/6$ ,  $P(AB) = 2/6$ ,  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 2/3$ 。

**例 1.4.** 袋子中有 8 个红球和 4 个白球, 无放回地取出两个球, 利用组合数可知, 两个都是红球的概率为  $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$ 。

用条件概率可以简化计算:  $P(R_1 R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11}$ 。

更一般地, 有  $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ , 常用于序贯发生的一系列事件的积的概率求解。

**例 1.5.** 回忆上一节的“配对问题”。我们有

$$\begin{aligned} & P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}) \\ &= P(A_{i_1})P(A_{i_2}|A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r}|A_{i_1} \cdots A_{i_{r-1}}) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{n-(r-1)} \\ &= \frac{(n-r)!}{n!}. \end{aligned}$$

**命题 1.2.** 对于给定的事件  $B$ ,  $P(\cdot|B) : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  是概率函数, 即  $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$  仍是概率空间。

对于上述命题的证明, 只需验证  $P(\cdot|B)$  满足概率的三条公理即可。

这提示我们, 条件概率也是一种概率, 如果将  $P(A)$  称为观察到事件  $B$  之前  $A$  的“先验概率”, 则  $P(A|B)$  就是相应的“后验概率”。

一个常见的迷思是: 观测到事件  $A$  已经发生后, 是否可以说事件  $A$  发生的概率  $P(A) = 1$ ? 学过条件概率之后, 我们知道答案是否定的, 实际上是后验概率  $P(A|A) = 1$ 。

## 1.7 事件的独立性

**定义 1.7.** 若  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 则称事件  $A, B$  相互独立。

如果  $P(B) > 0$ , 我们注意到  $A, B$  独立等价于  $P(A|B) = P(A)$ 。

**命题 1.3.** 若  $A, B$  独立, 则  $A^c, B$  独立。

**定义 1.8.** 若  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ , 且  $A, B, C$  两两独立, 则称事件  $A, B, C$  独立。

注意, 仅有  $A, B, C$  两两独立, 不能推出三者独立。

**定义 1.9.** 若对于事件列  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ , 任意取有限个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ , 都有  $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r})$ , 则称  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  相互独立。

**例 1.6.** 每周开奖的彩票, 各次中奖率均为  $10^{-5}$  且独立, 问连续十年 (520 周) 不中奖的概率? 令事件  $A_i$  为第  $i$  周不中奖, 则  $P(A_i) = 1 - 10^{-5}$ , 故  $P(A_1 \cdots A_{520}) = (1 - 10^{-5})^{520} \approx 0.9948$ 。

**定义 1.10.** 若事件  $A, B, E$  满足  $P(AB|E) = P(A|E)P(B|E)$ , 则称  $A, B$  关于  $E$  条件独立。

注意, 条件独立性和独立性之间没有蕴涵关系。

## 1.8 Bayes 公式

**定理 1.1.** (全概率公式)

设  $\{B_i\}$  是  $\Omega$  的一个分割, 即

1.  $\sum_i B_i = \Omega$
2.  $B_i B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
3.  $P(B_i) > 0, \forall i$

则  $P(A) = P(\sum_i (AB_i)) = \sum_i P(AB_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$ 。

注:  $\{B_i\}$  可以是有限集合, 或可数无穷集合。

**例 1.7.** 对于调查问卷中的敏感问题 (如 “你是否有过某病史”), 被调查者可能会有所顾虑而做出虚假的回答。为保护被调查者的隐私, 同时取得其信任, 考虑引入一个 “保护性问题”, 即不具有敏感性的问题 (如 “你是否会游泳”), 并让被调查者以抛硬币的方式, 随机抽取一个问题回答。这样, 抽到敏感问题的、确有过该病史的被调查者在回答 “是” 时也无须有病史暴露之虞。

设人群中, 敏感问题答案为 “是” 的比例为  $p$  (未知), 保护性问题答案为 “是” 的比例为  $q$  (假设已知), 则若收集到  $n$  个被调查者的结果, 其中  $k$  个为 “是”, 便有  $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q \approx \frac{k}{n}$ , 可以据此得到  $p$  的估计。

**定理 1.2.** (Bayes 公式 / Bayes 准则)

设  $\{B_i\}$  是  $\Omega$  的一个分割, 则  $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$ 。

**例 1.8.** (假阳性悖论)

对于一种流行病,  $A$  表示一个人检查呈阳性,  $B$  表示此人确实患病。

设  $P(B) = 10^{-4}$ ,  $P(A|B) = 0.99$ ,  $P(A|B^c) = 10^{-3}$ ,

则一个检查呈阳性的人真的患病的概率仅为  $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)} \approx 9\%$ 。

如果再次检测仍呈阳性, 且两次检测效率不变, 结果彼此独立, 则此人真的患病的概率为

$P(B|A_1A_2) = \frac{P(A_1A_2|B)P(B)}{P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|B^c)P(B^c)} = \frac{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)}{P(A_1|B)P(A_2|B)P(B)+P(A_1|B^c)P(A_2|B^c)P(B^c)} \approx 99\%$ 。

## 第二章 随机变量

### 2.1 一维随机变量

**定义 2.1.** 随机变量是样本空间上的实值函数。

注意，上述定义是不严格的。

更严谨的定义：若对于可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$  和函数  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，有  $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ ，则称  $X$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上的随机变量。其中“可测空间”是指  $\mathcal{F}$  是样本空间  $\Omega$  上的  $\sigma$ -代数。此处不要求“概率空间”，即随机变量的定义并不依赖概率测度  $P$  的存在。

**例 2.1.** 下表展示了两个随机变量。其中“像集”即  $\{X(\omega) | \omega \in \Omega\}$ 。

试验	样本空间 $\Omega$	随机变量 $X$	像集
随机调查 50 人对某议题支持与否	$\Omega_1 = \{0, 1\}^{50}$	$X_1 = \text{“1”的个数}$	$\{0, 1, \dots, 50\}$
随机抽取一名北京成年市民	$\Omega_2 = \text{所有北京成年市民之集}$	$X_2 = \text{其年收入}$	$\mathbb{R}$

注意，我们经常用“ $X_1 = 20$ ”、“ $X_2 > 100000$ ”等简化的记号来表示事件。例如，前者实际上指的是  $\{\omega \in \Omega_1 | X_1(\omega) = 20\}$ 。

诸如此类的试验结果集合需是事件，这体现出前述的随机变量严谨定义的意义。事实上，如果满足该严谨定义，则对于任意可测集  $I \subset \mathbb{R}$ ，都有  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\} \in \mathcal{F}$ 。

随机变量是试验结果的数值摘要，起到一种概括的作用。随机变量的“随机”要素来自于样本点  $\omega \in \Omega$  的随机选择。在实际应用中，随机变量常常比样本空间具有更直观的意义。

随机变量可以分为：

1. 离散型：至多可数多个取值
2. 连续型：区间型取值（非严格定义）
3. 其他

“其他”中的一个非常特殊的子类是所谓的混合型随机变量。

**定义 2.2.** 对于随机变量  $X$  和  $\mathbb{R}$  的可测子集  $I$  (例如  $I = (a, b]$ ), 令  $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\} \subset \Omega$  为  $I$  的原像集, 定义记号  $P(X \in I)$  表示“ $X$  的取值在  $I$  中的概率”, 其值为  $P(X^{-1}(I))$ 。

例如,  $P(a < X \leq b) = P(\{\omega | X(\omega) \in (a, b]\})$ 。

**定义 2.3.**  $F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$  称为随机变量  $X$  的累积分布函数 (Cumulative Distribution Function, CDF)。下标  $X$  在无歧义时可省略。

我们有  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ 。

**例 2.2.** 令  $X$  表示掷两个均匀六面骰所得的点数和, 则  $X$  的分布表 (详见 2.2 节) 为

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

相应的 CDF 见图 2.1。

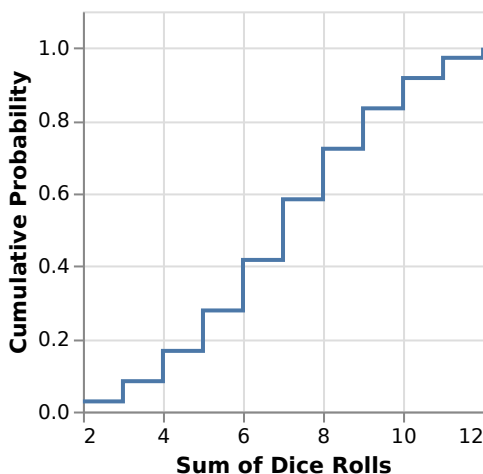


图 2.1:  $X$  的 CDF 图象

注: 由于软件限制, 各个阶跃点的绘制方式不太规范, 实际上从其左侧逼近应该为一个空圈, 例如  $F(3) = 3/36$  而不是  $1/36$ 。另外,  $\forall x < 2, F(x) = 0; \forall x \geq 12, F(x) = 1$ 。

**命题 2.1.** CDF 的性质:

1.  $F$  单调递增 (未必严格单调递增)
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3.  $F$  右连续

可以证明, 上述三条性质是任意函数  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  成为 CDF 的充要条件。

思考: 如果将 CDF 的定义改为  $P(X < x)$ , 上述性质会如何变化?

**命题 2.2.** 若  $X, Y$  为随机变量, 则  $aX + bY, XY, X/Y$  (需  $Y \neq 0$ ) 都是随机变量。一般地, 若  $g$  为可测函数, 则  $g(X, Y)$  是随机变量。

**定义 2.4.** 设  $X_1, X_2$  的 CDF 分别为  $F_1, F_2$ , 称  $X_1$  与  $X_2$  同分布, 若  $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = F_2(x)$ 。

**命题 2.3.** 随机变量  $X_1$  与  $X_2$  同分布的一个充要条件是  $\forall$  可测集  $I \subset \mathbb{R}, P(X_1 \in I) = P(X_2 \in I)$ 。

注意, 同分布不等价于“同变量”, 即两个同分布的变量的取值不一定恒等。

**例 2.3.** 掷一次硬币,  $X$  表示正面向上次数,  $Y$  表示反面向上次数, 显然  $X$  与  $Y$  同分布, 但取值不等。

## 2.2 离散随机变量

**定义 2.5.** 离散随机变量  $X$  的概率质量函数 (Probability Mass Function, PMF)  $f$  是指该随机变量取各个可能值的概率, 即  $f(x) = P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}$ 。可以用分布表的形式展示各个可能取值与概率的对应关系。

**命题 2.4.** 如果离散随机变量  $X$  的所有可能取值为  $\{x_i\}$ , 则  $X$  的 PMF 具有如下性质:

1.  $f(x_i) = p_i \geq 0, \forall i$
2.  $\sum_i p_i = 1$
3.  $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

**定义 2.6.** 离散随机变量  $X$  的期望定义为  $E(X) = \sum_i x_i p_i$ 。

称  $X$  的期望存在, 当且仅当  $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$ 。

当期望存在时, 其方差定义为  $\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

当方差有限时, 称其算术平方根为  $X$  的标准差, 记作  $\text{SD}(X)$ 。

注意, 通常我们所说的一个随机变量的均值指的就是期望。

标准化指的是对  $X$  作线性变换  $\frac{X - \mu}{\sigma}$ , 其中  $\mu$  和  $\sigma$  分别为  $X$  的期望和标准差, 得到均值为 0, 标准差为 1 的随机变量。

对于可测函数  $g$ ,  $g(X)$  也是随机变量, 其期望  $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i$ 。

期望反映了随机变量的集中趋势, 而方差反映了其分散程度。

## 2.3 常见离散分布

**定义 2.7.** 称一个随机变量  $X$  服从 *Bernoulli* 分布, 若  $\exists p \in (0, 1)$ ,  $X$  的取值集合为  $\{0, 1\}$ , 且  $P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$ . 记作  $X \sim B(p)$ .

$B(p)$  中的  $p$  称为该 *Bernoulli* 分布的参数。后续介绍的其他分布同理。

常将两种取值分别称为“成功”和“失败”。

计算可得, 若  $X \sim B(p)$ , 则  $E(X) = p, \text{Var}(X) = p(1 - p)$ 。

**定义 2.8.** 称一个随机变量  $X$  服从二项分布, 若  $\exists N \in \mathbb{N}^*, p \in (0, 1)$ ,  $X$  的取值集合为  $\{0, 1, \dots, N\}$ , 且  $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k} (k \in \{0, 1, \dots, N\})$ . 记作  $X \sim B(N, p)$ 。

常将  $k$  理解为“ $N$  次独立 *Bernoulli* 试验中的成功次数”。

计算可得, 若  $X \sim B(N, p)$ , 则  $E(X) = Np, \text{Var}(X) = Np(1 - p)$ 。

**定义 2.9.** 称一个随机变量  $X$  服从 *Poisson* 分布, 若  $\exists \lambda > 0$ ,  $X$  的取值集合为  $\mathbb{N}$ , 且  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k \in \mathbb{N})$ . 记作  $X \sim P(\lambda)$ 。

计算可得, 若  $X \sim P(\lambda)$ , 则  $E(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda$ 。

对 *Poisson* 分布的一种常见理解是“一段时间内某个小概率事件发生的次数”所服从的分布。例如, 观察时间  $(0, 1]$  内某路口的交通事故数  $X$ , 将  $(0, 1]$  区间等分成  $n$  个小区间, 即  $l_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] (i = 1, 2, \dots, n)$ 。考虑到  $n$  很大时, 每个区间的长度很小, 作如下假设:

1. 每段区间内, 至多发生一次事故
2.  $l_i$  上发生一次事故的概率与区间长度  $(1/n)$  成正比, 为  $p = \lambda/n$
3. 各区间内是否发生事故彼此独立

则  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (n \rightarrow +\infty)$ , 即  $X \sim P(\lambda)$ 。

**例 2.4.** 设某医院平均每天出生婴儿数为  $\lambda$ , 则接下来  $t$  天内出生婴儿数服从参数为  $t\lambda$  的 *Poisson* 分布。

对于一般的二项分布  $X \sim B(N, p)$ , 若  $p$  很小,  $N$  很大, 而  $\lambda = Np$  不太大, 则近似有  $X \sim P(\lambda)$ , 且近似误差不超过  $\min\{p, Np^2\}$ 。

进一步, 若  $N$  次 *Bernoulli* 试验并非严格独立, 但满足弱相依条件, 则 *Poisson* 分布仍为一种较好的近似。

**例 2.5.** (配对问题)

$A_i$  表示第  $i$  个人拿到自己的帽子, 则  $P(A_i) = 1/n, P(A_i | A_j) = \frac{1}{n-1} (j \neq i)$ , 当  $n$  很大时,  $1/n$



和  $\frac{1}{n-1}$  很接近, 可以认为满足弱相依条件。

记  $X$  为拿到自己帽子的人数, 则  $X$  近似服从参数为  $\lambda = np = n \cdot \frac{1}{n} = 1$  的 Poisson 分布, 即  $P(X = k) \approx \frac{e^{-1}}{k!}$ 。

我们用常规做法检查这种近似是否合理。首先考虑指定的某  $k$  人, 记事件  $E$  表示这  $k$  人拿到自己的帽子, 事件  $F$  表示其余  $(n - k)$  人未拿到自己的帽子, 则  $P(EF) = P(E)P(F|E) = \frac{(n-k)!}{n!} \cdot P_{n-k}$ , 其中  $P_{n-k}$  为  $(n - k)$  人随机拿帽子时无人拿对的概率。那么  $P(X = k) = \binom{n}{k} P(EF) = \frac{1}{k!} P_{n-k} \rightarrow \frac{e^{-1}}{k!} (n \rightarrow +\infty)$ 。这说明前述的近似是较好的。

## 2.4 连续随机变量

**定义 2.10.** 对随机变量  $X$ , 若存在  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , 使得  $\forall$  可测集  $I \subset \mathbb{R}$ , 都有  $P(X \in I) = \int_I f(x)dx$ , 则称  $X$  为连续型随机变量,  $f$  称为其概率密度函数 (Probability Density Function, PDF)。

**命题 2.5.** 连续随机变量  $X$  的 PDF 具有如下性质:

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv 1$
2.  $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
3.  $P(X = a) \equiv 0, \forall a \in \mathbb{R}$
4. 若  $f$  在  $x_0$  处连续, 则  $P(x_0 - \delta < X < x_0 + \delta) = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(t)dt \approx f(x_0) \cdot 2\delta$
5.  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  连续, 且若  $f$  在  $x$  处连续, 有  $F'(x) = f(x)$
6. PDF 若存在, 则不唯一 (可以修改其在任意零测集上的值, 得到不同的 PDF)

**定义 2.11.** 连续随机变量  $X$  的期望定义为  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 。

称  $X$  的期望存在, 当且仅当  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < +\infty$ 。

当期望存在时, 其方差定义为  $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$ 。

当方差有限时, 称其算术平方根为  $X$  的标准差, 记作  $\text{SD}(X)$ 。

对于可测函数  $g$ ,  $g(X)$  也是随机变量, 其期望  $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 。

## 2.5 常见连续分布

**定义 2.12.** 称一个连续型随机变量  $X$  服从均匀分布, 若其 PDF 为  $f(x) = \frac{1}{b-a}(x \in (a, b))$ ,  $f$  在其余各处取 0。记作  $X \sim U(a, b)$ 。

常将  $X \sim U(0, 1)$  称为随机数。

计算可得, 若  $X \sim U(a, b)$ , 则  $E(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ 。

**定义 2.13.** 称一个连续型随机变量  $X$  服从正态分布, 若其 PDF 为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  ( $\sigma > 0$ )。记作  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

计算可得, 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $E(X) = \mu$ ,  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ 。

著名的“经验法则”见图 2.2。



图 2.2: 经验法则

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的充要条件是  $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。 $N(0, 1)$  称为标准正态分布。

**定义 2.14.** 称一个连续型随机变量  $X$  服从指数分布, 若其 PDF 为  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ( $\lambda > 0, x > 0$ ),  $f$  在其余各处取 0。记作  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。

指数分布常用于刻画等待时间、寿命等。

计算可得, 若  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 则  $E(X) = 1/\lambda$ ,  $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$ 。

指数分布有另一种符号约定, 以  $\beta = 1/\lambda$  为参数, 一些数学软件可能采用此种约定。

指数分布的 CDF 为  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ ), 所谓的“尾概率”为  $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$  ( $x > 0$ )。

**例 2.6.** 设某医院平均每天出生婴儿数为  $\lambda$ ，现在观察到一名婴儿出生，则接下来  $t$  天内有婴儿出生的概率为  $P(X \leq t)$ ，其中  $X$  表示到下一个婴儿出生所需等待的时间。

记  $N(t)$  为  $t$  天内出生婴儿数，我们已经知道  $N(t) \sim P(t\lambda)$ ，则  $P(X > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ ，故  $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ，即  $X$  服从参数为  $\lambda$  的指数分布。

我们从另一个角度理解指数分布。

首先引入失效率或危险率的概念。设  $X$  为连续型随机变量（表示某种零件的寿命），其 CDF 为  $F(x)$ ，且  $F(0) = 0$ 。考虑条件概率  $P(x < X < x + dx | X > x) = \frac{P(x < X < x + dx)}{P(X > x)} = \frac{F(x+dx) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{F'(x)}{1 - F(x)} dx$ ，即“年龄”为  $x$  的零件不能继续工作的条件概率密度为  $\frac{F'(x)}{1 - F(x)}$ ，称其为瞬时失效率  $\lambda(x)$ ，则  $F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t) dt}$ 。

在“无老化”假设下，即  $\lambda(t) \equiv \lambda$  不随时间变化，则  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x > 0)$ ， $X$  服从指数分布。

指数分布有所谓“无记忆性”： $P(X > t+s | X > s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = e^{-\lambda t} = P(X > t) (t, s > 0)$ 。

“无老化”假设并不总是成立。为此，可以进行一定程度的改进，例如令  $\lambda(x) = \alpha \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} (x > 0, \alpha, \beta > 0 \text{ 为常数})$ ，则  $F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} (x > 0)$ ，称之为 Weibull 分布。当  $\alpha = 1$  时，Weibull 分布退化为参数为  $1/\beta$  的指数分布。

总览至此介绍过的各个分布的参数，可以将其大致分为以下几类：

1. 位置参数：决定了分布平移到的位置，通常在 PMF/PDF 中体现为  $f(x) = g(x - \cdot)$  的形式，如正态分布的参数  $\mu$
2. 尺度参数：决定了分布伸缩的程度，通常在 PMF/PDF 中体现为  $f(x) = g(\frac{x}{\cdot})$  的形式，如正态分布的参数  $\sigma$ 、Weibull 分布的参数  $\beta$
3. 形状参数：决定了分布的形状，如 Weibull 分布的参数  $\alpha$

## 2.6 随机变量的函数

对于随机变量  $X$  和可测函数  $g$ ， $Y = g(X)$  也是随机变量。特别地，若  $X$  为离散型随机变量，则  $Y$  也离散。但若  $X$  为连续型随机变量， $Y$  未必连续。

**例 2.7.**  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ， $Y = \begin{cases} 0, & X \leq t_0, \\ 1, & X > t_0, \end{cases}$  其中  $t_0 > 0$  为常数，则  $Y \sim B(e^{-\lambda t_0})$ 。

**例 2.8.** 设  $X$  为连续型随机变量，PDF 为  $f(x)$ ，考虑  $Y = X^2$ 。

从 CDF 入手， $\forall y > 0, P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx$ ，有  $Y$  的 PDF 为  $l(y) = \frac{d}{dy} P(Y \leq y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) (y > 0)$ 。

特别地，若  $X \sim N(0, 1)$ ，称  $Y$  服从自由度为 1 的  $\chi^2$ -分布，读作“卡方分布”。

若  $Y = g(X)$  为随机变量，可以计算  $Y$  的分布如下：

- $P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y))$
- $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in g^{-1}((-\infty, y]))$

## 第三章 联合分布

### 3.1 随机向量

**定义 3.1.** 称  $(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  为  $(n \text{ 维})$  随机向量, 若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  均为随机变量。

**定义 3.2.**  $n$  维随机向量的 (联合) (累积) 分布函数 (CDF) 定义为  $F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

对于  $n = 2$  (二元分布) 的情形, 常用  $(X, Y)$  来表示随机向量, 对应的 CDF 为  $F(x, y)$ 。

### 3.2 离散分布

**定义 3.3.** 称  $n$  维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  是离散的, 当且仅当  $\{X_i\}_{i=1}^n$  均为离散随机变量。

离散随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 (联合) 概率质量函数 (PMF) 定义为  $f(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n), \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 。

**命题 3.1.** 离散随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 PMF 具有如下性质:

1.  $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
2.  $\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}} f(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$

注意第 2 条性质中求和的项数为至多可数, 原因是有限个至多可数集的笛卡尔积仍是至多可数集。

**例 3.1.** 设  $\{B_i\}_{i=1}^n$  为  $\Omega$  的一个分割 (分割的定义见 1.8 节),  $P(B_i) = p_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 。

进行  $N$  次独立试验, 设  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , 有  $X_i$  个试验结果落在  $B_i$  中, 则若  $k_1 + \dots + k_n = N$ , 其中  $k_i$  均为非负整数, 有  $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \binom{N}{k_1, \dots, k_n} p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ 。其中  $\binom{N}{k_1, \dots, k_n} = \frac{N!}{k_1! \dots k_n!}$  为多项式  $(a_1 + \dots + a_n)^N$  中  $a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$  项的系数。

称  $(X_1, \dots, X_n)$  服从多项分布。

### 3.3 连续分布

**定义 3.4.** 对  $n$  维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ , 若存在  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ , 使得  $\forall$  可测集  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , 都有  $P((X_1, \dots, X_n) \in Q) = \int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ , 则称  $(X_1, \dots, X_n)$  为连续型随机向量,  $f$  称为其 (联合) 概率密度函数 (PDF)。

**命题 3.2.** 连续随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 PDF 具有如下性质:

1.  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \equiv 1$
2. 以  $n=2$  为例,  $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) ds dt$ ,  $f(a, b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, b)$ , a.e.

其中 a.e. 表示 “almost everywhere”。

**例 3.2.** 矩形域上的均匀分布的 PDF:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & (x, y) \in (a, b) \times (c, d), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

**例 3.3.** 二元正态分布  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  的 PDF:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1.$$

令  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \\ \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \end{bmatrix}$ ,  $W = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$ ,  $W = A^T A$  为正定矩阵  $W$  的 Cholesky 分解, 则  $-\frac{1}{2(1-\rho^2)}((\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T W \mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = -\frac{1}{2}(A\mathbf{x})^T (A\mathbf{x})$ .

上述 Cholesky 分解的结果为  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$  或  $A = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{bmatrix} -1 & \rho \\ 0 & \pm\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$ 。

### 3.4 边际分布

对  $n$  维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ , 称  $F_i(x) = P(X_i \leq x) = P(X_i \leq x, -\infty < X_j < +\infty, \forall j \neq i)$  为  $X_i$  的边际分布。

例如, 若  $n=2$ , 随机向量  $(X, Y)$  有 CDF  $F(x, y)$ , 则  $X$  的边际分布为  $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} P(X \leq x, -\infty < Y \leq y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 。

若  $n=3$ , 随机向量  $(X, Y, Z)$  有 CDF  $F(x, y, z)$ , 则  $F_X(x) = \lim_{y, z \rightarrow +\infty} F(x, y, z)$ , 而  $(X, Y)$  的边际分布为  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y, -\infty < Z < +\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(x, y, z)$ 。

**例 3.4.** 设二维随机向量  $(X, Y)$  的 CDF 为  $F(x, y)$ , 则  $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(X > a, Y > b) = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b)$ 。

对于离散型随机向量, 以  $n = 2$  为例, 定义边际 PMF 为  $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$ 。

对于连续型随机向量, 以  $n = 2$  为例, 设联合 PDF 为  $f(x, y)$ , 则  $F_X(x) = P(X \leq x, Y \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) ds dt$ , 则  $X$  的边际 PDF 为  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 。

**例 3.5.**  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$ , 即  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 。同理  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

### 3.5 条件分布

以  $n = 2$  为例说明条件分布的概念, 考虑随机向量  $(X, Y)$ 。

对于离散型随机向量, 设联合 PMF 为  $P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} \equiv 1$ , 则在  $Y = b_j$  条件下的  $X$  的条件 PMF 为  $P(X = a_i | Y = b_j) = \frac{P(X=a_i, Y=b_j)}{P(Y=b_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{kj}}$ 。条件 PMF 满足  $\sum_i P(X = a_i | Y = b_j) \equiv 1, \forall j$ 。

对于连续型随机向量, 设联合 PDF 为  $f(x, y)$ , 首先考虑条件概率  $P(X \leq x | y \leq Y \leq y + dy) = \frac{P(X \leq x, y \leq Y \leq y + dy)}{P(y \leq Y \leq y + dy)} = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+dy} f(t, s) ds dt}{\int_y^{y+dy} f_Y(s) ds}$ , 对  $x$  求导得  $X$  在  $y \leq Y \leq y + dy$  条件下的条件 PDF 为  $\frac{\int_y^{y+dy} f(x, s) ds}{\int_y^{y+dy} f_Y(s) ds} \rightarrow \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} (dy \rightarrow 0)$ 。

**定义 3.5.** 对于连续型随机向量  $(X, Y)$ , 设联合 PDF 为  $f(x, y)$ , 若  $f_Y(y) > 0$ , 则称  $X$  在  $Y = y$  条件下的条件 PDF 为  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 。

可以验证  $f_{X|Y}(x|y)$  满足 PDF 的各性质。

相应的条件 CDF 为  $F_{X|Y}(a|y) = P(X \leq a | Y = y) = \int_{-\infty}^a f_{X|Y}(x|y) dx$ 。

我们熟知的各个定理均有适用于连续型随机向量的版本:

1.  $f(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$  (乘法法则)
2.  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy$  (全概率公式)
3.  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) dy}$  (Bayes 公式)

**例 3.6.**  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)))^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}}$ , 即  $Y|X = x \sim N(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), (1 - \rho^2)\sigma_2^2)$ 。

### 3.6 独立性

**定义 3.6.** 设二维随机向量  $(X, Y)$  的 CDF 为  $F(x, y)$ , 若  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , 则称  $X, Y$  相互独立。

可以证明, 对于二维离散型 (或连续型) 随机向量  $(X, Y)$ ,  $X, Y$  相互独立的充要条件是  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , 其中  $f(x, y)$  为联合 PMF (或 PDF)。

**定义 3.7.** 设  $n$  维随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 CDF 为  $F(x_1, \dots, x_n)$ , 若  $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 则称  $X_1, \dots, X_n$  相互独立。

可以证明, 对于  $n$  维离散型 (或连续型) 随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$ ,  $X_1, \dots, X_n$  相互独立的充要条件是  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , 其中  $f(x_1, \dots, x_n)$  为联合 PMF (或 PDF)。

**定理 3.1.**

1. 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 则  $\forall m \in \{1, \dots, n-1\}$ , 可测函数  $g_1, g_2$ , 有  $Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_m)$  与  $Y_2 = g_2(X_{m+1}, \dots, X_n)$  相互独立。
2. 若  $n$  维连续型随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的联合 PDF 满足

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n), \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

其中  $g_i: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , 则  $X_1, \dots, X_n$  相互独立, 且  $X_i$  的边际 PDF  $f_i$  与  $g_i$  相差常数因子,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ 。

**例 3.7.** 设  $(X, Y)$  服从如图 3.1 的三角形域  $D$  上的均匀分布, 即  $f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  则  $X, Y$  不独立。



图 3.1: 三角形域上的均匀分布

## 3.7 随机向量的函数

本节中, 考虑给定随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  和可测函数  $g$ , 如何求  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$  的分布。



首先介绍“直接法”。

**例 3.8.**  $X_i \sim B(n_i, p) (i = 1, 2)$  独立,  $Y = X_1 + X_2$ , 则  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n_1 + n_2\}$ ,

$$\begin{aligned}
 P(Y = k) &= P(X_1 + X_2 = k) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k P(X_1 = k_1, X_2 = k - k_1) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k P(X_1 = k_1)P(X_2 = k - k_1) \\
 &= \sum_{k_1=0}^k \binom{n_1}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{n_1-k_1} \binom{n_2}{k-k_1} p^{k-k_1} (1-p)^{n_2-(k-k_1)} \\
 &= \left( \sum_{k_1=0}^k \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k-k_1} \right) p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \\
 &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}
 \end{aligned}$$

因此  $Y \sim B(n_1 + n_2, p)$ 。

**例 3.9.** 随机向量  $(X_1, X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1, x_2)$ , 且  $X_1 > 0$ , 考虑  $Y = X_2/X_1$ , 有  $\forall y \in \mathbb{R}, P(Y \leq y) = P(\frac{X_2}{X_1} \leq y) = P(X_2 \leq X_1 y) = \int_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yx_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$ , 作  $x_2 = x_1 t$  换元得  $P(Y \leq y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x_1, x_1 t) x_1 dt dx_1$ , 故  $Y$  的 PDF 为  $l(y) = \int_0^{+\infty} x_1 f(x_1, yx_1) dx_1$ 。

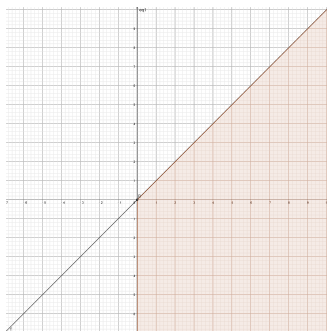


图 3.2: 区域  $D$  的范围, 其中边界线的斜率为  $y$

接下来介绍“密度函数变换法”。

设随机向量  $(X_1, X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1, x_2)$ , 且有可逆可微的映射关系  $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2), \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2), \end{cases}$

据此解出逆映射  $\begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, Y_2), \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2), \end{cases}$  则对于任意可测集  $A$ , 若  $(h_1, h_2)$  将  $A$  映射到集合  $B$ ,

则由可逆性可知  $B$  在  $(g_1, g_2)$  的映射下的值域为  $A$ 。因此  $P((Y_1, Y_2) \in A) = P((X_1, X_2) \in B) = \int_B f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_A f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) |J| dy_1 dy_2$ , 其中  $J$  为 Jacobi 行列式  $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$ , 因此  $(Y_1, Y_2)$  的联合 PDF 为  $l(y_1, y_2) = f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) |J|$ 。

**例 3.10.** 随机向量  $(X_1, X_2)$  有联合 PDF  $f(x_1, x_2)$ , 为求  $Y = X_1 + X_2$  的 PDF, 引入  $Z = X_1$ , 则  $\begin{cases} X_1 = Z, \\ X_2 = Y - Z, \end{cases}$  Jacobi 行列式为  $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1$ , 故  $(Y, Z)$  的联合 PDF 为  $f(z, y - z) | -1 | = f(z, y - z)$ ,  $Y$  的边际 PDF 为  $l_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, y - z) dz$ 。

上例中, 若  $X_1, X_2$  相互独立, 则  $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \Rightarrow l_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z)f_2(y - z) dz$ , 这称之为  $f_1$  和  $f_2$  的卷积, 记作  $f_1 * f_2$ 。

特别地, 若  $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ 。

利用上述随机向量的函数的 PDF 求解方法, 可以得到所谓卡方分布 ( $\chi^2$ -分布)、 $t$ -分布和  $F$ -分布的 PDF。这些分布的表达式较为复杂, 在此不一一罗列。感兴趣的同学可以查阅资料, 简单了解一下它们与标准正态分布的联系。

## 第四章 随机变量的数字特征

### 4.1 期望

离散型和连续型随机变量的期望分别参见定义 2.6 和定义 2.11。

对于随机向量，期望自然推广定义为  $E((X_1, \dots, X_n)) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$ 。

**命题 4.1.** 期望有如下性质：

1. 离散型和连续型随机向量的函数的期望  $E(g(X_1, \dots, X_n))$  分别等于

$$\sum_{x_i \in \{X_i(\omega) | \omega \in \Omega, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{和 } \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

其中  $g$  为可测函数， $f$  分别为联合 PMF 与联合 PDF

2.  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y), \forall$  常数  $a, b \in \mathbb{R}$
3. 若  $X_1, \dots, X_n$  相互独立，则  $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$

### 4.2 分位数

**定义 4.1.** 设  $X$  为连续型随机变量，若  $P(X \leq m) = F(m) = 1/2$ ，则称  $m$  为  $X$  的中位数。

和均值一样，中位数也是随机变量集中趋势的一种刻画。中位数不一定唯一。

若  $m$  是连续型随机变量  $X$  的中位数，则  $P(X < m) = P(X > m) = 1/2$ 。

以下给出更一般的中位数定义。

**定义 4.2.** 对随机变量  $X$ ，若  $P(X < m) \leq 1/2$ ，且  $P(X > m) \leq 1 - 1/2 = 1/2$ ，则称  $m$  为  $X$  的中位数。

**例 4.1.** 设离散型随机变量  $X$  的分布表为

$X$	1	2	3	4
$P$	1/3	1/2	1/12	1/12

则其中位数为 2。

**定义 4.3.** 对随机变量  $X$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1)$ , 若  $P(X < a) \leq \alpha$  且  $P(X > a) \leq 1 - \alpha$ , 则称  $a$  为  $X$  的 (下侧)  $\alpha$ -分位数。

上述定义的  $\alpha$ -分位数是不唯一的。为了唯一性, 考虑定义  $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x | F(x) \geq \alpha\}$ 。

我们给出众数 (mode) 的方便定义:  $f(x)$  的最大值点, 其中  $f(x)$  为 PMF 或 PDF。由于 PDF 可在任意零测集上修改取值, 故这一定义并非严谨的。

## 4.3 方差

离散型和连续型随机变量的方差分别参见定义 2.6 和定义 2.11。

方差的意义: 若  $X$  为收益率, 则  $SD(X)$  称为波动率, 刻画了风险的大小。定义变异系数  $CV = \frac{SD(X)}{\mu}$ , 其中  $\mu = E(X) \neq 0$ 。

**命题 4.2.** 方差有如下性质:

1.  $\text{Var}(C) \equiv 0, C$  为常数
2.  $\text{Var}(CX) = C^2 \text{Var}(X)$
3.  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ , 且若  $X, Y$  独立, 则  $E((X - E(X))(Y - E(Y))) = 0$

## 4.4 协方差与相关系数

对随机变量  $X, Y$ , 设  $E(X) = \mu_1, E(Y) = \mu_2, \text{Var}(X) = \sigma_1^2, \text{Var}(Y) = \sigma_2^2$ 。

**定义 4.4.** 称  $X$  与  $Y$  的协方差  $\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_1)(Y - \mu_2))$ 。

**命题 4.3.** 协方差有如下性质:

1.  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
2.  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3.  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
4.  $\text{Cov}(aX_1 + bX_2 + c, Y) = a\text{Cov}(X_1, Y) + b\text{Cov}(X_2, Y), \forall$  常数  $a, b, c \in \mathbb{R}$

**定义 4.5.** 称  $X$  与  $Y$  的 (线性) 相关系数  $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right)$ 。

若  $\text{Corr}(X, Y) = 0$ , 称  $X, Y$  不相关。

**定理 4.1.** 相关系数有如下性质:

1. 若  $X, Y$  相互独立, 则  $X, Y$  不相关 (反之未必成立)

2.  $|\text{Corr}(X, Y)| \leq 1$ , 且等号成立当且仅当  $\exists a, b, P(Y = aX + b) = 1$ , 即  $Y = aX + b, \text{a.s.}$

其中 a.s. 表示 “almost surely”。

为证明上述定理的 (2), 首先利用 Cauchy-Schwartz 不等式证明引理: 对随机变量  $U, V$ , 有  $E^2(UV) \leq E(U^2)E(V^2)$ , 且等号成立当且仅当  $\exists t_0 \in \mathbb{R}, P(V = t_0 U) = 1$ 。接下来令  $U = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, V = \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}$ , 即得。

当  $\text{Corr}(X, Y) = \pm 1$ , 可以证明  $a = \pm \sigma_2 / \sigma_1$ 。

**例 4.2.**  $X \sim N(0, 1), Y = X^2$ , 则  $X$  与  $Y$  不相关, 但不独立。

**例 4.3.**  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则

$$\begin{aligned} & \text{Corr}(X, Y) \\ &= E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left(\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)} dx dy \end{aligned}$$

进行换元  $(u, v)^T = A\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}\right)^T$ , 其中  $A$  的定义参见例 3.3, 则指数上的项化为  $-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ , 这一步实质上是进行了二次型的标准化。后续过程留作习题, 最终计算结果为  $\text{Corr}(X, Y) = \rho$ 。

## 4.5 矩

**定义 4.6.** 对  $k = 1, 2, \dots$ , 称  $E((X - c)^k)$  为  $X$  关于  $c$  点的  $k$  阶矩。特别地,  $c = 0$  的情况下称为  $k$  阶原点矩,  $c = E(X)$  的情况下称为  $k$  阶中心矩。

根据定义,  $E(X)$  为 1 阶原点矩, 而 1 阶中心矩恒等于 0;  $\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$  为 2 阶中心矩。

若  $E(X) = \mu, \text{SD}(X) = \sigma$ , 称  $E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^k\right) = \frac{E((X - \mu)^k)}{\sigma^k}$  为  $k$  阶标准矩。

1 阶标准矩恒等于 0, 2 阶标准矩恒等于 1, 3 阶标准矩称为  $X$  的偏度系数, 记作  $\text{Skew}(X)$ 。

**例 4.4.**  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $\text{Skew}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0$ , 其中  $f$  为  $X$  的 PDF。

称偏度系数  $< 0$  的分布为 “负偏” 或 “左偏”, 如图 4.1。

5 阶以上的奇数阶标准矩计算更复杂, 受噪声影响更大。

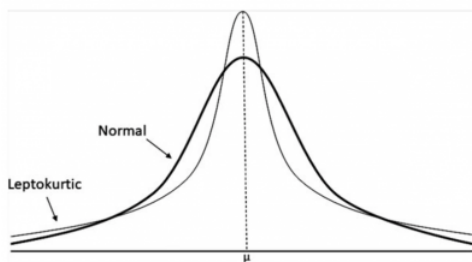
4 阶标准矩称为  $X$  的峰度系数, 记作  $\text{Kurt}(X)$ 。由于正态分布的峰度系数恒等于 3, 因此常定义超额峰度系数为  $\text{Kurt}(X) - 3$ 。

常将  $\mu \pm \sigma$  以内的范围称为 “峰”, 范围在 “峰” 以外但在  $\mu \pm 2\sigma$  以内的范围称为 “肩”, 范围在 “肩” 以外的部分称为 “尾”。

通常, 峰度系数  $> 3$  表现为相对于正态分布 “尖峰厚尾”, 如图 4.2。



图 4.1: 负偏分布

图 4.2: “Leptokurtic” 一词的含义即峰度系数  $> 3$ 

## 4.6 矩母函数

**定义 4.7.** 记  $M_X(t) = E(e^{tX})$ , 若  $M_X(t)$  在  $t = 0$  的某邻域内存在, 则称其为  $X$  的矩母函数 (Moment Generating Function, MGF), 否则称  $X$  的矩母函数不存在。

**例 4.5.** 若  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 则  $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$ 。

**例 4.6.** 若  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$ 。

**命题 4.4.** 矩母函数有如下性质:

1.  $M_X(0) \equiv 1$
2.  $Y = aX + b$ , 则  $M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = e^{tb} M_X(at)$

**例 4.7.** 若  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 令  $Y = \sigma X + \mu$ , 则  $X \sim N(0, 1)$ , 故  $M_Y(t) = e^{\mu t} M_X(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}, t \in \mathbb{R}$ 。

矩母函数可以用于确定矩。

**定理 4.2.** 随机变量  $X$  的  $n$  阶 (原点) 矩与其矩母函数有如下关系:  $E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$ 。

**证明.** 由 Taylor 展开有  $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} M_X^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$ , 又  $M_X(t) = E(e^{tX}) = E(\sum_{n=0}^{+\infty} X^n \frac{t^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X^n) \frac{t^n}{n!}$ , 得到结论。  $\square$

**例 4.8.** 若  $X \sim N(0, 1)$ , 则  $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ , 因此  $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ ,  $E(X^{2n+1}) \equiv 0$  ( $n = 0, 1, \dots$ )。

由此可以计算  $\text{Var}(X) = E(X^2) = 1$ ,  $\text{Kurt}(X) = E(X^4) = \frac{4!}{2^2 \cdot 2!} = 3$ 。

矩母函数还可以用于确定分布。

**定理 4.3.** 若存在  $a > 0$ , 使得  $M_X(t) = M_Y(t), \forall t \in (-a, a)$ , 则  $X, Y$  同分布。

**例 4.9.** 若随机变量  $X$  的矩母函数  $M_X(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{4t} + \frac{1}{8}e^{5t}$ , 则  $X$  为离散型随机变量, 分布表为

$X$	-1	0	4	5
$P$	1/2	1/4	1/8	1/8

一般地, 若离散型随机变量  $X$  有 PMF  $P(X = k) = p_k$  ( $\sum_k p_k \equiv 1$ ), 则其 MGF 为  $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_k e^{tk} p_k$ 。

注意, 各阶矩均相同的随机变量未必同分布。

**例 4.10.** 设连续型随机变量  $X_1$  和  $X_2$  的 PDF 分别为  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}, x > 0$  和  $f_2(x) = f_1(x)(1 + \sin(2\pi \log x)), x > 0$  ( $X_1$  服从对数正态分布), 则  $E(X_2^n) = E(X_1^n) + \int_0^{+\infty} x^n f_1(x) \sin(2\pi \log x) dx$ , 其中后一项通过换元  $y = \log x - n$  可以证明为 0, 即  $X_1$  和  $X_2$  同矩但不同分布。

下面运用矩母函数, 研究独立随机变量和的分布。

**定理 4.4.** 若随机变量  $X, Y$  独立,  $Z = X + Y$ , 则  $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ 。

证明.  $M_Z(t) = E(e^{tZ}) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t)$ , 其中最后一个等号利用了独立性。□

推而广之, 若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  相互独立,  $Z = X_1 + \dots + X_n$ , 则  $M_Z(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$ 。

**例 4.11.** 若  $\{X_i\}_{i=1}^n$  相互独立且服从正态分布, 则  $X_1 + \dots + X_n$  也服从正态分布。

以  $n = 2$  为例说明。设  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  ( $i = 1, 2$ ), 则  $M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = e^{\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + \mu_1 t} e^{\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + \mu_2 t} = e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2 + (\mu_1 + \mu_2)t}$ , 对应  $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  的 MGF, 再由 MGF 确定分布可得结论。

定义随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  的 MGF 为  $M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$ 。

以下简介类似 MGF 的其他函数:

1. 概率母函数 (Probability Generating Function, PGF), 仅针对非负整数取值的离散型随机变量  $X$ , 设其 PMF 为  $P(X = k) = p_k$ , 则其 PGF 定义为  $E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k, t \in [-1, 1]$ , 或对于  $t \in (0, 1]$ , 等于  $E(e^{X \log t}) = M_X(\log t)$ 。
2. 特征函数, 定义为  $E(e^{itX})$ , 其中  $i^2 = -1$ 。

## 4.7 条件期望

$$\text{定义条件期望 } E(Y|X \in A) = \begin{cases} \sum_i y_i P(Y = y_i | X \in A), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|X \in A) dy, \end{cases} \quad \text{两种定义分别针对 } Y \text{ 为离散型和连续型随机变量。}$$

$$\text{进而, 定义 } E(Y|x) = E(Y|X = x) = \begin{cases} \sum_i y_i P(Y = y_i | X = x), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy, \end{cases} \quad \text{注意到这是一个 } x \text{ 的函数, 记作 } h(x)。$$

将其作用在  $X$  上, 得到  $h(X) = E(Y|X)$ , 这是一个  $X$  的函数 (称为  $Y$  对  $X$  的回归函数), 因此是一个新的随机变量。

**例 4.12.**  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $E(Y|x) = \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ 。

**例 4.13.** 甲、乙两种同类产品, 平均使用寿命分别为 10 年和 15 年, 市场占有率分别为 60% 和 40%, 随机买一个, 则期望寿命是  $10 \times 60\% + 15 \times 40\% = 12$  年, 我们发现这个计算过程可以表示为  $E(Y) = E(Y|X=1)P(X=1) + E(Y|X=2)P(X=2) = h(1)P(X=1) + h(2)P(X=2) = E(h(X)) = E(E(Y|X))$ , 其中  $X=1$  表示抽到甲产品,  $X=0$  表示抽到乙产品,  $Y$  表示抽到的产品的寿命。

一般地, 有以下定理:

**定理 4.5.** (全期望公式)

对于随机向量  $(X, Y)$ , 有  $E(Y) = E(E(Y|X))$ 。

**证明.** 以连续型为例。设  $(X, Y)$  的联合 PDF 为  $f(x, y)$ , 有  $E(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy$ , 故  $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|x) f_X(x) dx = E(E(Y|X))$ 。□

一般地, 对于可测函数  $g$ , 有  $E(g(X, Y)) = E(E(g(X, Y)|X))$ 。

**定理 4.6.** 对于随机向量  $(X, Y)$  和任意可测函数  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 都有  $E((Y - g(X))^2) \geq E((Y - E(Y|X))^2)$ , 即条件期望是均方误差意义下的最优预测。



证明. 类比期望的性质  $E((Y - c)^2) \geq E((Y - E(Y))^2), \forall c \in \mathbb{R}$ , 有  $E((Y - g(X))^2|X) \geq E((Y - E(Y|X))^2|X), \forall g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  可测, 两边对  $X$  求期望即得。  $\square$

我们经常用到最优线性预测, 即  $\min_{a,b} E((Y - (aX + b))^2)$ , 这种“均方意义上的最优”称之为最小二乘 (least square)。

**命题 4.5.** 记  $\hat{Y} = E(Y|X)$  为已知  $X$  的条件下对  $Y$  的最优估计,  $\tilde{Y}$  为估计误差  $\hat{Y} - Y$ , 则  $E(\tilde{Y}) = 0, E(\tilde{Y}\hat{Y}) = 0$ , 进而有  $\text{Cov}(\hat{Y}, \tilde{Y}) = 0, \text{Var}(Y) = \text{Var}(\hat{Y}) + \text{Var}(\tilde{Y})$ 。

## 第五章 不等式与极限定理

### 5.1 概率不等式

**定理 5.1.** (Markov 不等式)

若随机变量  $Y \geq 0$ , 则  $\forall a > 0$ , 有  $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$ 。

证明. 取示性变量  $I = \begin{cases} 1, & Y \geq a, \\ 0, & Y < a, \end{cases}$  则  $I \leq Y/a$ , 故  $P(Y \geq a) = E(I) \leq E(Y/a) = E(Y)/a$ 。

□

**定理 5.2.** (Chebyshev 不等式)

若随机变量  $Y$  的方差  $\text{Var}(Y)$  存在, 则  $\forall a > 0$  有  $P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{a^2}$ 。

证明.  $P(|Y - E(Y)| \geq a) = P((Y - E(Y))^2 \geq a^2) \leq \frac{E((Y - E(Y))^2)}{a^2} = \frac{\text{Var}(Y)}{a^2}$ 。

□

这告诉我们, 如果  $\text{Var}(Y) = 0$ , 则  $P(Y = E(Y)) = 1$  (即 a.s.)。

**定理 5.3.** (Chernoff 不等式)

对于任意随机变量  $Y$ ,  $\forall a > 0, t > 0$ , 有  $P(Y \geq a) \leq \frac{E(e^{tY})}{e^{ta}}$ 。

证明.  $\forall t > 0, P(Y \geq a) = P(e^{tY} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tY})}{e^{ta}}$ 。

□

**例 5.1.** 若  $X \sim N(0, 1)$ , 则

1. 根据 Markov 不等式,  $P(|X| \geq 3) \leq \frac{E(|X|)}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.27$ ;
2. 根据 Chebyshev 不等式,  $P(|X| \geq 3) \leq \frac{\text{Var}(X)}{3^2} = \frac{1}{9} \approx 0.11$ ;
3. 根据 Chernoff 不等式,  $\forall t > 0, P(|X| \geq 3) = 2P(X \geq 3) \leq 2\frac{E(e^{tX})}{e^{3t}} = 2e^{\frac{t^2}{2}-3t}$ , 取最小值点  $t = 3$ , 得  $P(|X| \geq 3) \leq 2e^{-\frac{9}{2}} \approx 0.022$ ;
4. 根据经验法则,  $P(|X| \geq 3) \approx 0.003$ 。

## 5.2 大数定律

设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 均值  $E(X_i) = \mu$ , 方差  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$ , 则样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 其均值  $E(\bar{X}) = \mu$ , 方差  $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ 。

**定理 5.4.** (Khinchin 弱大数定律)

设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 均值  $E(X_i) = \mu$ , 方差  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 0$ , 或等价地,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) = 1$ 。

证明. 由 Chebyshev 不等式,  $P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X})}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{\epsilon^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ .  $\square$

$\forall \epsilon > 0, \forall \alpha > 0$ , 如果将  $\epsilon$  和  $(1 - \alpha)$  分别称为精度和置信度, 则根据 Khinchin 弱大数定律,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n \geq N$  时,  $P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \alpha$ , 即  $\bar{X}$  至少以概率  $(1 - \alpha)$  落在区间  $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon)$  内。

换句话说, 当样本量足够大时, 有很大的概率  $\bar{X} \approx \mu$ , 其中  $\mu$  为未知的总体均值。

我们将  $X_i \sim B(p)$  这一特例称之为 Bernoulli 大数定律。

通过更进一步的讨论可以证明, 上述定理中关于方差的条件可以去掉, 结论仍正确。

此外, 还有对 Khinchin 弱大数定律的若干推广, 如

1. 要求  $X_i$  两两不相关,  $\text{Var}(X_i)$  一致有界, 我们就得到了 Chebyshev 大数定律;
2. 要求  $\text{Var}(\bar{X}) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ , 我们就得到了 Markov 大数定律。

**定义 5.1.** 称  $Y_n$  依概率收敛于  $Y$ , 记作  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ , 如果  $\forall \epsilon > 0$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) = 0$ 。

用上述定义, 弱大数定律可以表述为  $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ 。

**定理 5.5.** (Kolmogorov 强大数定律)

设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 均值  $E(X_i) = \mu$ , 则  $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X} = \mu) = 1$ 。

考虑  $X_i \sim B(p)$  的特殊情形, 则  $\bar{X}$  称之为频率, 由强大数定律,  $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X} = p) = 1$ , 这说明概率的频率解释是合理的。

**定义 5.2.** 称  $Y_n$  以概率 1 收敛于  $Y$ , 又称几乎必然收敛于  $Y$ , 记作  $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ , 如果  $P(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = Y) = 1$ 。

用上述定义, 强大数定律可以表述为  $\bar{X} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$ 。

**例 5.2.** (Monte Carlo 积分)

设要计算  $g(x) > 0$  在区间  $[a, b]$  上的定积分, 首先取一个适当的  $c > \sup\{g(x) | x \in [a, b]\}$ , 设

$(X_i, Y_i)$  独立且服从区域  $[a, b] \times [0, c]$  上的均匀分布, 记  $I_i = \begin{cases} 1, & Y_i \leq g(X_i), \\ 0, & Y_i > g(X_i), \end{cases}$  则  $I_i \sim B(p)$ ,

其中  $p = \frac{\int_a^b g(x)dx}{c(b-a)}$ , 于是  $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \approx p$ , 从而  $\int_a^b g(x)dx \approx c(b-a)\bar{I}$ .

**例 5.3.** 我们通过一个例子来考察一下上面介绍的两种收敛性的区别。

设概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 其中  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\omega$  在  $\Omega$  上均匀分布。定义随机变量序列  $\forall \omega \in \Omega, Y_1(\omega) = \omega + I_{[0,1]}(\omega), Y_2(\omega) = \omega + I_{[0,1/2]}(\omega), Y_3(\omega) = \omega + I_{[1/2,1]}(\omega), Y_4(\omega) = \omega + I_{[0,1/3]}(\omega), Y_5(\omega) = \omega + I_{[1/3,2/3]}(\omega), Y_6(\omega) = \omega + I_{[2/3,1]}(\omega), \dots$ , 则  $Y_n(\omega)$  依概率收敛于  $Y(\omega) = \omega$ , 但不以概率 1 收敛于  $Y(\omega)$ , 因为  $\forall \omega_0 \in \Omega, Y_n(\omega_0)$  无极限。

## 5.3 中心极限定理

**定理 5.6.** 设随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 均值  $E(X_i) = \mu$ , 方差  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$ , 则  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布的 CDF。或等价地,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$ 。

证明. 只对  $X_i$  的 MGF 存在的情形给出证明。

不失一般性, 假设  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ , 令  $M(t) = E(e^{tX_i})$ , 则  $M(0) = 1, M'(0) = 0, M''(0) = 1$ , 于是  $E(e^{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}) = M^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ , 而根据 Taylor 展开,  $M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ , 故  $E(e^{\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}) = (1 + \frac{t^2}{2n} + o(\frac{t^2}{n}))^n \rightarrow e^{t^2/2} (n \rightarrow +\infty)$ , 此为  $N(0, 1)$  的 MGF, 这说明  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$  的分布趋近于  $N(0, 1)$ 。□

上述定理通常称为 Lindeberg-Lévy CLT, 可推广至不同分布的情形。

如果将定理中的  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  理解为标准化的过程, 则不难得出  $\bar{X}$  近似服从  $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ ,  $X_1 + \dots + X_n$  近似服从  $N(n\mu, n\sigma^2)$ 。

**例 5.4.** (De Moivre-Laplace CLT)

设  $X_i \sim B(p)$ , 则  $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$ , 当  $n$  充分大时, 可以近似地认为  $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(np, np(1-p))$ , 于是可近似计算  $P(t_1 \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq t_2) = P\left(\frac{t_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{t_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi(y_2) - \Phi(y_1)$ , 其中  $y_1 = \frac{t_1 - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}, y_2 = \frac{t_2 - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}$ , 其中  $\frac{1}{2}$  是连续性修正项。

**定义 5.3.** (依分布收敛)

称  $Y_n$  依分布收敛于  $Y$ , 记作  $Y_n \xrightarrow{d} Y$ , 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = F_Y(x), \forall x \in \mathbb{R}$ 。

用上述定义, CLT 可以表述为  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$ , 其中  $Z \sim N(0, 1)$ , 或简记为  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$ 。

**例 5.5.** (选举问题)

设  $p$  为选民真实支持度 (未知), 随机抽样调查  $n$  人 (假设  $n$  远远小于总人数  $N$ , 可以近似有放回抽样), 样本支持比例  $P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$ , 其中  $X_i \sim B(p)$  且独立, 表示第  $i$  个人是否支持。

设置精度  $\epsilon = 0.03$ , 置信度  $1-\alpha = 95\%$ , 则至少需要  $n$  为多少, 才能保证  $P(|P_n - p| < \epsilon) \geq 1-\alpha$ ? 根据 CLT 有  $P(|P_n - p| \geq \epsilon) \approx 2 \left( 1 - \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \right) \leq \alpha$ , 于是  $n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{\epsilon^2}$ , 其中  $z_{\alpha/2}$  为标准正态分布的上  $\alpha/2$  分位数, 代入最大值点  $p = \frac{1}{2}$ , 得到  $n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{4} \epsilon^2$ , 代入  $\epsilon = 0.03, \alpha = 0.05$ , 得到  $n \geq 1068$ 。这一结果与  $N$  无关!

## 第二部分

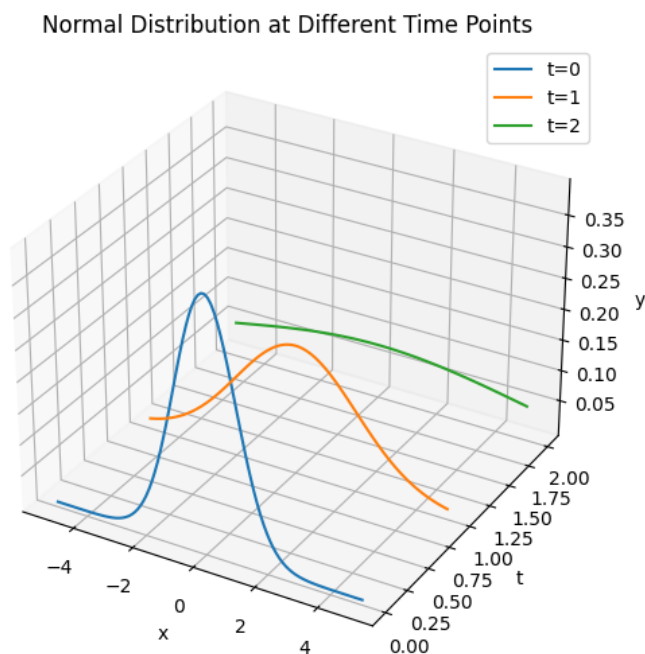
## 随机过程

# 随机过程引言

**定义.** 给定一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 若对于某个集合  $T$  (称之为指标集),  $\forall t \in T$ , 都有一个随机变量  $X_t$ , 则称  $\{X_t\}_{t \in T}$  为一个随机过程 (Stochastic Process), 也记作  $\{X_t, t \in T\}$ . 称  $X_t$  为该随机过程在  $t$  时刻的状态, 有时也记作  $X(t)$ , 其取值集合  $S$  称为状态空间, 即  $\forall t \in T, \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) \in S$ .  $\forall \omega_0 \in \Omega$ , 称  $\{X_t(\omega_0), t \in T\}$  为该随机过程的一条样本轨道 (Sample Path)。

随机变量是  $\Omega$  上的函数, 而随机过程是一列随机变量, 因此  $X_t(\omega)$  可以视为  $t, \omega$  的函数。

**例.** 设  $X_0, U$  独立且均服从  $N(0, 1)$ , 令  $X_t = X_0 + tU$ , 则  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  是一个随机过程,  $\forall t \in \mathbb{R}, X_t \sim N(0, t^2 + 1)$ , 如下图所示。



$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$  的分布

**例.** 设  $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$  独立同分布, 且  $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$ , 令  $Y_0 = 0, X_n = \sum_{i=0}^n Y_i$ , 则  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  是一个随机过程, 称为随机游走 (Random Walk)。

---

如果一个随机过程的  $T$  是离散的，常称之为时间序列。而如果  $S$  是离散的，有时用链来称呼这样的随机过程。

**定义.** 若  $\forall n, \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n (t_1, \cdots, t_n \in T)$ , 满足  $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  相互独立, 则称  $\{X_t, t \in T\}$  为独立增量过程。若  $T$  中包含最小指标  $t_0$ , 则要求  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  相互独立。

**定义.** 若  $\forall t \in T, \forall \tau$  s.t.  $t + \tau \in T$ , 满足  $X_{t+\tau} - X_t$  只依赖  $\tau$  (不依赖  $t$ ), 则称  $\{X_t, t \in T\}$  为平稳增量过程。

一个随机过程  $\{X_t, t \in T\}$  是平稳增量过程, 等价于  $\forall t_1, t_2 \in T, \forall \tau$  s.t.  $t_i + \tau \in T (i = 1, 2)$ , 总有  $X_{t_1+\tau} - X_{t_1}$  与  $X_{t_2+\tau} - X_{t_2}$  同分布。



## 第六章 Poisson 过程

### 6.1 基本概念

**定义 6.1.** 设  $T = \mathbb{N}^*$ ,  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  是一列独立同分布的随机变量, 且  $P(X_n = 1) = p, P(X_n = 0) = 1 - p$ , 则称  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  为参数为  $p$  的 *Bernoulli* 过程。

定义中提到的  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  相互独立, 指的是  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $X_1, \dots, X_n$  相互独立。

如果在每个离散时刻  $n$ , 将事件  $X_n = 1$  即“第  $n$  次试验成功”理解为该时刻有一个顾客到达某商店, 则 *Bernoulli* 过程属于一种到达过程。

本章的主要内容 *Poisson* 过程也是一种到达过程。

**定义 6.2.** 称一个随机过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为计数过程, 若其满足:

1.  $N(t) \in \mathbb{N}$
2.  $\forall t > s \geq 0, N(t) \geq N(s)$
3.  $N(t) - N(s)$  为  $(s, t]$  时间内发生的事件数

**定义 6.3.** 称一个计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为 *Poisson* 过程, 若其满足:

1.  $N(0) = 0$
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  有平稳增量性和独立增量性
3.  $\exists \lambda > 0$ , 当  $h \rightarrow 0$  时,  $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4. 当  $h \rightarrow 0$  时,  $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

利用平稳增量性可知,  $\forall t \geq 0, P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h), P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$ 。

考虑  $(0, t]$  时间段, 将其分成  $n$  个长度为  $\frac{t}{n}$  的子区间, 当  $n \gg 1$  时, 每个小区间上发生 2 次及以上事件的概率趋于 0, 而发生 1 次事件的概率  $p \approx \lambda \frac{t}{n}$ , 因此近似有  $N(t) \sim B(n, p)$ , 而当  $n \rightarrow \infty$  时,  $B(n, p)$  会趋向于 *Poisson* 分布, 即  $N(t) \sim P(\lambda t)$ 。稍后将严格证明这一结论。

称  $\lambda$  为 *Poisson* 过程的强度或到达率。

**定理 6.1.** 若  $\{N(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程, 则  $\forall t \geq 0, N(t) \sim P(\lambda t)$ 。

证明. 记  $P_n(t) = P(N(t) = n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 则  $P_0(t+h) = P(N(t+h) = 0) = P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) = P(N(t+h) - N(t) = 0)P(N(t) = 0) = (1 - \lambda h + o(h))P_0(t)$ , 即  $\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$ 。当  $h \rightarrow 0$  时,  $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$ , 因此  $\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h} \rightarrow -\lambda P_0(t)$ , 即  $P'_0(t) = -\lambda P_0(t)$ , 由边界条件  $P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$  解得  $P_0(t) = e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}$ 。同理,

$$\begin{aligned}
 & P_n(t+h) \\
 &= P(N(t+h) = n) \\
 &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = n) + P(N(t+h) - N(t) = 1, N(t) = n-1) \\
 &+ P(N(t+h) - N(t) \geq 2, N(t) = n) \\
 &= P(N(t+h) - N(t) = 0)P(N(t) = n) + P(N(t+h) - N(t) = 1)P(N(t) = n-1) \\
 &+ P(N(t+h) - N(t) \geq 2, N(t) = n) \\
 &= P(N(h) = 0)P_n(t) + P(N(h) = 1)P_{n-1}(t) + o(h) \\
 &(\because P(N(t+h) - N(t) \geq 2, N(t) = n) \leq P(N(t+h) - N(t) \geq 2) \\
 &= P(N(h) \geq 2) = o(h)) \\
 &= (1 - \lambda h + o(h))P_n(t) + (\lambda h + o(h))P_{n-1}(t) + o(h) \\
 &= P_n(t) + \lambda h(P_{n-1}(t) - P_n(t)) + o(h)
 \end{aligned}$$

因此  $\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = \lambda(P_{n-1}(t) - P_n(t)) + \frac{o(h)}{h}$ , 当  $h \rightarrow 0$  时,  $\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} \rightarrow \lambda(P_{n-1}(t) - P_n(t))$ , 即  $P'_n(t) = \lambda(P_{n-1}(t) - P_n(t))$ 。由数学归纳法可证明  $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 即  $N(t) \sim P(\lambda t)$ 。□

于是有  $E(N(t)) = \lambda t, \text{Var}(N(t)) = \lambda t$ 。

下面给出 Poisson 过程的一个等价定义。

**定义 6.4.** 称一个计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为 Poisson 过程, 若其满足:

1.  $N(0) = 0$
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  有独立增量性
3.  $\exists \lambda > 0, \forall t > s \geq 0, n \in \mathbb{N}, P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ , 即  $N(t+s) - N(s) \sim P(\lambda t)$

## 6.2 到达时间与到达间隔

记  $T_1$  为首次到达时刻, 则  $P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$ , 因此  $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。再记  $T_2$  为第二次到达时刻, 则在  $T_1 = t_0$  条件下,  $T_2 - T_1$  的分布  $P(T_2 - T_1 \leq$

$t) = P(T_2 - t_0 \leq t) = 1 - P(T_2 - t_0 > t) = 1 - P(N(t_0 + t) - N(t_0) = 0) = 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$ , 因此  $T_2 - T_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 且  $T_2 - T_1$  与  $T_1$  相互独立。一般地, 记  $T_i$  为第  $i$  次到达时刻,  $W_i = T_i - T_{i-1}$  为相邻两次到达间隔时间, 约定  $T_0 = 0$ , 则  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  相互独立且  $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , 而  $T_k = \sum_{i=1}^k W_i$ , 称  $T_k$  服从参数为  $k$  和  $\lambda$  的 *Gamma* 分布, 记作  $T_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ ,  $E(T_k) = \frac{k}{\lambda}$ ,  $\text{Var}(T_k) = \frac{k}{\lambda^2}$ 。  $T_k$  服从的分布又称之为 *Erlang* 分布。事实上, Erlang 分布是 Gamma 分布在  $k \in \mathbb{N}^*$  时的特例。  $\Gamma(1, \lambda)$  就是  $\text{Exp}(\lambda)$ 。

利用  $\forall t \geq 0, P(T_k \leq t) = P(N(t) \geq k) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ , 求导可得  $T_k$  的 PDF 为  $f_{T_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} (t \geq 0)$ 。

Poisson 过程还有一个等价定义如下。

**定义 6.5.** 称一个计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为 *Poisson* 过程, 若其满足:

1.  $N(0) = 0$
2.  $\exists \lambda > 0$ , 各相邻两次到达间隔时间  $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$  相互独立且  $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$

这揭示了生成 Poisson 过程的一种方法便是从独立同分布的  $\text{Exp}(\lambda)$  中抽取相邻两次到达间隔时间, 据此给出各到达时刻, 即可确定一 Poisson 过程。

**例 6.1.** 拨打服务热线时, 被告知除了正在接受服务的人以外, 前面还有 55 人在等待。假设呼叫者离开服从 Poisson 过程,  $\lambda = 2$  人/min, 则平均等待时间为  $T_{56} = \sum_{i=1}^{56} W_i$ , 其中  $W_i \sim \text{Exp}(2)$  且相互独立, 因此平均等待时间为  $E(T_{56}) = \frac{56}{2} = 28$  min, 且  $\text{Var}(T_{56}) = \frac{56}{4} = 14$  min<sup>2</sup>。等待时间超过 30 分钟的概率为  $P(T_{56} > 30) = \int_{30}^{+\infty} f_{T_{56}}(t) dt$ 。根据 CLT, 近似有  $T_{56} \sim N(28, 14)$ , 故有  $P(T_{56} > 30) \approx P(Z > \frac{30-28}{\sqrt{14}}) = 1 - \Phi(\frac{2}{\sqrt{14}})$ , 其中  $Z \sim N(0, 1)$ 。

## 6.3 进一步性质

首先介绍 Poisson 过程的分裂。

**定理 6.2.** 假设某 Poisson 过程每次发生的事件分为 I 类和 II 类, 每个事件独立地以概率  $p$  成为 I 类事件, 以概率  $1-p$  成为 II 类事件, 记  $N_1(t)$  和  $N_2(t)$  分别为  $(0, t]$  内 I 类和 II 类事件的个数, 则

1.  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$
2.  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  和  $\{N_2(t), t \geq 0\}$  均为 Poisson 过程, 且到达率分别为  $\lambda p$  和  $\lambda(1-p)$
3. 这两个过程相互独立

**证明.** 仅对第二条给出简要证明。  $\forall h > 0, P(N_1(h) = 1) = P(N_1(h) = 1 | N(h) = 1) P(N(h) = 1) + P(N_1(h) = 1 | N(h) \geq 2) P(N(h) \geq 2) = p(\lambda h + o(h)) + o(h) = \lambda p h + o(h)$ , 而  $P(N_1(h) \geq$

2)  $\leq P(N(h) \geq 2) = o(h)$ , 因此  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程, 且到达率为  $\lambda p$ 。同理可证  $\{N_2(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程, 且到达率为  $\lambda(1-p)$ 。□

**例 6.2.** 设  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  独立同分布且服从  $Exp(\lambda)$ ,  $N$  服从参数为  $p$  的几何分布, 且与  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  相互独立, 令  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 。为求出  $Y$  的分布, 设每次事件都独立地以概率  $p$  成为“特殊事件”, 则  $N$  可视为首次发生“特殊事件”时的事件总数,  $Y$  为特殊事件首次发生的时刻。由定理 6.2, 特殊事件的发生是一个 Poisson 过程, 到达率为  $\lambda p$ , 因此  $Y \sim Exp(\lambda p)$ 。

接下来介绍 Poisson 过程的合并。

**定理 6.3.** 若  $\{N_1(t), t \geq 0\}$  和  $\{N_2(t), t \geq 0\}$  是两个独立的 Poisson 过程, 且到达率分别为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 则  $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$  也是 Poisson 过程, 且到达率为  $\lambda_1 + \lambda_2$ 。

证明.

1. 显然有  $N(0) = 0$ 。
2. 由  $N(t+s) - N(t) = (N_1(t+s) - N_1(t)) + (N_2(t+s) - N_2(t))$  易验证独立增量性。
3. 由于  $N_i(t+s) - N_i(s) \sim P(\lambda_i t), i = 1, 2$  且独立, 因此  $N(t+s) - N(s) \sim P((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ 。

□

**定理 6.4.** 记定理 6.3 中的两类事件的首达时刻分别为  $T^{(1)}$  和  $T^{(2)}$ , 则  $P(T^{(1)} < T^{(2)}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 。

**例 6.3.** 设  $X \sim Exp(\lambda)$ , 而在  $X = x$  的条件下,  $Y - 1 \sim P(x)$ 。为求出  $Y$  的分布, 首先考虑到达率为  $\lambda$  的“成功”过程, 则  $X$  可视为首次成功的时刻。再考虑到达率为 1 的“失败”过程, 则  $(0, x]$  内“失败”的次数服从  $P(x)$ , 因此  $Y - 1$  可视为首次“成功”之前“失败”的次数, 即  $Y$  为首次“成功”时的事件总数。合并两个过程, 得到一个参数为  $\lambda + 1$  的 Poisson 过程, 且每个事件属于“成功”的概率为  $p = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ , 因此  $Y$  服从参数为  $p$  的几何分布, 即  $P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$ 。

最后介绍在 Poisson 过程在条件作用下的性质。

记  $T_i$  为第  $i$  次到达时刻, 计算可得对于  $0 \leq s \leq t$ , 条件概率  $P(T_1 \leq s | N(t) = 1) = \frac{P(T_1 \leq s, N(t)=1)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(s)=1, N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{P(N(s)=1)P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)} = \frac{\frac{(\lambda s)^1}{1!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$ , 即在  $N(t) = 1$  的条件下,  $T_1 \sim U(0, t)$ 。

一般地, 有如下定理。

**定理 6.5.** 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程, 则  $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2$ , 在  $N(t_2) = n$  的条件下, 有  $N(t_1) \sim B(n, \frac{t_1}{t_2})$ 。

证明. 由 Poisson 过程性质知,  $N(t_1) \sim P(\lambda t_1)$ , 而  $N(t_2) - N(t_1) \sim P(\lambda(t_2 - t_1))$ , 且  $N(t_1)$  和  $N(t_2) - N(t_1)$  相互独立. 据此,  $\forall 0 \leq k \leq n$ , 有

$$\begin{aligned}
 & P(N(t_1) = k | N(t_2) = n) \\
 &= \frac{P(N(t_1) = k, N(t_2) = n)}{P(N(t_2) = n)} \\
 &= \frac{P(N(t_1) = k)P(N(t_2) - N(t_1) = n - k)}{P(N(t_2) = n)} \\
 &= \frac{\frac{(\lambda t_1)^k}{k!} e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{\frac{(\lambda t_2)^n}{n!} e^{-\lambda t_2}} \\
 &= \binom{n}{k} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

□

事实上, 上述讨论适用于任何长度为  $t_1$  的子区间. 因此, 以  $N(t_2) = n$  为条件, 相当于在  $(0, t_2]$  上以均匀分布随机放置  $n$  个到达点, 第  $i$  次到达时刻就是这  $n$  个独立且服从  $U(0, t_2)$  的随机变量的第  $i$  个次序统计量.

一般地, 考虑随机样本  $X_1, \dots, X_n$ , 将它们从小到大排序, 记为  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ , 则称  $X_{(i)}$  为  $X_1, \dots, X_n$  的第  $i$  个次序统计量,  $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . 严谨地说,  $X_{(1)}$  定义为  $\forall \omega \in \Omega, X_{(1)}(\omega) = \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ , 其余同理.

**命题 6.1.** 若连续型随机变量  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 且 CDF 为  $F(x)$ , PDF 为  $f(x)$ , 则

1.  $X_{(k)}$  的 PDF 为  $f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k} f(x)$
2.  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  的联合 PDF 为  $f_{X_{(1)}, \dots, X_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n) (x_1 \leq \dots \leq x_n)$

证明. 考虑小区间  $(x, x + dx]$ , 当  $dx$  充分小时, 有两个及以上随机变量落入其中的概率极小, 因此事件  $X_{(k)} \in (x, x + dx]$  的概率近似为  $\binom{n}{k-1, 1, n-k} F^{k-1}(x) f(x) dx (1-F(x))^{n-k}$ , 即有  $(k-1)$  个随机变量落入  $(-\infty, x]$ , 1 个随机变量落入  $(x, x + dx]$ ,  $(n-k)$  个随机变量落入  $(x + dx, +\infty)$  的概率. 于是  $X_{(k)}$  的 PDF 为  $f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x)(1-F(x))^{n-k} f(x)$ . 类似讨论可知,  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  的联合 PDF 为  $\binom{n}{1, \dots, 1} f(x_1) \cdots f(x_n) = n! f(x_1) \cdots f(x_n) (x_1 \leq \dots \leq x_n)$ . □

**定理 6.6.** 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程, 则在  $N(t) = n$  的条件下, 事件发生时刻  $T_1, \dots, T_n$  的联合 PDF 为  $f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) = \frac{n!}{t^n} (0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t)$ .

证明. 直接应用命题 6.1 的结论即得. 下面给出另一种证明方法的概要.

由于  $\{T_1 = t_1, T_2 = t_2, \dots, T_n = t_n, N(t) = n\}$  等价于  $\{W_1 = t_1, W_2 = t_2 - t_1, \dots, W_n =$

$t_n - t_{n-1}, W_{n+1} > t - t_n\}$ , 其中  $W_i$  为相邻两次到达间隔时间, 且  $W_1, \dots, W_n, W_{n+1}$  相互独立, 且  $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ 。因此

$$\begin{aligned} & f_{T_1, \dots, T_n | N(t)}(t_1, \dots, t_n | N(t) = n) \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \cdot e^{-\lambda(t - t_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{n!}{t^n} (0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t). \end{aligned}$$

需要指出, 这里由  $T_1, \dots, T_n$  的分布过渡到  $W_1, \dots, W_n$  的分布时, 严格的证明过程应当使用密度函数变换的方法。□

这揭示了生成 Poisson 过程的另一种方法。首先从  $P(\lambda t)$  中采样  $n$  为  $(0, t]$  内事件发生数, 然后从  $(0, t]$  中均匀采样  $n$  个点, 即取  $U_1, \dots, U_n$  独立同分布且服从  $U(0, t)$ , 令  $T_k = U_{(k)}$  为各事件发生时刻, 即可确定一 Poisson 过程。

**例 6.4.** 乘客到达火车站可视为一 Poisson 过程, 设到达率为  $\lambda$ 。火车在  $t$  时刻出发, 则  $(0, t]$  内到达的乘客总等待时间的期望为  $E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t - T_i)) = E(E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t - T_i) | N(t)))$ 。而  $E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t - T_i) | N(t) = n) = nt - E(\sum_{i=1}^n T_i | N(t) = n) = nt - E(\sum_{i=1}^n U_i) = nt - n \cdot \frac{t}{2} = \frac{n}{2}t$ , 因此  $E(\sum_{i=1}^{N(t)}(t - T_i)) = E(\frac{N(t)}{2}t) = \frac{\lambda t^2}{2}$ 。

## 6.4 Poisson 过程推广

首先介绍非齐次 Poisson 过程。

**定义 6.6.** 称一个计数过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  为到达率  $\lambda(t) > 0$  的非齐次 Poisson 过程, 若其满足:

1.  $N(0) = 0$
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  有独立增量性
3.  $\forall t \geq 0, P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$
4.  $\forall t \geq 0, P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

令  $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ , 可以证明  $P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(m(t+s) - m(s))^n}{n!} e^{-(m(t+s) - m(s))}$ 。

接下来介绍复合 Poisson 过程。

**定义 6.7.** 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是 Poisson 过程,  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  独立同分布且与  $\{N(t), t \geq 0\}$  独立, 记  $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ , 则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为一复合 Poisson 过程。

最后简介更新过程。Poisson 过程的相邻两次到达间隔时间服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 而如果将其推广为一般分布, 就得到了更新过程。

# 第七章 离散时间 Markov 链

## 7.1 基本概念

本章讨论的离散时间 Markov 链是一种特殊的随机过程，其指标集  $T$  和状态空间  $S$  都是离散的，不妨记为  $T = \{0, 1, \dots\}, S = \{0, 1, \dots\}$ 。

**定义 7.1.** 若随机过程  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  的状态空间为  $S$ ，满足  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i, j, i_0, \dots, i_{n-1} \in S, P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ，则称  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  为（离散时间）Markov 链，上式称为 Markov 性，又称无后效性。

可以直接利用 Markov 性给出  $(X_0, \dots, X_n)$  的联合分布，即

$$\begin{aligned} & P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) \cdots P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \end{aligned}$$

**定义 7.2.** 若  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  为离散时间 Markov 链，称  $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  为其（一步）转移概率，若其与  $n$  无关，则称该 Markov 链关于时间是齐次的，此时记  $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ ，称  $P = (p_{ij})$  为转移概率矩阵。

显然有  $\forall i, j, p_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ 。

状态空间有限时称该 Markov 链为有限链，否则称为无限链。多数情况下只讨论关于时间齐次的有限 Markov 链。

利用转移概率，容易写出  $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$ 。

**例 7.1.** 假设每天的天气只与前一天的天气有关：

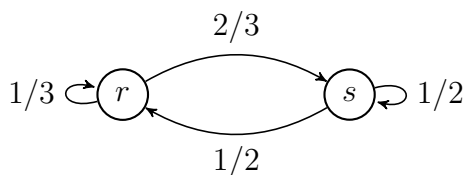
- 若前一天是雨天，则第二天是雨天的概率为  $1/3$ ，晴天的概率为  $2/3$

- 若前一天是晴天，则第二天是雨天的概率为  $1/2$ ，晴天的概率为  $1/2$

则各天的天气构成一个 Markov 链，其状态空间  $S = \{r, s\}$ ，其中  $r$  和  $s$  分别表示雨天和晴天。其转移概率矩阵为

$$\begin{array}{c} r \quad s \\ \begin{array}{c} r \\ s \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

该 Markov 链的转移概率图如下。



**例 7.2.** 设  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  独立同分布，且  $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = -1) = p$ ，令  $X_0 = 0, Y_n = \sum_{i=0}^n X_i$ ，则  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$  是一维随机游走，状态空间  $S = \mathbb{Z}$ ，且其为 Markov 链，转移概率为  $p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = 1 - p$ 。

**例 7.3.** 状态空间为  $S = \{0, \dots, N\}$  的 Markov 链，对于  $i = 1, \dots, N-1$  其转移概率同上例，而  $p_{00} = 1, p_{01} = 0, p_{NN} = 1, p_{N,N-1} = 0$ ，则称为具有吸收壁的随机游走，0 和  $N$  称为吸收态。其转移概率矩阵为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-2 \quad N-1 \quad N \\ \left( \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \end{array}$$

**例 7.4.** 现假设每天的天气只与前两天的天气有关：

- 若前两天是雨天，则第三天是雨天的概率为 0.7，晴天的概率为 0.3
- 若前两天分别是晴天和雨天，则第三天是雨天的概率为 0.5，晴天的概率为 0.5
- 若前两天分别是雨天和晴天，则第三天是雨天的概率为 0.4，晴天的概率为 0.6
- 若前两天是晴天，则第三天是雨天的概率为 0.2，晴天的概率为 0.8



则仍可构造 Markov 链, 其状态空间  $S = \{rr, sr, rs, ss\}$ , 各状态表示近两天的天气, 则转移概率矩阵为

$$\begin{array}{cccc} & rr & sr & rs & ss \\ \begin{array}{c} rr \\ sr \\ rs \\ ss \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

## 7.2 Chapman-Kolmogorov 方程

**定义 7.3.** 若  $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$  为关于时间齐次的 Markov 链, 对  $n \in \mathbb{N}^*$ , 称  $P(X_n = j | X_0 = i)$  为其  $n$  步转移概率, 记为  $p_{ij}^{(n)}$ 。

利用时间齐次性, 可得  $P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i), \forall m, n \in \mathbb{N}$ 。约定

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

**定理 7.1.**  $\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall i, j \in S$ , 有  $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$ 。

证明.

$$\begin{aligned} & p_{ij}^{(m+n)} \\ &= P(X_{m+n} = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j | X_m = k) P(X_m = k | X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}. \end{aligned}$$

□

定理 7.1 称之为 *Chapman-Kolmogorov 方程*。

记  $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$  为  $n$  步转移概率矩阵, 则 C-K 方程可写为  $P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}$ , 由此可得  $P^{(n)} = P^n$ 。

根据 C-K 方程可给出  $X_n$  的边际分布, 即  $P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} P(X_0 = i), \forall j \in S$ 。若记  $\beta_n = (\beta_{n0}, \beta_{n1}, \dots)$ , 其中  $\beta_{ni} = P(X_n = i)$ , 则有  $\beta_n = \beta_0 P^{(n)} = \beta_0 P^n$ 。

## 7.3 状态分类

**定义 7.4.**  $\forall i, j \in S$ , 称状态  $i$  可达状态  $j$ , 若  $\exists n \geq 0, p_{ij}^{(n)} > 0$ , 记作  $i \rightarrow j$ 。若  $i \rightarrow j$  且  $j \rightarrow i$ , 则称  $i$  和  $j$  是互通的, 记作  $i \leftrightarrow j$ 。

**命题 7.1.**  $\leftrightarrow$  是  $S$  上的等价关系, 即其具有

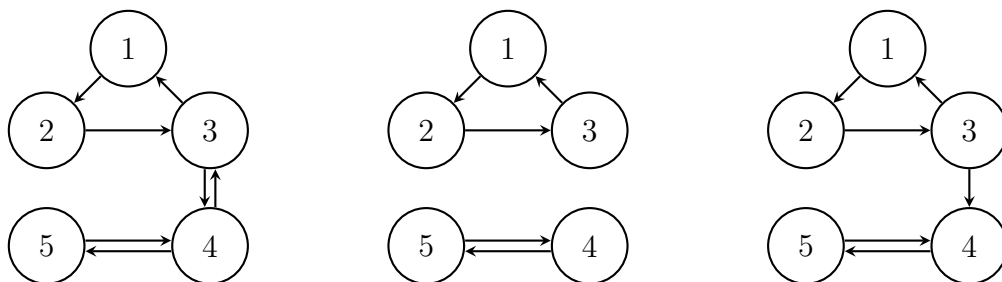
1. 自反性:  $i \leftrightarrow i, \forall i \in S$
2. 对称性:  $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i, \forall i, j \in S$
3. 传递性:  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k, \forall i, j, k \in S$

**证明.** 仅证明传递性。若  $i \rightarrow j, j \rightarrow k$ , 则  $\exists m, n \geq 0, p_{ij}^{(m)} > 0, p_{jk}^{(n)} > 0$ , 由 C-K 方程可得  $p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$ , 故  $i \rightarrow k$ 。同理可证  $k \rightarrow i$ , 故  $i \leftrightarrow k$ 。  $\square$

若  $i \leftrightarrow j$ , 则称  $i, j$  归属一类。

**定义 7.5.** 若某 Markov 链的所有状态只有一类, 则称该链不可约, 否则称为可约。

**例 7.5.** 下图中的三个 Markov 链分别是不可约、可约、可约的。



**定义 7.6.** 记  $f_{ij}^{(n)}$  为从  $i$  出发, 经  $n$  步首次到达  $j$  的概率, 即  $f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j, k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i)$ 。记  $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$  为从  $i$  出发经有限步到达  $j$  的概率。约定  $f_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ 。

**定义 7.7.** 若  $f_{ii} = 1$ , 则称状态  $i$  为常返 (recurrent) 的。若  $f_{ii} < 1$ , 则称状态  $i$  为非常返的或瞬态 (transient) 的。

**定理 7.2.**  $i$  常返等价于  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ 。 $i$  非常返等价于  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$ 。

先证明一个引理。

**引理 7.1.**  $\forall i, j \in S, n \in \mathbb{N}^*$ , 有  $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$ 。

证明. 用数学归纳法. 对  $n = 1$ , 由  $p_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}, p_{jj}^{(0)} = 1$  显然成立. 假设对  $n - 1$  成立, 即  $p_{ij}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-1-k)}$ , 则

$$\begin{aligned}
 & p_{ij}^{(n)} \\
 &= \sum_{l \in S} p_{il}^{(1)} p_{lj}^{(n-1)} \\
 &= p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{l \neq j} p_{il}^{(1)} p_{lj}^{(n-1)} \\
 &= p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{l \neq j} p_{il}^{(1)} \left( \sum_{k=1}^{n-1} f_{lj}^{(k)} p_{jj}^{(n-1-k)} \right) \\
 &= p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{l \neq j} p_{il}^{(1)} f_{lj}^{(k)} \right) p_{jj}^{(n-1-k)} \\
 &= p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k+1)} p_{jj}^{(n-1-k)} \\
 &= p_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{k=2}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\
 &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.
 \end{aligned}$$

□

下面证明定理 7.2.

证明.  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 + f_{ii} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ , 故若  $i$  非常返, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}} < +\infty$ . 而若  $i$  常返, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$ . □

若令  $I_n = \begin{cases} 1, & X_n = i, \\ 0, & X_n \neq i, \end{cases}$  则  $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$  为经过状态  $i$  的次数, 于是  $E(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$  为链从  $i$  出发经过  $i$  的期望次数. 若  $i$  常返, 从  $i$  出发以概率 1 经过  $i$  无穷多次. 若  $i$  非常返, 从  $i$  出发有概率  $(1 - f_{ii})$  回不到  $i$  (逃离  $i$ ), 经过  $i$  的次数为  $k$  的概率为  $f_{ii}^{k-1}(1 - f_{ii})$ , 即经过  $i$  的次数服从几何分布, 链以概率 1 最终逃离  $i$ .

**定理 7.3.** 关于常返性, 有如下性质:

1. 若  $i \leftrightarrow j$ , 则  $i, j$  同为常返态或同为非常返态
2. 有限链至少存在一个常返态
3. 若链有限且不可约, 则所有状态均为常返态

证明. 仅证明性质 1. 由  $i \leftrightarrow j$ , 知  $\exists m, n, p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$ , 且由 C-K 方程知  $p_{ii}^{(m+n+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)}$ , 故  $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} \geq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(m+n+k)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$ . 交换  $i$  与  $j$  可得类似不等式, 故  $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$  与  $\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)}$  相互控制, 二者同为发散或同为收敛, 故  $i, j$  同为常返态或同为非常返态.  $\square$

**例 7.6.** 一维随机游走, 状态空间  $S = \mathbb{Z}$ , 转移概率为  $p_{i,i+1} = p \in (0, 1), p_{i,i-1} = q = 1 - p$ , 则显然其不可约. 可以证明, 若  $p = \frac{1}{2}$ , 则该链常返, 否则非常返.

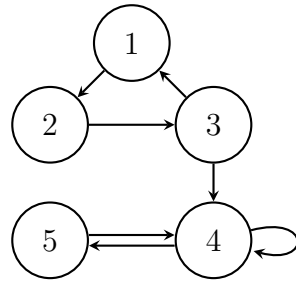
**命题 7.2.** 若  $i \rightarrow j$  且  $i$  常返, 则  $f_{ji} = 1$ .

证明. 若  $f_{ji} < 1$ , 则从  $j$  出发以概率  $1 - f_{ji} > 0$  不能到  $i$ . 又  $i \rightarrow j$ , 则从  $i$  出发有正概率回不到  $i$ , 与  $i$  常返矛盾.  $\square$

上述命题说明, 从常返态出发不能到达非常返态. 对于有限链, 若从非常返态出发, 最终一定会到达某个常返态.

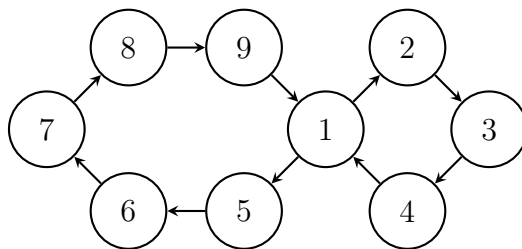
**定义 7.8.** 若集合  $\{n | p_{ii}^{(n)} > 0\}$  非空, 则其所有元素的最大公约数  $d(i)$  称为  $i$  的周期. 若  $d(i) > 1$ , 则称  $i$  为周期的, 否则称为非周期的. 若链的所有状态都是非周期的, 则称链是非周期的, 否则称链是周期的.

**例 7.7.** 下图中的 Markov 链满足  $d(1) = d(2) = d(3) = 3, d(4) = d(5) = 1$ , 因此是周期的.



需注意, 一般情况下  $p_{ii}^{(nd(i))} (n \in \mathbb{N}^*)$  不一定大于 0, 如下例.

**例 7.8.** 下图中的 Markov 链满足  $p_{11}^{(n)} > 0, n = 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ , 故  $d(1) = 2$ , 但  $p_{11}^{(2)} = 0$ .



但可以证明,  $\forall i \in S, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, p_{ii}^{(nd(i))} > 0$ 。

**定理 7.4.** 若  $i \leftrightarrow j$ , 则  $d(i) = d(j)$ 。

证明. 由  $i \leftrightarrow j$ , 知  $\exists m, n, p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$ , 且由 C-K 方程知  $p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{ji}^{(n)} > 0$ 。对于所有满足  $p_{jj}^{(s)} > 0$  的  $s \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $p_{ii}^{(m+n+s)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(s)} p_{ji}^{(n)} > 0$ , 则  $d(i) | m+n+s$  且  $d(i) | m+n$ , 故  $d(i) | s$ , 于是  $d(i) | d(j)$ 。同理可证  $d(j) | d(i)$ , 故  $d(i) = d(j)$ 。□

一般地, 可根据状态的分类对状态重新编号, 实现状态空间的分解, 形如  $S = C_1 \cup \cdots \cup C_r \cup C_0$ , 其中  $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , 且  $C_0$  为非常返状态集, 而  $C_1, \cdots, C_r$  为常返互通类, 此

时转移概率矩阵可写为 
$$\begin{bmatrix} P_1 & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & O \\ O & \cdots & P_r \\ & W & Q \end{bmatrix}$$
。其中,  $P_1, \cdots, P_r, Q$  分别为  $C_1, \cdots, C_r, C_0$  内部的

转移概率矩阵。

## 7.4 稳态性质

**定义 7.9.** 若  $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_j, \cdots)$  为状态空间上的概率分布, 即  $\beta_j \geq 0, \forall j \in S, \sum_{j \in S} \beta_j \equiv 1$ , 且  $\beta P = \beta$ , 则称  $\beta$  为该 Markov 链的平稳分布。

若  $\beta$  是平稳分布且  $X_0$  的分布为  $\beta$ , 即  $P(X_0 = j) = \beta_j, \forall j \in S$ , 则  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $X_n$  的边际分布是  $\beta$ 。

**定义 7.10.** 设  $i$  为常返态, 定义平均首返时间  $u_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ , 若  $u_i < \infty$ , 则称  $i$  为正常返的, 否则称  $i$  为零常返的。

**定理 7.5.** 若  $i$  常返, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd(i))} = \frac{d(i)}{u_i}$ 。特别地, 若  $u_i = +\infty$ , 则  $\frac{d(i)}{u_i} = 0$ 。

**定理 7.6.** 若  $i$  为零常返或非常返, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ 。

证明.

- 若  $i$  为零常返, 则  $u_i = +\infty$ , 由定理 7.5 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd(i))} = 0$ , 而对于不被  $d(i)$  整除的  $m \in \mathbb{N}^*$ , 恒有  $p_{ii}^{(m)} = 0$ 。故  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ 。
- 若  $i$  为非常返, 由  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ 。

□

**定理 7.7.** 若  $i \leftrightarrow j$  且同常返, 则  $i, j$  同为正常返或同为零常返。

**定理 7.8.** 若  $j$  为零常返或非常返, 则  $\forall i \in S, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

证明.

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=1}^M f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=M+1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \\ &\leq \sum_{k=1}^M f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=M+1}^n f_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

由于  $\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = f_{ij} \leq 1$ , 故  $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=M+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} < \epsilon$ , 如此选取上式中的  $M$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} + \epsilon$ . 由定理 7.6 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n-k)} = 0, k = 1, \dots, M$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \leq \epsilon$ , 由  $\epsilon$  的任意性知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ .  $\square$

定理 7.8 的直观理解为, 若  $j$  不是正常返的, 则从  $i$  出发经足够长时间后处于  $j$  的概率很小。

可以证明, 有限链不可能有零常返态, 故不可约有限链的所有状态均为正常返的。并且若链有零常返态, 则必有无穷多个零常返态。

**定义 7.11.** 若  $i$  为正常返的和非周期的, 则称  $i$  为遍历 (ergodic) 的。若链不可约, 且所有状态都是遍历的, 则称链为遍历的。

**定理 7.9.** 对不可约、非周期的 Markov 链, 有以下结论:

1. 若所有状态均为正常返, 则  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} (j \in S)$  是唯一的平稳分布
2. 若所有状态均为零常返或非常返的, 则平稳分布不存在

证明. 仅证明结论 1. 不妨设  $S = \{0, 1, \dots\}$ , 则  $\forall M \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^M p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 1$ , 令  $n \rightarrow \infty$  有  $\sum_{j=0}^M \pi_j \leq 1$ , 再令  $M \rightarrow \infty$  有  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1$ . 又由  $\forall M \in \mathbb{N}^*, p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \geq \sum_{k=0}^M p_{ik}^{(n)} p_{kj}$ , 令  $n \rightarrow \infty$  有  $\pi_j \geq \sum_{k=0}^M \pi_k p_{kj}$ , 再令  $M \rightarrow \infty$  有  $\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}$ . 若此不等式对某个  $j$  取严格大于号, 则  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} p_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k$ , 矛盾。故  $\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}, \forall j \in S$ , 即  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$ . 进而, 有  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P^n$ , 即  $\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{kj}^{(n)}, \forall j \in S$ , 令  $n \rightarrow \infty$  有  $\pi_j = \pi_j \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k, \forall j \in S$ , 故  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ , 至此证明了  $\boldsymbol{\pi}$  是平稳分布。

下证唯一性。若  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots)$  为任一平稳分布, 有  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}P = \dots = \boldsymbol{\beta}P^n$ , 即  $\beta_j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k p_{kj}^{(n)}, \forall j \in S$ , 令  $n \rightarrow \infty$  有  $\beta_j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \pi_j = \pi_j, \forall j \in S$ , 故  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\pi}$ .  $\square$

**命题 7.3.** 若  $i \leftrightarrow j$  且  $j$  为遍历的, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{u_j}$ 。

**定义 7.12.** 若  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  存在, 则  $\pi = (\pi_0, \dots)$  称为该链的极限分布。

于是定理 7.9 的结论 1 可以表述为: 不可约遍历链的极限分布存在, 且为其唯一平稳分布。

若极限分布  $\pi$  存在, 则对于任意函数  $g$ , 有  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} E_{\pi}(g(X)) = \sum_{j=0}^{\infty} g(j)\pi_j$ 。

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{bmatrix}$ , 故对任意初始分布  $\beta$ , 有

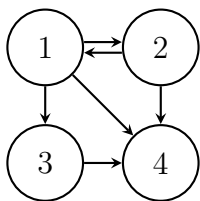
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta P^{(n)} = \beta \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{bmatrix} = \pi.$$

需要强调, 一个链有平稳分布并不意味着其极限分布存在, 例如  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 其平稳分布为  $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$  不存在。

可以证明:

1. 有限链总存在平稳分布
2. 不可约链的平稳分布若存在则唯一

**例 7.9.** PageRank 是 Page 和 Brin 在 1998 年的论文中提出的对搜索引擎搜索结果中的网页进行排名的一种算法, 曾是 Google 搜索引擎的核心算法。设有 4 个网页间的链接关系如下图。



则构造转移概率矩阵  $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ , 其中第四行为均匀分布, 是因为从网页 4 出发没有

任何链接, 故等概率地跳转到任一网页。一般地, 令  $M$  为页面总数, 则  $P$  为  $M \times M$  矩阵, 若  $\pi$  为其平稳分布 (假设存在且唯一), 则访问概率  $\pi_j$  可用于衡量页面  $j$  的重要程度。

但是,  $P$  本身可能可约, 这种情况下不清楚平稳分布唯一性。为此, 取  $\tilde{P} = \alpha P + (1 - \alpha) \frac{J}{M}$ , 其中  $\alpha \in (0, 1)$ , 而  $J$  为  $M \times M$  矩阵且所有元素均为 1, 即将  $P$  与平凡的均匀概率转移进行加权平均。则  $\tilde{P}$  不可约且为有限链, 故所有状态正常返, 再加之非周期性 (因  $\tilde{p}_{ii} > 0, \forall i \in S$ ),

于是根据定理 7.9, 存在唯一平稳分布且为其极限分布, 也记作  $\pi$ 。

原始论文中建议  $\alpha = 0.85$ 。由于  $M$  极大, 直接求解  $\pi$  困难, 故可以利用 Markov 链求解, 即随机选取一个初始概率分布  $\beta$ , 利用  $\beta\tilde{P} = \alpha\beta P + (1-\alpha)\beta\frac{J}{M}$ , 其中  $\beta\frac{J}{M} = (\frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M})$ , 迭代计算  $\beta\tilde{P}^n$ , 当  $n$  足够大时, 即近似为  $\pi$ , 据此给出网页的排名。

## 7.5 可逆性

当状态空间  $S$  很大时, 平稳分布难以直接计算。本节给出一个容易验证的平稳分布的充分条件。

**定义 7.13.** 若  $\pi_j \geq 0, \forall j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ , 且  $\forall i, j \in S, \pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ , 则称链关于  $\pi$  可逆。

**定理 7.10.** 若  $P$  关于  $\pi$  可逆, 则  $\pi$  为其平稳分布。

证明.  $\forall j \in S$ , 有  $\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_j p_{ji} = \pi_j \sum_{i \in S} p_{ji} = \pi_j$ , 故  $\pi P = \pi$ 。又  $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ , 故  $\pi$  为平稳分布。□

**例 7.10.** (无向图上的 Random Walk)

设有一无向图, 其结点集为  $S = \{1, \dots, n\}$ , 边集为  $E$ , 各结点的度分别为  $d_1, \dots, d_n$ , 且

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i}, & (i, j) \in E, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

并记  $\pi_j = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^n d_i}$ , 则对  $(i, j) \in E$  有  $\pi_i p_{ij} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n d_i} = \pi_j p_{ji}$ , 对  $(i, j) \notin E$  有  $\pi_i p_{ij} = 0 = \pi_j p_{ji}$ , 即  $P$  关于  $\pi$  可逆, 故  $\pi$  为其平稳分布。

## 7.6 MCMC

MCMC 的全称是 Markov Chain Monte Carlo, 是一类模拟复杂分布的高效算法, 其基本思想是从状态空间上已知的任意不可约 Markov 链出发, 经过调整, 构建一个不可约 Markov 链, 使其收敛到给定的平稳分布。

下面着重介绍其中的 Metropolis-Hastings 算法。

设  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  为  $S = \{1, \dots, M\}$  上的目标分布,  $\pi_j > 0, \forall j \in S$ , 否则可以删掉  $\pi_j = 0$  的状态  $j$ 。现在已有  $S$  上的某 Markov 链, 转移概率为  $p_{ij}$ , 初始状态  $X_0$  为随机或确定的。若当前状态  $X_n = i$ , 则遵循以下步骤调整链的下一转移:

1. 根据  $p_{ij}$  给出转移到  $j$  的概率
2. 计算接受建议的概率  $a_{ij} = \begin{cases} \min\{\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}, 1\}, & p_{ij} > 0 \\ 1, & p_{ij} = 0 \end{cases}$



3. 若  $j \neq i$ , 调整后, 以概率  $q_{ij} = p_{ij}a_{ij}$  转入  $j$ , 即  $P(X_{n+1} = j|X_n = i) = q_{ij}$ ; 若  $j = i$ , 则  $a_{ii} = 1$ , 有  $q_{ii} = p_{ii} + \sum_{j \neq i} (1 - a_{ij})p_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij}p_{ij} = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}$  的概率留在  $i$ , 即  $P(X_{n+1} = i|X_n = i) = q_{ii}$ 。

可以证明  $Q = (q_{ij})$  为概率转移矩阵且关于  $\pi$  可逆, 故  $\pi$  为其平稳分布。

**例 7.11.** 用 Metropolis-Hastings 算法模拟 Zipf 分布。对于  $a > 0$ , 有  $\pi_k = P(X = k) = \frac{\frac{1}{k^a}}{\sum_{j=1}^M \frac{1}{j^a}}, k = 1, \dots, M$ , 状态空间  $S = \{1, \dots, M\}$ 。建议选择原始链为  $S$  上的 Random Walk, 即

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 而 } a_{ij} = \begin{cases} \min\{\frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i p_{ij}}, 1\}, & |i - j| = 1, \\ 1, & \text{其他,} \end{cases} \text{ 据此给出 } Q = (q_{ij}), \text{ 可}$$

以验证  $q_{ii} > 0, \forall i \in S$ , 故  $Q$  不可约且所有状态遍历, 故  $\pi$  为其唯一平稳分布。

## 第八章 Brown 运动

### 8.1 基本概念

本章的主题 Brown 运动是一种随机连续运动，其指标集  $T = [0, +\infty)$ ，状态空间  $S = \mathbb{R}$ 。

为理解 Brown 运动，先来考虑熟悉的随机游走。假设  $X(0) = 0$ ，各  $X_i$  独立同分布且  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ ，以  $\Delta x$  为步长， $\Delta t$  为时间跨度，令  $t$  时刻的粒子位置为  $X(t) = \Delta x \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} X_i$ ，则  $E(X(t)) = 0$ ， $\text{Var}(X(t)) = (\Delta x)^2 \lfloor t/\Delta t \rfloor$ 。令  $(\Delta x)^2 = \sigma^2 \Delta t$ ，则  $\text{Var}(X(t)) \rightarrow \sigma^2 t (\Delta t \rightarrow 0)$ ，且  $\{X(t)\}$  具有平稳增量性和独立增量性。

**定义 8.1.** 称一个随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为 *Brown 运动*，若其满足：

1.  $X(0) = 0$ （这一要求并不本质）
2.  $\{X(t), t \geq 0\}$  有平稳增量性和独立增量性
3.  $\forall t > 0, X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$

若  $\sigma^2 = 1$ ，称之为标准 *Brown 运动*，记为  $\{B(t), t \geq 0\}$ 。

历史上，Brown 运动是由 Brown 于 1827 年发现的，Einstein 于 1905 年给出了其数学解释，而 Wiener 于 1918 年给出了精确的数学刻画。

根据平稳增量性， $\forall 0 < s < t, B(t+s) - B(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$ 。而根据独立增量性， $\forall s, t > 0, a, x \in \mathbb{R}, P(B(t+s) \leq x | B(s) = a, B(u) (0 \leq u < s)) = P(B(t+s) - B(s) \leq x - a | B(s) = a, B(u) (0 \leq u < s)) = P(B(t+s) - B(s) \leq x - a) = P(B(t+s) \leq x | B(s) = a)$ ，这说明 Brown 运动有 Markov 性（是 Markov 过程）。

可以证明， $B(t)$  以概率 1 关于  $t$  连续且处处不可微。直观地， $E((B(t+\Delta t) - B(t))^2) = \Delta t$ ，故  $B(t+\Delta t) - B(t) \sim \sqrt{\Delta t}$ ，因此  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{\Delta t}$  不存在。

### 8.2 简单性质

由  $B(t) \sim N(0, t)$  知其 PDF 为  $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, x \in \mathbb{R}$ 。

可以证明,  $f_t(x)$  满足  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  (称为热传导方程), 且是其在定解条件  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) \equiv 1, \lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 0, \forall x \neq 0$  下的唯一解。

由  $\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n, B(t_1) = x_1, \cdots, B(t_n) = x_n$  等价于  $B(t_1) = x_1, B(t_2) - B(t_1) = x_2 - x_1, \cdots, B(t_n) - B(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$ , 可得  $B(t_1), \cdots, B(t_n)$  的联合 PDF 为  $f(x_1, \cdots, x_n) = f_{t_1}(x_1)f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$ 。需要指出, 这里由  $B(t_1), B(t_2)-B(t_1), \cdots, B(t_n)-B(t_{n-1})$  的分布过渡到  $B(t_1), \cdots, B(t_n)$  的分布时, 严格的证明过程应当使用密度函数变换的方法。

由于 Brown 运动的良好性质, 原则上我们可以计算任何想要的概率分布。

**例 8.1.**  $\forall 0 < s < t, a \in \mathbb{R}$ , 求在  $B(t) = a$  下  $B(s)$  的条件分布。

由  $B(t) = a, B(s) = x$  等价于  $B(s) = x, B(t) - B(s) = a - x$ , 故所求条件 PDF 为  $f_{B(s)|B(t)}(x|B(t) = a) = \frac{f_s(x)f_{t-s}(a-x)}{f_t(a)} \propto e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(x-a)^2}{2(t-s)}} \propto e^{-\frac{(x-\frac{as}{t})^2}{2\frac{s(t-s)}{t}}}$ , 故  $B(s)|B(t) = a \sim N(\frac{as}{t}, \frac{s(t-s)}{t})$ 。若记  $\alpha = \frac{s}{t}$ , 则  $E(B(s)|B(t) = a) = \alpha a, \text{Var}(B(s)|B(t) = a) = \alpha(1-\alpha)t$ , 即条件方差与  $a$  无关。

**命题 8.1.** Brown 运动具有对称性, 即  $P(B(t_0+t) \geq x_0|B(t_0) = x_0) = P(B(t_0+t) \leq x_0|B(t_0) = x_0) = \frac{1}{2}, \forall t_0 \geq 0, t > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ 。

**定义 8.2.** 若对于  $\forall n \geq 1, \forall 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ , 有  $X(t_1), \cdots, X(t_n)$  服从多元正态分布, 则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为 Gauss 过程。

Brown 运动是 Gauss 过程。

**定理 8.1.** Gauss 过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  是标准 Brown 运动的充要条件为

1.  $X(0) = 0$
2.  $E(X(t)) = 0$
3.  $E(X(t)X(s)) = s, \forall 0 \leq s < t$

证明. 必要性是显然的。下证充分性。

$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , 有  $E((X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))) = t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0$ , 故  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t_4) - X(t_3)$  不相关, 又由多元正态分布性质知  $X(t_2) - X(t_1)$  与  $X(t_4) - X(t_3)$  相互独立, 即证明了独立增量性。又由  $E((X(t) - X(s))^2) = t + s - 2s = t - s, \forall 0 \leq s < t$ , 得  $X(t) - X(s) \sim N(0, t - s)$ , 即证明了平稳增量性, 以及  $X(t) \sim N(0, t)$ 。□

**命题 8.2.** 如下定义的  $\{W(t), t \geq 0\}$  均为标准 Brown 运动。

1.  $W(t) = -B(t), t \geq 0$  (反射, reflection)

2.  $W(t) = B(t+h) - B(h), t \geq 0$ , 其中  $h > 0$  固定 (平移, translation)
3.  $W(t) = \frac{B(at)}{\sqrt{a}}, t \geq 0$ , 其中  $a > 0$  固定 (伸缩, scaling)
4.  $W(t) = tB(\frac{1}{t}), t > 0, W(0) = 0$  (反演, inversion)
5.  $W(t) = B(T-t) - B(T), t \in [0, T]$ , 其中  $T > 0$  固定

### 8.3 首中时与最大值

Brown 运动首次到达  $a$  处的时刻  $T_a = \inf\{t | t \geq 0, B(t) = a\}$  称为  $a$  的首中时, 而  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B(s)$  为  $B(t)$  在  $[0, t]$  上的最大值。

显然  $\forall a \geq 0$ , 事件  $\{T_a \leq t\}$  与  $\{M_t \geq a\}$  等价。注意到对称性 (如图 8.1), 有  $P(B(t) \geq a) = P(T_a \leq t)P(B(t) \geq a | T_a \leq t) + P(T_a > t)P(B(t) \geq a | T_a > t) = P(T_a \leq t)P(B(t) \geq a | T_a \leq t) = \frac{1}{2}P(T_a \leq t)$ , 因此  $P(T_a \leq t) = 2P(B(t) \geq a) = 2(1 - \Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$ 。

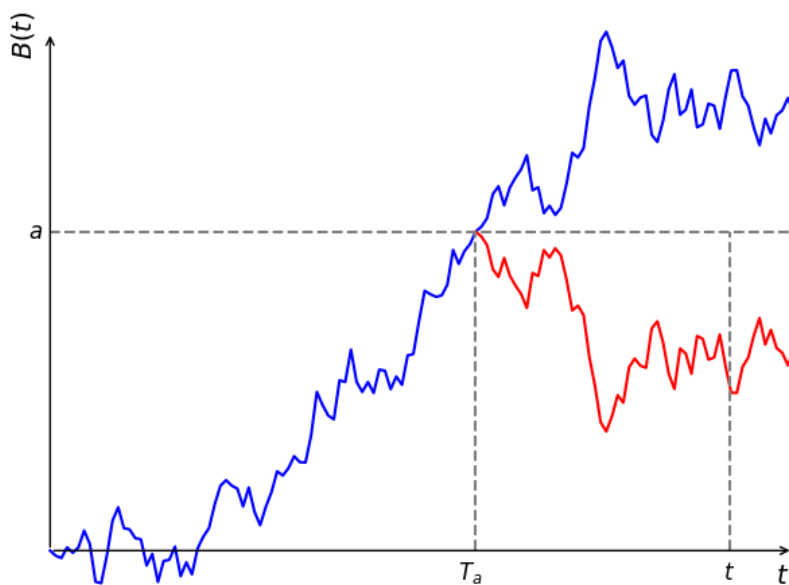


图 8.1: Brown 运动在首中时后的对称性

**命题 8.3.** 粒子从 0 出发, 在有限时刻到达  $a$  的概率为 1, 即  $P(T_a < +\infty) = 1$  (具有常返性); 但首次到达  $a$  的平均用时  $E(T_a) = +\infty$  (具有零常返性)。

## 8.4 变形与推广

首先介绍在一点吸收的 Brown 运动。令  $X(t) = \begin{cases} B(t), & t < T_x, \\ x, & t \geq T_x, \end{cases}$  其中  $x > 0$  固定, 则  $\forall t \geq 0, X(t) \leq x$ 。利用 8.3 节的结论, 有  $P(X(t) = x) = P(T_x \leq t) = 2(1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))$ 。而  $\forall y < x, P(X(t) \leq y) = P(B(t) \leq y, M_t < x) = P(B(t) \leq y) - P(B(t) \leq y, M_t \geq x) = \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}}) - (1 - \Phi(\frac{2x-y}{\sqrt{t}}))$ 。其中  $P(B(t) \leq y, M_t \geq x) = P(B(t) \geq 2x - y, M_t \geq x) = P(B(t) \geq 2x - y) = 1 - \Phi(\frac{2x-y}{\sqrt{t}})$ , 这是因为如图 8.2 的对称性。

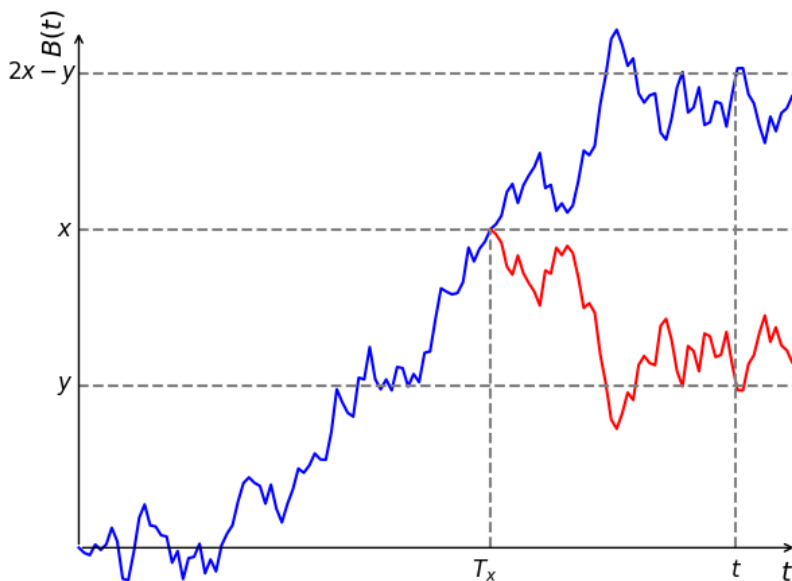


图 8.2: Brown 运动在首中时后的对称性 (2)

接下来介绍漂移 Brown 运动。

**定义 8.3.** 称一个随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  为漂移 Brown 运动, 若其满足:

1.  $X(0) = 0$
2.  $\{X(t), t \geq 0\}$  有平稳增量性和独立增量性
3.  $\forall t \geq 0, X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

其中  $\mu$  和  $\sigma^2$  分别为漂移系数和方差参数。

满足  $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$  的漂移 Brown 运动也可由令  $X(t) = \sigma B(t) + \mu t$  得到。有  $E(X(t)) = \mu t, \text{Var}(X(t)) = \sigma^2 t, X(t) - X(s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)), \forall 0 \leq s < t$ 。

最后介绍几何 Brown 运动。

**定义 8.4.** 若  $\{X(t), t \geq 0\}$  为漂移 Brown 运动, 令  $Y(t) = e^{X(t)}$ , 则称  $\{Y(t), t \geq 0\}$  为几何 Brown 运动。

由定义知, 若  $Y(t)$  为几何 Brown 运动, 则  $\log Y(t)$  为漂移 Brown 运动。设  $\log Y(t) = \mu t + \sigma B(t)$ , 则  $Y(t) = e^{\mu t + \sigma B(t)}$ , 有  $Y(0) = 1, \forall 0 \leq s < t, E(Y(t)|Y(u)(0 \leq u \leq s)) = E(e^{X(t)}|X(u)(0 \leq u \leq s)) = E(e^{X(t)-X(s)}e^{X(s)}|X(u)(0 \leq u \leq s)) = e^{X(s)}E(e^{X(t)-X(s)}) = e^{X(s)}e^{\mu(t-s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} = Y(s)e^{\mu(t-s)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}$ , 即  $Y(t)$  也具有 Markov 性。但需要注意其没有独立增量性。令  $s = 0$ , 得  $E(Y(t)) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ ,  $\text{Var}(Y(t)) = E(Y(t)^2) - E^2(Y(t)) = e^{2t(\mu+\sigma^2)} - e^{2t(\mu+\sigma^2)}$ 。

**例 8.2.** 记  $Y_n$  为某股票在  $n$  时刻的价格, 其收益率  $\frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{Y_n}{Y_{n-1}} - 1$ , 记  $X_n = \frac{Y_n}{Y_{n-1}}$ , 合理假设  $X_n$  独立同分布, 且  $E(\log X_n) = \mu, \text{Var}(\log X_n) = \sigma^2$ , 若  $Y_0 = 1$ , 则  $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$ , 故  $\log Y_n = \sum_{i=1}^n \log X_i$ 。根据 CLT,  $\log Y_n$  近似服从  $N(n\mu, n\sigma^2)$ , 近似为漂移 Brown 运动, 故  $Y_n$  近似为几何 Brown 运动。

## 8.5 Itô 积分

本节介绍关于 Brown 运动的积分。

首先通过一个例子引入形如  $\int_a^b f(B(t))dt$  的均方积分。

**例 8.3.**  $\int_0^t B(u)du$  称之为积分 Brown 运动。设有分划  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ , 记  $\lambda_n = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ 。定义  $S_n = \sum_{k=1}^n B(u_k)(t_k - t_{k-1}) (u_k \in [t_{k-1}, t_k])$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 记为  $Y(t)$ , 则定义  $\int_0^t B(u)du = Y(t)$ 。

需要注意, 定义中出现的极限是均方极限, 以下详述。

**定义 8.5.** 对随机变量  $X, Y$ , 有  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$  是内积 (符合内积的定义)。记  $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$  为其诱导的范数, 则定义  $X$  和  $Y$  的均方距离为  $\|X - Y\|$ 。若一个随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  满足  $E(X^2(t)) = \|X(t)\|^2 < +\infty, \forall t \geq 0$ , 则称其为二阶矩过程。标准 Brown 运动是二阶矩过程。对二阶矩存在的随机变量列  $\{X_n\}$ , 若存在二阶矩存在的随机变量  $X$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0$ , 则称  $X$  为  $\{X_n\}$  的均方极限。

可以证明,  $\{Y(t), t \geq 0\}$  仍为 Gauss 过程, 且  $E(Y(t)) = 0, \text{Var}(Y(t)) = E(Y^2(t)) = E(\int_0^t \int_0^t B(u)B(s)dsdu) = \frac{t^3}{3}$ , 但无独立增量性。

接下来介绍形如  $\int_0^t g(s)dB(s)$  的积分。

**定义 8.6.** 若均方极限  $\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(t_{k-1})(B(t_k) - B(t_{k-1}))$  存在, 则定义  $\int_0^t g(s)dB(s)$  为该极限, 称之为  $g(t)$  关于  $\{B(t), t \geq 0\}$  在  $[0, t]$  上的 Itô 积分。

注意, 上述定义中  $g(t_{k-1})$  为每个小区间的左端点处取值, 若换成其他点的值, 则均方极限不一定存在。特别地, 若换成  $\frac{1}{2}(g(t_k) + g(t_{k-1}))$ , 则均方极限存在, 称之为 Stratonovich 积分。

**例 8.4.** 考虑  $\int_0^t 2B(s)dB(s)$ 。由  $S_n = \sum_{k=1}^n 2B(t_{k-1})(B(t_k) - B(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^n (B^2(t_k) - B^2(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^n (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 = B^2(t) - B^2(0) - \sum_{k=1}^n (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2$ , 其中

$$E\left(\sum_{k=1}^n (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2\right) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = t,$$

而

$$\begin{aligned} & E\left(\left(\sum_{k=1}^n (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - t\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(\sum_{k=1}^n ((B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - (t_k - t_{k-1}))\right)^2\right) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n ((B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 - (t_k - t_{k-1}))^2\right) \\ &+ \sum_{i \neq j} E((B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1}))(E((B(t_j) - B(t_{j-1}))^2 - (t_j - t_{j-1}))) \\ &= \sum_{k=1}^n (E((B(t_k) - B(t_{k-1}))^4) - 2(t_k - t_{k-1})E((B(t_k) - B(t_{k-1}))^2) + (t_k - t_{k-1})^2) \\ &= \sum_{k=1}^n (3(t_k - t_{k-1})^2 - 2(t_k - t_{k-1})^2 + (t_k - t_{k-1})^2) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \\ &\leq 2\lambda_n t \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 = t$  (这称之为 Brown 运动的二次变差, 而可微函数的二次变差总是 0), 于是  $S_n$  的均方极限为  $B^2(t) - t$ , 即  $\int_0^t 2B(s)dB(s) = B^2(t) - t$ 。

上例的结果可形式上写为  $2B(t)dB(t) = dB^2(t) - dt$ 。若在每个小区间选择右端点处的值, 即  $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n 2B(t_k)(B(t_k) - B(t_{k-1})) = S_n + \sum_{k=1}^n 2(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2$ , 则  $\tilde{S}_n$  的均方极限为  $B^2(t) + t$ 。Stratonovich 积分的结果为  $\frac{1}{2}(S_n + \tilde{S}_n)$  的均方极限, 等于  $B^2(t)$ 。

可类似地根据定义计算 Itô 积分  $\int_0^t dB(s) = B(t) - B(0) = B(t)$ 。

一个常用的性质是  $(dB(t))^2 \sim dt$  (只差一个  $dt$  的高阶项)。可以由此形式化地理解  $dB^2(t)$  的表达式: 由 Taylor 展开, 有  $dB^2(t) = 2B(t)dB(t) + \frac{1}{2} \cdot 2(dB(t))^2 + \cdots = 2B(t)dB(t) + dt$ , 其中忽略了  $dt$  的高阶项。

由例 8.4 知  $dB^2(t) = 2B(t)dB(t) + dt$ , 为回答更一般的问题, 即  $df(t, B(t))$  的表达式, 引入以下定义。

**定义 8.7.** 若  $\forall t \geq 0, \int_0^t dX(s) = X(t) - X(0) = \int_0^t \alpha(s)ds + \int_0^t \beta(s)dB(s)$ , 其中  $\int_0^t |\alpha(s)|ds < +\infty, E(\int_0^t \beta^2(s)ds) < +\infty$ , 则称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为 Itô 过程, 记为  $dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t)$ 。

**定理 8.2.** 设  $f(t, x)$  关于  $t, x$  分别有一阶、二阶连续偏导, 则

$$df(t, B(t)) = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, B(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B(t)) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t)) dB(t),$$

上式称之为 Itô 微分公式。

证明. 仅给出描述性简略说明。由  $dx = dB(t)$ , 故  $df = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, B(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B(t)) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t)) dB(t)$ .  $\square$

一般地, 若  $dX(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dB(t)$ ,  $Y(t) = f(t, X(t))$ , 则有

$$dY(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\alpha(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\beta^2(t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\beta(t)dB(t).$$

**例 8.5.** 设  $t$  时刻的股价为  $S(t)$ , 其服从几何 Brown 运动  $dS(t) = S(t)(u dt + \sigma dB(t))$ 。取  $f(t, S(t)) = \log S(t)$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$ , 故  $d \log S(t) = (u - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma dB(t)$ , 即  $\log S(t) = \log S(0) + (u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$ , 故  $S(t) = S(0)e^{(u - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}$ 。

**例 8.6.** 设  $t$  时刻的股价为  $S(t)$ , 一种金融产品称之为欧式看涨期权 (European Call Option), 拥有该期权的人可以在  $T$  时刻选择是否“行权”, 即是否以某预先指定的执行价格  $K$  买入股票。显然, 应当行权当且仅当  $S(T) > K$ 。期权在  $t$  时刻的价格定义为  $g(t, S(t))$ , 则  $g(T, S(T)) = \max\{S(T) - K, 0\}$ 。假设股价服从几何 Brown 运动  $dS(t) = S(t)(u dt + \sigma dB(t))$ , 则由 Itô 微分方程有  $dg(t, S(t)) = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial S} S(t)u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} S^2(t)\sigma^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial S} S(t)\sigma dB(t)$ 。称  $P(t) = g(t, S(t)) - \delta S(t)$  为一个投资组合 (Portfolio), 其中  $-\delta S(t)$  项表示同时做空该股票, 于是  $dP(t) = dg(t, S(t)) - \delta dS(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \left( \frac{\partial g}{\partial S} - \delta \right) S(t)u + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} S^2(t)\sigma^2 \right) dt + \left( \frac{\partial g}{\partial S} - \delta \right) S(t)\sigma dB(t)$ 。为进行风险对冲以消除随机波动的影响, 取  $\delta = \frac{\partial g}{\partial S}$ , 则  $dP(t) = \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} S^2(t)\sigma^2 \right) dt$ 。假设无套利机会, 即  $dP(t) = rP(t)dt$ , 其中  $r$  为无风险利率, 故  $\frac{\partial g}{\partial t} + rS \frac{\partial g}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 = rg$ , 称之为 Black-Scholes 方程, 其终值条件为  $g(T, S(T)) = \max\{S(T) - K, 0\}$ 。

该模型中涉及的主要假设包括: 股票服从几何 Brown 运动、无套利机会、标的资产不支付利息、可做空、无交易税费、 $\sigma$  保持不变、 $r$  为已知常数、交易连续等。

历史注记 (对随机微分方程的发展作出贡献的几位数学家):

1. Bachelier (1900)
2. Samuelson (1930)
3. Black-Scholes & Merton (1973)