1 Definition of Derivative

Definição 1.1. A function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentiable at $x \in \mathbb{R}$, if there exists a number $f'(x)$ such that:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon) \text{ - } f(x)}{\varepsilon} = f'(x)$$

– – Pause – –

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon) \text{ - } f(x)}{\varepsilon} - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon) \text{ - } f(x) - (\varepsilon \cdot f'(x))}{\varepsilon} = 0$$

– – Pause – –

Definição 1.2. A function $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is differentiable at $x \in \mathbb{R}^m$, if there exists a unique linear transformation $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ such that:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|f(x + \varepsilon) \text{ - } f(x) - \lambda(\varepsilon)\|}{\|\varepsilon\|} = 0$$

– – Substituir todos os slides até "Derivate as linear map", exclusivé, com o que está acima e mudar o titulo de "Derivate as linear map" para "Haskell type signature" (placeholder para o titulo).

2 O que vou dizer

- Como a diferenciação automática está relacionada com a computação de derivadas, precisamos de definir o que é uma derivada.
- Bem, irei começar com a definição usual que todos conhecem. Com isto, podemos dizer que a derivada de f no ponto x, representada nestes slides por f'(x), é uma aproximação linear local de f em x. Mas esta definição é uma particularidade de uma definição muito mais geral.
- Usando tranformações simples na equação original, temos estas duas equivalências.
- E com isto, mostrarei a definição geral de derivilidade de $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$, com n e m números naturais quaisquer. A transformação linear que é dita nesta definição é a expressão epsilon "vezes" f' (x).
- Como f'(x) é uma transformação linear podemos representar a derivada de uma função como uma matriz Jacobiana, onde no caso original que vimos, podemos representar a derivada como uma matriz com um só elemento. Chegamos a uma boa generalização e passaremos agora para uma implementação em Haskell.

- – – No Teorema 3 – – Isto, explica-se em parte com a frase "f'(x) é uma aproximação linear local de f em x"que eu disse anteriormente. (Existe a ideia do livro que revolve pela ideia $\varepsilon * f'(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ ser a transformação linear).