

# Proyecto: Control de Velocidad de un Motor DC

Ezequiel Matsuo

Septiembre 2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo matemático de un motor DC</b>	<b>1</b>
<b>3. Componentes utilizados</b>	<b>2</b>
<b>4. Identificación del sistema</b>	<b>2</b>
4.1. Identificación de la Planta: Puente H + Motor . . . . .	2
4.1.1. No linealidades + Sistema de 1er orden . . . . .	2
4.2. Filtrado del sensor . . . . .	4
<b>5. Diseño del controlador</b>	<b>5</b>
5.1. Controlador PI . . . . .	6
5.1.1. Lugar de Raíces . . . . .	6
5.1.2. Resultados experimentales . . . . .	7
<b>6. Conclusiones</b>	<b>9</b>

## 1. Introducción

El proyecto consiste en realizar la identificación y posterior control de velocidad de un motor DC a través de un convertidor puente H. El objetivo es poder aplicar y poner en práctica el diseño de un controlador en una planta real.

La idea es realizar un modelo simple del sistema completo para no complejizar luego el diseño del controlador.

## 2. Modelo matemático de un motor DC

Se identifican dos ecuaciones diferenciales que modelan al motor de corriente continua: la parte eléctrica y la parte mecánica.

$$\tau_m - \tau_L = J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m \quad (1)$$

$$\tau_m = K_T i_a \quad (2)$$

$$V_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E_a \quad (3)$$

$$E_a = K_E \omega_m \quad (4)$$

Las ecuaciones 1 y 2 corresponden a la parte mecánica y las ecuaciones 3 y 4 a la parte eléctrica.

Para nuestro modelo matemático vamos a considerar las siguientes aproximaciones para simplificar las ecuaciones: asumir que la fricción viscosa B es despreciable y que la constante eléctrica es significativamente

menor a la mecánica por lo que se asume que  $L_a = 0$ . En base a dichas consideraciones se aproxima al motor como un sistema de primer orden:

$$\frac{\omega_m}{V_a} = \frac{1/K_E}{1 + s\tau_m} \quad (5)$$

Siendo  $\tau_m = JR_a/(K_T K_E)$ .

Se agregarán luego no linealidades además de la transferencia anterior para mejorar el modelo del motor y el puente H.

### 3. Componentes utilizados

Tanto la medición de la velocidad del motor como el control se realizó a partir de una placa Arduino. Se utilizó el encoder de efecto hall AS5600 para medir las revoluciones del motor. Se utilizó la siguiente librería del sensor: <https://github.com/RobTillaart/AS5600>.

Para controlar el motor se utilizó el driver puente H L298N, donde es posible cambiar el sentido de giro a través de las entradas 'IN0' e 'IN1'. Para controlar la tensión que excita al motor se utiliza una modulación PWM a través de la entrada 'ENA' del modulo L298N.

Para obtener la velocidad angular del motor a partir del encoder se debe calcular la diferencia de las posiciones angular. Experimentalmente se vió que la máxima velocidad alcanzada para la máxima alimentación (19.5V) es de 3600rpm o 60 revoluciones por segundo. Como es necesario calcular la velocidad a partir de las posiciones angulares del encoder, se requiere que el sensor mida al menos cada  $1/60 = 16,7ms$  ya que sino estaría perdiéndose rotaciones. Experimentalmente se fijó el tiempo con interrupciones por Timer cada  $4ms$  ya que se obtuvieron mejores resultados en la medición.

### 4. Identificación del sistema

#### 4.1. Identificación de la Planta: Puente H + Motor

La identificación de los parámetros se hizo a lazo abierto utilizando la transferencia de primer orden de la ecuación 5.

Se utilizó una interrupción por Timer2 para generar la medición de la velocidad y la acción de control. A su vez se utilizó el modulo Timer1 para generar la señal PWM que controla el puente H.

Se utilizó una frecuencia de  $25kHz$  de forma que el motor trabaje en modo de conducción continua y la relación  $V_a = DV_{cc}$  sea válida, siendo  $V_{cc}$  la tensión máxima de alimentación al puente H.

El ciclo de trabajo del PWM se controla a partir del registro OCR1A, siendo su valor máximo en registro de 639 para una frecuencia de  $25kHz$ .

Para la identificación del sistema a lazo abierto se generaron escalones de tensión (para ser precisos, lo que se modifica es el ciclo de trabajo del PWM).

##### 4.1.1. No linealidades + Sistema de 1er orden

El sistema completo del convertidor Puente H y el motor de continua se modeló de la siguiente manera: un sistema de primer orden con no linealidades de saturación, de zona muerta y un retardo, como se observa en el recuadro amarillo de la figura 4.

La no linealidad de saturación se agregó por el voltaje máximo que podía alcanzar el motor: 17V (el voltaje máximo de alimentación del convertidor es 19V pero se tiene en cuenta las caídas en los MOSFETs.)

La no linealidad de zona muerta se modeló en base a la curva mostrada en la figura 1, a partir de la observación de que existía un voltaje mínimo que el motor debía vencer para ponerse en funcionamiento.

La ecuación de la recta queda expresada como:

$$\omega_m = 47,64(V_a - 8,512) \quad (6)$$

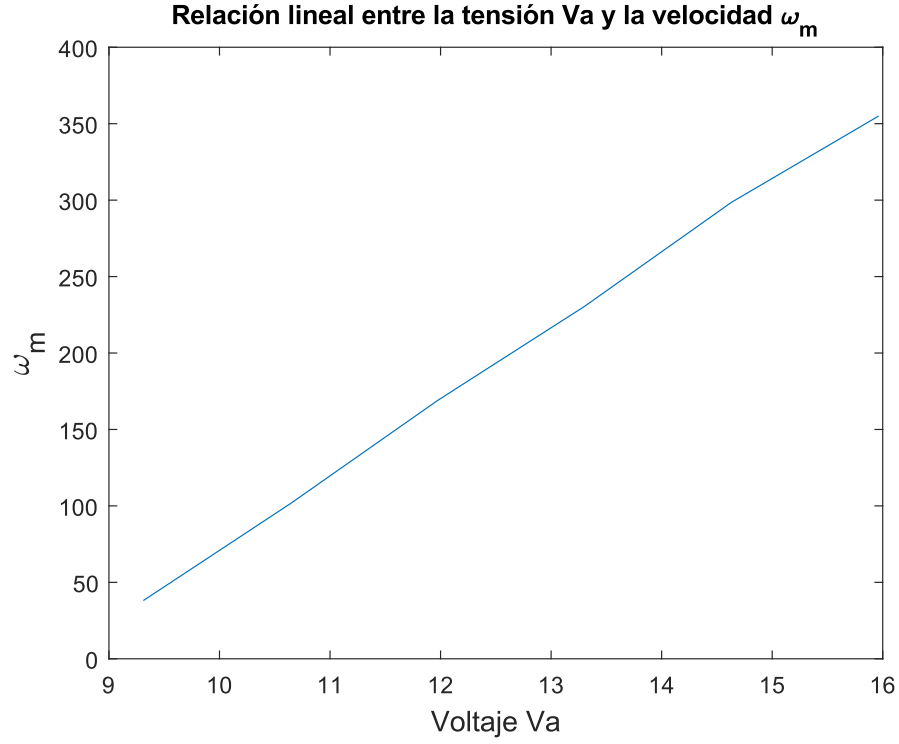


Figura 1:  $\omega_m$  vs  $V_a$

La recta anterior (ganancia mas offset) puede ser modelada como un sistema de primer orden y un bloque de zona muerta. Por tanto, la transferencia de primer orden que modela el motor queda identificada como:

$$\frac{\omega_m}{V_a} = \frac{47,64}{0,04s + 1} \quad (7)$$

Mientras que la zona muerta se extiende dentro de  $-8,512$  a  $8,512$ . En la figura 2 se muestra la respuesta de velocidad a diferentes escalones de tensión del sistema identificado con las no linealidades y el sistema real sin filtro en el sensor de velocidad.

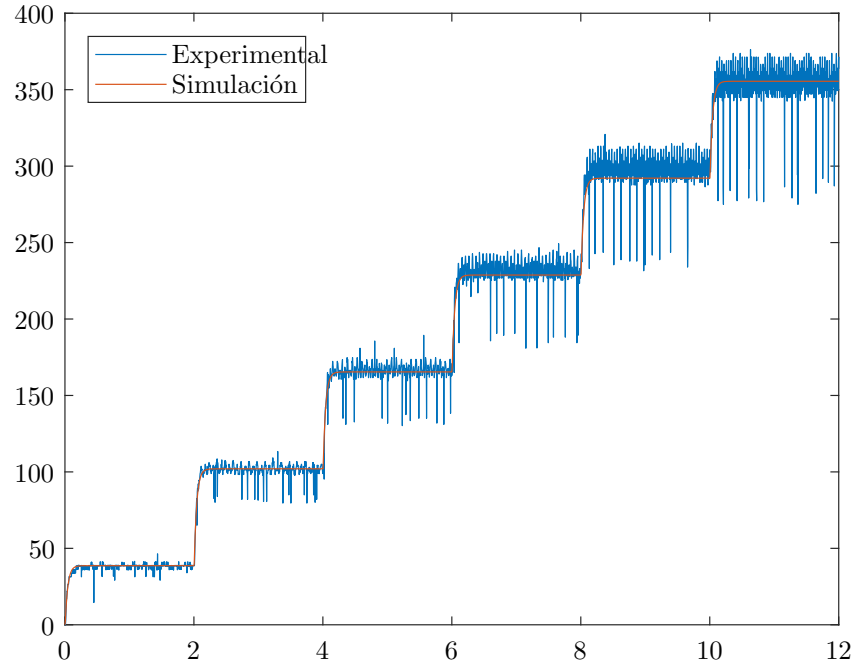


Figura 2: Respuesta a escalones de tensión a lazo abierto

La idea fue tratar de modelar lo mejor posible el sistema a partir de bloques simples y no complejizarlo demasiado.

A partir de la identificación, podemos determinar los siguientes parámetros del motor:

$R_a$	29 $\Omega$
$K_E$	0,0209 $(V \cdot s)/rad$
$K_T$	0,0209 $(N \cdot m)/A$
$J_m$	$6,02 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot m^2$

Cuadro 1: Parámetros Identificados

## 4.2. Filtrado del sensor

Los datos de velocidad se obtienen al calcular la diferencia entre posiciones angulares absolutas obtenidas del sensor AS5600, produciendo mediciones no precisas. Para ello se utilizaron diferentes filtros: dos promedios móviles de 2 y 4 muestras y un filtro IIR Butterworth de 1er orden, como se observan en la figura 3.

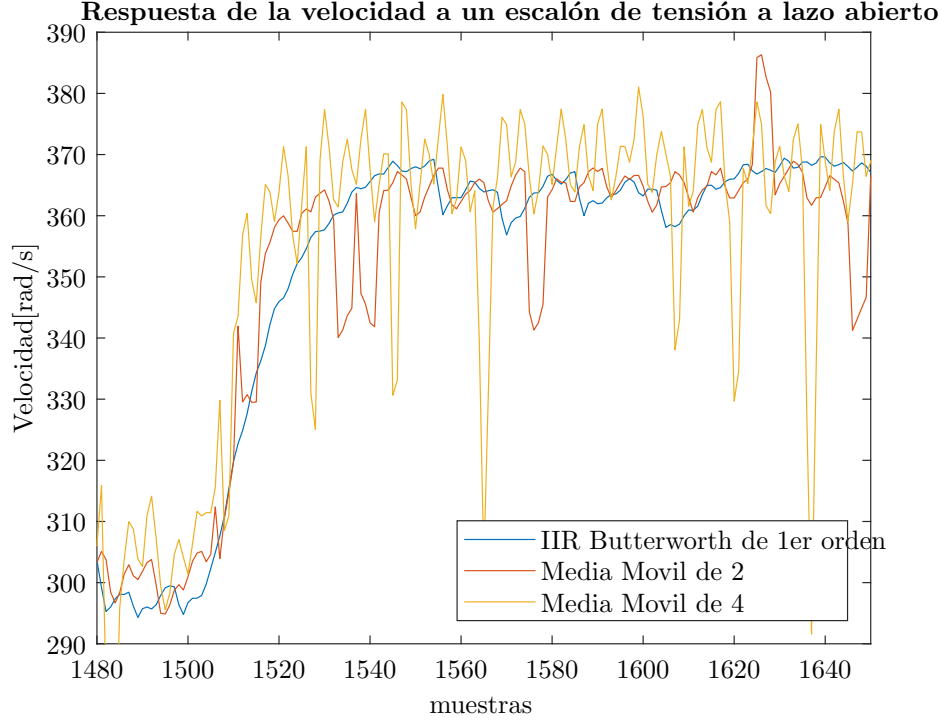


Figura 3: Comparativa entre los diferentes filtros

Se puede apreciar que el que mejor filtrado produce es el filtro Butterworth; sin embargo este filtro tiene la desventaja que genera un desfase no lineal de la fase e introduce un mayor retardo con respecto a los otros filtros. Como la distorsión en la respuesta no es tan evidente, se terminó utilizando el filtro Butterworth.

Se eligió un filtro de 1er orden para no complejizar la transferencia del sistema. Por tanto, teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo es  $T_s = 4ms$  y definiendo una frecuencia de corte del filtro pasabajos  $f_c = 10Hz$ , se obtuvo la siguiente transferencia del filtro Butterworth en el dominio discreto:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,1122 + 0,1122z^{-1}}{1 - 0,7757z^{-1}} \quad (8)$$

## 5. Diseño del controlador

A partir de la identificación del modelo se obtuvo una constante de tiempo  $\tau_m = 40ms$ .

De esta forma si consideramos una frecuencia de muestreo 10 veces más rápido que la frecuencia de corte del sistema se tiene una cota dada por  $t_s \leq 4ms$ . Por tanto, se definió que la acción de control va a actuar cada  $4ms$ .

Se analizarán dos controladores: uno proporcional y otro proporcional-integral. Para ambos casos no tendremos en cuenta las no linealidades de saturación y zona muerta para el diseño del controlador. Sin embargo, sí se considerará el retardo  $z^{-1}$  en la transferencia del sistema así como el retenedor de orden cero que modela el valor medio del PWM que sale del microcontrolador. Por tanto, para ambos diseños se tendrá en cuenta que la transferencia de la planta es:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-T_s}}{s} \frac{K}{s\tau_m + 1}\right\} z^{-1} = K(1 - z^{-1}) \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{\tau_m}{1 - e^{-T/\tau_m} z^{-1}} \right) z^{-1} \quad (9)$$

El término  $\mathcal{Z}\left\{\frac{1 - e^{-T_s}}{s} \frac{K}{s\tau_m + 1}\right\}$  corresponde a la transformada Z de la función pulso del retenedor de orden cero y la transferencia de primer orden. Teniendo en cuenta que la constante de tiempo  $\tau_m = 40ms$  y el

tiempo de muestreo es  $T = 4ms$ , se obtiene la transferencia con los siguientes valores:

$$G(z) = 47,64 \left( \frac{0,96 - 0,8648z^{-1}}{1 - 0,9048z^{-1}} \right) z^{-1}$$

En base al lazo cerrado mostrado en la figura 4 y teniendo en cuenta un controlador  $C(z)$ , tendremos la siguiente transferencia a lazo cerrado:

$$\frac{\Omega(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)} \quad (10)$$

Donde  $\Omega(z)$  es la transformada Z de la velocidad,  $R(z)$  el de la referencia y  $H(z)$  corresponde al filtro Butterworth de la ecuación 8.

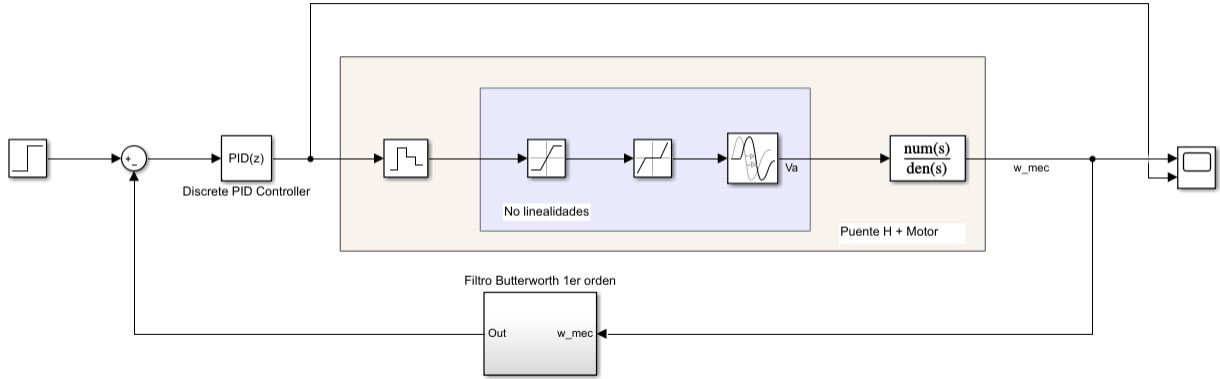


Figura 4: Diagrama del lazo cerrado en Simulink

## 5.1. Controlador PI

### 5.1.1. Lugar de Raíces

Se diseñó un controlador PI digital con la siguiente expresión:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{I \cdot T_s}{z - 1} \right) \quad (11)$$

Donde  $K_p$  es la ganancia proporcional,  $I$  la constante de la integral y  $T_s$  el periodo de muestreo. La ecuación característica está dado por:

$$C(z)G(z)H(z) = -1 \quad (12)$$

Para simplificar los cálculos, como el cero y el polo de la transferencia de  $G(z)$  están muy próximos entre sí, vamos a considerar que ambos se cancelan. De modo que la ecuación característica se aproximará a la siguiente:

$$C(z)G(z)H(z) \approx 47,64 \cdot K_p \left( \frac{z - 1 + I \cdot T_s}{z - 1} \right) \frac{(0,1122 + 0,1122z^{-1})}{(1 - 0,7757z^{-1})} z^{-1} \quad (13)$$

Para el diseño del controlador aproximaremos nuestro sistema a uno de segundo orden, de manera que definiremos como parámetros de diseño al factor de amortiguamiento  $\xi$  y la pulsación angular natural  $\omega_n$ . De esta manera podemos expresar el tiempo de establecimiento y la máxima sobreelongación a partir de los parámetros anteriores.

El tiempo de establecimiento para un sistema de 2do orden con subamortiguamiento ( $0 < \xi < 1$ ) está dado por:

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_o}$$

En tanto la máxima sobreelongación  $M_p$  como:

$$M_p = \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$$

Si definimos un tiempo de establecimiento de unos  $100ms$  y una sobreelongación máxima de  $1\%$ , tendremos los siguientes valores:  $\xi = 0,82$  y  $\omega_n = 48rad/s$ . Esto correspondería a unos polos complejos conjugados en el plano  $s$  de  $s_{1,2} = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -39,6 \pm 28j$ .

Para pasar al plano discreto, se cumple que  $e^{sT}$ , de modo que los polos complejos se mapean al plano discreto como:  $z_{1,2} = 0,8468 + 0,095j$ .

En base a la condición de ángulo del lugar de raíces, se obtiene que el cero del controlador debe aportar unos  $25^\circ$ . De modo que la constante integral  $I$  se obtiene de la siguiente ecuación.

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{0,095}{0,8468 + 1 - I \cdot T_s} \right) \quad (14)$$

Por consiguiente tenemos que  $I = 410$  y a partir de la condición de magnitud se obtiene que la constante proporcional del controlador debe ser  $K_p = 0,00123$ .

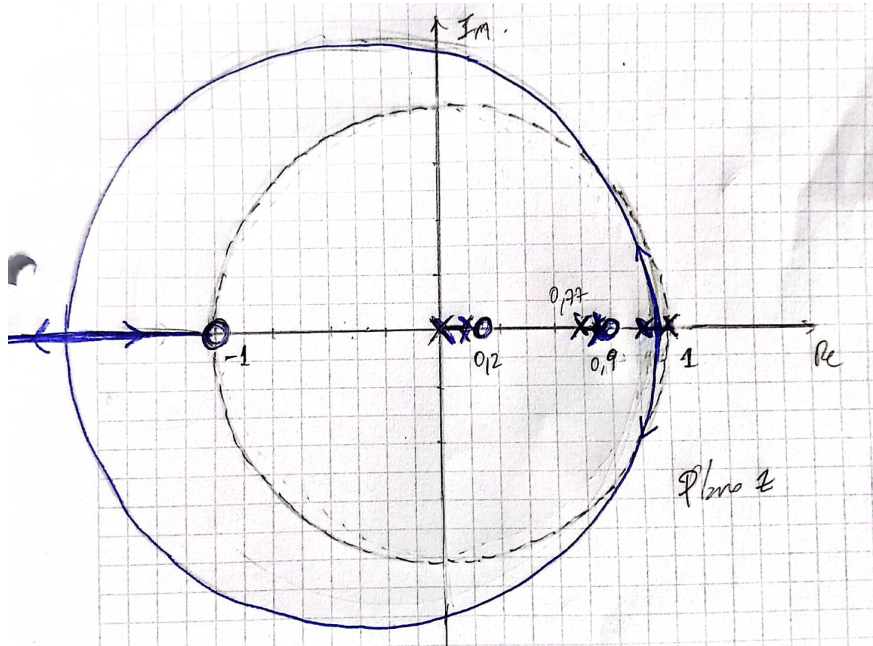


Figura 5: Lugar de Raíces para el sistema con control PI

En la figura 5 se observa el lugar de raíces de la ecuación característica. Se observa que tenemos 4 polos y 3 ceros, por tanto tendremos una sola asíntota: el eje real. Se observa como los polos en 1 y 0.9048 se dirigen hacia el cero en -1 y hacia  $-\infty$  en el eje real. Luego los demás polos se dirigen hacia el cero más cercano. Se puede calcular que el sistema se inestabiliza para un valor de  $K_p = 0,08$ .

### 5.1.2. Resultados experimentales

A partir de las simulaciones se vió que la máxima sobreelongación sobrepasaba el valor inicial calculado por lo que se modificó a la mitad la constante integral  $I$ . Esta diferencia entre los valores calculados y la simulación de la planta completa se deben a los siguientes puntos: se simplificó la ecuación característica del sistema (ignorando el cero y polo de  $G(z)$ ) y los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  corresponden a parámetros de un sistema de 2do orden, cuando el nuestro corresponde a 2 ceros y 4 polos.

Por consiguiente, los valores del controlador PI discreto quedaron definidos como  $I = 200$  y  $K_p = 0,00123$ . En la figura 6 se observa la respuesta a escalones de referencia de 0 a  $200rad/s$  en el tiempo  $t = 0s$  y de

$200\text{rad/s}$  a  $300\text{rad/s}$  en el tiempo  $t = 2\text{s}$ . La velocidad experimental de la figura 6 se filtró de forma 'offline', la velocidad real posee más ruido. Como el encoder utilizado es uno de posición, para obtener las velocidades se tiene que calcular la diferencia entre posiciones. Este ruido no afecta la respuesta del sistema ya que existe un filtro en la realimentación y como se observa en la acción de control (Figura 7) no se ve excitado por las altas frecuencias del ruido.

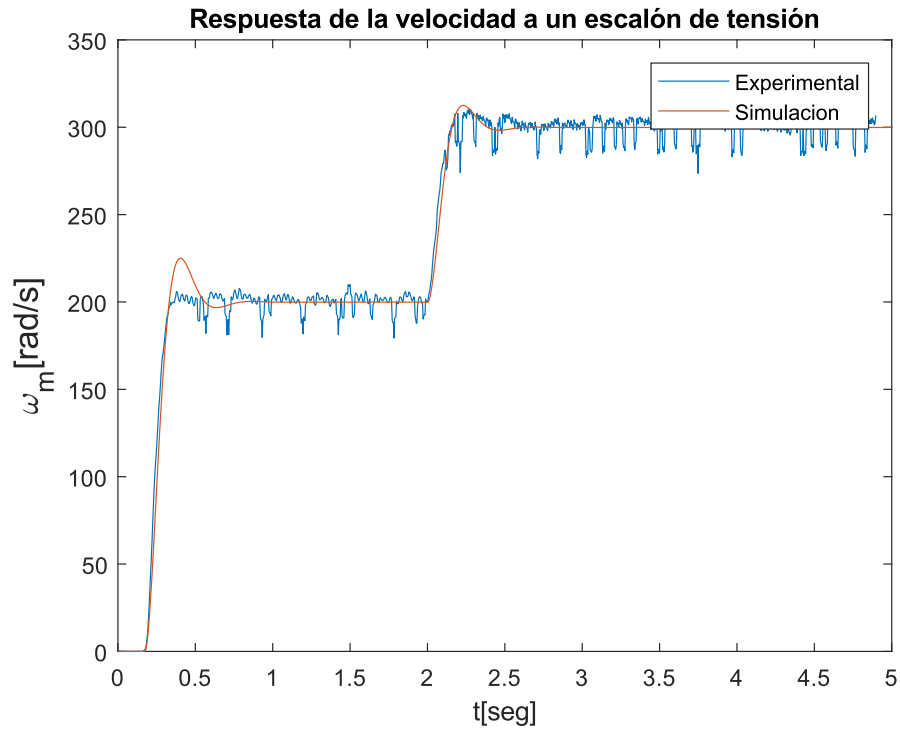


Figura 6: Respuesta a escalones de referencia con  $I = 200$  y  $K_p = 0,00123$ . La respuesta se filtró de forma offline debido al ruido del sensor. Este ruido del sensor no afecta la acción de control.



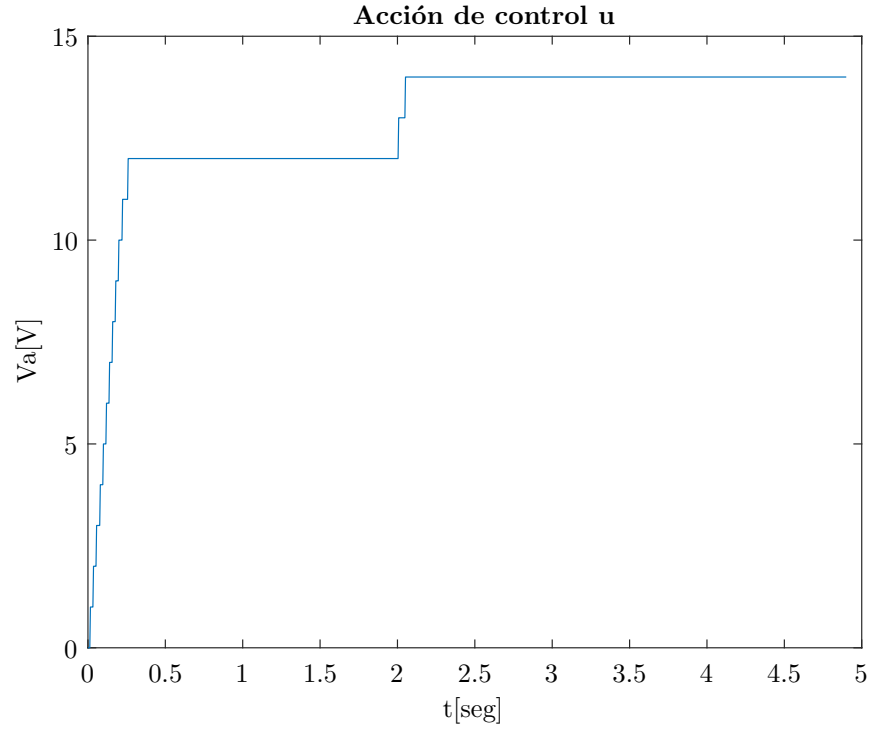


Figura 7: Acción de control experimental

## 6. Conclusiones

Lo más complicado de este proyecto fue la correcta identificación del sistema, ya que se tuvieron que añadir no linealidades (zona muerta, saturación y retardo) que no se habían tenido en cuenta en un inicio.

Otro de los puntos importantes a tener en cuenta en el control de este sistema fue el correcto filtrado de la velocidad mecánica debido a que se utiliza un encoder de posición. Se tiene que realizar una diferencia para obtener la medición, por lo que de esta manera existe mucho ruido. Para ello se optó por un filtro Butterworth debido a que es simple y con un menor orden, donde se obtuvieron buenos resultados.

En un futuro, se analizarán otras acciones de control, como una realimentación de estados, para realizar comparaciones entre ellas.