Résolution numérique de systèmes d'équations linéaires

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.
Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

La méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.

Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- Permutation de deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$.

La méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.

Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- Permutation de deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul: $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.

La méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss consiste à transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.

Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- Permutation de deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul: $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.
- Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne: $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

Étude d'un exemple

Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss le système (S) suivant :

$$(S)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = -3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 & = 1 \end{cases}$$

Le système (S) peut s'écrire sous la forme matricielle : $AX = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

La matrice A est composée par les coefficients de (S), le vecteur X est composé par les inconnues de (S) et le vecteur b est composé par les seconds membres des équations de (S).
A est inversible (car $\det(A) = 32 \neq 0$) $\Rightarrow$ (S) admet dans $\mathbb{R}^3$ une unique solution.

Nous décrivons le principe de cette méthode par les opérations suivantes :

Nous décrivons le principe de cette méthode par les opérations suivantes :

- Opération 1 : Écrire la matrice élargie relative à (S), notée par $(A|b)$, et déterminer un premier pivot non nul.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Remarque

Si le coefficient $a_{11} = 0$, il faut permuter la première ligne L_1 avec une ligne L_i telle que $a_{i1} \neq 0, \quad i \in \{2, 3\}$.

Nous décrivons le principe de cette méthode par les opérations suivantes :

- Opération 1 : Écrire la matrice élargie relative à (S), notée par $(A|b)$, et déterminer un premier pivot non nul.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Remarque

Si le coefficient $a_{11} = 0$, il faut permuter la première ligne L_1 avec une ligne L_i telle que $a_{i1} \neq 0, \quad i \in \{2, 3\}$.

- Opération 2: Annuler tous les coefficients situés au dessous du premier pivot. Dans cet exemple, le premier pivot est "3".

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \left(\frac{1}{3}\right) L_1$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \left(\frac{1}{3}\right) L_1$$

$$
(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 & -10/3 \\ 0 & 2/3 & -10/3 & 2/3 \end{array}\right)
$$

$$(A_1|b_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -10/3 & 2/3 & -10/3 \\ 0 & 2/3 & -10/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

- Opération 3: Appliquer la même stratégie en considérant le deuxième pivot:
  1. Vérifier que ce pivot est non nul (sinon, on permute les lignes L_2 et L_3).
  2. Annuler tous les coefficients situés au dessous du deuxième pivot. Dans cet exemple, le deuxième pivot est "$-\frac{10}{3}$".

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \left(\frac{1}{5}\right) L_2$$

$$(A_2|b_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-10/3}} & 2/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & (-48)/15 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi on obtient un système triangulaire supérieur (S') équivalent au système (S) :

$$(S')\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad -\frac{10}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 & = -\frac{10}{3} \\ \qquad\quad -\frac{48}{15}x_3 & = 0 \end{cases}$$

(S') est simple à résoudre: en utilisant l'algorithme de la remontée,

$$\begin{array}{lcl} (L_3) & \Longrightarrow & x_3 = 0. \\ (L_2) & \Longrightarrow & x_2 = 1. \\ (L_1) & \Longrightarrow & x_1 = 0. \end{array}$$

Conclusion : La solution du système (S) est $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$.

Algorithme de la méthode du Pivot de Gauss

1. Triangularisation:

Algorithm 1 Algorithme de Pivot de Gauss

Require: A, b
Ensure: $\widetilde{A}$
$\widetilde{A} \leftarrow A|b$ `matrice élargie`
On notera :
— $L_i^{(k)}$ `La ligne` i `de la matrice` $\widetilde{A}$ `à l'itération` k
— $a_{i,j}^{(k)}$ `le scalaire` $a_{i,j}$ `de la matrice` $\widetilde{A}$ `à l'itération` k
$\widetilde{A}^{(0)} = \widetilde{A}$
for $k = 1, ..., n$ **do**
  if existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{(k-1)} \neq 0$ **then**
    $L_i^{(k)} \longleftrightarrow L_k^{(k)}$
    $L_i^{(k)} \longleftarrow L_i^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} L_k^{(k-1)}$
  else
    A `n'est pas inversible, abandonner.`
  end if
end for
return $\widetilde{A}^{(n)}$ `Une matrice triangulaire supérieure`

2. Résolution d'un système triangulaire:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ii} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_n} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}} \underbrace{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{\text{somme}} \end{cases}$$

Fonction $x = \text{triang}(A, b)$

$x_n \leftarrow \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

pour $i = n - 1$ jusqu'à 1

  somme $\leftarrow b_i$

  pour $j = i + 1$ jusqu'à n

    somme $\leftarrow$ somme $- a_{ij} x_j$

  fait

  $x_i \leftarrow \dfrac{\text{somme}}{a_{ii}}$

fait