

Teoria de Valuacion de Activos Financieros

Resumen y notas de la clase

Bibliografia: Investments - Bodie 13th edition

Ezequiel Telias

1. Efficient Diversification

La decision de inversion puede verse como un top-down process. Primero, alocaion de capital entre un portafolio riesgoso y activos libre de riesgo. Luego, la alocaion de activos ente el portafolio riesgoso a traves de diferentes tipos de instrumentos (Acciones locales, internacionales bonos a largo plazo). Finalmente, seleccion de securities de un activo individual entre diferentes tipos de instrumentos (Apple, Microsoft entre activos de US).

1.1. Diversification and Portfolio Risk

Suponiendo que un portafolio se compone por un activo, se puede decir que las dos principales fuentes de incertidumbre son, el riesgo que viene de factores de la economia en general y el riesgo especifico de la firma. Ejemplificando una diversificacion ingenua, suponemos que tenemos un portafolio dividido en dos activos, ExxonMobil y Microsoft. Existen dos riesgos especificos de la empresa, por ejemplo, si baja el precio del petroleo, podemos deducir que bajara el precio de ExxonMobil pero esto tambien puede ayudar a que el precio de las tecnologicas suban generando dos efectos de offsetting y estabilizacion de los retornos del portafolio.

Concluyendo, si diversificamos para tener una cantidad grande de activos, igualmente no podemos mitigar el riesgo del mercado.

Insurance principle: Cuando todos los riesgos son especificos de la firma, la diversificacion puede reducir el riesgo a niveles arbitrariamente bajos. La razon es porque estos son independientes entre si, y la exposicion a cualquier fuente de riesgo puede ser reducida a niveles casi nulos. Entonces, la reduccion de riesgo bajo propagacion hacia muchos riesgos independientes es llamada principio de insurance.

1.2. Portfolios of Two Risky Assets

Se introduce el termino de diversificacion eficiente, donde se construyen portafolios con el menor riesgo y mayor nivel de retorno.

Se tienen dos activos con riesgo, un bono de deuda a largo plazo llamado D y una accion de equity llamado E. Se denota w_E como el peso de E y siendo que tenemos dos activos, el peso de D sera $1 - w_E$. Entonces la tasa de retorno de este portafolio r_p se calcula multiplicando el peso por la tasa de retorno de cada security.

$$r_p = w_D \cdot r_D + w_E \cdot r_E$$

El retorno esperado del portafolio es similar siendo:

$$E(r_p) = w_D \cdot E(r_D) + w_E \cdot E(r_E)$$

A diferencia, de los retornos esperados, no alcanza con multiplicar el peso del activo en el portafolio con su varianza. El calculo real seria el siguiente, pero al tener la covarianza de cada activo con si mismo igual a su varianza se puede simplificar. Entonces la varianza del portafolio es la suma de los pesos de los activos en el portafolio multiplicado por su covarianza.

$$\sigma_p^2 = w_D w_D \text{Cov}(r_D, r_D) + w_E w_E \text{Cov}(r_E, r_E) + 2w_D w_E \text{Cov}(r_D, r_E)$$

$$\sigma_p^2 = w_D^2 \sigma_D^2 + w_E^2 \sigma_E^2 + 2w_D w_E \text{Cov}(r_D, r_E)$$

Se introduce el término de bordered matrix, que es la matriz de covarianza con los pesos del portfolio de cada activo. Supongamos un portafolio con dos activos A y B , con pesos w_A y w_B , y la siguiente matriz de covarianzas:

$$\begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \text{Cov}(A, B) \\ \text{Cov}(B, A) & \sigma_B^2 \end{bmatrix}$$

La bordered covariance matrix sería:

$$\begin{array}{c|cc} & w_A & w_B \\ \hline w_A & \sigma_A^2 & \text{Cov}(A, B) \\ w_B & \text{Cov}(B, A) & \sigma_B^2 \end{array}$$

Para calcular la **varianza del portafolio** σ_p^2 , se multiplica cada elemento interno de la matriz por los pesos correspondientes en su fila y columna, y se suman todos los productos:

$$\sigma_p^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \cdot \text{Cov}(r_i, r_j)$$

Ejemplo numérico:

Supongamos:

- $w_A = 0,6$, $w_B = 0,4$
- $\sigma_A^2 = 0,04$, $\sigma_B^2 = 0,09$
- $\text{Cov}(A, B) = 0,03$

Entonces:

$$\sigma_p^2 = (0,6)^2 \cdot 0,04 + (0,4)^2 \cdot 0,09 + 2 \cdot (0,6)(0,4) \cdot 0,03 = 0,0432$$

Este enfoque es útil especialmente cuando se trabaja con matrices grandes o en hojas de cálculo, ya que permite visualizar fácilmente cómo los pesos afectan la varianza total del portafolio.

La covarianza también puede ser computada con el coeficiente de correlación:

$$\text{Cov}(r_D, r_E) = \rho_{DE} \cdot \sigma_D \cdot \sigma_E \quad (7.6)$$

- ρ_{DE} : correlación entre los activos D y E
- σ_D , σ_E : desvíos estándar de los activos D y E

$$\sigma_p^2 = w_D^2 \cdot \sigma_D^2 + w_E^2 \cdot \sigma_E^2 + 2w_D w_E \cdot \sigma_D \cdot \sigma_E \cdot \rho_{DE}$$

Que pasa cuando un activo tiene un peso menor a 0? Un peso w_E negativo, implica que el activo fue vendido short, y reinvertido en otro fondo.

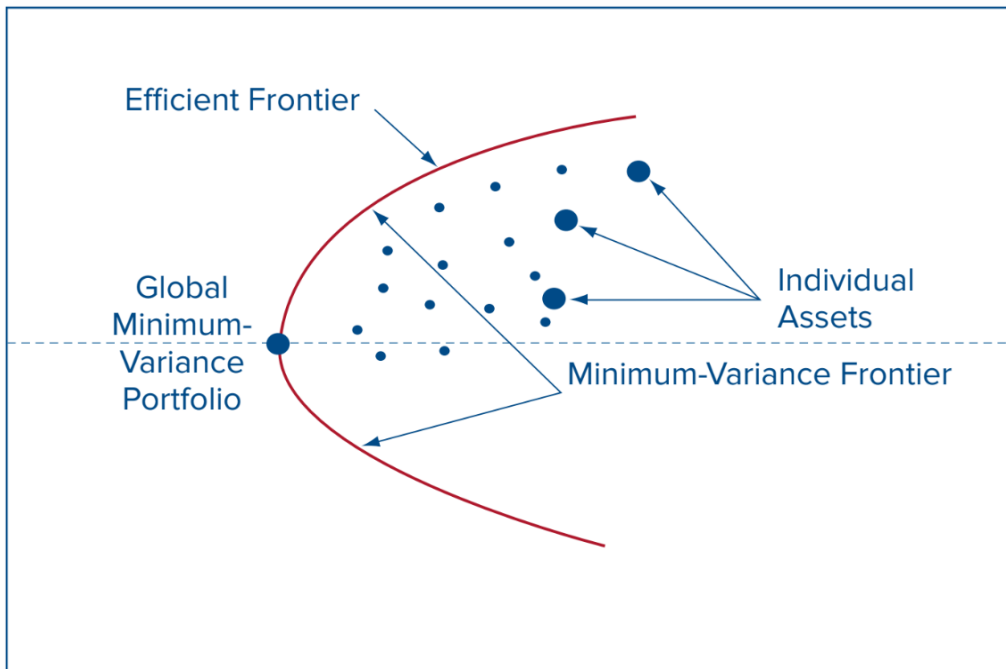
1.3. The Markowitz Portfolio Optimization Model

1.3.1. Security Selection

Primero, se van las combinaciones disponibles de riesgo retorno para activos de riesgo. Luego, identificaremos el portfolio optimo buscando las ponderaciones que resultan en la CAL (Linea de asignacion de capital) mas empinada. Finalmente, elegimos un portfolio combinando activos libre de riesgo con el portfolio optimo.

El primer paso es buscar la frontera de minima varianza de los activos libre de riesgo. Esta frontera es un grafo de los puntos de menor varianza por retorno esperado.

$E(r)$

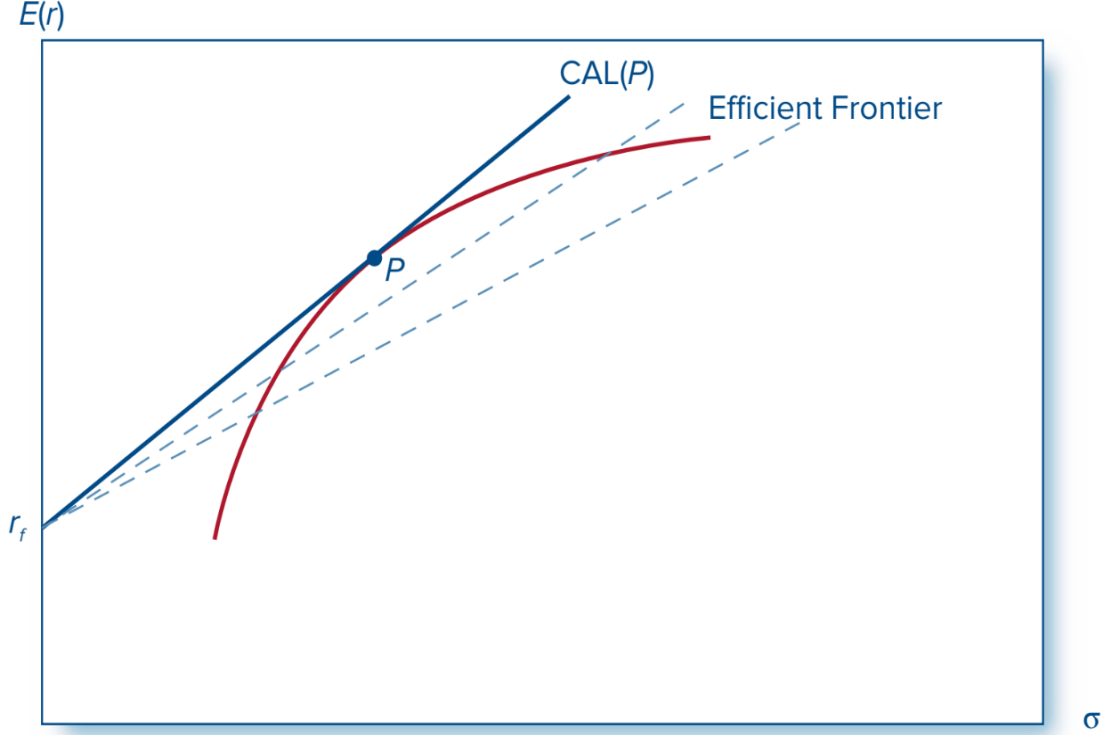


σ

Se puede ver que

- Todos los activos individuales se encuentran dentro de esta frontera, al menos cuando permitimos construccion de portfolios con short selling.
- Todos los potfolios que estan dentro de la frontera de minima varianza desde el minimo global tienen el mejor ratio de riesgo-retorno y se llama frontera eficiente de activos riesgoso
- Todos los activos por debajo de la curva tienen una opcion con mejor retorno. Entonces esta parte de la curva es ineficiente.

La segunda parte de la optimizacion incluye los activos libre de riesgo. Como antes, buscamos la CAL con el Sharpe ratio mas alto (o la pendiente mas empinada). Esta CAL se genera a partir del portfolio optimo P, tangente a la frontera eficiente. Esta CAL domina todas las posibles alternativas dentro de la frontera. Entonces P es el portfolio optimo.



Finalmente, el inversor toma una decision entre el portfolio con riesgo P y los activos libre de riesgo.

El administrador del portfolio ahora tiene un n estimados de retornos esperados $E(r_i)$ y un $n \times n$ estimados de matriz de covarianza, en donde la diagonal son estimados de las varianzas σ_i^2 . Teniendo todos los datos se concluye en las siguientes formulas.

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i) \quad (1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j) \quad (2)$$

1.4. Capital Allocation and the Separation Property

En el paso dos incluimos los activos libres de riesgo.