

**UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI**

**Programa de Pós-Graduação**

**Heitor Cardoso de Brito**

**APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO PREDADOR-PRESA DE LOTKA-  
VOLTERRA NO CONSUMO DO GÁS CARBÔNICO ATMOSFÉRICO POR  
ÁRVORES NA CIDADE DE IPATINGA/MG**

**Teófilo Otoni**

**2019**



**Heitor Cardoso de Brito**

**APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO PREDADOR-PRESA DE LOTKA-  
VOLTERRA NO CONSUMO DO GÁS CARBÔNICO ATMOSFÉRICO POR  
ÁRVORES NA CIDADE DE IPATINGA/MG**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Mírez Tarrillo

**Teófilo Otoni**

**2019**

Ficha Catalográfica  
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM  
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

B862a Brito, Heitor Cardoso de.  
2019 Aplicação do modelo matemático predador-presa de Lotka-Volterra no consumo do gás carbônico atmosférico por árvores na cidade de Ipatinga/MG. / Heitor Cardoso de Brito. Teófilo Otoni, 2019.  
152 p. ; il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Mirez Tarrillo.

1. Lotka-Volterra. 2. Predador-presa. 3. Equações diferenciais não lineares. 4. Dióxido de carbono. 5. Fotossíntese. I. Título.

**CDD: 510**

**Heitor Cardoso de Brito**

**APLICAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO PREDADOR-PRESA DE LOTTKA-VOLTERRA NO CONSUMO DO GÁS CARBÔNICO ATMOSFÉRICO POR ÁRVORES NA CIDADE DE IPATINGA/MG**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Tecnologia, Ambiente e Sociedade da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Mírez Tarrillo

Data de aprovação 24/01/2019.

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Mírez Tarrillo  
Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia - UFVJM

---

Prof. Dr. Alexandre Faissal de Brito  
Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia - UFVJM

---

Prof. Dr. Jairo Lisboa Rodrigues  
Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia - UFVJM

---

Prof. Dra. Silvia Swain Canôas  
Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas e Exatas - UFVJM

---

Prof. Dr. Willerson Custódio da Silva  
Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia de Minas Gerais - IFMG

**Teófilo Otoni, 24 de janeiro de 2019**



## **DEDICATÓRIA**

Dedico esta vitória a Deus e a todos aqueles que me querem bem.





## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de poder viver e completar mais uma etapa bem-sucedida em minha vida.

À minha amada esposa Elessandra, pelo apoio incondicional e enorme paciência nas horas mais difíceis. Essa vitória é sua também!

Aos meus familiares pelo incentivo. Mãe, obrigado pelos ensinamentos! Pai, não me esqueço de você. Iris, Quel, Alana, a distância só nos faz unir.

Ao Instituto Federal de Ciência, Educação e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) *campus* Governador Valadares por aceitar, aprovar o meu desafio e contribuir para que ele se completasse.

A todos os servidores e demais funcionários da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), em especial aos professores Dr<sup>a</sup>. Alessandra de Paula Carli e Dr. Caio César de Souza Alves pela excelente condução e coordenação do programa de mestrado em Engenharia, Ambiente e Sociedade, à Diane pela presteza, boa-vontade e proatividade em suas tarefas. E é claro, ao prof. Carlos Alberto Mírez Tarrillo, o meu eterno agradecimento pela oportunidade concedida e apoio dado... ainda temos artigos para publicar!

A todos os colegas do programa de mestrado TAS do ano de 2017 com os quais ingressei e aos amigos de outros anos e programas que por lá conheci. Carlos, Neuber e Tamila, obrigado pelas companhias nas idas e vindas a Teófilo Otoni.

Obrigado Luziane A. Oliveira, sem a sua participação nada disso seria feito. Um pequeno passo para você, um salto quântico para mim... obrigado mesmo!

Professores da UFVJM, vocês são excelentes no que fazem... obrigado por me dar conhecimento!



*Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar,  
mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade se me revela.*  
Albert Einstein.



## RESUMO

O presente trabalho busca explicar, com base na implementação de um modelo matemático de equações diferenciais, a evolução temporal das concentrações do gás dióxido de carbono atmosférico (CO<sub>2</sub>) a curto e longo prazos, partindo de hipóteses sobre as emissões do referido gás, seu consumo através da fotossíntese de plantas e de dados sobre a taxa de crescimento e de mortalidade vegetal. Há um vasto referencial literário que registra os malefícios causados pelo aumento da concentração dos níveis de CO<sub>2</sub>: um deles é o aquecimento global; outro, menos conhecido, relaciona-se com a fisiologia vegetal. Para esta última, a maior intensidade de gás carbônico na atmosfera pode influenciar na redução da taxa de fotossíntese líquida das plantas. O sistema de equações matemáticas utilizado é proveniente do modelo de Lotka-Volterra, também conhecido como predador-presa; o arquétipo aqui utilizado considera que os vegetais são os predadores do CO<sub>2</sub>. A coleta de dados envolveu a obtenção de informações históricas (outubro de 2013 a outubro de 2017) dos índices de monóxido de carbono atmosférico provenientes de três estações automáticas de monitoramento de qualidade do ar instaladas nos bairros Bom Retiro, Cariru e Cidade Nobre, na cidade de Ipatinga/MG, Brasil. Constatou-se, com um nível de 5% de significância e *p-value* de 0.579, que os valores de CO<sub>atm</sub> coletados semanalmente nas três estações podem seguir a curva Normal de distribuição com captação de  $213.000 \pm 41.000$  ppm semanais. Já em relação ao modelo matemático de Lotka-Volterra, de posse das populações iniciais das presas e dos predadores e do cálculo das taxas de natalidade e mortalidade de ambos, concluiu-se que a experiência se aderiu perfeitamente ao modelo de equações diferenciais não linear, com pontos de equilíbrio de 2.177 ppm de CO<sub>2</sub> e 5.329 árvores adultas, e ciclos de 2.057 anos. Constatou-se também que há um *déficit* de 405 vegetais em relação ao número de árvores plantadas no ano de 2017. É importante ressaltar que a região do Vale do Aço, da qual a cidade de Ipatinga faz parte, abriga grandes indústrias de base (siderúrgicas), de bens de capital (máquinas, metalúrgicas e equipamentos) e de consumo (indústrias alimentícias, papel etc.). O intuito desse trabalho é mostrar que existem meios para se calcular a quantidade certa de vegetais para mitigar ou até mesmo eliminar o volume de CO<sub>2</sub> produzido pela ação humana nas cidades.

**Palavras chave:** Lotka-Volterra. Predador-presa. Equações diferenciais não lineares. Dióxido de carbono. Fotossíntese.



## ABSTRACT

Based on the implementation of a mathematical model of differential equations, the present work seeks to explain the temporal evolution of atmospheric carbon dioxide (CO<sub>2</sub>) concentrations in the short and long term, based on hypotheses about the emissions of this gas, its consumption through photosynthesis of vegetables and data of growth rate and plant mortality. There is a vast literary framework that records the harms caused by the increased concentration of CO<sub>2</sub> levels: one is global warming; another, less known, is related to plant physiology. For the latter, the higher intensity of carbon dioxide in the atmosphere may influence the reduction of the net photosynthesis rate of the plants. The mathematical equations system used comes from the Lotka-Volterra model, also known as predator-prey; the archetype used here considers that vegetables are the CO<sub>2</sub> predators. The data collection involved the acquisition of historical information (october/2013 to october/2017) of the atmospheric carbon monoxide indices from three automatic air quality monitoring stations installed in the Bom Retiro, Cariru and Cidade Nobre neighborhoods, in the city of Ipatinga/MG, Brasil. It was found at a level of 5% significance and p-value of 0.579, that the CO<sub>atm</sub> values collected at the three stations can follow the Normal distribution curve with capture of  $213,000 \pm 41,000$  ppm weekly. In relation to the Lotka-Volterra's mathematical model, with the initial populations of prey and predators and calculating of birth and death rates of both, it was concluded that the experiment adhered perfectly to the model of nonlinear differential equations, with equilibrium points of 2,177 ppm CO<sub>2</sub> and 5,329 adult trees and cycles of 2,057 years. It was also observed that there is a deficit of 405 plants in relation to the number of trees planted in the year 2017. It is important to point out that the 'Vale do Aço' region, in which the Ipatinga's city forms part, shelters large basic industries (steel mills), industrials sector (machinery, metallurgical and equipment) and consumption (food industries, paper etc.). The aim of this work is to show that there are ways to calculate the right amount of vegetables to mitigate or even eliminate the amount of CO<sub>2</sub> produced by human action in cities.

**Keywords:** Lotka-Volterra. Predator prey. Nonlinear differential equations. Carbon dioxide. Photosynthesis.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistemas (a) aberto, (b) fechado e (c) isolado .....	35
Figura 2 – Expansão de um gás e geração de trabalho .....	38
Figura 3 – Charge elaborada para ilustrar o significado de entropia.....	40
Figura 4 – Espontaneidade (ou não) de uma reação .....	41
Figura 5 – Processo básico da realização da fotossíntese.....	43
Figura 6 – Curva de absorção da luz pela clorofila .....	46
Figura 7 – Influência da intensidade da luz na fotossíntese .....	48
Figura 8 – O clássico experimento de Olle Björkman para respostas a diferentes densidades de fluxo quântico .....	49
Figura 9 – Influência da concentração de CO <sub>2</sub> na fotossíntese .....	50
Figura 10 – Influência da temperatura na fotossíntese .....	51
Figura 11 – Coleta de amostras de uma população e inferência estatística para a população..	53
Figura 12 – Alguns dos modelos de estudo destinados à inferência estatística indutiva .....	53
Figura 13 – Erros tipo I e tipo II cometidos em testes de hipóteses .....	57
Figura 14 – Interação entre os erros tipo I e II .....	58
Figura 15 – Interpretação do nível de significância $\alpha$ com o p-value em testes de hipóteses ..	60
Figura 16 – Distribuição das notas dos alunos supondo que (a) não há diferença entre as turmas e (b) existem diferenças entre as mesmas.....	62
Figura 17 – Alguns critérios de decisão propostos por Field (2011) para testes <i>post hoc</i> em análises estatísticas .....	64
Figura 18 – Etapas para a elaboração de um sistema de equações diferenciais .....	68
Figura 19 – Tipos de soluções encontradas em um sistema autônomo .....	73
Figura 20 – Estabilidade e instabilidade de sistemas .....	74
Figura 21 – Aproximação de $y(x_1)$ usando a reta tangente de Euler .....	78
Figura 22 – Classificação da pesquisa .....	85
Figura 23 – Localização do município de Ipatinga/MG.....	88
Figura 24 – Bairros onde se instalaram as estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, em Ipatinga/MG.....	89
Figura 25 – Registros mensais de CO <sub>atm</sub> pelas estações automáticas de monitoramento do ar (comparação dos totais com três e com quatro estações) .....	94
Figura 26 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Bom Retiro .....	95

Figura 27 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Cariru.....	96
Figura 28 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Cidade Nobre .....	96
Figura 29 – Coeficiente de variação para medições horárias de CO <sub>atm</sub> em três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar em Ipatinga/MG .....	97
Figura 30 – <i>Box plot</i> para medições semanais de CO <sub>atm</sub> durante e após o tratamento dos dados .....	102
Figura 31 – comportamento geral dos dados semanais de CO <sub>atm</sub> após o ajuste fino dos dados .....	106
Figura 32 – Gráfico <i>box plot</i> para dados semanais de CO <sub>atm</sub> após o ajuste fino de dados. Período: janeiro-2015 a dezembro-2016 .....	107
Figura 33 – Histograma para os dados semanais de CO <sub>atm</sub> das estações analisadas (2015-2016) .....	109
Figura 34 – Crescimento ‘populacional’ de dióxido de carbono nos últimos 60 anos .....	115
Figura 35 – Dados de entrada e cálculos numéricoa para a implementação gráfica do modelo. ....	121
Figura 36 – Solução do modelo predador-presa: espaço de fase (C, L) .....	123
Figura 37 – Variações nas populações de presas e de predadores em função do tempo .....	125

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre o espectro da luz e o comprimento de onda ( $\lambda$ ) .....	45
Tabela 2 – Principais radiações de interesse biólogo .....	46
Tabela 3 – Significados dos valores de <i>p-value</i> em estudos clínicos .....	61
Tabela 4 – Coeficientes de variação para o monóxido de carbono atmosférico (médias horárias mensais) registrados em três estações de monitoramento em Ipatinga/MG.....	97
Tabela 5 – Quantidades e percentuais de pontos discrepantes no conjunto de dados antes dos ajustes dos dados não coletados (dados horários) .....	98
Tabela 6 – Percentual de pontos discrepantes no conjunto de dados aplicando-se o fator de correção .....	98
Tabela 7 – Número de horas registradas e não registradas em três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar em Ipatinga/MG.....	100
Tabela 8 – Quantidade total de CO <sub>atm</sub> registrado nas estações automáticas de monitoramento do ar e verificação do número de <i>outliers</i> antes, durante e depois dos tratamentos estatísticos .	101
Tabela 9 – Remoção e/ou substituição dos dados semanais discrepantes por valores médios no ano de 2016.....	102
Tabela 10 – Número de semanas (tratamentos) encontrados em cada ano .....	105
Tabela 11 – Análise de variância para valores semanais de CO <sub>atm</sub> .....	106
Tabela 12 – Teste de Levene para igualdade de variâncias dos dados semanais de CO <sub>atm</sub> ....	108
Tabela 13 – Teste de Kruskal-Wallis para identificação de igualdade de funções de distribuição em dados semanais de CO <sub>atm</sub> (2015-2016) .....	108
Tabela 14 – Estatística descritiva para dados semanais de CO <sub>atm</sub> após ajuste fino de dados .	110
Tabela 15 - Ajuste de dados à melhor distribuição, aproximação pela Normal e discriminação dos dados. ....	110
Tabela 16 – Quantidade total de CO <sub>atm</sub> capturada pelas estações 1, 2 e 3.....	113
Tabela 17 – Resumo das constantes necessárias à implementação do modelo. ....	118
Tabela 18 – Trajetória de fase .....	125
Tabela 19 – Dados relevantes obtidos na construção do gráfico de evolução de predadores e presas .....	126
Tabela 20 – População média de predadores mantendo-se a população inicial de presas .....	127



## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Principais fatores que afetam o processo fotoquímico .....	47
Quadro 2 – Formulação de hipóteses .....	55
Quadro 3 – ANOVA para um planejamento .....	63
Quadro 4 – Classificação das equações diferenciais .....	67
Quadro 5 – Procedimentos adotados para substituir os dados não coletados pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar .....	100
Quadro 6 – Tipos de equações diferenciais ordinárias lineares.....	150



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>23</b>
<b>1.1 Formulação do problema .....</b>	<b>27</b>
<b>1.2 Objetivos.....</b>	<b>28</b>
<i>1.2.1 Objetivo geral.....</i>	<i>28</i>
<i>1.2.2 Objetivos específicos .....</i>	<i>28</i>
<b>1.3 Justificativa .....</b>	<b>29</b>
<b>1.4 Estrutura do trabalho .....</b>	<b>31</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>33</b>
<b>2.1 Uma introdução à termodinâmica .....</b>	<b>33</b>
<i>2.1.1 Calor.....</i>	<i>33</i>
<i>2.1.2 Trabalho, sistema e sistema termodinâmico.....</i>	<i>34</i>
<i>2.1.3 Energia e variação de energia.....</i>	<i>36</i>
<i>2.1.4 A termodinâmica e suas leis .....</i>	<i>37</i>
<i>2.1.4.1 Entropia, um breve introdutório.....</i>	<i>40</i>
<i>2.1.4.2 Energia livre de Gibbs.....</i>	<i>42</i>
<b>2.2 Fotossíntese .....</b>	<b>43</b>
<i>2.2.1 Cálculo da quantidade de energia.....</i>	<i>44</i>
<i>2.2.2 Fatores que influenciam a fotossíntese .....</i>	<i>47</i>
<i>2.2.3 A taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa, da concentração de CO<sub>2</sub> e da temperatura.....</i>	<i>47</i>
<b>2.3 Análises estatísticas .....</b>	<b>52</b>
<i>2.3.1 Estatística inferencial ou indutiva .....</i>	<i>52</i>
<i>2.3.2 Teste de hipóteses.....</i>	<i>54</i>
<i>2.3.2.1 Nível de significância .....</i>	<i>56</i>
<i>2.3.2.2 Erros cometidos nos testes de hipóteses.....</i>	<i>57</i>
<i>2.3.2.3 P-value nos testes de hipóteses.....</i>	<i>59</i>
<i>2.3.3 Análise de variância (ANOVA) de fator único.....</i>	<i>61</i>
<i>2.3.4 Testes post hoc .....</i>	<i>63</i>
<i>2.3.4.1 O teste de Tukey.....</i>	<i>65</i>
<b>2.4 Equações diferenciais e suas classificações.....</b>	<b>66</b>
<i>2.4.1 Sistemas de equações diferenciais .....</i>	<i>67</i>
<i>2.4.2 Sistemas de equações lineares de primeira ordem .....</i>	<i>68</i>

2.4.2.1 Definições segundo os autores Boyce de DiPrima (2015) .....	68
2.4.3 Sistema autônomo, campo vetorial e estabilidade de sistemas lineares.....	71
2.4.3.1 Sistema autônomo .....	71
2.4.3.2 Campo vetorial e tipos de soluções – uma breve interpretação .....	72
2.4.3.3 Estabilidade de sistemas lineares .....	73
2.4.4 Equações diferenciais não lineares .....	75
2.4.5 Diferença entre equações diferenciais lineares e não lineares .....	76
2.4.6 Sistemas de equações diferenciais não lineares.....	76
2.5 Solução numérica de equações diferenciais .....	77
2.6 Modelo predador-presa de Lotka-Volterra .....	79
2.6.1 Desenvolvimento do modelo predador-presa de Lotka-Volterra .....	79
2.6.2 Solução geral do modelo predador-presa.....	80
3 METODOLOGIA .....	83
3.1 Tipo de pesquisa .....	83
3.2 Roteiro da pesquisa.....	86
3.3 Materiais e métodos .....	87
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	93
4.1 Condições iniciais e análise de dados das estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar .....	94
4.1.1 Análise preliminar dos dados de monóxido de carbono atmosférico.....	95
4.1.2 Tratamento dos dados de monóxido de carbono coletados nas três estações .....	98
4.1.3 Aplicação da análise de variância nos dados de monóxido de carbono atmosférico .....	104
4.1.4 Modelos de previsão de dados para demandas futuras.....	107
4.2 Implementação do modelo matemático de Lotka-Volterra .....	111
4.2.1 População inicial ‘C’ de presas .....	113
4.2.2 População inicial ‘L’ de predadores.....	113
4.2.3 Taxa ‘k’ de crescimento das presas (monóxido/dióxido de carbono) .....	114
4.2.4 Taxa ‘a’ de predação.....	115
4.2.5 Taxa ‘r’ de mortalidade dos predadores, na ausência de alimento.....	116
4.2.6 Taxa ‘b’ de crescimento dos predadores.....	117
4.2.7 Validação das taxas obtidas .....	118
4.2.8 Soluções de equilíbrio para o modelo matemático .....	119
4.2.9 Resolução numérica e interpretação gráfica do modelo matemático .....	120
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	129



<b>6 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>137</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>139</b>
<b>Apêndice A – Equações diferenciais ordinárias (uma breve imersão) .....</b>	<b>149</b>
<b>APÊNDICE B – Estatística descritiva a respeito dos dados de CO<sub>atm</sub> nas estações de monitoramento da qualidade do ar 1, 2 e 3.....</b>	<b>151</b>
<b>ANEXO 1 – Evolução histórica do CO<sub>2</sub> nos últimos 10.000 anos .....</b>	<b>152</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Não é de hoje que o Homem busca meios para garantir e melhorar a sua sobrevivência no mundo. Desde a antiguidade o ser humano procura formas mais eficazes para se proteger, vestir-se, locomover-se, comunicar-se, alimentar-se etc. Pellegrini, Dias e Ginberg (2010) afirmam que o ser humano já passou por muitas transformações e já modificou muitas coisas a sua volta, e ainda questionam como ele conseguiu passar das cavernas para as naves espaciais.

No campo da História, desde as comunidades tribais, ou das sociedades nômades, a produção era feita de forma artesanal. Não existia o proprietário de terra, nem excedentes de trabalho; as sobras podiam ser trocadas entre os membros. Com o passar dos tempos (3.000 antes de Cristo), líderes foram surgindo (ex. faraós) e promovendo o esboço da divisão técnica (repartição de tarefas) e social (estabelecimento de hierarquias) do trabalho (PIRES, 2009). Na civilização egípcia, cidades foram se edificando e o comércio começou a surgir; técnicas de irrigação e cultivo do solo foram se aprimorando assim como a produção de vinhos, óleos vegetais, papiro etc., tudo para garantir a sobrevivência e sem a ideologia de produzir mais e com a obtenção de lucro.

Mais adiante, na idade romana, o surgimento da moeda e das rotas comerciais, a ascensão e queda do império (esta última nos séculos III a V depois de Cristo), o início da era feudal e o surgimento dos burgos (aldeias/vilas/castelos) como uma nova modalidade de organização social promovem o acúmulo de riquezas e uma economia autossustentável ainda baseada na produção artesanal (tecidos, calçados, cerâmica, ferramentas dentre outros).

Já a partir do século XV, com a queda dos senhores feudais em substituição aos novos reis e principalmente pelo novo sistema que entrava em vigor, o Capitalismo Mercantil. Segundo Bonini *et alii* (2006), o alargamento do comércio tanto para o Oriente como para a América trouxe a obrigação de se aumentar a produtividade para atender mercados em crescentes expansões. Com a transição do método de produção artesanal para a produção em pequenas oficinas, os lucros passaram a ficar nas mãos dos comerciantes, iniciando-se assim a utilização de mão-de-obra assalariada.

A Primeira Revolução Industrial, iniciada na Inglaterra do século XVIII, trouxe a máquina de fiar, o descaroçador de algodão, o tear mecânico e alterou drasticamente o meio de produção e sobrevivência humana com o advento da máquina a vapor e da ferrovia. Surge nessa época uma nova forma de sistema econômico, o Capitalismo Industrial: o capital migra do

comércio e da produção artesanal para a indústria têxtil/algodoeira com o auxílio de máquinas, e fábricas passam a pagar pela força de trabalho.

Dando continuidade ao processo evolucionário humano e de acordo com Bonini *et alii* (2018, p. 92), na Segunda Revolução Industrial, já em meados do século XIX ao início do século XX, alemães, franceses, ingleses, italianos, belgas e norte-americanos têm as suas industrializações intensificadas e suas expansões se dão de forma imperialista. Ou seja, “[...] quem não detinha nenhum meio de produção (terra, fábrica ou máquina), possuía apenas a sua força de trabalho, que podia ser vendida em troca de salário para garantir a sua subsistência.”.

É nesse momento da história que o planeta passou a receber grandes quantidades poluentes – dentre eles o CO<sub>2</sub> – pelas mãos do Homem, e de forma desenfreada a partir de então. A descoberta da produção em larga escala de produtos siderúrgicos (ex. aço), a utilização do carvão mineral e de derivados de petróleo (ex. querosene para iluminar as cidades), a invenção da locomotiva a vapor e do motor a explosão, a produção de energia elétrica, dentre outros, fizeram com que houvesse um aumento de 280 *ppm* de CO<sub>2</sub> no início do século XIX ano de para mais 400 *ppm*.

O que o Homem não se dava conta (ou não se interessava) era o quanto o planeta viria sofrer com tamanho crescimento industrial e conseqüente geração e lançamento de gases poluentes no ar atmosférico. O dióxido de carbono (CO<sub>2</sub>) por si só é um gás que tem como propriedade aprisionar o calor na atmosfera; sem ele, o planeta Terra seria um corpo celeste congelado, afirma Klink (2007).

A poluição atmosférica, segundo a 19ª Região do Conselho Regional de Química (2017), é definida como sendo a presença de substâncias provenientes de atividades realizadas pelo homem – ou pela própria natureza – que podem colocar em risco a qualidade de vida dos seres vivos (ou seja, o ar poluído é considerado impróprio e nocivo pois pode causar sérios problemas ao homem e a outros seres).

Segundo Andrade (2017), a poluição atmosférica se dá pelo aumento da quantidade de gás carbônico (CO<sub>2</sub>) que provoca o aumento do efeito estufa e contribui para o aquecimento global. Existem, segundo a autora, outros gases também contribuem com esse efeito, como o monóxido de carbono (CO), dióxido de enxofre (SO<sub>2</sub>), ozônio (O<sub>3</sub>), dióxido de nitrogênio (NO<sub>2</sub>) e hidrocarbonetos como o metano (CH<sub>4</sub>).

Assim, mais especificamente em relação ao CO<sub>2</sub>, a partir do início da Revolução Industrial – ou seja, nos últimos dois séculos, as atividades humanas como o desmatamento, uso de carvão e petróleo para obter energia tem causado, por exemplo, um aumento na concentração atmosférica desse gás. De acordo com Joos (2009), a taxa natural de concentração

desse poluente tem se mantido praticamente constante nos últimos 800.000 anos, algo entre 172 e 300 partes por milhão (ppm). Essas medições, segundo Barnola *et al.* (1987), foram realizadas por cientistas em Vostok, uma estação de pesquisa russa localizada no continente Antártico, onde se mediu as quantidades de CO<sub>2</sub> enclausuradas em bolhas de ar em camadas de gelo profundas (até 2.000 metros de profundidade, aproximadamente).

Kirschbaum (1994) afirma em seu trabalho que a concentração de CO<sub>2</sub> aumentou de 280  $\mu\text{mol mol}^{-1}$  para mais de 350  $\mu\text{mol mol}^{-1}$  da época da pré-industrialização em relação àquele ano, e que essa concentração continua a aumentar.

Em contrapartida, Neftel *et al.* (1985) alegam que as estimativas da concentração de dióxido de carbono atmosférico de duzentos anos atrás está entre 250 a 290 partes por milhão em volume (ppmv), e que medições contínuas e mais precisas dessa concentração começaram a ser feitas a partir de 1958 e mostram um claro incremento de 315 para 345 ppmv em 1985 – ou seja, um aumento de quase 10% em um período de menos de 30 anos. Atualmente, as emissões nos últimos 12 meses ultrapassaram a casa dos 400 ppm de concentração de dióxido de carbono, e não baixaram desse valor. Para se ter uma ideia, no dia 16 de dezembro de 2018 o valor medido era de 409,31 ppm de acordo com a curva de Keeling (THE KEELING CURVE, 2018).

As consequências desse aumento são graves, e algumas delas irreversíveis. De acordo com a publicação de Bumbeers (2015) na revista eletrônica Galileu, a agência governamental norte americana *National Aeronautics and Space Administration* – NASA – elaborou um mapa de previsões climáticas e afirma que no ano de 2100 haverá cerca de 900 ppm de concentração de CO<sub>2</sub> atmosférico (cerca de 0,1% da atmosfera terrestre), e lembra que os já alcançados 400 ppm em 2015 correspondem a 0,04% desse percentual.

Meneguelli (2016), por sua vez, afirma que a temperatura na Terra vai subir 4°C até o ano de 2100, atingindo uma temperatura média registrada nos últimos 784 mil anos. Segundo a autora, o planeta está ficando mais sensível aos efeitos das emissões do gás estufa: estima-se que a redução em 100% do trabalho dos polinizadores (ex. abelhas e insetos) pode reduzir em 22,9% a produção global de frutas, nozes e sementes e 16,3% de legumes; catástrofes climáticas ameaçarão a segurança alimentar; a capacidade hidroelétrica poderá se reduzir em 20% (no Brasil, projetos como as usinas de Belo Monte e do rio Tapajós ficariam inviabilizados). A autora ainda alerta sobre a evidente necessidade de reduzir as emissões de CO<sub>2</sub> entre 40 e 70% até o ano de 2050 para poder cumprir o Tratado de Paris (limitar o aquecimento do planeta em menos de 2°C) e reduzir as consequências do aumento da temperatura global.

Em relação aos oceanos, Merchant (2015) afirma que em 2100 os mesmos ficarão mais quentes, com níveis mais altos, apresentando muito lixo e sem peixes. De acordo com o autor, os oceanos têm absorvido mais calor que em qualquer momento nos últimos 10.000 anos, as suas composições químicas estão mudando (as águas estão ficando mais ácidas) e a previsão é que o nível dos mares aumente entre 0,52 e 0,98 metro até 2100 (algumas projeções colocam na casa de 1,5 metro de aumento). Mesmo que se reduzam as emissões de modo rápido e súbito, já é esperado um aumento de 28 a 61 centímetros no nível do mar, explica o autor. Como consequências, enchentes ameaçarão as cidades costeiras, ecossistemas marinhos serão (e já estão sendo) afetados, as tempestades serão mais fortes devido ao maior volume de água evaporada, algas tóxicas se proliferarão com maior facilidade devido às altas temperaturas, e as zonas mortas marinhas (loais onde poucas espécies conseguem sobreviver devido aos baixos níveis de oxigênio) aumentarão. Para esta última catástrofe, Merchant (2015) afirma que o estudioso do assunto Gary Shaffer – Universidade de Copenhague, Dinamarca – relatou que qualquer mudança nas zonas mortas duram milhares de anos; seu modelo prevê para 2100 um crescimento dessas zonas mortas 10 vezes mais rápido do que está acontecendo atualmente.

No Brasil, Alisson; Izique e Lopes (2013) citam as conclusões registradas no primeiro Relatório de Avaliação Nacional (RAN1) do Painel Brasileiro de Mudanças Climáticas (PBMC), confeccionado com base em previsões de acontecimentos para o ano de 2100. Dentre diversas projeções realizadas por 345 pesquisadores de diversas áreas, relata-se a ocorrência de secas extremas e estiagens prolongadas – principalmente na Amazônia, no Cerrado e na Caatinga. Na primeira, entre 2041 e 2070 poderão haver uma redução de 40 a 45% no volume de chuva e em 2100 a temperatura aumentará de 5 a 6°C, transformando parte da floresta exuberante em uma savana (também conhecida como cerrado, composta por vegetações rasteiras, grama, arbustos e árvores esparsas). O mesmo acontecerá no cerrado: um aumento em torno de 5 a 5,5°C da temperatura e redução de 35 a 45% no nível das chuvas. Já no bioma da Caatinga, o aumento da temperatura e redução das chuvas poderá culminar no processo de desertificação. Segundo os autores, somente a região dos Pampas (extremo sul do Brasil) é que sai um pouco desse padrão: para o ano de 2100, prevê-se um aumento de 2,5 a 3°C na temperatura e a ocorrência de chuvas entre 35 e 40% acima da média de hoje.

Há, porém, uma solução para remediar tamanha devastação feita pelo homem, pelo menos em relação ao dióxido de carbono. Para sobreviverem, algas marinhas, algumas bactérias e vegetais capturam o dióxido de carbono para realizar o processo de fotossíntese, eliminando-o da atmosfera, produzindo o seu substrato alimentar e liberando o gás oxigênio como subproduto do processo. Ou seja, para as mãos do homem, as árvores podem ser consideradas

como o medicamento necessário à mitigação, eliminação dos excessos ou até mesmo a redução da concentração desse poluente.

Todavia, há um limite: em relação à fisiologia vegetal, o aumento da concentração dos níveis de  $\text{CO}_2$  atmosférico pode influenciar na redução da taxa de fotossíntese líquida das plantas.

Cabe ainda a pergunta: quantas árvores plantar? Este é o propósito do trabalho: medir a evolução temporal das concentrações de gás carbônico atmosférico, partindo de hipóteses sobre as emissões de  $\text{CO}_2$  e investigar a interação entre esse gás e os vegetais.

O modelo matemático a ser utilizado é o de *Lotka-Volterra*, também conhecido como predador-presa, adaptando os dados de entrada para essa finalidade. Esse ajuste considera que os vegetais são os únicos predadores do  $\text{CO}_2$  atmosférico, e faz julgamentos quanto à taxa de produção desse gás estufa, da interação entre o gás e os vegetais, e de taxas de crescimento e mortalidade de árvores.

De posse do modelo matemático devidamente adaptado, utilizou-se dados históricos dos índices de monóxido de carbono (CO) atmosférico – e cálculos para sua transformação em  $\text{CO}_2$  – registrados em quatro estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar instaladas ao longo da cidade de Ipatinga/MG. Vale ressaltar que esta cidade, pertencente à região do Vale do Aço, abriga e é envolta por grandes indústrias de base (mineradoras, siderúrgicas), de bens de capital (máquinas, metalúrgicas e equipamentos) e de consumo (indústrias alimentícias, celulose etc.) que geram uma quantia considerável de poluentes.

Como propósito final, dada uma nova quantidade de  $\text{CO}_2$  atmosférico a ser emitida e de posse dos parâmetros de entrada de dados, espera-se que o modelo possa descrever o comportamento de seu consumo pela então considerada ‘mata local’ e indicar certa quantidade de árvores a serem cultivadas para manter ou reduzir o volume de gás carbônico produzido.

## **1.1 Formulação do problema**

Nos últimos dois séculos, a partir do advento da Revolução Industrial, as atividades humanas movidas pelo capitalismo industrial culminaram, por exemplo, na realização de desmatamentos e no uso de carvão e petróleo para a obtenção de energia. Essa atitude tem causado um aumento na concentração do gás carbônico atmosférico e provocado desequilíbrios no clima terrestre (ex. aquecimento global, também conhecido como efeito estufa). Conforme

Klink (2007, p. 79) argumenta, o dióxido de carbono é um gás que tem a capacidade de aprisionar o calor na atmosfera. Sem ele, “[...] a Terra seria um planeta congelado”; porém, a taxa de liberação somente desse gás aumentou em 30% nos últimos 150 anos, culminando na elevação da temperatura média terrestre.

Por outro lado, os vegetais e outros seres (algas marinhas e bactérias) podem sintetizar o  $\text{CO}_2$ , produzir os seus substratos alimentares e liberar o gás oxigênio como subproduto do processo fotossintético. Porém, elevadas concentrações desse gás podem interferir na fisiologia vegetal: a maior concentração de  $\text{CO}_2$  atmosférico afeta a taxa de fotossíntese líquida das plantas.

O problema encontrado é que não se tem conhecimento da interação dos fatores supracitados explicitados de forma matemática e em nível local, e não global. Traduzindo esse confronto de produção industrial de  $\text{CO}_2$  *versus* o seu consumo por (mais especificamente) vegetais, **qual modelo matemático pode atuar como fornecedor de soluções para mitigar a produção de dióxido de carbono atmosférico pelo ser humano?**

Uma hipótese para responder esta pergunta é a de que um modelo não linear de equações diferenciais (ou seja, um modelo que não apresente soluções exatas) possa indicar o melhor cenário na solução do problema desta pesquisa.

## 1.2 Objetivos

Este capítulo busca explicar os objetivos geral e específicos do trabalho, estando os mesmos declarados nos tópicos a seguir.

### 1.2.1 Objetivo geral

Utilizar o modelo matemático de Lotka-Volterra, conhecido como predador-presa para modelar a interação entre o aumento/declínio da concentração de dióxido de carbono atmosférico ( $\text{CO}_2$ ) e seu consumo por árvores na cidade de Ipatinga, instalada na região do Vale do Aço, em Minas Gerais, onde se concentram importantes pólos da indústria siderúrgica, de bens de capital e de celulose.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos para este estudo são:



- ✓ Encontrar os valores (dois números relacionados às populações de presas e de predadores, e quatro constantes principais) necessários à implementação do modelo predador-presa de Lotka-Volterra;
- ✓ Implementar o modelo para a situação observada em Ipatinga/MG;
- ✓ Interpretar as respostas e gráficos encontrados, mostrando em valores aproximados a quantidade de árvores que a região tenha que plantar para (pelo menos) compensar a quantidade de CO<sub>2</sub> por ela produzida.

### 1.3 Justificativa

Observou-se no capítulo 1 que alguns danos provocados pelo acúmulo de dióxido de carbono podem se tornar irreversíveis e que a concentração desse gás pode mais do que dobrar nos próximos 80 anos: um salto de 400 ppm (quantia esta já considerada como sendo bem alta) para uma estimativa de 900 ppm em 2100. Neste futuro próximo, estima-se que uma elevação em 4°C na temperatura média da Terra trará grandes problemas à natureza e ao homem, seja na desertificação de certos biomas, seja nas enchentes, ou até mesmo na extinção de plantas e animais.

De acordo com Vidotti (2008), com o ar atmosférico seco (isto é, isento de vapor de água) é composto por uma mistura dos gases nitrogênio ( $N_2 \cong 78,1\%$ ), oxigênio ( $O_2 \cong 20,9\%$ ), argônio ( $Ar \cong 0,934\%$ ), dióxido de carbono ( $CO_2 \cong 0,0314\%$  ou 350 ppm) e 0,0346% de outros gases como o hélio, neônio, criptônio, hidrogênio e xenônio.

Em relação ao CO<sub>2</sub>, de acordo com a curva de Keeling (2018), ressalta-se que sua concentração já se encontra acima dos 400 ppm. Conforme afirmado por Sachs (2017), uma concentração de 450 a 500 ppm desse gás trará grandes modificações no sistema climático da Terra, com padrões extremos de precipitação, secas e cheias, além do aumento do nível do mar em um metro, ou mais.

O problema não se encontra na presença desse gás; a maior dificuldade se esbarra no seu excesso, e diversos estudos têm sido feitos a respeito dos malefícios causados pelos aumento da taxa de CO<sub>2</sub> no planeta.

Em seu artigo, Morrison (2002) afirma que o ambiente global está mudando com o aumento da temperatura e da concentração de dióxido de carbono atmosférico. Porém a maior estimulação das taxas líquidas de assimilação de CO<sub>2</sub> em temperaturas mais altas não significa necessariamente que o padrão de biomassa e os resultados de rendimento ao aumento desse gás

e da temperatura sejam determinados por essa resposta. Os autores admitem, dessa forma, que é essencial revisar a teoria e as observações sobre os efeitos da temperatura e das interações do CO<sub>2</sub> no balanço de carbono das plantas, seus desenvolvimentos, acúmulo e produção de biomassa.

Jean-Claude e Pierre-André (2011), por sua vez, fizeram um resumo do atual conhecimento humano sobre as duas principais consequências da modificação da composição atmosférica: o efeito do aquecimento global e a diminuição do pH oceânico (acidificação oceânica). Uma das conclusões dos autores é que o aumento rápido atual do CO<sub>2</sub> atmosférico e outras concentrações de gases de efeito estufa devido às atividades humanas podem induzir modificações muito sérias nas condições ambientais da Terra.

Mais especificamente, Trevisan e Luz [2008?] se basearam em uma versão modificada do modelo Lotka-Volterra para fazer previsões do aumento da concentração de CO<sub>2</sub> na atmosfera em escala global. Os autores consideraram que a taxa de fotossíntese mudaria com o aumento do gás e verificaram como isso afetaria a reprodução dos vegetais e suas taxas de absorção de CO<sub>2</sub>. Realizando alterações numéricas nos parâmetros gerais de biomassa e considerando as emissões totais (natural e artificial) desse gás estufa, os autores constataram que o sistema atmosférico terrestre pode se manter em equilíbrio desde que algumas condições específicas sejam atendidas.

A evolução histórica do aumento do dióxido de carbono nos últimos 10.000 anos e principalmente nos últimos 300 anos, mostrada nas figuras do Anexo 1 evidenciam a ocorrência de um crescimento exponencial da concentração desse gás nos últimos tempos. Diante desse fato, das notícias nas mídias a respeito do assunto (ex. aumento da temperatura terrestre), dos diversos estudos realizados sobre os malefícios causados ao planeta por esse gás – não se restringindo aos acima citados, das alterações climáticas e ambientais já sentidas por nós, da crescente preocupação dos países em reduzir esses níveis de poluentes atmosféricos (*e.g.* assinatura e ratificação do Protocolo de Kioto, iniciativas governamentais e não governamentais, responsabilidade ambiental, estudos sobre sustentabilidade e reciclagem de resíduos, produção mais limpa, dentre outros)... enfim, da necessidade de atuar preventivamente na não agressão ao meio ambiente, de buscar outros meios para a redução ou até mesmo a eliminação de fontes poluidoras, vislumbrou-se a oportunidade de desenvolver um mecanismo de equações matemáticas que fosse capaz de evidenciar a evolução desse poluente ao longo do tempo e propor cenários de mitigação do CO<sub>2</sub> em função do seu acréscimo na atmosfera pelo homem e o seu consumo pelas árvores por meio da fotossíntese.

Afinal de contas, de acordo com Goklany (2000, p. 189, tradução nossa) “Muitos cientistas, e talvez mais importante, formuladores de políticas afirmam que a mudança climática é o principal desafio ambiental que o mundo enfrenta atualmente.”. De fato, se o Homem não passar a cuidar do planeta onde vive, as consequências recairão sobre ele mesmo e, em muitos casos o fruto da ação humana não mais poderá retornar às condições anteriores ao seu consumismo desenfreado. Como exemplos, cita-se a extinção de espécies animais e vegetais e o derretimento das calotas polares.

#### **1.4 Estrutura do trabalho**

Este trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos principais. Iniciando pelo capítulo 1 – Introdução, o mesmo faz uma breve contextualização histórica e a respeito do tema em estudo, e especifica o problema encontrado na pesquisa, seus objetivos geral e específicos, os motivos que levaram o autor a abordar o assunto e a estrutura do trabalho realizado.

O segundo capítulo traz a fundamentação teórica abordada nesse trabalho, e contempla um breve introdutório a respeito da termodinâmica, fotossíntese, análises estatísticas utilizadas, equações diferenciais (EDs), soluções numéricas de EDs, e o modelo predador-presa de Lotka-Volterra.

Em relação aos conhecimentos sobre a área da termodinâmica, o referencial teórico traz um breve relato a respeito do significado de calor, trabalho, sistema, energia etc. e faz pequenas menções em relação às leis da termodinâmica onde a energia livre de Gibbs é tratada como a principal abordagem a ser usada nesse estudo.

No área da fotossíntese, o referencial aborda os principais fatores que contribuem para a realização desse processo nos vegetais, mostra que é possível calcular a energia luminosa necessária à sua realização, e revela quais são os comprimentos de onda de luz mais eficazes no processo. O estudo ainda contempla os fatores que influenciam na fotossíntese e traz dados quantitativos a respeito de estudos realizados para verificar as taxas fotoquímicas em função da intensidade luminosa, da concentração de dióxido de carbono e da temperatura.

Em relação ao campo da estatística, fez-se uma abordagem sobre algumas ferramentas estatísticas capazes de validar, com um certo grau de confiança, a acuracidade dos dados coletados. O objetivo principal desse assunto é trazer meios que reduzam o nível de erro amostral a ser verificado no estudo de caso.

Em seguida, o assunto principal do trabalho começa a ser tratado. O tema sobre equações diferenciais (EDs) e suas classificações traz o referencial teórico necessário à montagem e adaptação do modelo a ser estudado. Neste, apresenta-se alguns conceitos a respeito do significado das EDs, suas classificações, explica o que é um sistema de EDs e esclarece assuntos voltados à teoria sobre sistema autônomo, campo vetorial e estabilidade de sistemas lineares. Esse capítulo ainda aborda o cerne do estudo de caso – equações diferenciais não lineares, mostra a diferença entre equações diferenciais lineares e não lineares e conceitua o que é um sistema de ED não linear.

Findando este capítulo e dando sequência ao assunto, separou-se um tópico para tratar única e exclusivamente do modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Nesta parte são realizadas algumas observações a respeito das características intrínsecas ao arquétipo e feitas considerações preliminares que culminam na montagem final do modelo a ser utilizado para explicar a interação entre duas espécies em um sistema fechado, onde uma delas (predador) se alimenta de outra (presa).

O capítulo 3 trata da metodologia utilizada no projeto de pesquisa. Esta parte traz maiores detalhes a respeito da classificação da pesquisa desenvolvida de acordo com seus aspectos metodológicos, apresenta o roteiro adotado no estudo de caso para que sejam alcançados os objetivos geral e específicos da mesma e mostra os materiais e métodos utilizados na confecção do estudo de caso.

O capítulo 4 traz os resultados obtidos e discussões acerca do estudo de caso. Nele são abordados a análise preliminar e tratamento dos registros realizados pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, a exposição dos demais parâmetros a serem utilizados no modelo de equações diferenciais não linear e, tão importante quanto, a evidência a implementação dos dados no modelo computacional.

O capítulo 5 discute a respeito das considerações finais obtidas no estudo e, por fim, o capítulo 6, que traz as recomendações para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo aborda os principais tópicos a serem considerados no trabalho. Por se tratar da realização da fotossíntese, o mesmo trata das possibilidades de se calcular a taxa fotoquímica por meio de conhecimentos advindos da termodinâmica e da capacidade dos vegetais processarem o  $\text{CO}_2$  em função da taxa de luminosidade, da concentração desse gás poluente e da temperatura ambiente. Essa parte ainda traz maiores detalhes a respeito do tratamento de dados por meio de análises estatísticas e de conceitos sobre equações diferenciais, em particular o modelo predador-presa de Lotka-Volterra.

### 2.1 Uma introdução à termodinâmica

Não há como descrever os aspectos teóricos a respeito da termodinâmica sem antes citar o significado e conceitos que envolvem as palavras calor, trabalho, sistema e energia, nos campos da física e/ou química.

O conhecimento desses vocábulos poderá servir de auxílio para calcular a quantidade de energia que um vegetal gasta para transformar, a grosso modo, uma molécula de  $\text{CO}_2$  em substrato alimentar e oxigênio, ou para mensurar o trabalho necessário para realizar esta transformação química. Esses valores podem ser usados para se calcular alguma constante necessária à implementação do modelo de Lotka-Volterra, ou então para realizar adaptações em suas equações diferenciais em função das teorias aqui abordadas. Tais conceitos são explorados a seguir.

#### 2.1.1 *Calor*

Para Atkins e Jones (2012, p. 243), “Calor é a transferência de energia que ocorre em consequência de uma diferença de temperatura”. Fonseca (2013) afirma que o calor é a energia térmica em movimento, ou em trânsito. Esta energia térmica, de acordo com a autora, é transferida na forma de calor de um corpo mais quente para um corpo mais frio – ou seja, a transferência de calor só ocorre quando há diferença de temperatura entre dois corpos e sempre acontece da estrutura de maior temperatura (mais quente) para a de menor temperatura (mais frio) – e nunca o contrário. O processo de transferência de calor continua até o momento em que os atinjam a mesma temperatura, intermediária às que tinham no início.

Para padronizar as medidas, Young e Fredman (2008) fizeram as seguintes convenções: a quantidade de calor ' $q$ ', medida em *joules* ( $J$ ) ou em calorias ( $cal$ ) – onde  $1\ cal = 4,186\ J$ , é considerada positiva ( $q > 0$ ) se a sua transferência é feita para dentro do sistema (ou seja, quando ocorre um fluxo de energia para o interior do sistema), negativa ( $q < 0$ ) quando a energia armazenada é transferida para fora do sistema, ou nula ( $q = 0$ ), quando não há transferência de energia (YOUNG; FREDMAN, 2008).

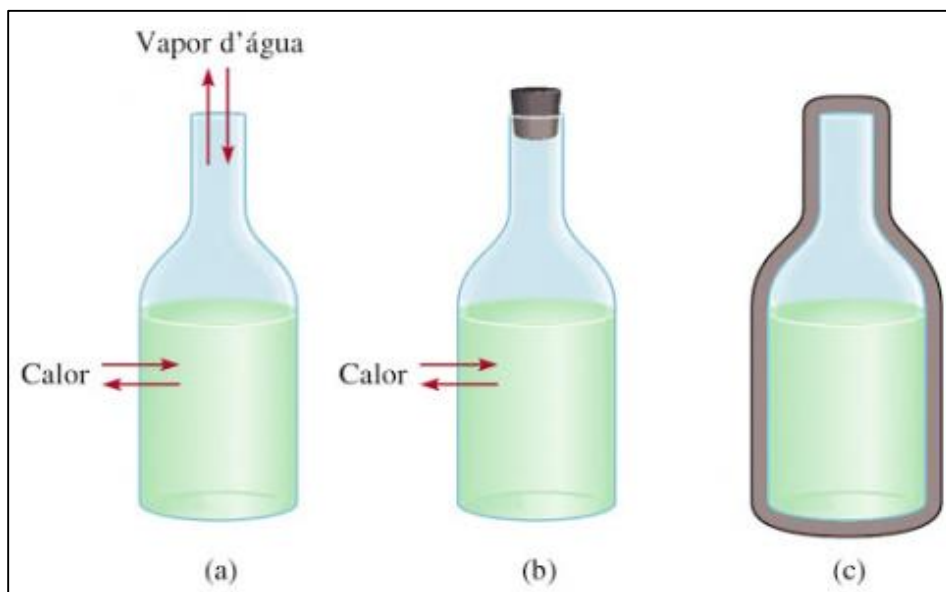
### **2.1.2 Trabalho, sistema e sistema termodinâmico**

Atkins e Jones (2012, p. 236) afirmam que trabalho ( $w$ ) "[...] é o movimento contra uma força oposta". Como exemplo, os autores citam o fato de que a mistura de gases quentes no cilindro dentro do motor de um automóvel empurra os pistões, e essa movimentação gera trabalho.

Brown, LeMay e Burnsten (2005) afirmam que a energia necessária para mover objetos contra uma força é denominada trabalho. Nas palavras de Atkins e Jones (2012), o trabalho necessário para mover um certo objeto é igual à força a que ele se opõe multiplicado pela distância.

Já em relação aos sistemas, Bordini *et al.* (2014, p. 12) os definem como sendo “[...] porções delimitadas do universo que possibilitam/favorecem o estudo de fenômenos e materiais.” e os classificam em sistemas abertos, quando há troca de matéria e energia entre o sistema e o ambiente; fechados, quando há troca de somente energia entre o sistema e o ambiente e isolados, quando não há troca de energia nem de matéria. A Figura 1 mostra os três tipos de sistemas, sendo que no terceiro caso (sistema isolado) o frasco se encontra envolvido por uma câmara de vácuo (CHANG; GOLDSBY, 2013).

**Figura 1 – Sistemas (a) aberto, (b) fechado e (c) isolado**



Fonte: Chang; Goldsby (2013).

Na área da física, Young e Freedman (2008, p. 252) afirmam que um sistema pode ser compreendido como um dispositivo mecânico, um organismo biológico, um vapor que se expande em uma turbina etc. Um sistema termodinâmico, por sua vez, “[...] é qualquer coleção de objetos que é conveniente encarar como uma unidade, e que tem o potencial de trocar energia com o ambiente”. Os autores afirmam que a convenção de sinais para o trabalho realizado é oposta à convenção adotada na mecânica:

“Um valor de ***W* positivo** significa um **trabalho realizado pelo sistema sobre suas vizinhanças**, tal como o trabalho realizado por um **gás que se expande** e, portanto, corresponde a uma transferência de energia *para fora* do sistema. Um valor de ***W* negativo** tal como o trabalho realizado durante a **compressão de um gás**, significa um **trabalho realizado sobre o gás pelas vizinhanças** e, portanto, corresponde a uma transferência de energia *para dentro* do sistema. (YOUNG; FREEDMAN, 2008, p. 252, grifo nosso).

De fato, em relação ao sinal de convenção de sinais para o trabalho realizado, diversos autores afirmam o contrário<sup>1</sup> do que foi exposto pelos físicos Hugh Young e Roger Freedman.

Desta forma, para esse trabalho, adotar-se-ão as convenções de sinais estabelecidas no livro de Chang e Goldsby (2013, p. 236), a seguir:

<sup>1</sup> Barrow (1982, p. 150), por exemplo, afirma que “Se o gás se expande,  $dV$  é positivo e  $w$  é negativo: o trabalho é realizado pelo gás. Se o gás é comprimido,  $dV$  é negativo e  $w$  é positivo: o trabalho é realizado sobre o gás.”, onde  $dV$  é a variação do volume (volume final menos o inicial).

As convenções de sinais para  $q$  e  $w$  são as seguintes:  $q$  é positivo para um processo endotérmico e negativo para um processo exotérmico, e  $w$  é positivo para o trabalho realizado sobre o sistema pela vizinhança e negativo para o trabalho realizado pelo sistema sobre a vizinhança.

Vale a pena ressaltar que, de acordo com Atkins e Jones (2012) um processo libera calor para a vizinhança é chamado de processo exotérmico. O caso oposto, quando a vizinhança libera calor para que ocorra um processo (isto é, quando se absorve calor), é denominado processo endotérmico.

### **2.1.3 Energia e variação de energia**

Brown, LeMay e Bursten (2010) afirmam que a sociedade moderna depende da energia para a sua existência; a geração deste recurso é proveniente, em sua grande maioria, de reações químicas ocorridas na queima de combustíveis fósseis, no interior das baterias ou até mesmo a formação de biomassa pela fotossíntese. De acordo com os autores, até os alimentos ingeridos pelos vivos são transformados em energia para manter suas funções biológicas; em relação às plantas, a realização de um determinado processo químico em suas folhas – denominado fotossíntese – converte a energia radiante do Sol em energia química.

Atkins e Jones (2012, p. 235) corroboram com os autores supracitados, afirmando que a energia está na base da civilização: “Usamos energia, a cada dia, em suas várias formas para sustentar a vida, para ficar suficientemente quente ou frio, para nos movermos e para pensar. Todos esses processos envolvem a liberação, a absorção, a transferência ou a conversão de energia.”.

Dentre os diversos tipos e conceitos de energia estudados e nomeadas nos campos da física e da química, merece destaque o conceito de energia livre. Segundo Sadava (2009, p. 121, grifo do autor), este conceito é uma assertiva da segunda lei da termodinâmica e, “[...] em um sistema fechado, com repetidas transformações de energia, a energia livre diminui e a não utilizável aumenta – fenômeno conhecido como criação de **entropia**.”. Os assuntos sobre as leis da termodinâmica, entropia e energia livre serão tratados em capítulos vindouros.

De volta aos conceitos sobre energia, mais especificamente na ciência da termodinâmica, “[...] energia é a capacidade de um sistema de executar um trabalho – e, em última análise, levantar um peso” (ATKINS, JONES, 2012, p. 237). Nesse campo do saber, o conteúdo total de energia é chamado de energia interna ( $U$ ) e, nos ensaios, são medidas suas variações ( $\Delta U$ ), calculadas como sendo a diferença entre as intensidades final e inicial.



Em relação à variação da energia interna do sistema, Chang e Goldsby (2013) afirmam que o valor de ‘ $\Delta U$ ’ depende da soma dos valores de calor e trabalho (ou seja,  $\Delta U = q + w$ ). De acordo com os autores, [...] a variação de energia interna  $\Delta U$  de um sistema é a soma do calor  $q$  trocado entre o sistema e a vizinhança com o trabalho  $w$  realizado sobre (ou pelo) sistema.”.

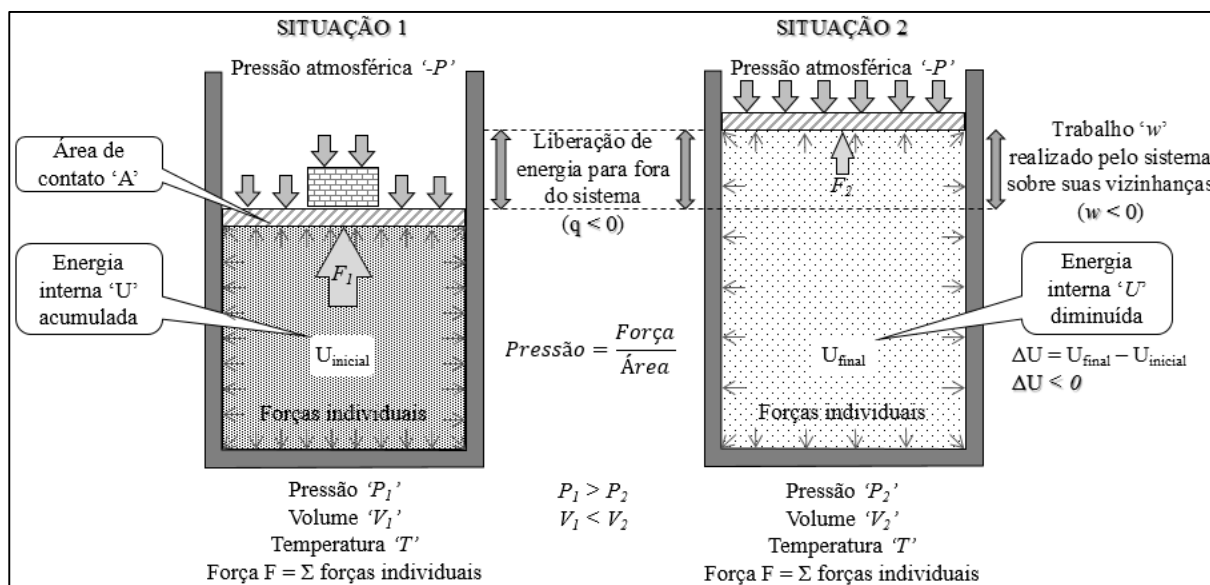
Atkins e Jones (2012) complementam esses dizeres ao afirmarem que a energia interna de um sistema pode ser alterada pela realização de trabalho, ou seja,  $\Delta U = w$ . Ademais, um sistema que consome energia tem o seu sinal negativo ( $\Delta U < 0$ ) e um sistema que libera energia (ex. água quente, deixada para resfriar em temperatura ambiente) tem o seu sinal positivo.

Ratificando as ideias acima, constata-se que, se o sistema realiza trabalho sobre a vizinhança, há uma diminuição da energia interna; se a vizinhança realiza trabalho sobre o sistema, há um aumento da energia interna. A discussão em torno desse assunto no trabalho prático é constatar, caso ele siga essa linha de pesquisa, se o processo de realização da fotossíntese deve receber energia do sistema, ou se há liberação de energia pelos vegetais ao sistema.

#### ***2.1.4 A termodinâmica e suas leis***

A Figura 2, a seguir, mostra um resumo do que foi mencionado a respeito dos conceitos sobre calor, trabalho, sistema e energia, cujo objetivo é facilitar a compreensão da interação desses conceitos. Na primeira situação, um bloco é colocado sobre uma tampa (parede móvel), aumentando a pressão sobre o gás contido no recipiente (sistema). Já na segunda situação, o peso é removido e o gás se expande. Em ambos os casos a temperatura é considerada constante.

**Figura 2 – Expansão de um gás e geração de trabalho**



Fonte: Elaboração própria (2018).

Verifica-se na Figura 2 que, ao se retirar o peso da tampa, o gás se expande, aumentando o volume do recipiente ( $V_2 > V_1$ ). Tal expansão, fruto da liberação de energia para fora do sistema, gerou um trabalho pelo sistema sobre suas vizinhanças ( $w < 0$ ). Nesse ensaio, as moléculas do gás estavam comprimidas pela ação da gravidade e por um bloco com um peso desconhecido. Ao se expandir, as colisões entre as moléculas e as paredes do sistema e entre elas mesmas diminuiriam devido ao aumento do volume do recipiente; em consequência disso, a energia interna do sistema foi reduzida ( $\Delta U < 0$ ). Como não houve troca de matéria com o meio ambiente, o sistema em destaque é considerado fechado.

Em suma, o modelo mostrado na Figura 2 evidencia a dissipação de energia em forma de trabalho: à medida em que o gás se expande, há um aumento de volume ( $\Delta V > 0$ ); esse gás empurra a parede para cima contra a pressão atmosférica constante  $-P'$  que se opõe a ela, gerando, assim, um trabalho negativo ( $w < 0$ ) (CHANG; GOLDSBY, 2013).

De posse desse exemplo, pode-se afirmar que a área de conhecimento que estuda a energia e suas transformações de uma forma para outra é conhecida como termodinâmica (ATKINS, JONES, 2012; BROWN, LEMAY, BURSTEN, 2010). Para Afonso (2012), além de estudar a energia e suas diferentes formas, a termodinâmica também investiga as interações dela com a matéria.

Atkins e Jones (2012) afirmam que a termodinâmica tem um papel importante em todos os aspectos de nossa vida. Suas leis básicas governam a química e explicam por que as reações ocorrem e permitem calcular as quantidades do calor liberado e o trabalho exercido. Como exemplos de aplicação, os autores citam que o calor liberado na queima de combustíveis

pode ser usado para comparar o valor calorífico do combustível, e que a quantidade de energia liberada pelos alimentos industrializados, registrada em seus rótulos, é calculada graças aos conceitos da termodinâmica.

Os mesmos autores fazem menção a respeito da existência de dois conceitos fundamentais que regem as leis da termodinâmica: o calor e o trabalho. Para eles, historicamente, o primeiro era entendido como sendo um fluido, denominado calórico, que manava de uma substância quente para outra com menor temperatura. Essa ideia era defendida pelo engenheiro francês Sadi Carnot, que acreditava que o trabalho era o resultado do fluxo de calórico gerado. Porém, 25 anos depois das proposições feitas por esse engenheiro, já no início do século XIX, o físico inglês James Joule provou que o calor e o trabalho são duas formas de energia. A diferença entre os dois é sintetizada por Afonso (2012, p. 86):

[...] o calor é uma forma desorganizada de energia já que envolve transferências de energia a nível molecular (a radiação não é aqui considerada); [...] O trabalho é uma forma organizada de energia já que envolve forças conservativas (energia cinética e potencial), ou a rotação de um veio (turbina, compressor ou bomba), ou o deslocamento de um êmbolo.

A termodinâmica é regida por dois preceitos básicos, e um terceiro gerado a partir dos dois primeiros. De qualquer forma, Afonso (2012, p. 135) cita que a ‘Primeira Lei da Termodinâmica’ anuncia o princípio da conservação da energia: “[...] “a energia não pode ser criada nem destruída.”. Hewitt (2015) corrobora ao afirmar que a ela pode apenas ser transformada de uma forma para outra, e que a sua quantidade total nunca mudará.

Assim, em um dado processo uma forma qualquer de energia pode se transformar em outro tipo de energia mas, no sistema ou vizinhança onde ocorreu essa transformação, o total permanece constante. Vale a pena ressaltar que essa lei se baseia em evidências experimentais e não podem ser demonstradas matematicamente (AFONSO, 2012).

Young e Freedman (2008) afirmam que a energia interna é um dos conceitos mais importantes da termodinâmica e Chang e Goldsby (2013) declaram que a variação de energia interna ‘ $\Delta U$ ’ de um sistema é igual à soma do calor trocado entre o sistema e suas vizinhanças com o trabalho realizado sobre, ou pelo sistema.

A segunda lei da termodinâmica, por sua vez, procura explicar por que algumas reações químicas têm a tendência de ocorrer normalmente e outras não. A aplicação desta lei faz uso de dois conceitos de extrema importância: a entropia e a energia livre de Gibbs (ATKINS, JONES, 2012), a serem vistas nos tópicos a seguir. Já a terceira lei, de acordo com os autores, – estabelece valores numéricos para essas duas quantidades.

Em relação à segunda lei da termodinâmica, Barreto (2002) a resume de um modo bem simples e resumida ao afirmar que o calor flui de forma espontânea apenas da temperatura mais alta para a mais baixa, e que o calor não pode ser convertido totalmente em trabalho (ou seja, parte dele realiza trabalho e outra parte é transferido ao corpo mais frio).

Essa lei, de acordo com Young e Freedman (2008), não foi formulada em termos de uma equação ou relação quantitativa; ela foi baseada em termos da afirmação de uma possibilidade. Como exemplo, os autores afirmam que o fluxo de calor de um corpo frio para um corpo quente não viola a primeira lei da termodinâmica uma vez que a energia é conservada; porém tal acontecimento não é observado na natureza.

Existem, obviamente, uma gama de conceitos a respeito das duas primeiras leis. Porém, para os objetivos deste trabalho, será dado maior importância aos conceitos a respeito da entropia e (principalmente) da energia livre de Gibbs, conceitos-chave da segunda lei da termodinâmica.

#### 2.1.4.1 Entropia, um breve introdutório

Segundo Nelson e Cox (2019), o termo entropia significa ‘mudança em seu interior’. Esse termo foi usado pela primeira vez no ano de 1851 por Rudolf Clausius, um dos responsáveis por formular a segunda lei da termodinâmica, e seu uso faz menção à aleatoriedade (ou desordem) de componentes em um determinado sistema químico.

A Figura 3 mostra um desenho humorístico que faz uma sátira ao significado desse conceito.

**Figura 3 – Charge elaborada para ilustrar o significado de entropia**

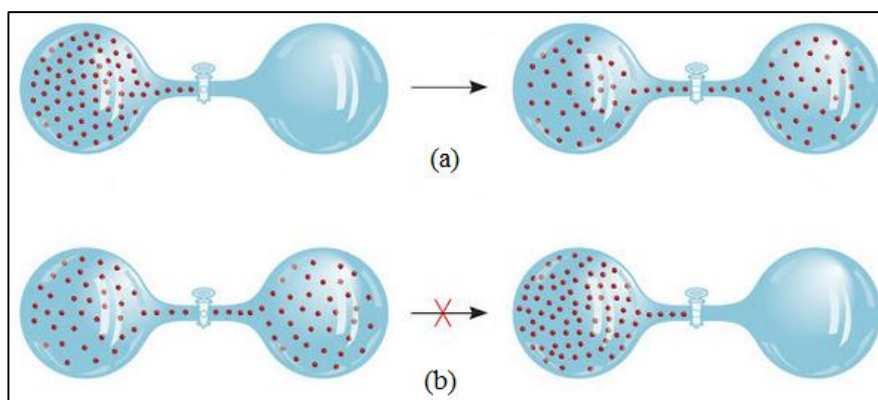


Fonte: Portal da Educação (2015).

De acordo com a Figura 3, e conforme afirma Sadava *et al.* (2009), alterações químicas, físicas e processos biológicos tendem a aumentar a entropia e, assim, tendem à desordem ou à aleatoriedade. Segundo o autor, isso acontece em função dos resultado obtido pelas transformações de energia.

Para Chang e Goldsby (2013), a entropia ( $S$ ) se trata de uma função termodinâmica que prevê a espontaneidade de uma determinada reação (Figura 4). Para os autores, a possibilidade de prever se uma reação ocorrerá de forma natural ou não ao se juntar os reagentes sob um conjunto específicos de condições – *e.g.* uma determinada temperatura, pressão e concentração – é considerada um dos principais objetivos da termodinâmica, e é muito utilizada em estudos laboratoriais (ex. síntese de compostos), fábricas de produtos químicos etc., ou até mesmo, dentre outros, auxiliar na compreensão dos processos biológicos em uma célula.

**Figura 4 – Espontaneidade (ou não) de uma reação**



Fonte: Chang; Goldsby, 2013.

Observa-se que, na Figura 4-a, as moléculas de um gás aprisionado se distribuem de forma espontânea – e uniforme – entre os dois balões após abrir a válvula que separa os dois globos. Em um processo não espontâneo (Figura 4-b), o gás nunca se agrupará em um dos lados do balão quando a válvula estiver aberta (CHANG, GOLDSBY, 2013).

Constata-se, desta forma, que em muitos processos termodinâmicos ocorrem de forma natural em um dado sentido e não ocorrem em sentido oposto (YOUNG; FREEDMAN, 2008). Para esses autores, a ideia central do conceito de entropia, um dos pilares da segunda lei da termodinâmica, é que esta grandeza mede o grau de desordem de um sistema e os valores nela encontrados indicam qual é o sentido preferencial desses processos.

Porém, não se sabe até o momento se a transformação de monóxido de carbono, capturado pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar em dióxido de carbono (necessário à realização da fotossíntese) aumentará ou reduzirá a desordem, e se o

processo ocorrerá (ou não) de forma espontânea. O capítulo a seguir fornece uma solução para esse assunto.

#### 2.1.4.2 *Energia livre de Gibbs*

Segundo Atkins e Jones (2012), essa teoria foi criada pelo físico norte-americano Josiah Willard Gibbs no final do século XIX, que transformou a teoria da termodinâmica – até então meramente abstrata – em um tema de grande utilidade. De acordo com os autores, o desafio maior não se encontrava na constatação da espontaneidade ou não da ocorrência de uma determinada reação de acordo com a segunda lei da termodinâmica (ex. combustão espontânea do magnésio na presença de oxigênio). O problema estava em calcular a variação de entropia total, dividida em três quantidades: (1) a variação de entropia do sistema propriamente dito, (2) a variação de entropia da vizinhança e (3) a soma dessas duas quantidades. A energia livre de Gibbs simplifica esses três cálculos. Além de verificar a espontaneidade de uma reação, ela permite calcular quanto trabalho de não expansão pode ser obtido de um sistema e como a mudança de temperatura pode alterar a espontaneidade de uma reação.

Atkins e De Paula (2012) afirmam que, na área da química, as reações são consideradas espontâneas no sentido da redução da energia de Gibbs desde que o processo ocorra em temperatura e pressão constantes; assim, dadas as condições iniciais, se o valor de ‘ $G$ ’ diminui durante o avanço determinada reação, a tendência de que os reagentes se convertam em produtos é de natureza espontânea.

Chang e Goldsby (2013, p. 791) consideram que a energia de Gibbs é a energia que se tem para produzir trabalho e, “[...] se uma dada reação for acompanhada por uma liberação de energia utilizável (isto é, se  $\Delta G$  for negativo), este fato por si só garante que a reação é espontânea e não há necessidade de se preocupar com o que sucede no resto do universo.”. De forma análoga, dadas as condições iniciais do problema, o valor final positivo de  $\Delta G$  significa que a formação daquele produto a partir de seus elementos não ocorre de maneira espontânea (ATKINS, JONES, 2012).

Para critérios de avaliação deste trabalho, será dada maior ênfase na energia livre de Gibbs de reação, ou simplesmente energia livre de reação ( $\Delta G$ ), que, de acordo com os autores supracitados, é calculada como sendo a diferença entre as energias livres molares ( $G_m$ ) de produtos e reagentes (Equação 1). No estudo de caso, essa fórmula será útil para descobrir se a transformação do monóxido de carbono – coletado nas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar – em dióxido de carbono para a realização da fotossíntese

pelas plantas é um processo que tende a ocorrer de forma espontânea ou não, assim como a própria fotossíntese.

$$\Delta G = \sum n. G_m(\text{produtos}) - \sum n. G_m(\text{reagentes}) \quad (1)$$

Onde:

$n$  – coeficiente estequiométrico da equação química que se pretende analisar

$G_m$  – energia livre de Gibbs de reação, antes e depois do acontecimento de uma determinada reação.

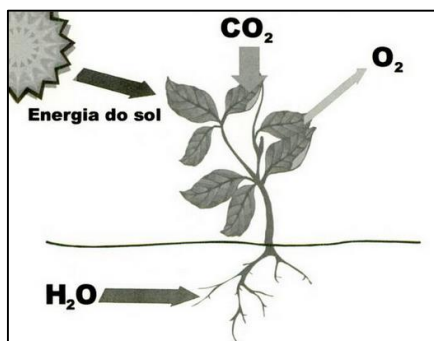
É importante ressaltar que já existem valores obtidos experimentalmente para  $G_m$ , quantias essas geralmente disponíveis em tabelas apêndices de livros especializados no assunto, sendo os mesmos medidos em  $\text{kJ.mol}^{-1}$  (ATKINS, JONES, 2012).

## 2.2 Fotossíntese

Para Vieira *et al.* (2010), a junção das palavras ‘foto’ (luz) e ‘síntese’ (construção) significa a construção ou síntese de compostos orgânicos pela luz. Esse autor afirma que tal processo é atribuído somente aos seres autótrofos (vegetais), que são capazes de capturar, transformar e armazenar a energia radiante do Sol em compostos orgânicos com ligações químicas ricas em energia.

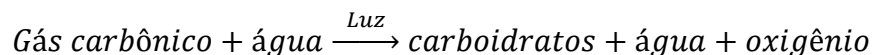
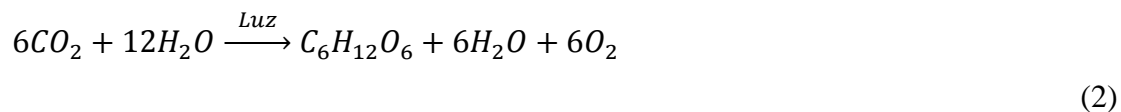
De acordo com Klink (2008), na fotossíntese, os átomos de carbono existentes no dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) são removidos da atmosfera e incorporados aos tecidos vivos dos seres que realizam esse processo. Para Karp (2005), de uma forma geral, o procedimento fotossintético acontece nas folhas dos vegetais e se inicia com a captação da luz por pigmentos de clorofila presentes dentro dos cloroplastos e pelos estômatos, que capturam o gás carbônico atmosférico. A Figura 5 mostra um esquema simplificado do processo de fotossíntese realizado em plantas terrestres.

**Figura 5 – Processo básico da realização da fotossíntese**



Fonte: Klink (2007).

Klink (2007) e Karp (2005) oferecem mais detalhes a respeito do processo que abarca a realização da fotossíntese, descrevendo-o em forma equação química (Equação 2).



(2)

Conforme observado na Equação 2, o processo de fotossíntese necessita da luz solar para ser realizado. As limitações, capacidades de realização de fotossíntese assim como as possíveis quantidade de energia gasta/consumida para a realização desse processo fotoquímico são evidenciadas nos tópicos a seguir.

### 2.2.1 Cálculo da quantidade de energia

Em relação à energia radiante – proveniente da luz do Sol, por exemplo – o físico alemão Max Plank resolveu o mistério das curvas de radiação no ano de 1900 (CHANG, 2010). De acordo com o autor, a abordagem daquele físico foi de encontro aos conceitos da física clássica: até então, a energia radiante emitida por átomos ou moléculas em um sólido poderia ter qualquer energia em um intervalo contínuo, tolerando qualquer valor e até mesmo tendendo ao infinito – efeito este denominado catástrofe ultravioleta. Ainda segundo o autor, Plank provou o contrário ao afirmar que a energia radiante tinha valores fixos e não arbitrários. A energia radiante passou então, a partir de 1900, a ser calculada e não suposta; a fórmula usada para medir a sua quantidade é mostrada na Equação 3 (Holzner, 2012; Chang, 2010).

$$E = h * f = h * \frac{c}{\lambda}$$

(3)

Onde:

E – energia de um fóton em um determinado comprimento de onda, calculado em joule por mol (J.mol<sup>-1</sup>)

h – constante de Plank, sendo igual a 6,626×10<sup>-34</sup> joules por segundo (J/s)

f – frequência da radiação, comumente medida em nanômetros (nm)

c – velocidade da luz, equivalente a aproximadamente 3×10<sup>8</sup> metros por segundo (m/s)

λ – comprimento de onda, medido em metros (m)

É importante ressaltar que Equação 3 se refere ao cálculo da energia carregada por um único fóton, de acordo com a lei da equivalência fotoquímica de Einstein-Stark (um fóton pode interagir com um único elétron) (HOPKINS; HÜNER, 2009). Em relação aos fótons, Karp (2005) afirma que a luz como partícula viaja em pacotes de energia que recebem este nome, e que o conteúdo de energia de um fóton depende do comprimento de onda da luz. Assim, um



mol ( $6,02 \times 10^{23}$ ) de fótons de 680 nanômetros (nm) de comprimento de onda – importante comprimento de onda na realização da fotossíntese – contém cerca de 42.000 calorias (42 kcal, ou 175,812 kJ) de energia.

Vieira (2010) concorda com o autor supracitado ao reconhecer que a luz é emitida em unidades discretas de energia denominadas fótons, e acrescenta que o montante de energia por ele carregado se chama ‘*quantum*’ (no plural, ‘*quanta*’), sendo ela calculada conforme o que foi mostrado na Equação 3. Porém, “O total de energia de fótons [...] absorvido por um mol de um composto é chamado de Einstein e refere-se à quantidade de energia necessária para iniciar uma reação.” (VIEIRA, 2010, p. 68). Desta forma, para se calcular a energia gasta por um mol de fótons, deve-se também usar o número de Avogrado, sendo essa locupletação mostrada na Equação 4, a seguir.

$$E = Na * h * f = Na * h * \frac{c}{\lambda} \quad (4)$$

Onde:

$Na$  – número de Avogrado, calculado em  $6,023 \times 10^{23}$  moléculas por mol (moléculas/mol)

Outro ponto importante a ser mencionado é a respeito do comprimento de onda. Assim, ao citar a energia radiante, Vieira *et al.* (2010) alega que a radiação fotossinteticamente ativa (RFA) varia entre 400 e 700 nm, faixa esta visível ao olho humano e radiação esta utilizada nas reações fotoquímicas da fotossíntese, um dos focos desse trabalho. De acordo com o autor, apenas 50% do total de energia que chega às plantas consiste de RFA. Knight (2009) complementa ao afirmar que os maiores comprimentos de onda são percebidos como luz em tonalidades mais avermelhadas e os mais curtos em tons de violeta.

As tonalidades do espectro da luz variam de autor para autor. A Tabela 1 traz um breve resumo do espectro da luz visível ao olho humano.

**Tabela 1 – Relação entre o espectro da luz e o comprimento de onda ( $\lambda$ )**

Cor da luz	Comprimento da onda $\lambda$ (nm) segundo os autores				
	Só Física	Holzner	Vieira et al	Chang	Knight
Ultra violeta	–	–	$100 < \lambda < 400$	–	–
Violeta	$390 < \lambda < 450$	410	400	400	400
Anil	$450 < \lambda < 455$	–	–	–	–
Azul	$455 < \lambda < 492$	470	500	450	450
Verde	$492 < \lambda < 577$	550	–	490	550
Amarelo	$577 < \lambda < 597$	580	600	580	–
Alaranjado	$597 < \lambda < 622$	610	650	600	–
Vermelho	$622 < \lambda < 780$	660	700	650	650
Infravermelho	–	–	$\lambda > 740$	–	–

Fonte: Adaptado de Só Física (2018); Holzner (2012); Vieira *et al* (2010); Chang (2010); Knight (2009).

Hopkins e Hüner (2009), por sua vez, além de relacionarem o espectro da luz com o seu respectivo comprimento de onda, também evidenciam a energia média carregada por um mol de fótons de cada cor. Os cálculos desses valores foram feitos de acordo com a Equação 4 e sintetizados na Tabela 2.

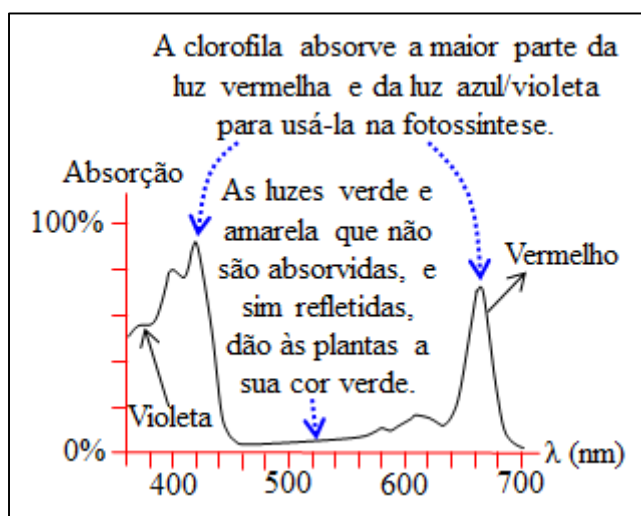
**Tabela 2 – Principais radiações de interesse biólogo**

Cor	Comprimento de onda Faixa (nm)	Energia média kJ mol <sup>-1</sup> fótons
Ultravioleta	100 – 400	
UV-C	100 – 280	471
UV-B	280 – 320	399
UV-A	320 – 400	332
Visível	400 – 740	
Violeta	400 – 425	290
<b>Azul</b>	<b>425 – 490</b>	<b>274</b>
Verde	490 – 550	230
Amarelo	550 – 585	212
Laranja	585 – 640	196
<b>Vermelho</b>	<b>640 – 700</b>	<b>181</b>
Vermelho-distante	700 – 740	166
Infra-vermelho	Maior que 740	85

Fonte: Hopkins; Hüner (2009, p. 95), tradução nossa, grifo nosso.

No processo da realização da fotossíntese, a clorofila absorve a maior parte da luz vermelha e da luz azul/violeta para realizar o processo fotoquímico (MICHAELIS, 2018). Já as luzes com tonalidades verde e amarelo são refletidas para a vizinhança (KNIGHT, 2009). A Figura 6 mostra a curva de absorção das cores de luz pela clorofila.

**Figura 6 – Curva de absorção da luz pela clorofila**



Fonte: Knight (2009, p. 715).

Conforme mostra a Figura 6, somente dois dos sete espectros da luz visível ao olho humano são aproveitados pelas plantas para a realização da fotossíntese.

### 2.2.2 Fatores que influenciam a fotossíntese

São vários os fatores que influenciam na fotossíntese. Pode-se citar, por exemplo, fatores extrínsecos como a maior/menor presença de água, a presença e intensidade de luz, a maior/menor quantia disponível de dióxido de carbono, a temperatura ambiente, o tipo de solo etc., e fatores intrínsecos ao vegetal como a sua idade e aspectos físicos. O Quadro 1 mostra um resumo das principais características citadas por Vieira (2010).

**Quadro 1 – Principais fatores que afetam o processo fotoquímico**

Fator ambiental	Características
Intensidade da luz	A intensidade luminosa é avaliada pela irradiância (fluxo radiante interceptado por unidade de área), e a saturação lumínica de uma folha é rapidamente atingida (principalmente) nas folhas mais externas e bem iluminadas. Plantas cultivadas à sombra frequentemente morrem quando levadas a pleno sol. As altas intensidades luminosas provocam a solarização ou fotooxidação, que é um processo anormal de oxidação.
Qualidade espectral da luz	As diferentes radiações (400 – 700 nm) não são igualmente eficientes na fotossíntese. Os principais picos do processo fotossintético ocorrem a 450 nm (azul) e 655 nm (vermelha).
Duração do período luminoso	As plantas são capazes de realizar fotossíntese durante longos períodos de luz sem declínios aparentes. No decorrer do dia, uma planta exposta a uma luz de intensidade favorável durante 10 ou 12 horas fotossintetiza mais do que quando as condições adequadas de iluminação prevalecem apenas 4 ou 5 horas.
Concentração de CO <sub>2</sub>	O aumento da concentração de CO <sub>2</sub> pode aumentar a fotossíntese e reduzir a fotorrespiração. Porém, elevadas concentrações provocam o fechamento dos estômatos das folhas de modo a bloquear a passagem do referido gás e inibir o processo fotoquímico. De modo geral, durante períodos relativamente curtos, o aumento do CO <sub>2</sub> atmosférico também aumenta a taxa fotossintética até que outro fator, como, por exemplo, a luz, se torne limitante.
Temperatura	A temperatura influencia em vários aspectos e processos fisiológicos e bioquímicos ao mesmo tempo. Neste último, temperaturas entre 30 e 40°C proporcionam um ótimo de rendimento fotoquímico.
Água	A fotossíntese utiliza menos de 1% de água absorvida pela planta. A sua deficiência, porém, aumenta a possibilidade de fotoinibição devido ao aumento da temperatura foliar. Já o seu excesso provoca a redução da taxa fotossintética e, em condições de severo de estresse hídrico, esta pode ser completamente anulada.
Fatores internos da própria planta	Teor de clorofila, idade da folha, hidratação do protoplasma, estrutura e arquitetura foliar (brilho e transparência), organização espacial das folhas, distribuição vertical ou horizontal entre folhas etc.) fertilidade do solo, fungicidas e inseticidas (a aplicação de defensivos químicos podem provocar o entupimento de poros) são fatores que podem interferir na fotossíntese.

Fonte: adaptado de Vieira (2010).

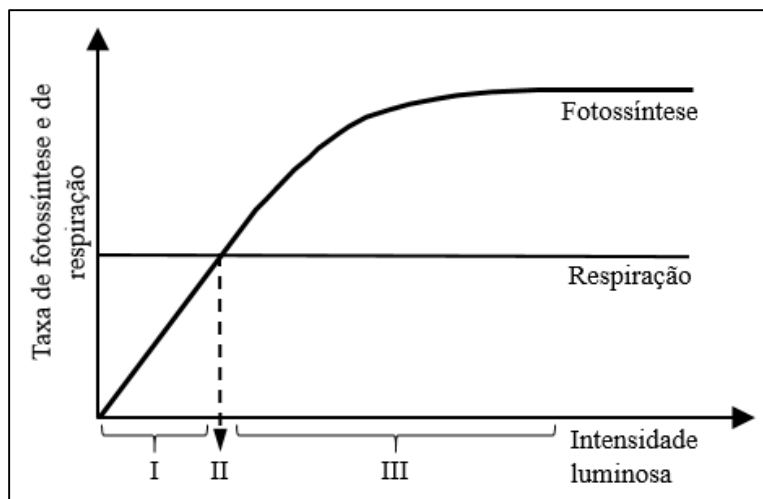
### 2.2.3 A taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa, da concentração de CO<sub>2</sub> e da temperatura

Conforme observado no tópico anterior, a medição da taxa de fotossíntese de uma planta depende de vários fatores – ambientais ou da própria vegetal – que podem provocar o

aumento ou a redução desse processo. Dentre eles, diversos artigos publicados evidenciam registros dessa taxa em função da concentração de dióxido de carbono presente no local, da temperatura e da intensidade luminosa. Marengo e Lopes (2005), por exemplo, afirmam que os fatores que afetam a atividade fotossintética são a intensidade luminosa, a concentração de dióxido de carbono, o teor de nitrogênio da folha e a umidade do solo.

Ao mencionar o fator intensidade luminosa, Cain (2018) argumenta que, à medida que o nível da luz se eleva acima do seu ponto de compensação, a taxa de fotossíntese também se intensifica (Fig. 7). Porém, essa aceleração vai até certo ponto, atingindo um limite onde a taxa se estabiliza. Este ponto é denominado ponto de saturação luminosa, comumente alcançado em um nível abaixo da luz solar plena.

**Figura 7 – Influência da intensidade da luz na fotossíntese**



Fonte: Adaptado de Vieira, 2010; The Amazing Biology (2013).

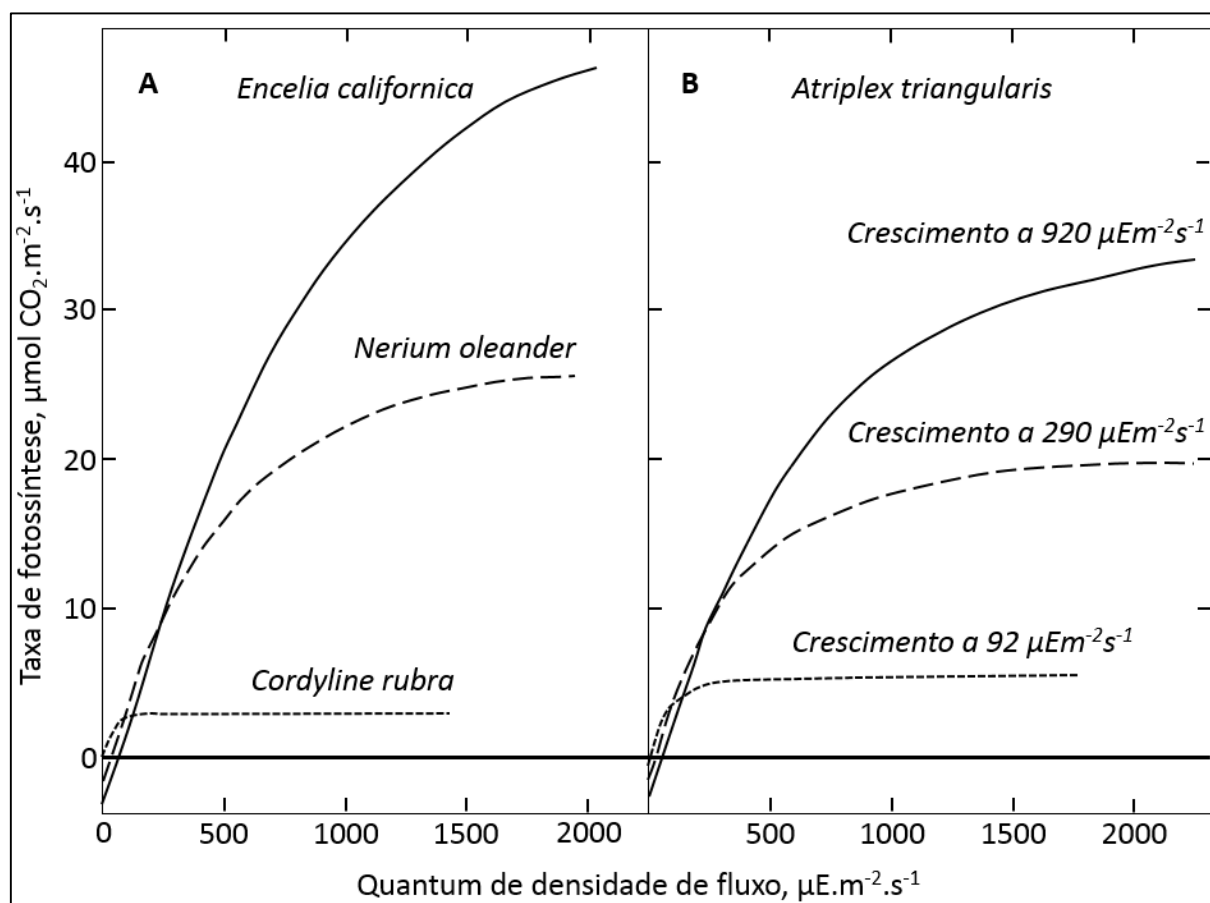
Na Figura 7, o sinal em II indica o ponto de compensação luminoso que, segundo Vieira (2010) – e em linhas gerais, este é o momento em que a quantidade de  $\text{CO}_2$  liberado pela respiração noturna se iguala ao volume de dióxido de carbono assimilado pela fotossíntese (etapa diurna).

Em outras palavras a taxa líquida de fotossíntese será sempre positiva para valores de irradiância acima deste ponto, e ela vai aumentando até atingir a estabilidade (ponto de saturação luminosa) em níveis abaixo da luz solar plena (CAIN; BOWMAN; HACKER, 2018). Já para valores de luminosidade abaixo da marcação II “[...] o processo fotossintético não poderá se beneficiar de incrementos nos níveis de  $\text{CO}_2$  [...]” (VIEIRA, 2010).

Maiores detalhes a respeito da influência da irradiação na fotossíntese são dados por Björkman (1981), onde o pesquisador realizou duas grandes experiências cultivando plantas

em ar com pressões parciais normais de  $\text{CO}_2$  e oxigênio, e a uma temperatura foliar de 25 a 30°C (Figura 8). O experimento (A) foi realizado em plantas de sol (*Encelia californica* e *Nerium oleander*), cultivadas sob luz natural, e em espécies de sombra (*Cordyline rubra*), cultivadas em seu habitat natural de floresta tropical. Já na experiência (B) cultivou-se a planta de sol *Atriplex triangularis* sob três diferentes regimes de intensidade de luz (92, 290 e 920  $\mu\text{mol}/\text{m}^2/\text{s}$ ). Uma das conclusões do pesquisador foi que “[...] a aclimação a diversos níveis de luz envolve uma mudança no ponto de saturação luminosa.” (CAIN; BOWMAN; HACKER, 2018).

**Figura 8 – O clássico experimento de Olle Björkman para respostas a diferentes densidades de fluxo quântico**

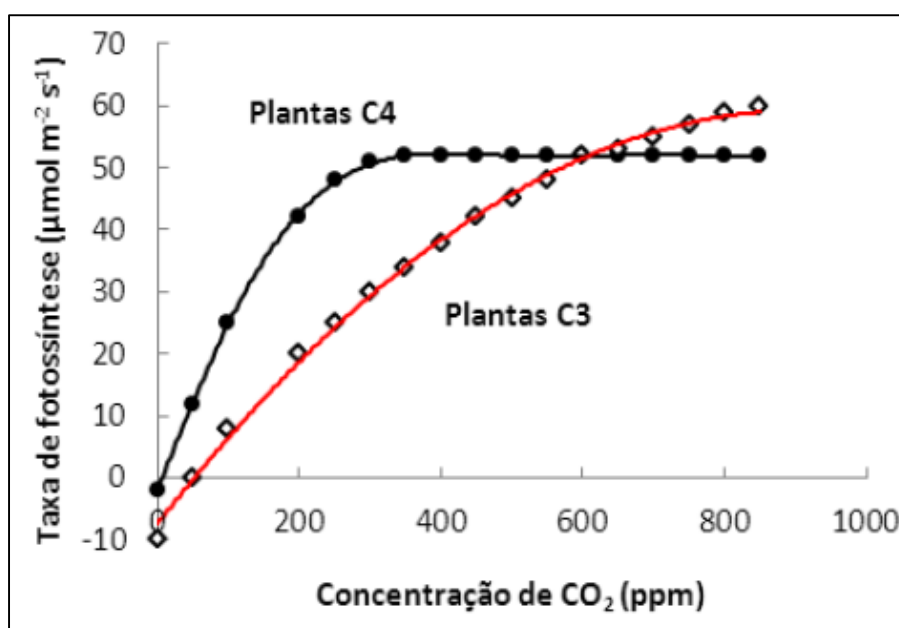


Fonte: Adaptado de Björkman (1981, p. 58).

Outro importante fator que influencia no processo da fotossíntese é a concentração do dióxido de carbono (Figura 9). De acordo com Vidotti (2008), com o ar atmosférico seco (isto é, isento de vapor de água) é composto por uma mistura dos gases nitrogênio ( $\text{N}_2 \cong 78,1\%$ ), oxigênio ( $\text{O}_2 \cong 20,9\%$ ), argônio ( $\text{Ar} \cong 0,934\%$ ), dióxido de carbono ( $\text{CO}_2 \cong 0,0314\%$  ou 350 ppm) e 0,0346% de outros gases como o hélio, neônio, criptônio, hidrogênio

e xenônio. De acordo com o *site* de *internet* Educabras (2018), ensaios realizados em laboratórios encontraram uma quantia ótima de 0,2% de CO<sub>2</sub> (2.000 ppm de CO<sub>2</sub>), uma vez que para valores acima dessa concentração o processo fotótico já não mais aumentava; porém, uma concentração estimada em 0,05% (500 ppm) desse gás tóxico já seria suficiente para descongelar uma parcela das calotas polares, culminando no aumento do nível dos mares e gerando inundações catastróficas.

**Figura 9 – Influência da concentração de CO<sub>2</sub> na fotossíntese**



Fonte: Martinez *et al.* (2015).

Os dados da Figura 9 se referem a ensaios realizados em plantas C<sub>3</sub> (ex. algodão, mamona, amendoim, gergelim) e C<sub>4</sub> (ex. milho, cana-de-açúcar, sorgo) em condições de alta luminosidade e fatores não limitantes de água e nutrientes. As diferenças básicas entre essas classes de vegetais é que as primeiras formam o ácido 3-fosfoglicérico após a absorção (ou fixação) de CO<sub>2</sub>, produzem menos açúcar/energia apresentam elevada taxa de fotossíntese ao passo que as C<sub>4</sub> apresentam a capacidade de fixar quatro moléculas de carbono durante o processo fotoquímico após a fixação do dióxido de carbono e, dentre outras características, a taxa de fotossíntese das plantas C<sub>4</sub> é muito maior do que as C<sub>3</sub> (MARTINEZ *et al.*, 2015; MARCEL, 2014; BELTRÃO, OLIVEIRA, 2008).

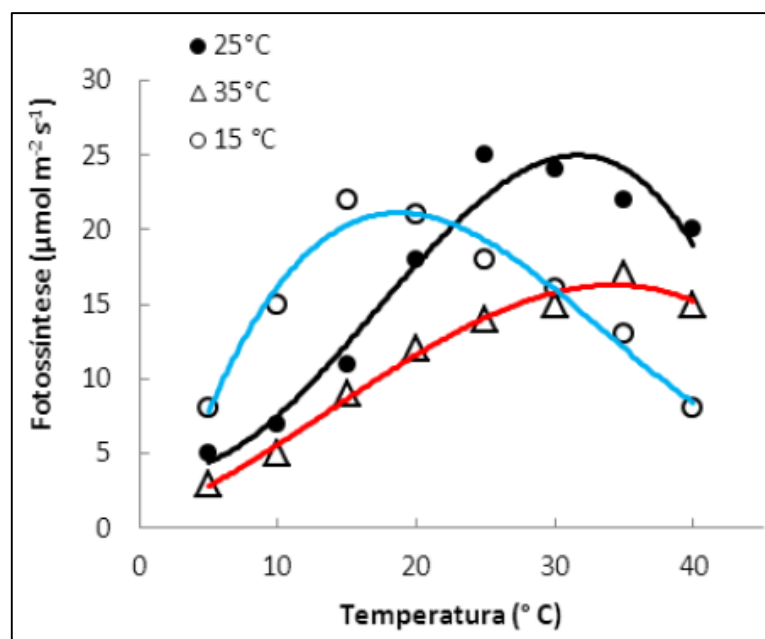
Já em relação ao fator temperatura, Moore (2008) declara que na química orgânica há uma regra geral que diz que o seu aumento em 10 graus Celcius faz a velocidade da reação dobrar (basicamente, o incremento desse fator faz com que as moléculas se movam mais rápido, aumentando a probabilidade de colisão e reação entre elas).

Sadava (2009), por sua vez, afirma que as plantas respondem à elevação da temperatura de forma rápida (alguns minutos, somente), produzindo vários tipos de proteínas de choque térmico, e que a temperatura de 39°C é suficiente para induzi-las a produzir.

As temperaturas consideradas moderadamente altas (35 a 42°C) podem causar danos diretos ao aparato fotossintético (Wise *et al.* 2004), por provocar mudanças na membrana do tilacóide e alterar as propriedades físico-químicas e, também, a organização funcional dessas estruturas celulares. Em elevadas temperaturas, a taxa máxima de assimilação de carbono pode ser inibida por diminuir a condutância estomática (Law & Crafts-Brandner 1999). (ARAÚJO; DEMINICIS, 2009, p. 467).

Um exemplo da influência da temperatura na taxa fotoquímica durante o cultivo de plantas em três níveis diferentes é mostrado na Figura 10.

**Figura 10 – Influência da temperatura na fotossíntese**



Fonte: Martinez *et al.* (2015).

Em se tratando da influência da temperatura no processo fotoquímico, Taiz *et al.* (2017, p. 228) afirmam que “A resposta de assimilação líquida de CO<sub>2</sub> à temperatura controla a distribuição de espécies C<sub>3</sub> e C<sub>4</sub> na Terra.”. Conforme os autores, o fato de as plantas C<sub>4</sub> apresentarem uma assimilação de CO<sub>2</sub> mais eficiente em altas temperaturas faz tornar as suas espécies mais abundantes nas regiões tropicais e subtropicais e menos abundantes em latitudes que se afastam da linha do Equador. Ademais, os vegetais caracterizados como C<sub>3</sub> apresentam uma taxa ótima de fotossíntese em temperaturas entre 20 a 25°C ao passo que as espécies C<sub>4</sub> exibem uma taxa fotossintética mais otimizada em temperaturas que variam entre 25 e 35°C.

Em suma, o trinômio intensidade luminosa, concentração de CO<sub>2</sub> e temperatura é um importante indicativo para a mensuração da taxa de fotossíntese, mas não é o único causador do aumento ou redução deste processo. Há, porém, uma premissa estabelecida por Blackman comumente conhecida como lei dos fatores limitantes. Segundo García (1977, p. 10), esse pesquisador estabeleceu sua proposta precisamente para a fotossíntese mas se aplica a todo sistema, seja em biologia, em física, em química etc. Blackman estabeleceu que “[...] quando um processo é condicionado em termos de sua velocidade por um número de fatores separados, a velocidade do processo é limitada pelo fator mais escasso.”.

## 2.3 Análises estatísticas

Triola (2013) afirma que a palavra estatística vem do latim (*status*) e significa estado; as primeiras aplicações dela envolviam compilações de dados e gráficos que descreviam aspectos de um estado ou país. Segundo o autor, no ano de 1662 John Graunt publicou o primeiro trabalho que continha informações contendo estatísticas a respeito do número de nascimentos e mortes.

Segundo o autor, “**Estatística** é a ciência do planejamento de estudos e experimentos, da observação de dados e, em seguida, da organização, resumo, apresentação, análise, interpretação e elaboração de conclusões com base nos dados.” (TRIOLA (2013, p. 4, grifo do autor).

Os tópicos a seguir buscam referenciar algumas abordagens e ferramentas estatísticas a serem utilizadas no estudo de caso.

### 2.3.1 Estatística inferencial ou indutiva

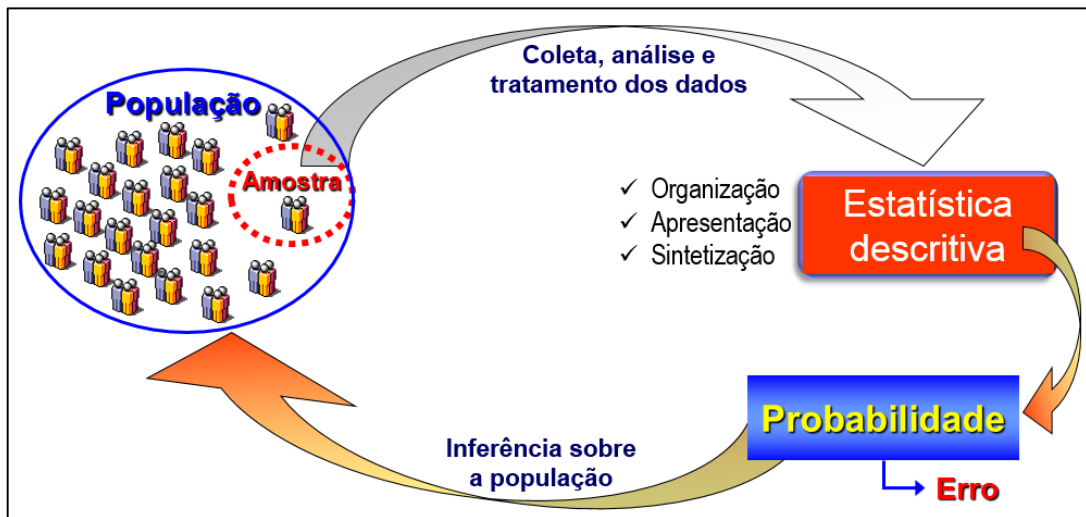
Na estatística, Mann (2012) alega que a coleção de todos os elementos de interesse é denominada população; ao se selecionar alguns membros ou componentes dessa população, o grupo coletado passa a denominar amostra. O fato de se aplicar o conhecimento estatístico e usar os resultados obtidos na amostra para auxiliar na tomada de decisão ou para realizar previsões sobre uma população é conhecido como inferência estatística. Há, porém, um risco: “Na estatística inferencial, tomamos decisões em condições de incerteza.” (MANN, 2012, p. 127).

Segundo Montgomery e Runger (2009, p. 141, grifo dos autores), “A inferência estatística lida em tomar **decisões** acerca de uma população, baseando-se na informação contida



em uma amostra aleatória proveniente daquela população.”. A Figura 14 mostra de forma sucinta os principais conceitos abordados por diversos autores a respeito da inferência estatística.

**Figura 11 – Coleta de amostras de uma população e inferência estatística para a população**

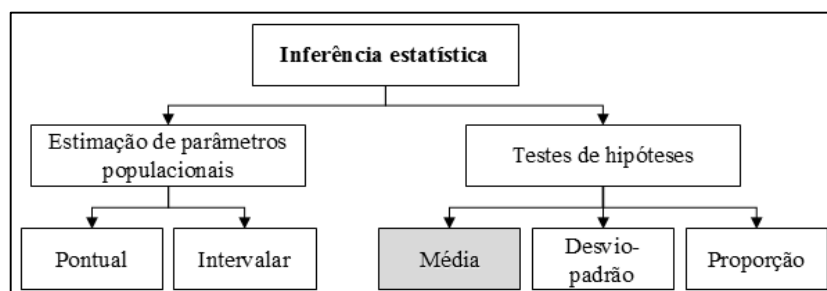


Fonte: Elaboração própria (2018).

Freund (2006) afirma que os problemas de inferência estatística – esta, mostrada sucintamente na Figura 11 – são baseados em dados amostrais e podem ser classificados em três tipos: (1) problemas de estimativa, onde se busca determinar os valores de parâmetros populacionais, (2) problemas de previsão, onde são previstos valores futuros de variáveis aleatórias, e (3), o teste de hipóteses, onde se rejeitam ou não rejeitam afirmações a respeito de parâmetros ou formas de populações. Vale a pena ressaltar que Triola (2013) denota por parâmetro populacional alguma referência estatística feita em relação à média, proporção ou desvio-padrão.

A Figura 12 mostra um resumo dos principais problemas de inferências estudados na estatística e difundidos Montgomery e Runger (2009).

**Figura 12 – Alguns dos modelos de estudo destinados à inferência estatística indutiva**



Fonte: Elaboração própria (2018).

Para este trabalho, dos diversos métodos destinados a estudos sobre inferências estatísticas, dar-se-á maior ênfase aos conceitos vinculados a testes de hipóteses para a média amostral.

### 2.3.2 Teste de hipóteses

A começar pelo segundo nome que compõe este capítulo, uma hipótese é a “proposição que se admite, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa, como um princípio a partir do qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências; suposição, conjectura.” (HOUAISS, 2009). Dentre outros significados, o dicionário eletrônico Michaelis (2018) descreve essa palavra como sendo uma afirmação especulativa entre duas ou mais variáveis.

Na área de conhecimento da estatística, uma hipótese é uma afirmação a respeito dos parâmetros de uma ou mais populações (MONTGOMERY; RUNGER, 2009) que é presumida como verdadeira, até que seja declarada falsa (MANN, 2012). De acordo com os primeiros autores, muitos problemas de engenharia requerem a decisão entre rejeitar ou não rejeitar uma afirmação acerca de uma característica populacional.

Antes de iniciar qualquer estudo estatístico dessa natureza, deve-se formular quais são as hipóteses a serem analisadas. Uma boa tradução do significado do termo ‘formulação de hipóteses’ é muito bem dada por Mann (2012, p. 378, grifo do autor).

Considere o exemplo não estatístico de uma pessoa que tenha sido indiciada por ter cometido um crime e que esteja sendo julgada em um tribunal. Com base na evidência disponível, o juiz, ou júri, irá tomar uma dentre duas possíveis decisões:

1. A pessoa não é culpada.
2. A pessoa é culpada

No início do julgamento, a pessoa é presumida não culpada. Os esforços do promotor são dirigidos no sentido de provar que a pessoa efetivamente cometeu o crime e, por conseguinte, seja culpada.

Em estatística, a afirmação *a pessoa não é culpada* é chamada de **hipótese nula**, e a afirmação *a pessoa é culpada* é chamado de **hipótese alternativa**.”

Triola (2013) declara que a hipótese nula ( $H_0$ ) deve ser formulada de forma a assumir que o valor de um parâmetro populacional seja igual a um valor específico ao passo que a hipótese alternativa ( $H_1$ ) deva ser conjecturada de forma a mostrar que os dados provenientes da amostra são maiores, menores ou diferentes dos parâmetros populacionais. O Quadro 2 sumariza esses dizeres, devendo o leitor se atentar principalmente à formalização dos sinais:

Quadro 2 – Formulação de hipóteses

Hipótese nula	Hipótese alternativa
<b>H<sub>0</sub></b> : dados da amostra = parâmetro (média, proporção ou desvio-padrão) populacional	<b>H<sub>1</sub></b> : dados amostrais > parâmetro populacional OU <b>H<sub>1</sub></b> : dados amostrais < parâmetro populacional OU <b>H<sub>1</sub></b> : dados amostrais ≠ parâmetro populacional

Fonte: adaptado de Triola (2013), Mann (2012), Montgomery e Runger (2009), Freund (2006), Stevenson (2001).

Mann (2012, p. 378) ainda destaca que “[...] na hipótese nula (e na hipótese alternativa também) utilizamos o parâmetro da população (tal como  $\mu$  ou  $p$ ), e não a estatística da amostra (tal como  $\bar{x}$  ou  $\hat{p}$ )”. Desta forma, Freund (2006) cita alguns exemplos de como se proceder para montar um teste de hipóteses:

✓ Ao se suspeitar de que um jogo de dados não é honesto, devemos partir do princípio de que eles sejam perfeitamente equilibrados ( $H_0$ ) e a partir daí buscar meios para provar o contrário. O raciocínio inverso é mais trabalhoso pois se formularmos a hipótese inicial de que os dados são realmente viciados, tudo dependeria de quão viciados eles seriam;

✓ Se quisermos mostrar que um método de ensino em programação computacional é mais eficiente que o outro, devemos partir da hipótese inicial  $H_0$  de que ambos os métodos são igualmente eficientes;

✓ Da mesma forma, se o investigador suspeitar de que uma dieta é mais saudável do que a outra, a hipótese nula  $H_0$  deverá ser formulada de modo a afirmar que ambas as dietas são igualmente saudáveis.

Em suma, a hipótese nula é a afirmação inicial de que não há diferença nenhuma entre os objetos de estudo, ou seja, a hipótese nula conjectura que os aspectos avaliados na amostra não diferem em relação à população (FREUND, 2006).

Conforme afirmado por Stevenson (2001), o ponto crucial do teste de hipóteses é constatar, com um determinado grau de confiança (ou melhor, com um certo nível de significância), se as diferenças entre o valor apresentado por um parâmetro populacional e o valor encontrado em uma estatística amostral podem ser atribuídas à variabilidade inerente de cada amostra ou se a discrepância encontrada é demasiadamente grande ao ponto de afirmar que há diferença estatística entre ambas.

Montgomery e Runger (2009) descrevem uma metodologia contendo oito etapas que devem ser feitas para se garantir uma boa aplicação de testes de hipóteses:

1. Identificar o parâmetro de interesse a partir do contexto do problema;

2. Estabelecer a hipótese nula  $H_0$ ;
3. Especificar uma hipótese alternativa  $H_1$  apropriada;
4. Escolher um nível de significância  $\alpha$ ;
5. Determinar a estatística mais apropriada ao teste;
6. Estabelecer a região de rejeição para a estatística;
7. Calcular a grandeza amostral necessária, substituir os seus valores na equação para a estatística de teste e calcular o seu valor;
8. Decidir se a hipótese  $H_0$  deve ou não ser rejeitada e reportar isso no contexto do problema.

Como as análises estatísticas serão realizadas diretamente em um *software* específico, não serão dados maiores detalhes a respeito das fórmulas utilizadas no processo decisório (etapa 7).

#### 2.3.2.1 Nível de significância

A palavra *significante*, ou *significativo* pode ser expressa como aquilo que contém alguma revelação interessante ou expressiva, ou aquilo que dá a entender com clareza, ou ainda que contém ou sugere uma informação importante (MICHAELIS, 2018; HOUAISS, 2009).

De acordo com a *Creative Research Systems* (2016), a palavra ‘significante’ tem a conotação de ‘importante’. Já a palavra ‘significativo’, no campo da estatística, tem o sentido de ser ‘provavelmente verdadeiro’, e não devido ao acaso.

Para diferenciar essas duas palavras, o referido *site* de *internet* cita o exemplo de que uma descoberta de pesquisa pode ser verdadeira mas não apresentar importância nenhuma. Logo, se os estatísticos afirmam que um resultado é ‘altamente significativo’, eles estão anunciando que a resposta é muito provavelmente verdadeira mas isso não significa (necessariamente) que o fato tem elevada importância.

Durante a elaboração de um teste de hipóteses, uma das etapas afirmadas por Montgomery e Runger (2009) é a especificação dos critérios de rejeição, devendo-se, para tal, escolher um nível de significância, representado pela letra grega alfa ( $\alpha$ ).

Para Triola (2013, p. 322), o nível de significância, ou ponto crítico “[...] é a probabilidade de a estatística de teste cair na região crítica quando a hipótese nula for realmente verdadeira.”, ou seja, o cometimento do erro de rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira é representado pelo nível de significância  $\alpha$ .

Conti (2009) simplifica: segundo a autora, o nível de significância estatística é o limite que se toma como base para afirmar se um certo desvio é decorrente do acaso ou não

De acordo com o *site* de *internet Creative Research Systems* (2016), o nível de significância pode se tornar um termo enganoso que muitos pesquisadores não entendem completamente (os níveis de significância, segundo o *site*, mostram a probabilidade de um padrão em seus dados ocorrer devido ao acaso).

O capítulo seguinte complementarará e facilitará a compreensão do leitor a respeito desse assunto.

### 2.3.2.2 Erros cometidos nos testes de hipóteses

De volta ao exemplo citado por Mann no capítulo 4.3 ('Teste de hipóteses') onde uma pessoa está sendo julgada em um tribunal pelo cometimento de um crime, existem duas possibilidades de acontecimento se o réu for declarado culpado:

1. A pessoa não cometeu o crime, mas foi declarada culpada (caso 2, FIG. 16);
2. A pessoa cometeu o crime e é corretamente declarada culpada (caso 4, FIG. 16).

O primeiro caso pode ocorrer em função da constituição de falsas evidências, tendo o tribunal cometido um erro ao punir uma pessoa inocente. Já no segundo caso terá tomado uma decisão correta, punindo uma pessoa realmente culpada (MANN, 2012).

Existem, na verdade, quatro possibilidades: na vida real, o réu pode ter cometido ou não tal crime, e o tribunal pode ou não condená-lo. A Figura 13 resume essas quatro situações.

**Figura 13 – Erros tipo I e tipo II cometidos em testes de hipóteses**

Decisão	Situação efetiva A hipótese nula é...		Nível de significância ( $\beta$ ). Probabilidade de cometer o <b>erro tipo II</b> .
	Verdadeira	Falsa	
Não rejeitar a hipótese nula	<b>Decisão correta</b> $1 - \alpha$ (1)	Erro tipo II $\beta$ (3)	
Rejeitar a hipótese nula	Erro tipo I $\alpha$ (2)	<b>Decisão correta</b> $1 - \beta$ (4)	

Nível de significância ( $\alpha$ ) de um teste de hipótese. Probabilidade de cometer o **erro tipo I**.

Fonte: adaptado de Triola (2013), Mann (2012), Montgomery e Runger (2009), Freund (2006), Stevenson (2001).

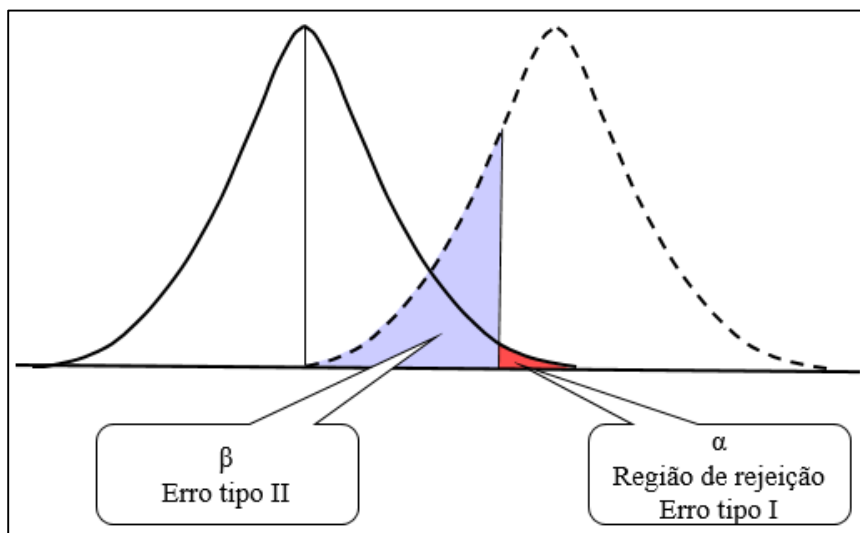
Assim de acordo com a Figura 13, a decisão está correta se (1) a hipótese  $H_0$  for verdadeira e não rejeitada ou (4) falsa e rejeitada. Porém, a decisão estará equivocada se (2)  $H_0$  verdadeira e for rejeitada ou (4) for falsa e não for rejeitada. Ainda, os valores ' $1 - \alpha$ ' e ' $1 - \beta$ ' correspondem aos níveis de (ex. 95% de confiança ao se considerar 5% de significância).

Ademais, Montgomery e Runger (2009) afirmam que pelo fato de processos decisórios dessa natureza estatística serem baseados em variáveis aleatórias, probabilidades podem ser associadas com os erros tipos I e II. Em relação a esses erros, os autores definem que:

1. A probabilidade de ocorrência do erro tipo I é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula  $H_0$  quando ela é verdadeira;
2. A probabilidade de ocorrência do erro tipo II é a probabilidade de falhar em rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa.

A revista eletrônica da empresa *Reliability HotWire* (2009) relata que os erros tipo I também são chamados de risco do fabricante, falso alarme falso negativo e erro  $\alpha$  enquanto os erros tipo II podem ser conhecidos como risco do consumidor, falha de detecção, falso positivo ou erro  $\beta$ . A Figura 14 mostra a interação desses dois erros.

**Figura 14 – Interação entre os erros tipo I e II**



Fonte: Adaptado de Montgomery e Runger (2009).

Observa-se, na Figura 14, que os dois tipos de erros são inversamente proporcionais: se aumentar o valor do nível de significância  $\alpha$  (ex. de 1% para 5%), a região de rejeição aumentará e o erro tipo II reduzirá; se diminuir o valor de  $\alpha$ , o valor de  $\beta$  aumenta

(MANN, 2012). A única forma de reduzir ambos os erros é, segundo o autor, aumentar o tamanho da amostra.

Para explicar a ocorrência e relação entre esses dois erros, portal de *internet* do *software* estatístico Minitab (2017) fornece um exemplo, onde se deseja comparar a eficácia de dois medicamentos, com as seguintes hipóteses

- ✓  $H_0$ : os medicamentos são igualmente eficazes ( $\mu_1 = \mu_2$ );
- ✓  $H_1$ : os medicamentos não são igualmente eficazes ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ).

Ao cometer o erro do tipo I, o pesquisador opta por rejeitar a hipótese nula e concluir que os dois medicamentos são diferentes quando, de fato, eles não são.

Se ambos tiverem a mesma eficácia, “[...] o investigador poderá não considerar este erro muito severo porque os pacientes ainda se beneficiarão do mesmo nível de eficácia, independentemente de qual medicamento eles tomarem.”. Contudo, se ocorrer um erro do tipo II, o pesquisador não rejeitará a hipótese nula, quando ele deveria tê-la rejeitado. Isto é, o pesquisador concluir que os medicamentos são os mesmos quando, de fato, eles são diferentes. Este erro potencialmente impõe risco à vida se o medicamento menos eficaz for vendido para o público, em vez daquele mais eficaz.

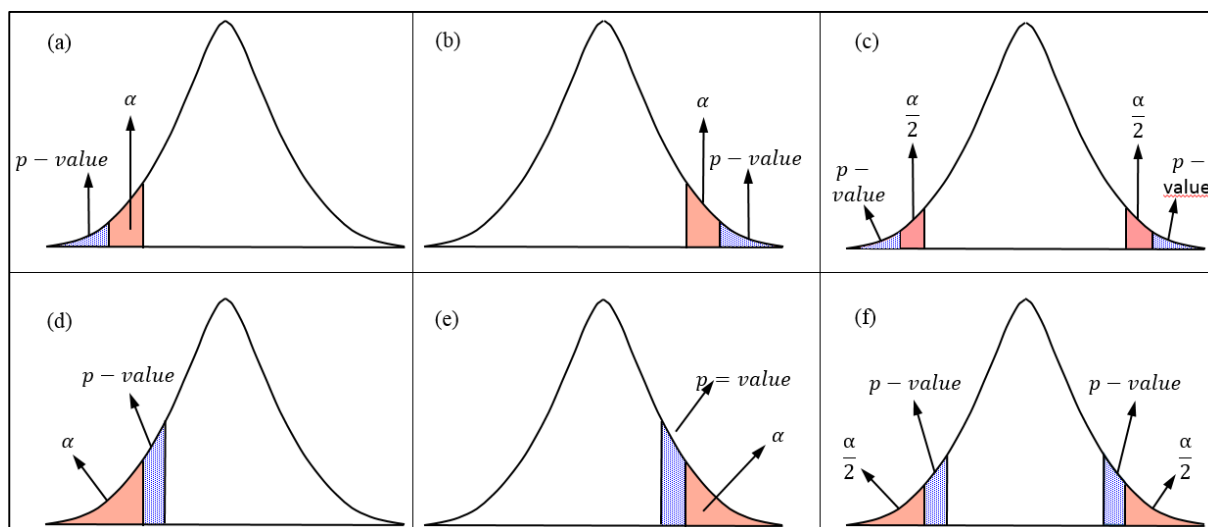
Desta forma, dependendo da importância do estudo realizado, os riscos de se cometer os erros tipos I e II devem ser levados em consideração: se as consequências de se cometer um erro forem mais sérias ou dispendiosas do que o outro tipo de erro, deve-se reavaliar o nível de significância e escolher uma potência para o teste que refletirá a gravidade relativa dessas consequências.

### 2.3.2.3 *P-value nos testes de hipóteses*

Montgomery e Runger (2009, p. 182) afirmam que o *p-value*, ou valor-P, “[...] é o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula  $H_0$ , com os dados fornecidos.”. Em relação ao nível de significância, os autores declaram que o *p-value* pode ser entendido “[...] como o menor nível de significância  $\alpha$  em que os dados são significantes.”.

Para Triola (2013, p. 323, grifo do autor), o valor-P ou valor de probabilidade “[...] é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste que seja, *pelo menos, tão extremo* quanto aquele que representa os dados amostrais, supondo que a hipótese nula seja verdadeira.”. A interpretação gráfica do nível de significância com o *p-value* em relação aos testes de hipóteses é mostrada na Figura 15.

**Figura 15 – Interpretação do nível de significância  $\alpha$  com o  $p$ -value em testes de hipóteses**



Fonte: Elaboração própria (2018).

Como pode ser observado na Figura 15, o  $p$ -value pode ser encontrado dentro da área da estatística de teste (ou seja, o  $p$ -value é menor que o nível de significância alfa – casos 18-a; 18-b; 18-c) ou fora da área da estatística de teste ( $p$ -value  $>$   $\alpha$  – casos 18-d; 18-e; 18-f). Ademais, a hipótese inicial  $H_0$  deve ser rejeitada nos três primeiros casos e não rejeitada nas três últimas situações.

Ao se observar somente a fixação de um nível de significância  $\alpha$  após a elaboração do teste de hipóteses, os procedimentos matemáticos podem levar à rejeição da hipótese nula para um determinado valor de  $\alpha$  e à não rejeição de  $H_0$  para um valor menor. Para evitar essa possível dúvida por parte do avaliador, sugere-se a não construção da(s) região(ões) crítica(s) e a indicação da probabilidade de ocorrência de valores estatísticos mais extremos do que o observado (MORETTIN ; BUSSAB, 2013).

De acordo com o portal de *internet* do *software* estatístico Minitab (2017), para avaliar a significância estatística, o valor-P do teste deve ser examinado. Se o  $p$ -value for menor que o nível de significância  $\alpha$  especificado, o pesquisador pode declarar a diferença como sendo estatisticamente significativa e rejeitar hipótese nula do teste. Desta forma, de volta à Figura 18, constata-se a rejeição de  $H_0$  nos testes unilateral à esquerda, unilateral à direita e bilateral (figuras 18-a; 18-b; 18-c, respectivamente) e a não rejeição de  $H_0$  nos testes mostrados nas figuras 18-d, 18-e e 18-f.

Para estudos clínicos, Netto (2007) afirma que os resultados para  $p$ -value podem variar de ‘não significativo’ até ‘extremamente significativo’, conforme mostra a Tabela 3.



Tabela 3 – Significados dos valores de *p-value* em estudos clínicos

<i>p-value</i>	Significado
$p\text{-value} < 0,001$	Extremamente significativa
$0,001 < p\text{-value} < 0,01$	Muito significativa
$0,01 < p\text{-value} < 0,05$	Significativa
$p\text{-value} > 0,05$	Não significativa

Fonte: Adaptado de Netto (2007).

Ressalta-se que, na Tabela 3, os significados para o *p-value* são relativos e podem depender do tipo de pesquisa a ser realizada.

### 2.3.3 Análise de variância (ANOVA) de fator único

Para Mann (2012), os testes de hipótese são comumente eficazes para comparar se há diferença entre médias aritméticas de duas populações. No caso de existirem três ou mais populações diferentes, a análise de variância (em inglês, *analysis of variance*, ou ANOVA) é a ferramenta mais indicada para esta finalidade.

Triola (2013) explica o porquê disso. Tomando como exemplo a comparação de três médias populacionais tomadas duas a duas e adotando-se um nível de 5% de significância, dever-se-ia elaborar três testes de hipóteses contendo  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ,  $H_0: \mu_1 = \mu_3$  e  $H_0: \mu_2 = \mu_3$ . Tal experimento faria com que o nível geral real de confiança caísse para 0,95<sup>3</sup> ou 0,857, ou seja, o risco de se cometer o erro tipo I se tornaria muito alto. É por essa razão que, para mais de três populações, deve-se utilizar um teste para a igualdade de várias médias (ANOVA) ao invés de se realizar vários testes em que cada um compara duas médias de cada vez.

Esse mesmo autor define a ANOVA como sendo um método para testar a igualdade de três ou mais médias populacionais por meio da análise das variâncias obtidas nas amostras. A ANOVA de um fator é usada com dados categorizados por uma única característica (também conhecida como tratamento, ou fator) que permite distinguir pelo menos uma população das demais.

Faria (2017) mostra um exemplo de forma bem clara e sucinta para exemplificar a aplicação da ANOVA. Neste arquétipo, a autora supõe a existência de três professores de matemática, responsáveis por diferentes turmas de alunos onde o pesquisador tem interesse em saber se há diferença na metodologia de ensino empregada pelos três profissionais. Se os discentes apresentarem médias de desempenho parecidas, haverá pouca variabilidade entre dados (notas) e as distribuições das três classes tenderão a se sobrepor. Esse acontecimento confirmará a hipótese  $H_0$ , onde se supõe que não há diferença entre o desempenho das notas

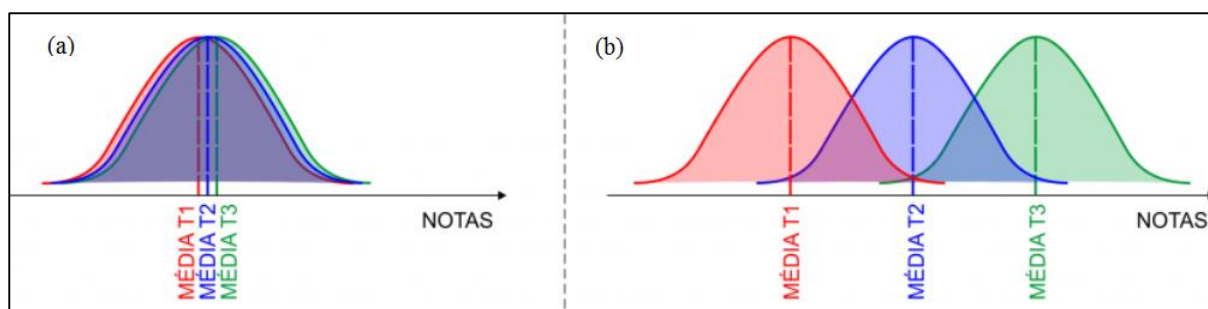
dos alunos de cada professor. Por outro lado, se os grupos apresentarem a mesma variabilidade interna mas com médias de desempenho diferentes, as distribuições se distanciarão quanto mais as médias de desempenho se diferenciam.

O teste de hipótese ficaria assim:

- ✓  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  (as médias das populações/turmas são estatisticamente iguais)
- ✓  $H_1$ : pelo menos uma das médias difere das demais (ou seja, pelo menos um dos professores apresenta desempenho diferente dos demais).

A Figura 16 mostra uma das representações esquemáticas dessas hipóteses (no caso,  $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ ).

**Figura 16 – Distribuição das notas dos alunos supondo que (a) não há diferença entre as turmas e (b) existem diferenças entre as mesmas**



Fonte: Faria (2017).

Um estudo de análise de variância, deve seguir algumas premissas, das quais Triola (2013) e Mann (2009) fazem questão de mencionar:

1. As populações a partir das quais as amostras serão extraídas apresentam distribuições que são aproximadamente normais (exigência leve);
2. As populações apresentam o mesmo desvio-padrão  $\sigma$ , ou a mesma variância  $\sigma^2$  (exigência leve);
3. Os dados coletados são provenientes de amostras aleatórias simples de dados quantitativos;
4. As amostras provenientes de diferentes de populações são coletadas de forma aleatória e independentes umas das outras;
5. As diferentes amostras são de populações que são categorizadas de apenas uma maneira.

De posse da coleta de dados e observação dos requisitos iniciais, a implementação da ANOVA para um único fator gera um quadro contendo números (Quadro 3).

**Quadro 3 – ANOVA para um planejamento**

Fonte de variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média quadrática	F <sub>o</sub>
Tratamentos	$SQ_{tratamentos}$	$a - 1$	$MQ_{tratamentos}$	$MQ_{tratamentos}/MQ_E$
Erro	$SQ_E$	$a.(n - 1)$	$MQ_E$	
Total	$SQT$	$a.n - 1$		

Fonte: Montgomery e Runger (2009).

Onde:

$SQ_{tratamentos}$  – soma dos quadrados dos tratamentos

$SQ_E$  – soma dos quadrados dos erros

$SQT$  – soma total dos quadrados

$a$  – número de tratamentos

$n$  – número de observações realizadas em cada tratamento

$MQ_{tratamentos}$  – média quadrática dos tratamentos

$MQ_E$  – média quadrática dos erros

$F_o$  – estatística da distribuição F observada

A interpretação dos resultados advindos do Quadro 3 é feita da seguinte forma: rejeita-se  $H_0$  se a estatística F de Fisher-Snedecor observada nos cálculos ( $F_o$ ) for maior do que o valor tabelado de F ( $F_{tab}$ ), a estatística F coletada de uma tabela (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

Porém, conforme defendido por Triola (2013), a existência de diversos *softwares* (ex. Staddisk®, Minitab®, MS Excel®, TI-83-84 Plus, R, dentre outros) permitem o calcular a ANOVA e comparar o *p-value* gerado com o nível de significância previamente escolhido. Da mesma forma que no capítulo anterior, rejeita-se  $H_0$  se '*p-value* <  $\alpha$ '.

### 2.3.4 Testes *post hoc*

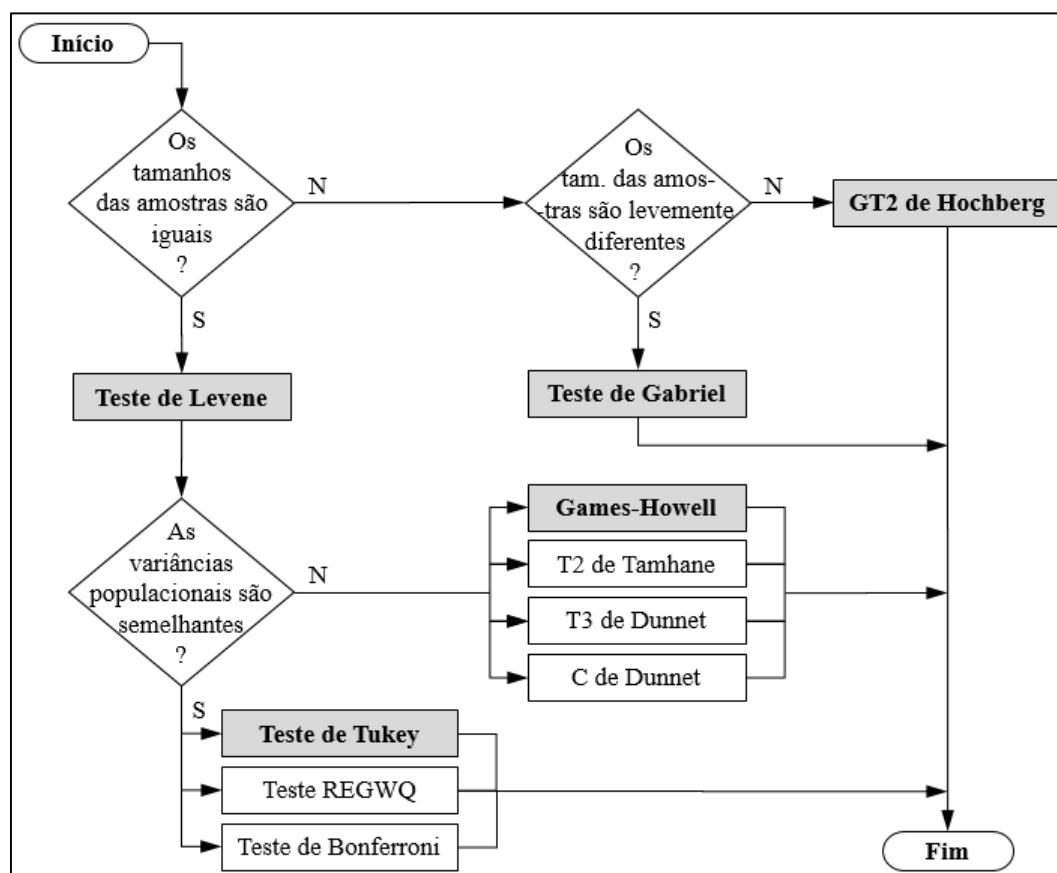
A realização da análise de variância tem como produto principal o fornecimento de subsídios para decidir quanto à rejeição ou não rejeição da hipótese inicial ou nula. Caso  $H_0$  seja rejeitada, ou seja, caso seja constatado que há diferença estatística entre as médias populacionais, esse método por si só não tem condições de prover maiores detalhes em relação à formação de subgrupos amostrais.

As análises – ou testes – *post-hoc* (traduzindo-se do latim, *post-hoc* significa 'depois disso') foram desenvolvidas para preencher essa lacuna. Conforme Field (2011) explica em seu livro, esses testes consistem em comparações par a par de todas as diferentes combinações dos grupos que estão sendo testados. Um de seus objetivos é fazer com que o erro

tipo I total ( $\alpha$ ) permaneça constante ao longo de todas as comparações uma vez que as confrontações aos pares promovem o controle do erro do conjunto e corrigem o nível de significância de cada teste.

Existem diversas formas de controlar o erro do conjunto: o *software* SPSS, por exemplo, disponibiliza dezoito tipos de testes diferentes (FIELD, 2011). Algumas delas são mostradas na Figura 17 de acordo com os critérios de entrada dos dados propostas pelo autor.

**Figura 17 – Alguns critérios de decisão propostos por Field (2011) para testes *post hoc* em análises estatísticas**



Fonte: Elaboração própria (2018).

As caixas marcadas em cinza na Figura 17 se referem aos possíveis testes que podem ser usados no estudo de caso para o tratamento de dados referentes ao monóxido de carbono.

De acordo com Field (2011), a maioria das pesquisas que utilizam os testes *post-hoc* se depara com problemas de desempenho do teste ao se defrontar com amostras de diferentes tamanhos (grupos distintos), com variâncias populacionais muito diferentes e quando os dados não seguem a distribuição Normal.

Há sempre um contrapeso: um teste dito conservador (baixa probabilidade de ocorrência do erro tipo I, como o de Bonferroni) promove um baixo poder estatístico (alta probabilidade de cometimento do erro do tipo II); um teste com grande poder pode se tornar mais liberal quando os tamanhos das amostras forem pequenos; se um teste é dito potente na resolução de problemas com tamanhos amostrais levemente diferentes (ex. teste de Gabriel), ele pode se tornar muito liberal se os tamanhos amostrais diferirem muito (FIELD, 2011).

Assim, é importante controlar a taxa de erro do tipo I mediante a aplicação dos procedimentos de comparações múltiplas, mas evitando perdas substanciais no poder e, independentemente do critério *post-hoc* adotado, Field (2011) recomenda a execução do teste de Games-Howell em virtude da incerteza em relação à igualdade das variâncias populacionais.

#### 2.3.4.1 O teste de Tukey

De acordo com o *site Portal Action* (2018-c; 2018-d), o teste de Tukey – conhecido como teste de ‘Tukey da diferença honestamente significativa’ (em inglês, *Tukey honestly significant difference* (Tukey HSD) – é usado para comparar médias e tem como objetivo confrontá-las duas a duas na tentativa de se constatar diferenças entre os níveis dos fatores.

Levine (1991) anuncia que o teste de Tukey é usado quando o avaliador tem a intenção de manter um nível de erro Tipo 1 (alfa) "familiar", mas de acordo com a seguinte ótica: ao se fazer todas as comparações entre pares de médias de uma mesma população, existe a probabilidade de que um ou mais dos confrontos sejam estatisticamente significativos. Esse teste segue o mesmo critério que a ANOVA (comparação de médias), e é muito comum, segundo o autor, utilizar um nível de significância alfa de também 5% para a sua realização.

De acordo com Levine (1991, p. 65, tradução nossa), o de Tukey é uma forma conveniente

[...] de computar um único valor em que todas as diferenças possíveis entre pares de médias possam ser comparadas para significância estatística. Assim, se seis comparações forem feitas, um único valor seria computado para determinar quais diferenças entre as médias excederiam o valor único necessário para a significância estatística.

O autor ainda afirma que, além do teste de Tukey, existe o teste LSD (em inglês, *least significant difference* – ou diferença menos significativa) e que ambas as ferramentas estão disponíveis no *software* estatístico SPSS.

Deve-se tomar alguns cuidados antes de elaborar o teste HSD. Faria (2017) menciona que as seguintes ponderações devem ser levadas em conta:

1. As observações dentro dos grupos e entre os grupos são independentes;
2. Os grupos devem ser normalmente distribuídos;
3. A variância dentro do grupo deve ser constante.

A autora ainda declara que se a suposição de normalidade dos dados não for atendida, pode-se adotar os testes de Kruskal-Wallis e/ou de comparação múltipla de Nemenyi como procedimentos alternativos à ANOVA e ao teste de Tukey.

Em relação ao número de amostras, o teste de Tukey é dito exato se os grupos apresentarem o mesmo tamanho; ou seja, para o conjunto de todas as comparações par a par, a taxa de erro do conjunto dos testes é exatamente igual ao nível de significância  $\alpha$ , e seu complemento (intervalo de confiança) é pontualmente igual a  $1 - \alpha$  (FARIA, 2017). Se as amostras apresentarem quantidades diferentes (dados não balanceados), o teste de Tukey é modificado passa a ser chamado por vários escritores como teste de Tukey-kramer; este método não é exato, mas fornece intervalos uniformemente mais curtos do que qualquer outro método de comparações múltiplas de uma etapa para a família de todas as comparações par a par (PORTAL ACTION, 2018-d).

## **2.4 Equações diferenciais e suas classificações**

Os matemáticos Boyce e DiPrima (2015) afirmam que diversos princípios (e leis) que explicam o comportamento do mundo físico são proposições – ou relações – que envolvem uma determinada taxa segundo a qual as coisas acontecem. Traduzindo esses fatos em uma linguagem matemática, os autores declaram que as relações podem ser expressas em equações e suas taxas manifestadas como suas respectivas derivadas. Desta forma, os mesmos alegam que equações que contêm derivadas são denominadas equações diferenciais.

Os instituidores Zill e Cullen, (2001-a) denominam de equação diferencial a formulação matemática que contenha derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Para os autores, além de Boyce e DiPrima (2015), as equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com o tipo, ordem e linearidade, conforme mostrado no Quadro 4.

Quadro 4 – Classificação das equações diferenciais

Classificação	Nome	Característica	Exemplo
Tipo	Equação diferencial ordinária (EDO)	Equação que contém derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Ou seja, a variável desconhecida depende de uma única variável independente, e as derivadas da equação diferencial são simples.	$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$
	Equação diferencial parcial (EDP)	Equação que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes. Isto é, a variável desconhecida depende de diversas variáveis independentes.	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$
Ordem	1ª ordem, 2ª ordem, ..., ordem n.	A ordem da equação é dada pela maior ordem da equação diferencial. Nos exemplos ao lado, a primeira equação é uma EDO de 2ª ordem enquanto a segunda é uma EDP de 4ª ordem.	$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \text{sen}(y)$ $a^2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
Linearidade	Linear	Existem, para as equações lineares, duas propriedades: (I) a variável dependente y e suas derivadas são do primeiro grau – ou seja, a potência que envolve y é 1; (II) os coeficientes dependem somente da variável independente x.	$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 \cdot e^x$ $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2 - 9}y = 0$
	Não linear	Toda equação que não é linear. Exemplos básicos de equações não lineares são aquelas que apresentam expressões como y.y', ou x.y.	$xdy + ydx = 0$ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$

Fonte: Elaboração própria (2018).

O Apêndice A traz uma breve colocação a respeito das equações diferenciais ordinárias, assunto introdutório ao propósito desse trabalho.

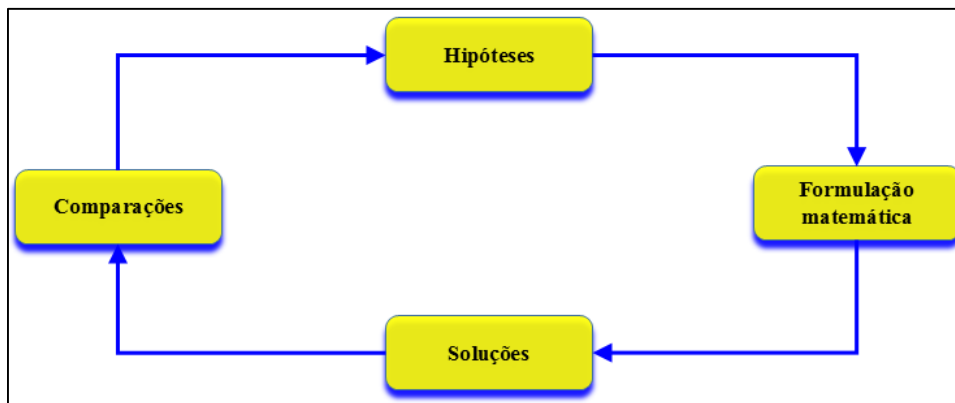
#### 2.4.1 Sistemas de equações diferenciais

De acordo com Zill e Wright (2015, p. 19, tradução nossa), “Frequentemente é desejável descrever o comportamento de alguns sistemas ou fenômenos da vida real em termos matemáticos, sejam eles físicos, sociológicos ou mesmo econômicos.”. Para os autores, a descrição matemática de um fenômeno – ou conjunto de fenômenos é chamada modelo matemático, e a apresentação do acontecimento deve se iniciar com (i) a identificação das variáveis responsáveis pelas mudanças no sistema, e (ii) a elaboração de um conjunto de hipóteses razoáveis a respeito do sistema (dependendo do nível de detalhamento, tais hipóteses podem incluir todas as leis empíricas aplicáveis ao agrupamento).

Desta forma, a estrutura matemática de todas as conjecturas pode se transformar em uma equação diferencial ou em um sistema de equações diferenciais, cuja solução deve ser

consistente com o comportamento do sistema – ou seja, a solução teórica ou visualização do comportamento do modelo deve apresentar respostas condizentes com os dados experimentais ou com os fatos conhecidos sobre o comportamento do sistema (ZILL; WRIGHT, 2015). As etapas para a elaboração de um modelo de equações diferenciais são mostradas na Figura 18.

**Figura 18 – Etapas para a elaboração de um sistema de equações diferenciais**



Fonte: Adaptado de Zill; Wright (2015).

Na Figura 18, o primeiro passo consiste em definir e exprimir as hipóteses em termos de equações diferenciais (EDs). Após a formulação matemática (passo 2), deve-se resolver as EDs e obter as soluções (passo 3). Completando o ciclo, o passo 4 consiste em confrontar as previsões obtidas no modelo (ex. forma gráfica) com os fatos já conhecidos; se houver muitas diferenças, sugere-se que sejam feitas mudanças nas hipóteses ou aumentar a resolução/complexidade do modelo.

#### **2.4.2 Sistemas de equações lineares de primeira ordem**

“Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas sendo função da mesma variável independente única” (BOYCE, DIPRIMA, 2015 p. 302).

Os autores supracitados denotam a variável independente pela letra ‘t’ e as variáveis dependentes por  $x_1, x_2, x_3$  etc., todas elas em função de ‘t’.

##### **2.4.2.1 Definições segundo os autores Boyce de DiPrima (2015)**

Para se transformar a equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (5)$$



em um sistema de  $n$  equações de primeira ordem e definindo as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  por

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ x_3 &= y'' \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} e, \end{aligned} \quad (6)$$

derivando-se  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , obtém-se

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n \end{aligned} \quad (7)$$

Para a equação (5), elaborando-se os mesmos procedimentos de (6) e derivando-se a referida fórmula, tem-se,

$$x'_n = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (8)$$

As equações (7) e (8) tornam-se, desta forma, casos particulares do sistema mais geral

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Boyce e DiPrima (2015) mencionam que os sistemas descritos na forma (9) incluem quase todos os casos de interesse uma vez que grande parte da teoria mais avançada de equações diferenciais se dedica a tais sistemas. Assim sendo, uma solução do sistema (9) no intervalo  $I$ :  $\alpha < t < \beta$  é um conjunto de  $n$  funções

$$\begin{aligned} x_1 &= (\phi_1)t \\ x_2 &= (\phi_2)t \\ x_3 &= (\phi_3)t \\ &\vdots \\ x_n &= (\phi_n)t \end{aligned} \quad (10)$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo  $I$  e que satisfazem o sistema de equações (9) em todos os pontos do referido intervalo. Ademais, além desse sistema de equações diferenciais, pode-se, também, fornecer condições iniciais da forma

$$\begin{aligned}
x_1(t_0) &= x_1^0 \\
x_2(t_0) &= x_2^0 \\
x_3(t_0) &= x_3^0 \\
&\vdots \\
x_n(t_0) &= x_n^0,
\end{aligned} \tag{11}$$

em que  $t_0$  é um valor especificado de  $t$  em  $I$ , e  $x_1^0, \dots, x_n^0$  são números dados. As equações diferenciais mostradas em (9) e as condições iniciais exibidas em (11) formam, juntas um problema de valor inicial (PVI).

Vale a pena ressaltar que essas condições iniciais determinam o ponto inicial do objeto de estudo e que, muitas vezes, torna-se interessante pensar na curva como a trajetória, caminho percorrido ou comportamento do modelo linear de acordo com o sistema de equações diferenciais (9).

De posse dos enunciados acima, Boyce e DiPrima (2015, p. 305) afirmam que os sistemas de equações lineares de primeira ordem seguem dois teoremas principais. Para a primeira proposição,

- i. “Suponha que cada uma das funções  $F_1, F_2, \dots, F_n$  e suas derivadas parciais  $\partial F_1/\partial x_1, \dots, \partial F_1/\partial x_n, \dots, \partial F_n/\partial x_1, \dots, \partial F_n/\partial x_n$  são contínuas em uma região  $R$  do espaço  $tx_1 \dots x_n$  definida por  $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$  e suponha que o ponto  $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  está em  $R$ . Então, existe um intervalo  $|t - t_0| < h$  no qual existe uma única solução  $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  do sistema de equações diferenciais (8) que também satisfaz as condições iniciais (13)”.

Assim, o sistema de equações (9) é dito linear se cada uma das funções  $F_1, \dots, F_n$  for uma função linear das variáveis dependentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Desta forma, o sistema mais geral de  $n$  equações lineares tem a forma

$$\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\
&\vdots \\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

O sistema 12 é dito homogêneo se todas as funções  $g_1(t), \dots, g_n(t)$  forem identicamente nulas no intervalo  $I$ ; caso contrário, ele é não homogêneo.

O segundo teorema, enunciado por Boyce e DiPrima (2015, p. 305), é

- ii. “Se as funções  $p_{11}, p_{12}, \dots, g_1, \dots, g_n$  forem contínuas em um intervalo aberto  $I: \alpha < t < \beta$ , então existirá uma única solução  $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  do sistema (11) que também satisfaz as condições iniciais (10), em que  $t_0$  é qualquer ponto em  $I$ , e  $x_1^0, \dots, x_n^0$  são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo  $I$ ”.

Para os autores, para um sistema linear, os valores iniciais  $x_1^0, \dots, x_n^0$  em  $t = t_0$  são inteiramente arbitrários; em um sistema não linear, o ponto inicial deve estar contido na região  $R$  definida no primeiro teorema.

Zill e Cullen (2001-b) exibem alguns métodos de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares, a saber:

- ✓ Método dos operadores;
- ✓ Transformada de Laplace;
- ✓ Determinação de autovalores e respectivos autovetores correspondentes para resolução de um sistema homogêneo;
- ✓ Método dos coeficientes indeterminados, método da variação de parâmetros e expansão matricial para resolução de um sistema não homogêneo.

#### ***2.4.3 Sistema autônomo, campo vetorial e estabilidade de sistemas lineares***

Para iniciar os assuntos a respeito da estabilidade de sistemas lineares, deve-se conhecer, inicialmente, os conceitos de sistemas autônomos e campos vetoriais

##### ***2.4.3.1 Sistema autônomo***

Conforme exposto por Zill e Cullen (2001-b, p. 149, grifo dos autores), “Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é chamado **autônomo** quando pode ser posto[...]” no seguinte formato:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{13}$$

Na equação (13), verifica-se que “[...] a variável independente  $t$  não aparece explicitamente no membro direito das equações diferenciais [...]” (ZILL, CULLEN, 2015-b, p. 149). Os autores Boyce e DiPrima (2015, p. 422) afirmam que “um sistema autônomo é um sistema cuja configuração é independente do tempo, incluindo parâmetros físicos e forças ou

efeitos externos. A resposta do sistema a condições iniciais dadas é independente, portanto, do instante em que as condições são impostas”.

Em contrapartida, o sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 3x_2 + t^2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \cdot \text{sen}(x_2 \cdot t)\end{aligned}$$

não é considerado como autônomo pois as funções apresentam  $t^2$  e  $\text{sen}(x_2 \cdot t)$  nos membros do lado direito (ZILL; CULLEN, 2001-b).

#### 2.4.3.2 Campo vetorial e tipos de soluções – uma breve interpretação

Zill e Cullen (2001-b) denominam sistema autônomo plano o modelo matemático que comporta duas equações diferenciais, podendo o mesmo ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y)\end{aligned}\tag{14}$$

O vetor  $V(x, y) = P(x, y).Q(x, y)$  define um campo vetorial em uma região do plano; a solução do sistema  $X = X(t)$  pode ser interpretada como sendo a trajetória de uma partícula que se move na região.

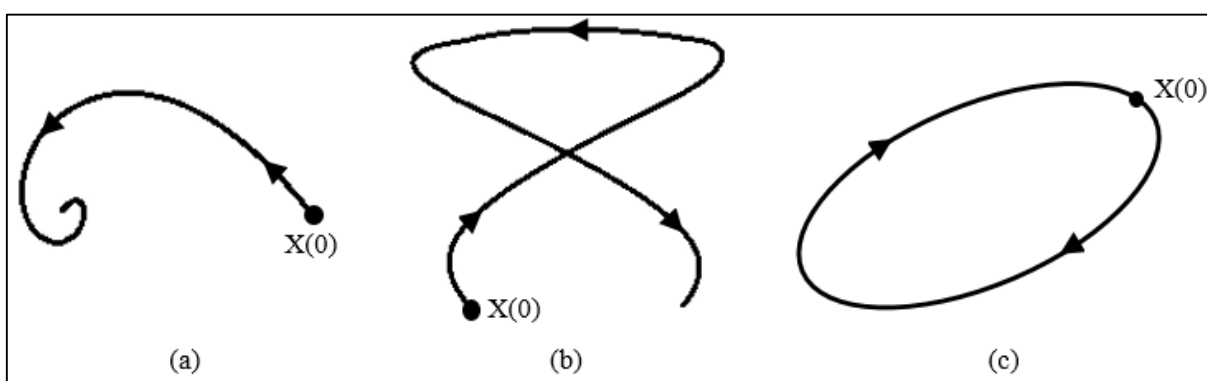
Ao se denominar  $V(x, y)$  como sendo a velocidade de uma corrente na posição  $(x, y)$  e supondo que essa partícula seja liberada no ponto  $(x_0, y_0)$ , pode-se encontrar, no instante  $t$ , a posição  $X(t) = (x(t), y(t))$  da partícula. A derivada desta posição  $X(t)$ , descrita como sendo  $X'(t) = (x'(t), y'(t))$ , é denominada, conforme Zill e Cullen (2001-b), de vetor velocidade  $v$ . Vale a pena ressaltar que, anulando-se a presença de forças externas e desprezando-se as forças de atrito, a velocidade da partícula no instante  $t$  é a velocidade da própria corrente no instante  $X(t)$ . Em suma, tem-se:

$$\begin{aligned}X'(t) &= V(x(t), y(t)) \\ \text{Isto é, } \frac{dx}{dt} &= P(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x(t), y(t))\end{aligned}\tag{15}$$

A trajetória da partícula, desta forma, é a solução de um sistema que satisfaz a condição inicial  $X(0) = (x_0, y_0)$ , sendo esse conjunto de equações a interpretação simples de um sistema autônomo (ZILL, CULLEN, 2001-b).

Para estes autores, as soluções  $X(t) = (x(t), y(t))$  do sistema autônomo plano (15) ou são **pontos críticos** – correspondentes a soluções constantes ( $X(0) = X_0$ ), ou **arcos** – em que a curva solução não se intercepta, ou **ciclos** – correspondentes a soluções periódicas (a Figura 19 mostra esses tipos de soluções). Ademais, a obtenção de pontos críticos é conseguida por meio da resolução do sistema de equações, e a algébricas.

Figura 19 – Tipos de soluções encontradas em um sistema autônomo



Fonte: Zill; Cullen (2001, p. 153).

Na Figura 19, Zill e Cullen (2001-b) afirmam que a imagem mostrada em 19-a se trata de um arco onde a curva não se intercepta e pode, assim, ser uma solução de um sistema autônomo plano. O mesmo não acontece na Figura 19-b: como há interceptação na curva, a solução  $X = X(t); Y = Y(t)$  que define aquele arco não pode ser considerada como o resultado de um sistema autônomo. Já em 19-c há a ocorrência de uma solução periódica, denominada ciclo.

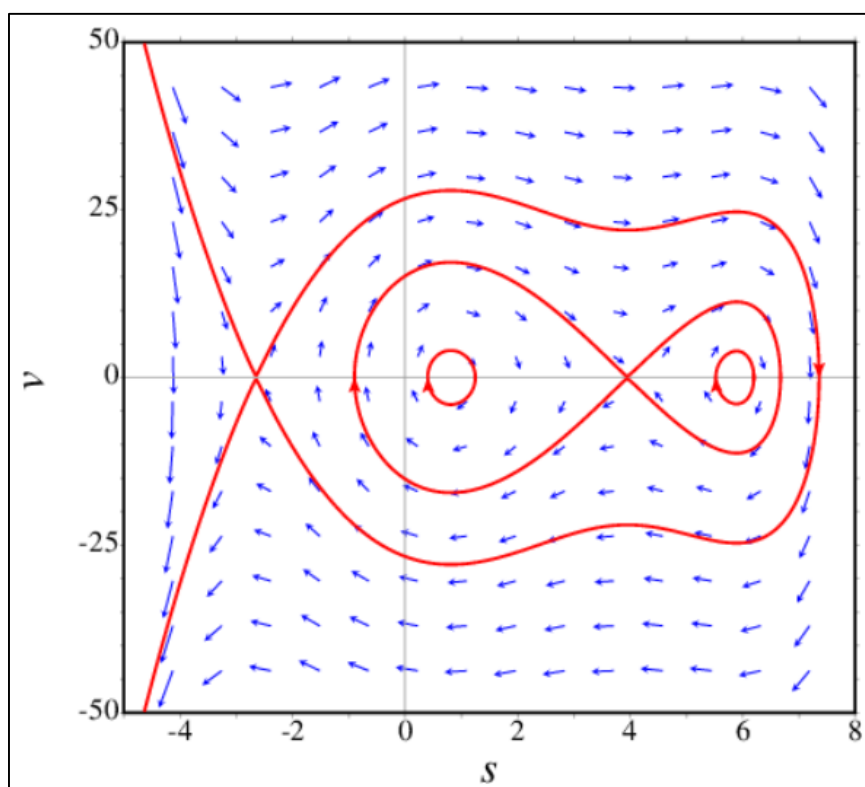
#### 2.4.3.3 Estabilidade de sistemas lineares

Boyce e DiPrima (2015, p.404) afirmam que “O conceito de estabilidade está associado à possibilidade de que pequenos erros introduzidos durante um procedimento matemático possam ser reduzidos à medida que o procedimento continua”. Em contrapartida, a instabilidade, segundo os autores, ocorrerá se o aparecimento de pequenos erros tende a aumentar.

De uma maneira mais geral, diz-se que a solução de um problema de valor inicial (PVI) é assintoticamente estável se soluções inicialmente próximas tendem a se aproximar da

solução dada. Caso contrário, se as soluções tendem a se afastar, afirma-se que o PVI apresenta solução assintoticamente instável. Em uma análise gráfica (FIG. 20), o comportamento de soluções estáveis tende a se aproximar enquanto o de soluções instáveis tende a se separar (BOYCE, DIPRIMA, 2015).

**Figura 20 – Estabilidade e instabilidade de sistemas**



Fonte: Vilate (2018).

A Figura 20 representa o resultado gráfico de um exemplo citado por Vilate (2018), onde um corpo de 0,3 quilos é deslocado sob a ação de uma força tangencial  $F$  ao longo de uma trajetória  $s$  conforme a equação  $F(s) = -0,5s^4 + 4s^3 - 1,5s^2 - 32s + 25$ . Derivando a função em relação a  $s$  e igualando-se a zero, encontram-se os pontos críticos. Há, nessa figura, a existência de quatro pontos de equilíbrio onde a força tangencial é:

✓ Os pontos 0,810 e 5,891 apresentam duas curvas fechadas em suas vizinhanças ao passo que os pontos -2,652 e 3,950 exibem curvas de evolução que começam ou terminam naqueles pontos.

✓ Em síntese, os dois primeiros valores são pontos de equilíbrio estável pois, “[...] se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema regressará ao esse estado inicial.” enquanto os dois últimos valores são pontos de equilíbrio instável (se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, o sistema tende a se afastar desse estado inicial) (VILATE, 2018).

#### 2.4.4 Equações diferenciais não lineares

Para Kozakevich (2003), as equações diferenciais não lineares são muito difíceis de se revolver analiticamente ou até mesmo impossíveis de se conseguir. De acordo com o autor, o objetivo principal é obter informações qualitativas a respeito do comportamento na proximidade do ponto (ou pontos) de equilíbrio.

Conforme destacado por Bassanezi (2016), uma equação diferencial não linear primeira ordem é definida como

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (16)$$

onde  $f$  é uma combinação não linear de  $y_n$ , podendo  $y$  ser quadrática, uma potência, uma exponencial etc. A solução da equação (16), segundo o autor, é uma expressão que relaciona a condição inicial  $y_0$  com cada estágio de  $y_n$ , não sendo possível obter uma solução direta quando se trata de equações não lineares.

Há, porém, uma maneira de se obter soluções analíticas para determinada equação diferencial não linear. O método de resolução de Bernoulli, exemplificado por Zill e Cullen (2001-a), é um caso particular de ED. De acordo com os autores, tal resolução nem sempre é exequível mas é possível fazer uma adaptação na variável dependente de forma a transformar equação não linear em linear por meio de substituição algébrica. Segundo os autores, a forma mais importante da equação de Bernoulli assume a forma

$$y' + P(t).y = Q(t).y^n \quad (17)$$

Passando a variável dependente  $y^n$  para o numerador do primeiro membro, tem-se:

$$y^{-n}.y' + P(t).y^{1-n} = Q(t) \Rightarrow y^{-n}.\frac{dy}{dt} + P(t).y^{1-n} = Q(t) \quad (18)$$

Usando as operações algébricas a seguir em (18)

$$y^{1-n} = w$$

$$\frac{dw}{dt} = (1-n).y^{-n}.\frac{dy}{dt} \Rightarrow y^{-n}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1-n}.\frac{dw}{dt} \quad (19)$$

tem-se a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{1}{1-n}.\frac{dw}{dt} + P(t).w = Q(t) \quad (20)$$

devendo esta equação ser resolvida e substituídos os valores para se encontrar a solução geral.

Além do método de resolução descoberto por Bernoulli, existem, dentre outros, os métodos de Ricatti e de Abel.

Quanto às aplicações de equações não lineares, Zill e Cullen (2001-a) destacam um capítulo de seus livros para mostrar as resoluções de alguns exemplos. Dentre diversos possíveis empregos, os autores citam o seu uso em estudos para representar modelos simplificados que expliquem um crescimento populacional, a desintegração de uma substância radioativa (reação química) de acordo com uma taxa proporcional à quantidade de matéria não submetida à conversão ou até mesmo o cálculo da velocidade mínima necessária (velocidade de escape) para que um foguete entre em órbita terrestre.

#### ***2.4.5 Diferença entre equações diferenciais lineares e não lineares***

Grings (2015) mostra de uma forma bem simples a diferença entre equações diferenciais (EDs) lineares e não lineares. De acordo com o autor, seja a equação

$$a_n(x).y^n + a_{n-1}(x).y^{n-1} + \dots + a_1(x).y' + a_0(x).y = g(x) \quad (21)$$

onde a variável  $y$  é acompanhada do nível de sua derivada de ordem  $n$ , e os coeficientes  $a$  e  $g$  dependem somente da variável  $x$ . Assim, uma ED é classificada como linear se ela segue o modelo mostrado da Equação (21). Como exemplo, pode-se verificar que a equação  $x.y'' + (x+1).y' + 2.y = x^2 + 1$  é linear de segunda ordem com  $g(x) = x^2 + 1$ .

Por outro lado, qualquer ED que não siga o modelo evidenciado em (21) é tratada como sendo não linear. Conforme evidenciado no Quadro 2, as EDs não lineares geralmente apresentam expressões como  $y.y'$ , ou  $x.y$ . A equação  $y.y'' + (x+1).y' + 2.y = x^2 + 1$ , por exemplo, é uma ED não linear de segunda ordem uma vez que o coeficiente da derivada  $y''$  não depende de  $x$ .

#### ***2.4.6 Sistemas de equações diferenciais não lineares***

Para Zill e Cullen (2001-a), em geral, quando se desenvolve um sistema de equações diferenciais não linear, torna-se pouco provável a constatação de soluções em termos de funções elementares. Boyce e DiPrima (2015, p. 411) corroboram com os autores, afirmando que “Existem muitas equações diferenciais, especialmente as não lineares, que não são



suscetíveis à solução analítica de algum modo razoavelmente conveniente”. Para estes, a resolução por meio de métodos numéricos fornece um modo de tratar essas equações.

Zill e Cullen (2001-b) asseguram a possibilidade de obtenção de informações valiosas a respeito da natureza geométrica das soluções. Tais informações são alcançadas por meio da análise inicial de pontos críticos (ou soluções constantes iniciais) e procura por resultados periódicos. Essas soluções especiais, segundo os responsáveis, podem ser classificadas como estáveis ou instáveis dependendo do comportamento das respostas em sua vizinhança.

## 2.5 Solução numérica de equações diferenciais

Para Zill e Cullen (2001), uma equação diferencial não tem necessariamente uma única solução. Mesmo que possa demonstrar a existência da solução de uma equação diferencial, nem sempre é possível expressá-la de forma implícita ou explícita. Em muitos casos o pesquisador tem que se contentar com uma aproximação da solução e, se a solução existe, ela deve ser representada por um conjunto de pontos no plano cartesiano (ZILL, WRIGHT, 2015).

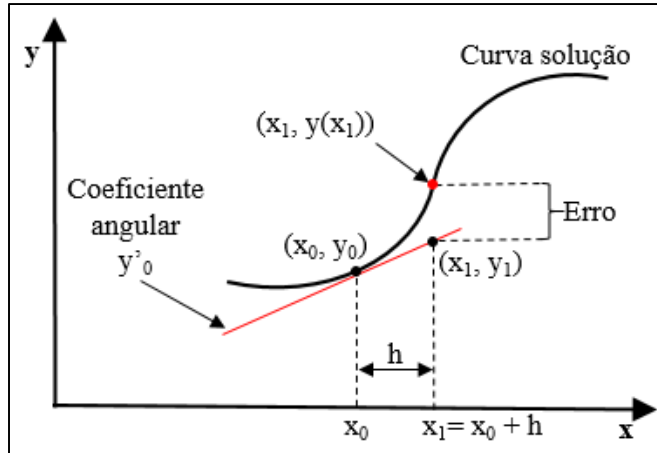
Para facilitar a compreensão do leitor, fez-se um resumo desse método de solução com base nos autores Stewart (2016), Boyce e DiPrima (2015), Zill e Wright (2015), Zill e Cullen (2001).

O método de Euler, ou método das retas tangentes é considerado uma das técnicas mais simples para aproximar soluções de equações diferenciais. Supondo-se que o problema de valor inicial (PVI) mostrado na Equação (22) tenha uma solução, o método de Euler consiste no uso de retas tangentes à curva de integração (ou curva de solução) com o objetivo de realizar aproximações da solução exata.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (22)$$

A Figura 21 mostra a ideia de Euler para realizar as aproximações numéricas em relação à solução exata.

**Figura 21 – Aproximação de  $y(x_1)$  usando a reta tangente de Euler**



Fonte: Adaptado de Zill; Wright (2015), Zill; Cullen (2001).

Considerando-se que o ponto  $x_1$  seja igual ao ponto  $x_0$  acrescido de uma constante  $h$  e adotando-se a equação do coeficiente angular, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{tg} \alpha &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{(x_0 + h) - x_0} \\ y_1 &= y_0 + h \cdot y'_0 \quad \text{onde} \quad y'_0 = f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (23)$$

O ponto  $(x_1, y_1)$  na reta tangente mostrada na Figura 21 é uma aproximação do ponto  $(x_1, y(x_1))$  sobre a curva da solução. Verifica-se que a precisão das aproximações dependerá do tamanho do incremento  $h$ , comumente chamado de passo. Assim, quanto menor o valor do passo, mais próxima será a solução numérica do modelo em relação à solução exata uma vez que sua redução provocará o aumento no número de correções no meio do caminho.

Para uma segunda reta tangente, o processo deve ser repetido no ponto  $(x_1, y_1)$  em substituição ao ponto  $(x_0, y_0)$  da análise anterior, obtendo uma aproximação de  $y_2 \approx y(x_2)$  correspondendo um acréscimo de dois passos  $h$  a partir de  $x_0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h = x_0 + 2 \cdot h \quad \text{Assim,} \\ y(x_2) &= y(x_1) + h = y(x_0) + 2 \cdot h \approx y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \end{aligned}$$

Para  $n$  retas tangentes, a equação de Euler será

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad 0 < h < 1 \quad (24)$$

## 2.6 Modelo predador-presa de Lotka-Volterra

Para Zill e Cullen (2001-b), o primeiro modelo predador-presa foi construído de forma independente pelos pioneiros da biomatemática A. Lotka (1925) e V. Volterra (1926). Em linhas gerais, o arquétipo é utilizado para explicar a interação entre duas espécies em um sistema fechado, onde uma delas (predador) se alimenta de outra (presa). Os escritores afirmam que existem muitos modelos desta natureza que levam a sistemas autônomos planos com (pelo menos) uma solução periódica. Como exemplos, pode-se citar o estudo da interação entre lobos e alces, tubarões e pequenos peixes, corujas perseguindo lemingos – roedores que habitam o continente ártico (ZILL; CULLEN, 2009), uma população de raposas e outra de coelhos, da joaninha (predador) e pulgão (presa) (BOYCE, DIPRIMA, 2015).

Estes autores enfatizam que “um modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem, de fato, na natureza. Apesar disso, o estudo de modelos simples é o primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complicados” (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.452).

### 2.6.1 Desenvolvimento do modelo predador-presa de Lotka-Volterra

Stewart (2016) descreve um modelo geral com algumas considerações preliminares. O autor considera, inicialmente, que a população de presas tem um amplo suprimento alimentar e que a segunda espécie (os predadores) se alimenta somente daquela presa em questão. Denominando-se  $C(t)$  o número de presas e  $L(t)$  o número de predadores no instante  $t$ , o autor define que:

i. Na ausência de predadores, a população de presas aumenta a uma taxa exponencial devido ao amplo suprimento, ou seja:

$$\frac{dC}{dt} = kC \quad \text{onde } k \text{ é uma constante positiva.} \quad (25)$$

ii. Na ausência de presas, a população de predadores declinaria a uma taxa proporcional a ela mesma, isto é:

$$\frac{dL}{dt} = -rL \quad \text{onde } r \text{ é uma constante positiva.} \quad (26)$$

iii. Dada a existência de ambas as espécies, e supondo ainda que (a) as taxas de natalidade e sobrevivência dos predadores dependam da disponibilidade de comida/presas e (b) que o encontro das duas espécies seja proporcional ao produto das duas populações –  $CL$ , onde “Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas.” (BOYCE, DIPRIMA, 2010, p. 413), pode-se elaborar o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dC}{dt} = kC - a.CL \quad (27-a)$$

onde  $k, a, r$  e  $b$  são constantes positivas

$$\frac{dL}{dt} = -rL + b.CL \quad (27-b)$$

Verifica-se, nas formulações algébricas (27-a e 27-b) – conhecidas como equações predador-presa ou equações de Lotka-Volterra, “[...] que o termo  $-aCL$  diminui a taxa natural de crescimento das presas e o termo  $bCL$  aumenta a taxa de crescimento natural dos predadores.” (STEWART, 2016, p. 567).

### 2.6.2 Solução geral do modelo predador-presa

De volta às Equações (27-a) e (27-b),

$$\frac{dC}{dt} = kC - a.CL \quad (\text{equação 1})$$

$$\frac{dL}{dt} = -rL + b.CL \quad (\text{equação 2})$$

Dividindo-se a segunda equação pela primeira, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dC} &= \frac{-rL + b.CL}{kC - a.CL} \\ \frac{dL}{dC} &= \frac{L.(-r + b.C)}{C.(k - a.L)} \end{aligned} \quad (28)$$

Readequando a equação em função das variáveis  $L$  e  $C$ , integrando-se ambos os lados

$$\frac{dL.(k - a.L)}{L} = \frac{dC.(-r + b.C)}{C}$$

$$\int (k - a.L) \frac{dL}{L} = \int (-r + b.C) \frac{dC}{C} \quad (29)$$

e remanejando os dados provenientes da integração, obtém-se a solução geral do modelo predador-presa de Lotka-Volterra:

$$k \cdot \ln L - a \cdot L + r \cdot \ln C - b \cdot C = H \quad \text{onde } H \text{ é uma constante positiva.} \quad (30)$$

O desenvolvimento da equação predador-presa traz uma solução geral para o modelo que deve ser seguida e obedecida por todas as soluções do modelo predador-presa de Lotka-Volterra (EQ. 30).



### 3 METODOLOGIA

Nascimento (2009) cita em seu livro que, para conhecer, é necessário usar estratégias que coloquem o pensamento de acordo com o objetivo, sendo de fundamental importância escolher o(s) meio(s) que assegure(m) a obtenção da verdade. Segundo a autora, o método de investigação (dedutivo, indutivo, histórico, comparativo, econométrico, estatístico, fenomenológico, experimental etc.) é o conjunto de meios e processos utilizados para se alcançar a busca da verdade.

Prodanov e Freitas (2013, p. 49) afirmam que todo trabalho científico deve ser executado “[...] de forma sistemática, metódica e crítica.” para que seus propósitos sejam atingidos, contribuindo “[...] para o avanço do conhecimento humano.”. Assim, este capítulo traz maiores detalhes a respeito da classificação da pesquisa desenvolvida de acordo com seus aspectos metodológicos e apresenta o roteiro adotado no estudo de caso para que sejam alcançados os objetivos geral e específicos da mesma, além de responder à pergunta do problema proposto.

#### 3.1 Tipo de pesquisa

Prodanov e Freitas (2013) afirmam que uma pesquisa pode ser dividida em quatro aspectos principais: natureza, forma de abordagem do problema, objetivos e procedimentos técnicos.

Quanto à natureza da investigação, Cervo, Bervian e Silva (2007) a subdividem em pesquisa pura ou básica, onde o explorador procura satisfazer sua necessidade intelectual por meio do conhecimento (ou seja, a busca pelo saber), ou aplicada, onde o pesquisador busca soluções para problemas concretos de forma a contribuir para fins práticos.

Em relação à forma de abordagem, a pesquisa pode ser classificada em qualitativa, quantitativa ou qualiquantitativa (esta última, uma combinação das duas abordagens). Fonseca (2002) distingue as duas primeiras categorias: a diferença entre a pesquisa quantitativa e a qualitativa é que a primeira quantifica os resultados numericamente, centrando-se na objetividade e recorrendo-se à linguagem matemática para descrever as causas do objeto de estudo. Já a segunda se preocupa com aspectos da qualidade que não podem ser dimensionados ou estimados, centrando-se na compreensão e explicação das dinâmicas das relações sociais (ex. estudos de crenças, valores, significados, motivos etc.).

No que diz respeito aos objetivos, Gil (2010) os classifica como pesquisa exploratória, descritiva e explicativa. Realiza-se uma pesquisa exploratória quando se busca obter maior familiaridade com determinado assunto ou problema, ou para ter maior conhecimento ou ainda para construir hipóteses (ex. pesquisa bibliográfica ou na *internet*) (SOUZA et al., 2013). Na pesquisa descritiva, como o próprio nome já diz, o pesquisador busca apenas descrever como situações, acontecimentos, feitos etc. se manifestam em determinados fenômenos, seja em pessoas, grupos, comunidades ou qualquer outra ocorrência estudada (SAMPIERI; COLLADO; LUCIO, 2006). Gil (2010) acrescenta que, na pesquisa descritiva, uma de suas características mais significativas se encontra no uso de técnicas padronizadas de coleta de dados (*e.g.* questionários, observação sistemática). Já em uma pesquisa explicativa, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 53) busca-se esclarecer “[...] os porquês das coisas e suas causas, por meio do registro, da análise, da classificação e da interpretação dos fenômenos observados” por meio de métodos experimentais ou observacionais.

Sampieri, Collado e Lucio (2006) acrescentam mais um objetivo de pesquisa, o correlacional. Segundo os autores, este objetivo busca avaliar a relação e/ou grau de relação/correlação entre dois ou mais conceitos, variáveis ou categorias, sendo expressas em hipóteses que são testadas.

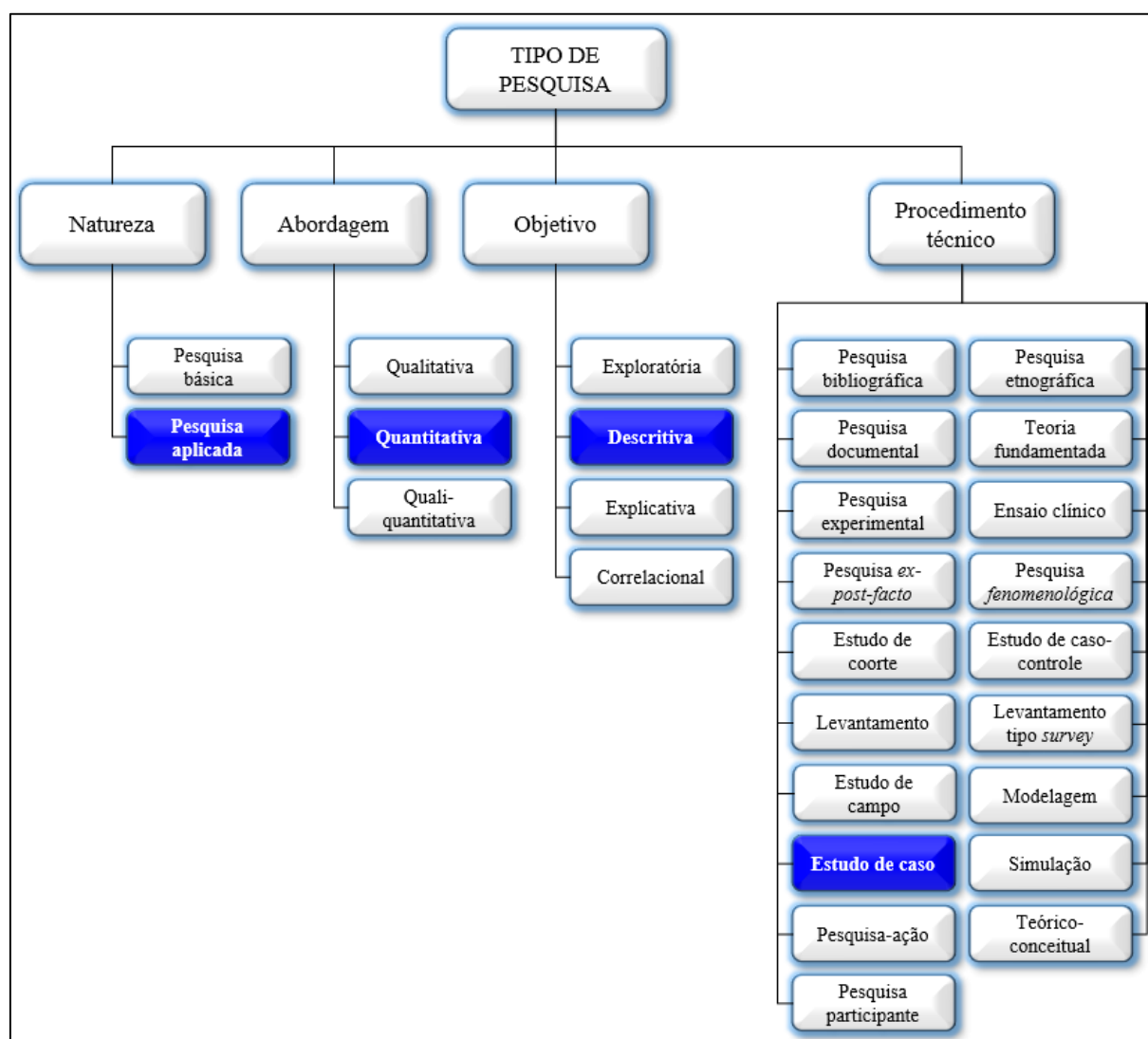
Por fim, quanto aos procedimentos técnicos, Oliveira (2017) cita nada mais do que quinze tipos diferentes de metodologias: pesquisa bibliográfica, pesquisa documental, pesquisa experimental, pesquisa *ex-post-facto*, estudo de coorte, levantamento, estudo de campo, estudo de caso, pesquisa-ação, pesquisa participante, pesquisa etnográfica, desenvolvimento de teoria fundamentada, ensaio clínico, pesquisa fenomenológica e estudo de caso-controle. Por sua vez, Rangel (2017) é mais sucinto ao utilizar somente métodos mais voltados à área de Engenharia de Produção e Operações: levantamento tipo *survey* (em português, pesquisa), estudo de caso, modelagem, simulação, estudo de campo, experimento e teórico-conceitual.

Devido à grande quantidade de técnicas, Prodanov e Freitas (2013) chamam a atenção para a necessidade de se fazer o delineamento – traçagem de um modelo conceitual e operativo envolvendo, dentre outros, previsões de análise e interpretação dos dados coletados e controle das variáveis envolvidas – para que a pesquisa seja elaborada. Ademais, os autores afirmam que o procedimento adotado para a coleta de dados é que rege o delineamento, que pode ser dividido em dois grandes grupos: “[...] aqueles que se valem das chamadas fontes de papel (pesquisa bibliográfica e pesquisa documental) e aqueles cujos dados são fornecidos por pessoas (pesquisa experimental, pesquisa *ex-postfacto*, o levantamento, o estudo de caso, a pesquisa-ação e a pesquisa participante.” PRODANOV; FREITAS, 2013. p. 54).



Para facilitar a compreensão dos critérios em que se enquadra esse trabalho, elaborou-se o organograma mostrado na Figura 22, que faz um resumo das classificações da pesquisa acima citadas com foco na catalogação utilizada para o cumprimento do estudo de caso.

**Figura 22 – Classificação da pesquisa**



Fonte: Elaboração própria (2018).

Conforme mostra a figura 22, esse trabalho é tratado como sendo de natureza aplicada pois, para Silva e Menezes (2005), o mesmo tem como objetivo gerar conhecimentos para aplicação prática e é dirigido à solução de um problema: avaliar o comportamento do modelo de equações diferenciais de Lotka-Volterra mediante uma taxa de geração de dióxido de carbono e seu consumo pelas árvores no processo de fotossíntese.

No tocante à abordagem da pesquisa, a mesma se qualifica como quantitativa pois, de acordo com Prodanov e Freitas (2013), o estudo utiliza números (ex. quantidade de monóxido por metro cúbico) que podem ser analisados por meio de estatísticas (ex. análise de variância, média, desvio padrão etc.), e faz hipóteses para garantir a precisão dos resultados de modo a evitar contradições no processo de análise e interpretação dos valores encontrados.

Em relação ao objetivo, a pesquisa é categorizada como descritiva pois visa descobrir a associação entre duas variáveis (no caso,  $\text{CO}_2$  e fotossíntese) e porque a mesma é comumente realizada por pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática (GIL, 2010).

Por último, o estudo de caso predomina dentre os demais enfoques técnicos pois, por definição, “[...] consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou mais objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento.”, sendo também “[...] uma estratégia de pesquisa que busca examinar um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto [...]”, referindo-se ao presente e não ao passado (GIL, 2010, p. 37).

### 3.2 Roteiro da pesquisa

Realizou-se, inicialmente, uma revisão teórica dos principais artigos e livros relacionados a assuntos que envolviam temas sobre a termodinâmica (calor, trabalho, suas leis, a energia livre de Gibbs etc.), fotossíntese (ex. troca de gases, taxas de iluminação, frequências de luz etc.) e ferramentas estatísticas que poderiam ser utilizadas no tratamento de dados amostrais.

Em seguida, fez-se um breve embasamento teórico a respeito das equações diferenciais, em particular o comportamento dos sistemas de equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Essa etapa envolveu a pesquisa em artigos nacionais e internacionais sobre sistemas de equações diferenciais, estabilidade de sistemas e (principalmente) sobre a aplicação prática do modelo de *Lotka-Volterra* com o objetivo de adaptá-lo à necessidade desse estudo.

A primeira etapa realizada no estudo de caso tratou da adequação dos dados de entrada. Constatou-se a falta de registro dos dados horários de monóxido de carbono em determinados períodos (células vazias), sendo possível a realização do tratamento inicial dos dados (preenchimento dessas lacunas com médias de períodos anteriores e posteriores).

Como as estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar emitem registros de monóxido de carbono (CO) e como esse gás não é absorvido por vegetais, procurou-se comprovar como ele se transformaria em dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ , insumo essencial à

realização da fotossíntese). A comprovação se deu com o estudo da energia livre de Gibbs, e tal descoberta proporcionou dar sequência no estudo.

Sabendo-se que a transformação do  $\text{CO}_{\text{atm}}$  em  $\text{CO}_2$  era possível, iniciou-se então o processo de análise do comportamento dos dados ao longo do tempo. Concluiu-se que a apresentação de valores semanais era a que melhor atendia à necessidade do estudo. Testes de hipóteses e testes *post hoc* (ex. ANOVA e teste de Tukey, respectivamente) foram realizados para verificar se os valores seguiam a distribuição Normal de probabilidade ou algum outro tipo de distribuição teórica (Kolmogorov-Smirnov). Os dados sintetizados em uma distribuição estatística permitiriam a realização de previsões daquele gás estufa para 30, 50, 100 anos ou mais, podendo os dados ser usados em compiladores eletrônicos para gerar informações e resolver o modelo de equações diferenciais.

A etapa seguinte compreendeu o estabelecimento de critérios-base que poderiam atender ao modelo de equações diferenciais pretendido. Verificando-se que o uso de compiladores demandaria muito tempo em aprendizagem de outros *softwares*, optou-se por realizar a solução numérica do modelo por meio do método de Euler.

Dessa forma, de posse dos parâmetros das populações iniciais tanto das presas como dos predadores e do cálculo das taxas de natalidade e mortalidade de ambos, elaborou-se a solução numérica do modelo de equações diferenciais propriamente dito. Ressalta-se que, em função do longo tempo de vida dos vegetais, os dados analisados passaram de um período semanal para anual.

Por fim, a análise do modelo proporcionou encontrar os pontos de equilíbrio do sistema equações, o período em que o ciclo passou a se repetir e constatar se a população anual de árvores era suficiente ou não para consumir a população anual de dióxido de carbono.

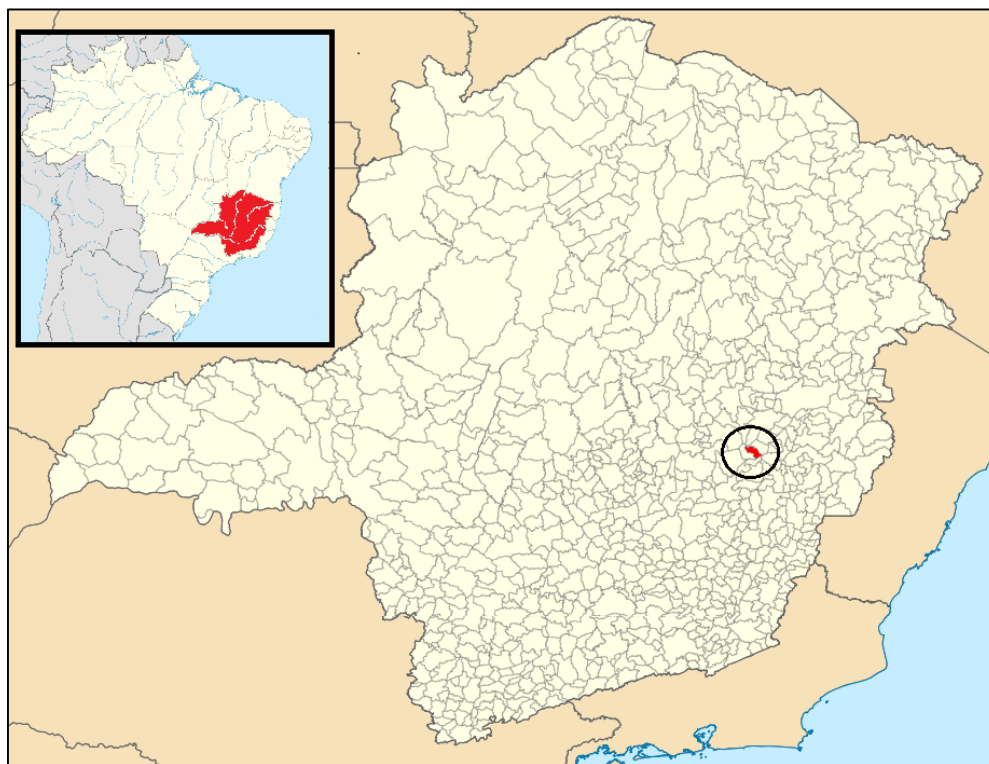
### 3.3 Materiais e métodos

Esse trabalho foi realizado na cidade de Ipatinga/Minas Gerais (MG), a 19°28'4" de latitude sul e 42°32'13" de longitude oeste (IBGE, 2018), e com uma temperatura média anual de 24°C a 220 metros do nível do mar.

Com uma população de cerca de 250.000 habitantes espalhada em uma área de 166,884 km<sup>2</sup>, a décima cidade mais populosa de MG se localiza na região leste do estado. Juntamente com os municípios de Coronel Fabriciano, Santana do Paraíso e Timóteo, o bloco compõe a Região Metropolitana do Vale do Aço, mais conhecida por 'Vale do Aço', importante

pólo industrial brasileiro que abriga grandes indústrias de base (siderúrgicas), de bens de capital (máquinas, metalúrgicas e equipamentos) e de consumo (indústrias alimentícias, papel etc.). A Figura 23 mostra a localização desse município no estado de Minas Gerais.

**Figura 23 – Localização do município de Ipatinga/MG**



Fonte: Adaptado de Wikipedia (2018).

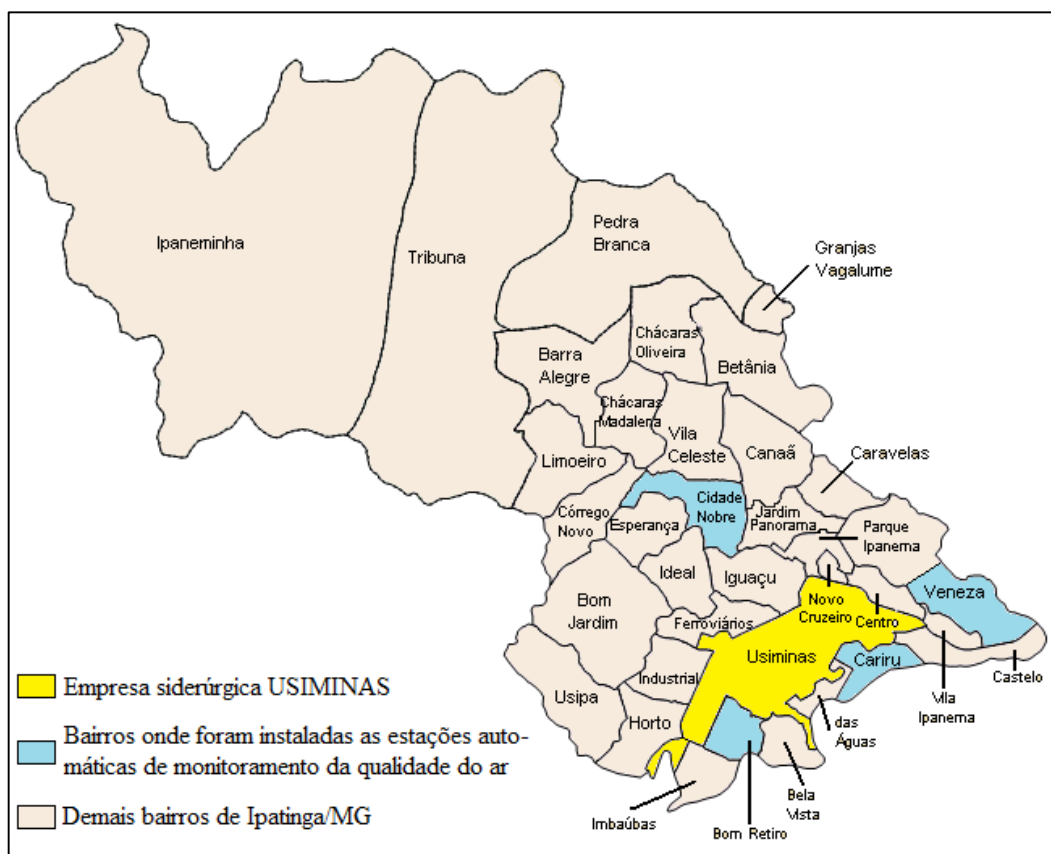
A economia ipatinguense se baseia nos setores de serviço e industrial, onde se destaca a empresa siderúrgica Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S/A (USIMINAS). Esta empresa tem uma capacidade produtiva de cerca de 4 milhões de toneladas de aço bruto (*Mt.a.b.*) por ano e que tem produzindo uma média de 3,3 *Mt.a.b.* em função da severa crise por que têm passado os mercados nacional e internacional.

Existem ainda outras duas outras grandes empresas que também se sobressaem nas proximidades da USIMINAS e que contribuem negativamente na produção de gases estufa: a empresa siderúrgica produtora de aço inoxidável APERAM SOUTH AMERICA, localizada na cidade de Timóteo (cerca de 21 quilômetros da prefeitura de Ipatinga), e a fábrica de celulose CENIBRA, situada no município de Belo Oriente, a cerca de 27 quilômetros dessa prefeitura.

Encontram-se instaladas na cidade de interesse quatro estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, todas elas ao redor da USIMINAS, nos bairros Bom Retiro (EST-1), Cariru (EST-2), Cidade Nobre (EST-3) e Veneza (EST-4).

Segundo a Associação Brasileira do Ministério Público do Meio Ambiente – ABRAMPA (2010), essa rede de monitoramento é considerada uma das mais avançadas do país. Os índices de qualidade do ar são fornecidos em tempo real acompanhados pelo Ministério Público (MP), pela Fundação Estadual do Meio Ambiente (FEAM), pelo Departamento de Meio Ambiente da prefeitura municipal de Ipatinga e pela própria USIMINAS. A Figura 24 mostra a localização dos bairros onde se encontram as estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar.

**Figura 24 – Bairros onde se instalaram as estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, em Ipatinga/MG**



Fonte: Adaptado de Wikipedia (2018).

Verifica-se, na Figura 24, que os bairros onde se localizam as estações automáticas são os que circundam a empresa Usiminas.

De modo geral, as máquinas automáticas fazem leituras de quantidades de ozônio, óxidos de nitrogênio, hidrocarbonetos e de monóxido de carbono. Este, em especial, é medido a cada 15 minutos, e cada uma das máquinas emite o registro médio da última hora em microgramas por metro cúbico ( $\mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

Os valores das medições do  $\text{CO}_{\text{atm}}$  foram fornecidos pela empresa siderúrgica Usiminas em um banco de dados dentro de uma planilha do *software MS Excel*<sup>®</sup>, com registros horários assinalados em  $\mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$ .

O histórico de dados compreendeu os períodos de 2 de outubro de 2013 a 30 de outubro de 2017 (ou seja, 4,1 anos, aproximadamente) para os três primeiros bairros e de 31 de janeiro de 2014 a 26 de março de 2016 (cerca de 2,2 anos) para o último bairro citado.

O primeiro assunto a ser tratado no estudo de caso foi verificar se a transformação do monóxido de carbono (capturado e medido nas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar) em dióxido de carbono (necessário à realização da fotossíntese pelos vegetais) se daria de forma espontânea com o passar. Tal cálculo foi realizado com o auxílio das teorias da energia livre de Gibbs, que se mostrou favorável ao estudo.

Dando continuidade ao trabalho, análise preliminar dos dados se deu com a comparação do número de períodos de medição realizados por cada uma das estações. Como a EST-4 foi a que forneceu menor quantidade de dados amostrais, optou-se por remover os valores por ela fornecidos de modo a evitar possíveis discrepâncias no estudo da análise de variância.

Os altos valores dos coeficientes de variação para dados horários proporcionou a elaboração de um novo critério para mitigar as amplas dispersões. Dentre as diversas metodologias existentes no campo da Estatística, optou-se por selecionar o diagrama em caixa para verificar a presença de pontos extremos e eliminá-los caso fossem detectados no gráfico em questão.

No histórico de dados, encontrou-se a presença de medições não realizadas pelas máquinas automáticas de monitoramento da qualidade do ar em função de falhas na transmissão dos dados, quebra e/ou manutenção dos equipamentos, dentre outros. Esses valores foram substituídos por médias de acordo com um procedimento adotado pelo autor desse trabalho e com o auxílio do *software Microsoft Office Excel* versão 2013.

Dada a grande discrepância entre os valores coletados, optou-se por mudar o período de verificação dos dados tratados, de horas para semanas. Isso permitiu uma drástica redução do número de pontos discrepantes, e facilitou a remoção dos mesmos.

Com a retirada desses pontos discrepantes (substituição de valores muito altos ou muito baixos por médias de dias anteriores e posteriores), realizou-se a análise de variância (ANOVA) para verificar se os dados referentes às três estações eram ou não estatisticamente iguais. Este teste foi feito com o auxílio do *software* estatístico *IBM SPSS Statistics 22* (ou somente SPSS), que consegue realizar cálculos com até 50 tratamentos (semanas). Como o ano

tem aproximadamente 52 semanas, realizou-se nova mudança nos dados, passando-os para a somatória das quantias de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  de oito dias em função dessa limitação.

Foram realizados vários testes de ANOVA para verificar qual o período melhor se aderiria ao modelo. Não houve rejeição da hipótese nula para os dados semanais de 2015 (46 períodos de 8 dias) e de 2016 (45 períodos de 8 dias). Ainda, para atender à premissa de igualdade de períodos na ANOVA, anexou-se o primeiro período de 8 dias do ano de 2017 ao ano de 2016 para que esses períodos ficassem com o mesmo número de tratamentos.

Utilizou-se os testes de Levene e de Kruskal-Wallis para verificar premissa de igualdade de variâncias da ANOVA. O teste de Tukey também foi realizado para verificar a presença de subgrupos amostrais dentro do conjunto de dados para cada uma das estações e para a somatória dos valores das três máquinas.

Partindo-se da premissa de que um município não planta árvores em somente um ou outro bairro e sim para contemplar a cidade toda e adotando-se os dados semanais de monóxido de carbono das três estações juntas, a ANOVA constatou igualdade estatística para períodos de 8 dias entre os anos de 2015 e 2016.

Dada essa constatação, realizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) agora no *software Input Analyzer*<sup>®</sup>, disponível no *software Arena*<sup>®</sup> versão estudantil do ano de 2015, para verificar qual seria a distribuição estatística que melhor iria se aderir ao conjunto de dados. O sistema indicou a distribuição Beta como sendo a de ajuste ao modelo, e fez-se a aproximação pela distribuição Normal, distribuição esta mais conhecida nos livros de estatística.

Encontrou-se, assim, um valor médio e um desvio-padrão para as quantias de monóxido de carbono atmosférico que poderiam ser utilizados na geração de dados futuros (100 ou 200 anos, ou mais) em modelos matemáticos como o predador-presa, podendo esses valores ser usados no cálculo da ‘taxa de natalidade’ de dióxido de carbono a ser predado pelos vegetais.

Já a implementação do modelo matemático de Lotka-Volterra foi feita com o auxílio do *software MS Excel*, dados os valores numéricos de entrada do modelo: população inicial de presas e de predadores, taxas de crescimento das presas e de predadores, de predação e de mortalidade dos predadores. Ressalta-se que os dados de monóxido de carbono – agora considerados como sendo  $\text{CO}_2$ , foram transformados de  $\mu\text{g.m}^{-3}$  para *ppm* para seguir o sistema internacional de medições e que as projeções foram feitas para anos, e não mais semanas.

A população inicial ‘C’ de presas foi calculada como sendo a média das captações anuais de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  dos anos de 2015 e 2016 pois esses períodos foram os que obtiveram melhor

aderência no estudo da ANOVA. Já para a população inicial 'L' de predadores, descobriu-se que a Usiminas plantou uma certa quantidade de árvores no ano de 2017 e assumiu-se que esta quantia seria a população de predadores necessária para preda a população anual de CO<sub>2</sub> (isto é, para cada população 'C' de presas, planta-se uma população 'L' de predadores).

A taxa 'k' de crescimento das presas foi obtida com o auxílio da equação de crescimento exponencial de Thomas Malthus e da curva de Keeling. Para esta última, o registro inicial 'P<sub>0</sub>' de CO<sub>2</sub> ocorreu no ano de 1958 e o registro da 'população' atual 'P' deste gás se deu no ano de 2018, contabilizando-se, assim, um tempo 't' de 60 anos.

Para a taxa 'a' de predação, considerou-se um percentual de sucesso na captura do CO<sub>2</sub> pelos vegetais e a expectativa de vida das árvores. Para a primeira consideração, assumiu-se que 95% das moléculas desse gás estufa são capturadas pelos seus predadores naturais embora existam estudos afirmando que cerca de 25% do CO<sub>2</sub> emitido pela ação humana seja absorvida pelos oceanos. Já para a expectativa de vida das árvores, assumiu-se que esta seja de somente 20 anos pois também existem estudos afirmando que as suas taxas de fotossíntese são maiores nesse período. De posse desses dados, da quantidade 'L' de vegetais plantados pela Usiminas no ano de 2017 e da constante 'k' de crescimento das presas, efetuou-se os cálculos para encontrar a taxa de predação diretamente na equação diferencial das presas.

A taxa 'r' de mortalidade dos predadores seguiu o mesmo raciocínio utilizado no cálculo da 'taxa de natalidade' do CO<sub>2</sub>. Porém, por se tratar de um índice de mortalidade, o coeficiente 'r' da equação de Malthus deve ser negativo. As premissas adotadas foram o período de sobrevivência de 20 anos das árvores e a de que 95% das mudas plantadas na cidade cresceriam normalmente e chegariam à idade adulta embora exista um estudo que aponte que esse crescimento seja, em média, de 68,35% para mudas de *Araucaria angustifolia*.

Por fim, a taxa 'b' de crescimento dos predadores foi calculada da seguinte forma: considerou-se que o município de Ipatinga tinha uma população inicial 'L<sub>0</sub>' de 100.000 árvores em um dado instante de tempo, e no ano seguinte uma população 'L' com esta quantia acrescida de um número de vegetais plantados pela empresa siderúrgica Usiminas. Dado um tempo de 20 anos, uma população 'C' de CO<sub>2</sub> e a constante 'r' devidamente calculada, encontrou-se a constante de crescimento dos vegetais ao se utilizar a equação diferencial dos predadores.

Ademais, grande parte das figuras foi desenvolvida ou reajustada com o auxílio dos *softwares Paint*, disponível no próprio sistema *Windows 10*, e/ou no *Microsoft Office PowerPoint* versão 2013. Houve também o ajuste da curva Normal de probabilidade em função do histograma de probabilidades, realizado no *software* estatístico *SPSS*.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Verificou-se, no referencial teórico, que as árvores capturam o dióxido de carbono atmosférico ( $\text{CO}_2$ ) para poder realizar a fotossíntese e garantirem as suas subsistências. Porém, no estudo de caso, obteve-se coletas de valores de monóxido de carbono. Dada essa necessidade de transformação, realizou-se cálculos para provar que o  $\text{CO}_{\text{atm}}$  se transformaria, em algum período de tempo, em  $\text{CO}_2$  de acordo com a equação química



Ou seja, verificar se o processo de combinação de duas moléculas de monóxido de carbono (sólido) com uma molécula gasosa de oxigênio, dando origem a duas moléculas de dióxido de carbono, ocorrerá de forma espontânea, ou não.

Esse cálculo será realizado com o auxílio das teorias sobre a energia livre de Gibbs de reação ( $\Delta G$ ), calculada como sendo a diferença entre as energias livres molares ( $G_m$ ) de produtos e reagentes, e de acordo com a equação (1), já evidenciada no referencial teórico:

$$\Delta G = \sum n. G_m(\text{produtos}) - \sum n. G_m(\text{reagentes})$$

Onde:

$n$  – o coeficiente estequiométrico da equação química que se pretende analisar

$G_m$  – energia livre de Gibbs de reação, antes e depois do acontecimento de uma determinada reação.

Assim, os cálculos e dados termodinâmicos de elementos e compostos inorgânicos para uma temperatura de 298 Kelvin ( $27^\circ\text{C}$ ) e pressão de 1 atmosfera (atm) são mostrados a seguir.

$$\begin{aligned} \Delta G &= 2 \times \Delta G_{\text{CO}_2} - (2 \times \Delta G_{\text{CO}} + \Delta G_{\text{O}_2}) \\ \Delta G &= 2 \times \left( -394,36 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) - \left( 2 \times \left( -137,17 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) + 0,00 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) \\ \Delta G &= -514,38 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \end{aligned} \quad (32)$$

Constata-se que o valor de  $\Delta G$  de Gibbs é negativo, com um trabalho de não expansão de  $-514,38 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Conforme afirmado por Chang e Goldsby (2013, p. 791), “[...] este fato por si só garante que a reação é espontânea [...]”; ou seja, comprova-se que o monóxido



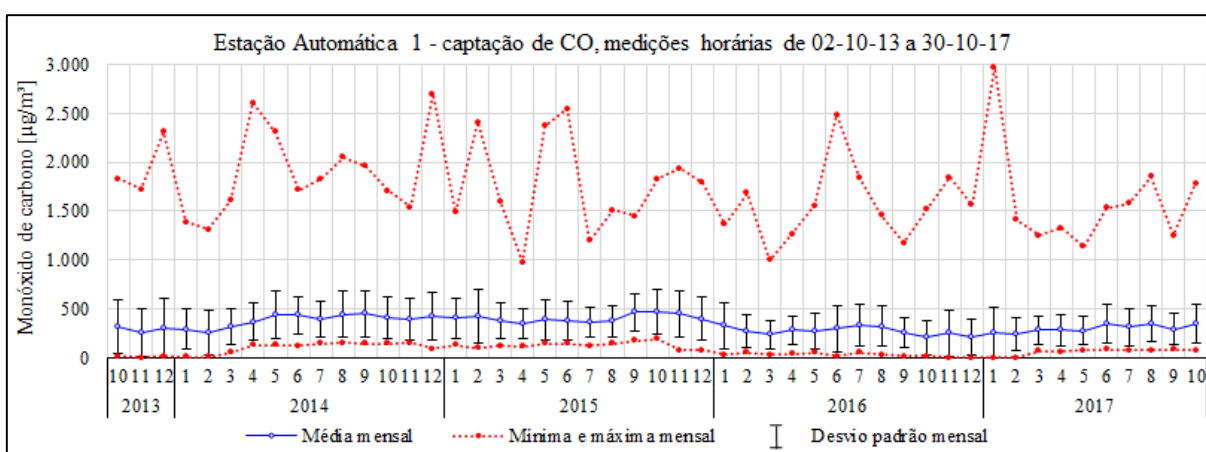
comparações estatísticas das informações disponibilizadas pelos equipamentos, optou-se por descartar todo o histórico fornecido pela quarta estação de monitoramento da qualidade do ar. Os motivos que levaram a extinção do fornecimento de dados dessa máquina automática são desconhecidos e a investigação dessas causas não faz parte do escopo do trabalho.

Assim, o capítulo a seguir trata da análise criteriosa dos dados de monóxido de carbono fornecidos pelas estações instaladas somente nos bairros Bom Retiro, Cariru e Cidade Nobre.

#### 4.1.1 Análise preliminar dos dados de monóxido de carbono atmosférico

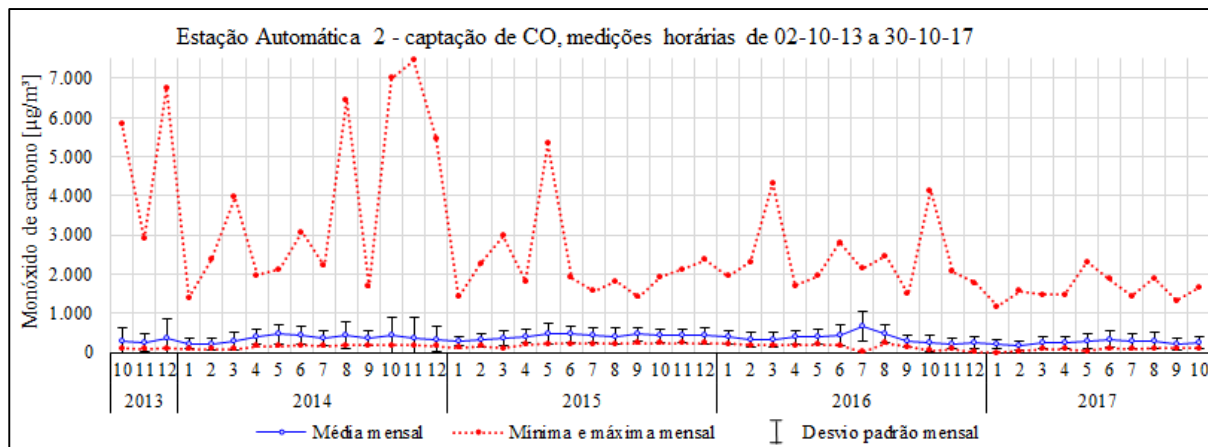
A análise preliminar dos dados de monóxido de carbono atmosférico compreendeu, inicialmente, a visualização e compreensão de seus comportamentos ao longo dos anos. As Figuras 26, 27 e 28 mostram um resumo dos dados históricos de captação do  $\text{CO}_{\text{atm}}$ , feitos de hora em hora e resumidos mês a mês, pelas três estações previamente selecionadas para o estudo. Nas figuras são mostrados a média, o desvio padrão, a mínima e a máxima horária mensais de cada uma das estações.

**Figura 26 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Bom Retiro**



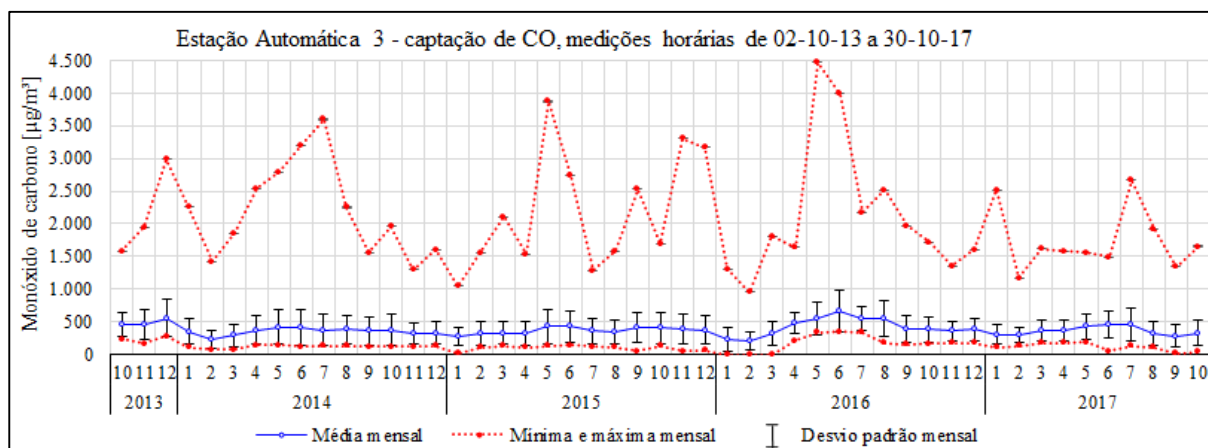
Fonte: Elaboração própria (2018).

**Figura 27 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Cariru**



Fonte: Elaboração própria (2018).

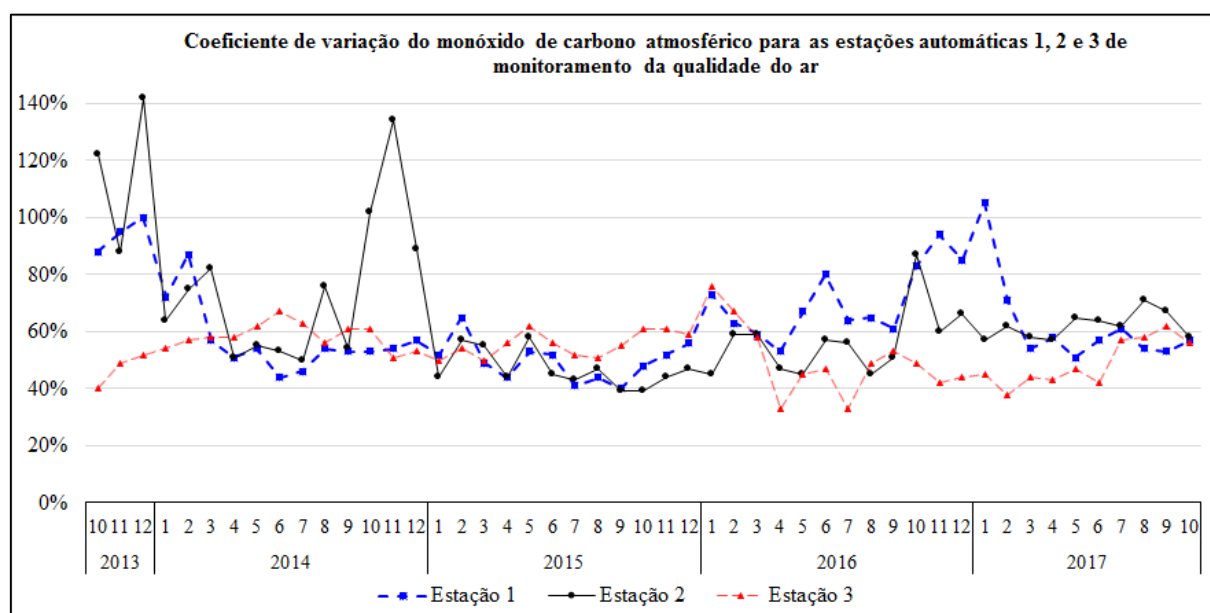
**Figura 28 – Dados estatísticos iniciais das medições horárias de monóxido de carbono registradas no bairro Cidade Nobre**



Fonte: Elaboração própria (2018).

Constata-se nas figuras 26, 27 e 28 a ocorrência de grande variabilidade das medições horárias do monóxido de carbono. As máximas mensais diferem (e muito) das médias de cada período e os desvios-padrão parecem ser bem grandes em relação às médias. Para comprovar esta afirmação, pode-se obter o coeficiente de variação (CV) de cada uma das estações. A Figura 29 mostra o comportamento das variações estatísticas sumarizadas do CV horário nas estações automática de monitoramento da qualidade do ar selecionadas.

**Figura 29 – Coeficiente de variação para medições horárias de CO<sub>atm</sub> em três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar em Ipatinga/MG**



Fonte: Elaboração própria (2018)

Verifica-se, na Figura 29, que a estação 3 aparenta apresentar coeficientes de variação mais uniformes ao passo que a estação 1 exibe coeficientes mais altos no final de 2013 e volta a aumentar no final do ano de 2016. Já a estação 2 indica grandes variações no CV nos dois primeiros anos de observação e depois mostra um comportamento mais linear. A Tabela 4 mostra maiores detalhes desses desempenhos mensais.

**Tabela 4 – Coeficientes de variação para o monóxido de carbono atmosférico (médias horárias mensais) registrados em três estações de monitoramento em Ipatinga/MG**

Ano	Coeficiente de variação para dados médios horários mensais		
	Estação 1 Bom Retiro	Estação 2 Cariru	Estação 3 Cidade Nobre
2013	94%	117%	47%
2014	57%	74%	58%
2015	50%	47%	56%
2016	71%	56%	50%
2017	62%	62%	49%
<b>Média global</b>	<b>62%</b>	<b>63%</b>	<b>53%</b>

Fonte: Elaboração própria (2018).

Em função dessas grandes discrepâncias nos coeficientes de variação calculados para os equipamentos de medição (TAB. 4), torna-se necessário elaborar um novo critério para mitigar essas amplas dispersões. Uma das metodologias seria a construção de um gráfico *box plot* (ou diagrama em caixa) com o auxílio do *software MS Excel*<sup>®</sup> para verificar a presença de pontos extremos (ou *outliers*); caso surjam, os mesmos devem ser eliminados do modelo.

#### 4.1.2 Tratamento dos dados de monóxido de carbono coletados nas três estações

A configuração inicial dos conjuntos de dados – sem a substituição das medições horárias não registradas – evidenciou a presença de 4.256 valores *outliers* dentre as 104.818 horas registradas nas três estações escolhidas. Ou seja, 4,06% dos dados assinalados foram considerados como sendo pontos discrepantes em relação à população. A Tabela 5 mostra maiores detalhes dessas quantias.

**Tabela 5 – Quantidades e percentuais de pontos discrepantes no conjunto de dados antes dos ajustes dos dados não coletados (dados horários)**

Estação de monitoramento	Nº de dados registrados (horas)	Quantidade de outliers	Outliers (%)
Estação 1	34.974	1.206	3,45
Estação 2	34.646	1.567	4,52
Estação 3	35.198	1.483	4,21
TOTAL	104.818	4.256	4,06

Fonte: Elaboração própria (2018).

De acordo com a Tabela 5, em uma análise superficial, poder-se-ia afirmar que a estação 1 (bairro Bom Retiro) foi a que teve o menor percentual de *outliers*, e que o posto 2 (bairro Cariru) apresentou menor número de dados registrados e maior número de pontos discrepantes. Porém, como a instalação 3 é a que apresenta maior quantidade de dados coletados, ao se fazer uma média ponderada para os demais locais em relação a esse valor, os dados se alteram. A Tabela 6 mostra tais correções.

**Tabela 6 – Percentual de pontos discrepantes no conjunto de dados aplicando-se o fator de correção**

Estação de monitoramento	Nº de horas registradas (1)	Nova base de dados (2)	Fator de multiplicação (3) = (2÷1)	Outliers (%)	
				Inicial (4)	Corrigido (5) = (3*4)
EST-1	34.974	35.198	1,0064	3,45	3,47
EST-2	34.646	35.198	1,0159	4,52	4,59
EST-3	35.198	35.198	1,0000	4,21	4,21
TOTAL	104.818	105.594	1,0074	4,06	4,09

Fonte: Elaboração própria (2018).

Onde:

- 1 – Número de horas registrados em cada uma das três estações selecionadas para o estudo.
- 2 – Base de dados levando-se em consideração a estação 3, que apresentou o maior número de registros horários.
- 3 – Fator de correção aplicado aos números de dados registrados em cada uma das estações.
- 4 – Percentual de *outliers* encontrado nos dados originais, sem nenhum tratamento realizado.
- 5 – Percentual de *outliers* multiplicado pelo fator de correção, se todas as estações tivessem a mesma plataforma de dados.

Com os valores devidamente corrigidos, constata-se que o bairro Cariru (estação 2) continuou apresentando a maior discrepância de dados, passando de 4,52% para 4,59% de valores não conformes. Já o bairro Cidade Nobre (estação 3), por apresentar a maior quantidade de dados coletados, continuou com os mesmos 4,21% de dados indesejáveis e o bairro Bom Retiro (estação 1) aumentou somente 0,02% na discrepância de seus dados, passando a ficar com 3,47% de *outliers*. Ademais, observa-se que os míseros 0,03% de aumento no percentual total de pontos anormais correspondem a aproximadamente 32 horas de monitoramento acima dos valores aceitáveis.

Dado o grande volume de medições horárias indesejáveis (4.256 dados encontrados no levantamento inicial), optou-se por reanalisar as medidas, agora em períodos semanais. O motivo da opção de se estudar o comportamento desse período ao invés de somas diárias reside em dois fatos principais:

- ✓ Possibilitar uma maior margem de erro em relação à dispersão dos dados e, em consequência, reduzir a quantidade desses valores indesejáveis com o objetivo de não perder a característica original da amostra;

- ✓ O monóxido de carbono e outros poluentes podem permanecer na atmosfera por décadas, séculos ou mesmo milhares de anos, conforme afirmado por Freitas (2011). Em outras palavras, o  $\text{CO}_{\text{atm}}$  pode não ser consumido ou transformado em um curtíssimo espaço de tempo (como um mês, por exemplo).

Ainda sob esse preceito, e para melhor se adequar à análise de variância – ANOVA, a ser trabalhada posteriormente, realizou-se três procedimentos de tratamentos amostrais, a saber:

1. Análise das quantidades de *outliers* encontrados nos valores originais, antes dos tratamentos estatísticos;

2. Substituição dos dados não coletados por outras medidas estatísticas conforme as regras mostradas no Quadro 5, com o objetivo de reduzir a ocorrência desses pontos. É importante ressaltar que as quantias não colhidas pelas estações automáticas podem ter ocorrido por diversos motivos como, por exemplo, de falhas internas, falhas na transmissão de dados, realização de manutenções nos aparelhos etc.;

3. Análise minuciosa do conjunto de dados através da substituição das quantias discrepantes por outros valores representativos. Como exemplo, pode-se citar a substituição de

um *outlier* pela média das últimas 16 horas de medição de modo a eliminar o número indesejável sem prejudicar a amostra.

**Quadro 5 – Procedimentos adotados para substituir os dados não coletados pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar**

Duração	Procedimento
1 hora	Média de 8 horas anteriores e 8 posteriores ao acontecimento.
2 a 8 horas seguidas	Média móvel das 8 horas anteriores ao acontecimento e 8 horas posteriores, sendo o primeiro número posterior contabilizado a partir da primeira medição validada. A média anterior ao dado da segunda hora não medida em diante não exclui o valor calculado referente ao instante anterior (ou seja, tirou-se a média de oito horas acima dela).
9 a 24 horas	Média móvel das 48 horas posteriores ao acontecimento, sendo o primeiro valor incluído a partir da primeira medição validada.
Acima de 24 horas	Média móvel de 10 dias posteriores (1/3 do mês, ou 240 horas), supondo-se que houve algum grande reparo/manutenção no equipamento.

Fonte: Elaboração própria (2018).

Obs.: Em casos onde houveram falhas em medições próximas umas das outras, calculou-se a média anterior ao evento e, na posterior, inseriu-se somente os dados validados (ou seja, excluiu-se a média do dado faltante para não gerar referências circulares no *software MS-Excel®*. Exemplo: a estação não realizou uma coleta de dado em um determinado momento e, três horas depois, não a fez novamente; inseriu-se, desta forma, oito pontos de coleta posteriores à primeira medição excluindo-se o segundo ponto de falha.

A tabela comparativa com os dados horários registrados – ou não – nas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar é mostrada na Tabela 7.

**Tabela 7 – Número de horas registradas e não registradas em três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar em Ipatinga/MG**

Descrição	Quantidade e percentual de horas registradas e não registradas – h (%)					Total
	2013	2014	2015	2016	2017	
Estação 1 (Bom Retiro)						
Sim – qtde	2.174	8.591	8.574	8.543	7.092	34.974
Não – qtde (%)	10 (0,5)	167 (1,9)	185 (2,2)	241 (2,8)	180 (2,5)	783 (2,2)
Estação 2 (Cariru)						
Sim – qtde	2.176	8.619	8.560	8.267	7.024	34.646
Não – qtde (%)	8 (0,4)	139 (1,6)	199 (2,3)	517 (6,3)	248 (3,5)	1.111 (3,2)
Estação 3 (Cidade Nobre)						
Sim – qtde	2.181	8.564	8.645	8.606	7.202	35.198
Não – qtde (%)	3 (0,1)	194 (2,3)	114 (1,3)	178 (2,1)	70 (1,0)	559 (1,6)
Estações 1, 2 e 3						
Sim – qtde	6.531	25.774	25.779	25.416	21.318	104.818
Não – qtde (%)	21 (0,3)	500 (1,9)	498 (1,9)	936 (3,7)	498 (2,3)	2.453 (2,3)

Fonte: Elaboração própria (2018).

Obs.: a amostragem compreendeu os períodos de 02-10-2013 a 30-10-2017 para as estações 1, 2 e 3.

Na Tabela 7, os totais dos percentis de horas não registradas nas estações automáticas foram, respectivamente, 2,2%, 3,2% e 1,6%. Constata-se também que o maior percentual de dados não colhidos ocorreu no ano de 2016 (3,7%), em especial à estação 2, com 6,3% dos casos. Pode-se ainda afirmar que o ano de 2013, apesar de ter os registros iniciados no mês de outubro, obteve resultados próximos uns dos outros e abaixo de 0,5%.



A etapa seguinte à identificação dos pontos de falha ocasionados pela não coleta de dados horários nas máquinas automáticas consistiu no preenchimento daquelas lacunas conforme os procedimentos mostrados no Quadro 5. Completada essa fase, buscou-se eliminar os novos *outliers* por meio de outros tratamentos estatísticos a serem descritos mais adiante. A compilação dos registros antes, durante e depois da realização dos tratamentos é mostrada na Tabela 8.

**Tabela 8 – Quantidade total de CO<sub>atm</sub> registrado nas estações automáticas de monitoramento do ar e verificação do número de *outliers* antes, durante e depois dos tratamentos estatísticos**

Estação	Total de CO emitido (µg/m³)			% de aumento $\left(\frac{(3)}{(1)} - 1\right)$	Nº de outliers encontrados		
	Antes (1)	Tratamentos			Antes (A)	Tratamentos	
		Durante (2)	Depois (3)			Durante (B)	Depois (C)
EST-1	11.854.338	12.106.630	Idem	2,13	-	-	-
EST-2	12.215.984	12.603.056	12.539.921	2,65	1	1	-
EST-3	13.522.880	13.746.824	13.662.823	1,03	10	7	-
Total	37.593.202	38.456.510	38.309.374	1,91	11	8	

Fonte: Elaboração própria (2018).

(1) Total de CO<sub>atm</sub> capturado pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar.

(2) Total de CO<sub>atm</sub> nas estações após o preenchimento das lacunas não registradas pelos equipamentos.

(3) Total de CO<sub>atm</sub> nas estações após a substituição de dados discrepantes por médias.

(A) Dados originais, conforme registradas nas estações de monitoramento da qualidade do ar.

(B) Substituição de medições não realizadas por médias estipuladas no Quadro 5.

(C) Remoção dos *outliers* e/ou substituição dos mesmos pela média de três dias antes e três dias depois do seu acontecimento. Maiores detalhes a respeito desse procedimento são mostrados na Tabela 4.

Verifica-se, na Tabela 8, que a estação 1 não apresentou a ocorrência de pontos discrepantes nem antes e nem durante a realização dos tratamentos. Após a execução dos procedimentos estatísticos a mesma teve um aumento de concentração de monóxido de carbono de 2,13%.

Já em relação aos equipamentos 2 e 3, observa-se que o número total de *outliers* reduziu de 11 para 8 após a realização da primeira etapa de tratamento dos dados. Esses oito pontos – um da estação 2 e sete da estação 3 – foram novamente tratados através da remoção de alguns valores diários ou da substituição dos pontos indesejados pela média de dois dias antes e depois do seu acontecimento. A Tabela 9 mostra os detalhes a respeito dessa segunda tratativa, que proporcionou a remoção total desses valores indesejáveis.

Tabela 9 – Remoção e/ou substituição dos dados semanais discrepantes por valores médios no ano de 2016

Estação	Tipo de outliers	Semana	Durante o tratamento (µg/m³)	Medições semanais (µg/m³)			Depois (µg/m³)
				Remo-vidas	Substituídas		
					De	Para	
2	Extremo <sup>(+)</sup>	28 <sup>a</sup>	169.825,33	63.095,11	-	-	106.730,22 <sup>(1)</sup>
3	Leve <sup>(-)</sup>	2 <sup>a</sup>	24.071,38	-	2.757,07	4.465,56	25.779,87 <sup>(2)</sup>
3	Extremo <sup>(+)</sup>	23 <sup>a</sup>	135.241,89	38.887,99	-	-	96.353,90 <sup>(3)</sup>
3	Leve <sup>(+)</sup>	24 <sup>a</sup>	111.909,47	12.246,71	-	-	99.662,76 <sup>(4)</sup>
3	Leve <sup>(+)</sup>	25 <sup>a</sup>	109.291,03	13.619,99	-	-	95.671,04 <sup>(5)</sup>
3	Leve <sup>(+)</sup>	32 <sup>a</sup>	102.176,56	-	20.605,75	13.510,90	95.081,71 <sup>(6)</sup>
3	Leve <sup>(+)</sup>	33 <sup>a</sup>	104.821,56	-	22.670,85	14.859,23	97.009,94 <sup>(7)</sup>
3	Leve <sup>(+)</sup>	34 <sup>a</sup>	103.536,24	-	20.513,81	13.769,79	96.792,22 <sup>(8)</sup>

Fonte: Elaboração própria (2018).

Extremo<sup>(+)</sup> – outlier extremo superior.

Leve<sup>(-)</sup> – outlier leve inferior.

Leve<sup>(+)</sup> – outlier leve superior.

(1) Foram removidas duas medições diárias, referentes aos dias 7 e 8 de julho de 2016.

(2) Substituiu-se o dado registrado no dia 07-01-2016 pela média de dois dias antes e dois dias depois desta data.

(3) Eliminou-se as coletas registradas nos dias 2 e 4-06-2016.

(4) Eliminou-se a coleta registrada no dia 09-06-2016.

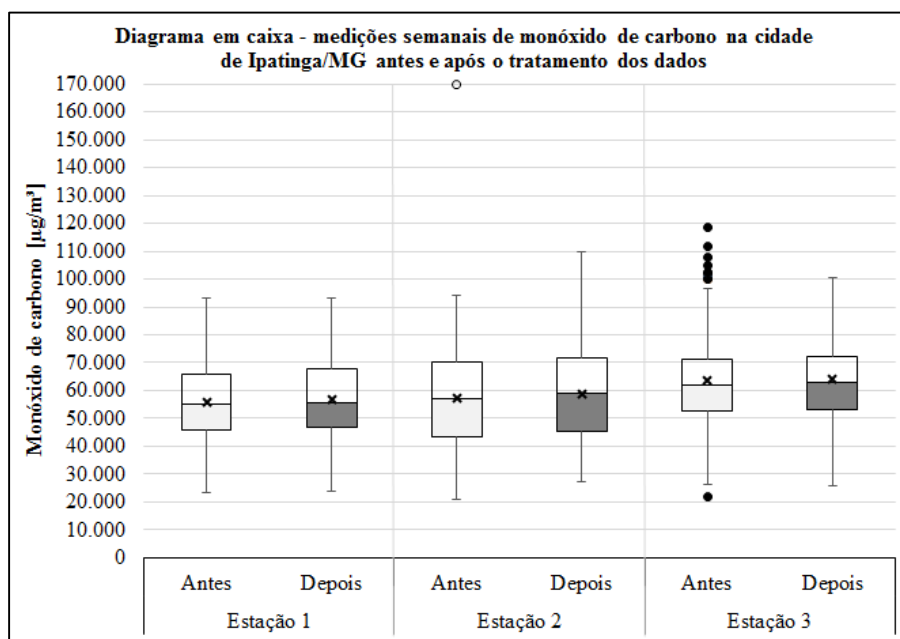
(5) Eliminou-se a coleta registrada no dia 17-06-2016.

(6) Substituiu-se o dado registrado no dia 08-08-2016 pela média de dois dias antes e dois dias depois desta data.

(7) Substituiu-se o dado registrado no dia 16-08-2016 pela média de dois dias antes e dois dias depois desta data.

(8) Substituiu-se o dado registrado no dia 17-08-2016 pela média de dois dias antes e dois dias depois desta data.

O tratamento estatístico dos dados possibilitou a construção do gráfico *box plot* – ou diagrama em caixa – para avaliar a distribuição empírica dos dados. Conforme afirmado por Valladares Neto *et al.* (2017), esse gráfico traz uma análise exploratória e até mesmo inferencial dos dados, podendo até mesmo substituir o uso de tabelas em alguns casos específicos. A Figura 30 mostra o comportamento de suas dispersões.

Figura 30 – Box plot para medições semanais de CO<sub>atm</sub> durante e após o tratamento dos dados

Fonte: Elaboração própria (2018).

Na Figura 30, observa-se que o impacto do tratamento de dados realizado nas informações coletadas pela estação 1 foi praticamente insignificante. A dispersão total dos dados – ou seja, a diferença entre a máxima e a mínima registradas – reduziu somente 0,9%. Em relação ao comportamento gráfico, nota-se que em ambas as situações o intervalo inter-quartis (IIQ – diferença entre o 1ª e 3º quartil), a média e a mediana permaneceram bem centralizados, mantendo um comportamento bem próximo ao da distribuição Normal (média bem centralizada e valores uniformemente distribuídos). Ao se analisar a parte interna do *boxplot*, constata-se que o tamanho do IIQ aumentou em 5,65% (de 19.956,12  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  para 21.083,13  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ). Ainda em relação à estação 1, verifica-se que o maior valor não *outlier* permaneceu o mesmo, limitando-se a 93.304  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ , e que o menor valor não *outlier* sofreu um aumento de somente 639,27  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  em relação aos 23.167,98  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  iniciais.

Já os dados referentes à estação 2 apresentaram mudanças um pouco mais sutis. Nota-se que a sombra inferior reduziu um pouco e que a sombra superior aumentou consideravelmente, fazendo com que a distribuição se tornasse visualmente assimétrica à direita. Esse aumento do tamanho da sombra superior (60,5% ao todo, de 23.836 para 38.260  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  e chegando a um limite superior próximo dos 110.000  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) se deve aos ajustes realizados para remover um *outlier* extremo e na substituição dos dados não registrados pelo equipamento conforme mencionados anteriormente. Ainda, o intervalo inter-quartil reduziu em 2,74% (de 26.643,24 para 25.912,65  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), o valor mínimo encontrado aumentou em 29,05% (de 21.150,31 para 27.295,45  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) e a máxima reduziu em 35,42% (de 170.000 para 110.000  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  aproximadamente).

Ao se analisar o terceiro aparato de medição, observa-se a ocorrência de aumentos de 4,5% e 10,1% nas sombras inferior e superior, respectivamente. Houve também pequenas oscilações nos valores referentes ao primeiro e terceiro quartis, média e mediana; as diferenças foram, respectivamente, de 788, 1.276, 652 e 934  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ . Porém, a mudança mais marcante configurada neste diagrama em caixa foi a remoção dos oito pontos discrepantes (um abaixo do limite inferior e sete acima do maior valor não *outlier*), lembrando que a distribuição dos dados em torno da medida central também aparenta ter um comportamento semelhante ao da distribuição Normal. Ademais, o Apêndice B traz maiores informações a respeito das observações estatísticas (estatística descritiva) conseguidas com a exploração dos dados referentes às três estações de monitoramento.

Esta simples – porém trabalhosa – verificação mostra a enorme importância de se realizar uma análise/tratamento inicial dos dados com certo rigor para depois utilizar os dados

na obtenção de resultados efetivos. Ressalta-se que, quanto menor for a dispersão dos dados, mais significativa será a amostragem. Pode-se afirmar que o resultado obtido com essas investigações é bem simples e, dada esta simplicidade, as conclusões podem apresentar grandes variações nos erros amostrais; para contornar essa situação, deve-se realizar a análise de variância (ANOVA), método este muito mais robusto que a simples obtenção do diagrama em caixa.

#### **4.1.3 Aplicação da análise de variância nos dados de monóxido de carbono atmosférico**

Conforme observado no referencial teórico, a análise de variância (ANOVA) tem como critério-base analisar se os diversos valores coletados pertencem a uma mesma faixa de erro amostral ou se pelo menos uma das médias difere das demais. Dessa forma, quanto maior for a quantidade de horas não registradas, reduzindo o tamanho amostral, e quanto maior for a frequência de *outliers* registrados nos medidores das estações atmosféricas, maior será a interferência dos dados ao se realizar a ANOVA, daí a importância de se fazer o tratamento dos dados conforme já mostrado no Quadro 5. Poder-se-ia, por exemplo, registrar uma possível rejeição de uma hipótese em função de uma menor quantidade de dados registrados ou de uma maior dispersão dos mesmos em função dos pontos discrepantes.

Os diagramas em caixa realizados anteriormente para as três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar foram feitos para dados semanais; ou seja, somou-se, a cada semana, as quantidades totais capturadas pelas máquinas e colocou-se todos os dados em um só tratamento com o intuito de reduzir o número de valores estatisticamente indesejáveis.

Este mesmo critério não pôde ser aplicado na análise de variância para verificar se as mesmas médias semanais encontradas em cada estação eram ou não estatisticamente iguais. Para o estudo da ANOVA, teve-se que fazer algumas adaptações e considerações nos dados iniciais para análise do modelo em função do número de semanas no ano e de limitações do *software* utilizado. Esses ajustes são explicados a seguir:

1. De acordo com a revista eletrônica Galileu (2016), o calendário Gregoriano leva em consideração o ciclo solar, que é de 365 dias e 8 horas. Adotou-se, neste trabalho um período fixo de 365 dias, ou aproximadamente 52,14 semanas;

2. Cada semana é interpretada no *software* estatístico SPSS como sendo um tratamento. O sistema computacional se limita a calcular até 50 agrupamentos de dados (isto é, 50 semanas). Assim, para adaptar os conjuntos de dados ao programa computacional, estipulou-se que:

- A semana tem um período de 8 dias, sendo que o primeiro dia inicia a partir do primeiro dado amostral (dia 2 de outubro de 2013, correspondente ao 2º dia da 40ª semana, de acordo com o calendário Gregoriano, ou, neste ajuste, à 35ª semana);
- Ao fim e/ou início de cada ano, a semana deve (obrigatoriamente) finalizar com 8 um período de dias. Exemplo 1: 45ª semana de 2013 compreendeu, nessa nova formulação, os dias 21 a 28 de dezembro daquele ano; para que a 46ª semana não concluísse o ano com somente 3 dias, optou-se por reiniciar a contagem; assim, os dias 29-dezembro-2013 a 5-janeiro-2014 passaram a fazer parte da primeira semana de 2015, evitando-se, assim, que o menor período causasse uma possível interferência na comparação das médias na ANOVA. Exemplo 2: a 46ª semana de 2015 iniciou-se no dia 27 de dezembro daquele ano e finalizou-se no dia 3 de janeiro de 2016;

A necessidade de se adaptar o período semanal como tendo 8 dias em função das limitações do *software* proporcionou encontrar as seguintes quantidades de tratamentos (TABELA 10).

**Tabela 10 – Número de semanas (tratamentos) encontrados em cada ano**

Estação	Ano					Total
	2013	2014	2015	2016	2017	
1, 2 e 3	11	46	46	45	38	186

Fonte: Elaboração própria (2018).

Na Tabela 10, observa-se que os anos 2013 e 2017 nas estações 1, 2 e 3 apresentaram 11 e 38 tratamentos, respectivamente. Isso se deve ao histórico de dados recebidos uma vez que a coleta de dados realizada compreendeu o período de 2 de outubro de 2013 a 30 de outubro de 2017.

Por se tratar da ocorrência de períodos diferentes, optou-se por realizar diversas análises de variância com o objetivo de encontrar o modelo de dados que obtivesse a maior aderência. Dessa forma, a hipótese inicial  $H_0$  deve ser rejeitada se o *p-value* encontrado for menor que o nível de significância  $\alpha$  de 5%. Em complemento, a procura pela formação de subgrupos se deu com a aplicação do teste de Tuckey a também 5% de significância. A formulação do teste de hipóteses para poder interpretar os dados fornecidos pela ANOVA é dada na equação (18).

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_j - \text{as médias (tratamentos) semanais das estações são estatisticamente iguais.} \\ H_1: \text{pelo menos uma das médias difere das demais.} \end{array} \right. \quad (33)$$

A Tabela 11 mostra os resultados encontrados em função do período observado (tamanho amostral) e da análise do *p-value* juntamente com o teste de Tukey para formação de subgrupos.

**Tabela 11 – Análise de variância para valores semanais de CO<sub>atm</sub>**

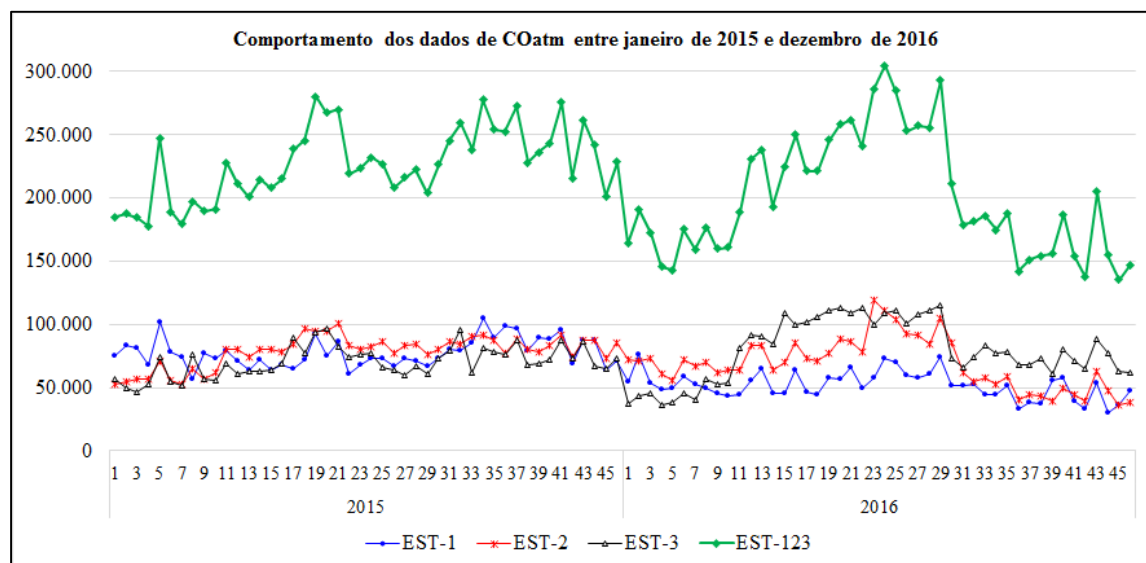
Período	Análise de variância para CO <sub>atm</sub> <i>p-value</i> (subgrupos formados)			
	Estação 1	Estação 1	Estação 3	Estações 1, 2 e 3
Out-2013 a out-2017	0,990 (1)	0,028 (3)	0,000 (6)	0,000 (2)
Jan-2014 a out-2017	0,987 (1)	0,041 (3)	0,000 (4)	0,000 (2)
Jan-2014 a dez-2016	1,000 (1)	0,015 (4)	0,000 (4)	0,002 (2)
Jan-2014 a dez-2015	0,287 (1)	0,000 (5)	0,041 (2)	0,001 (3)
Jan-2015 a dez-2016	1,000 (1)	0,606 (1)	0,029 (2)	0,579 (1)

Fonte: Elaboração própria (2018).

Constata-se, na Tabela 11, que o período que obteve maior aderência em relação à análise de variância foi o de janeiro de 2015 a dezembro de 2016. Nesse ensaio, com exceção da estação 3, os demais resultados apresentaram um *p-value* acima de 0,55, inclusive para a somatória dos dados semanais nos três aparatos.

Após esse exaustivo reajuste na composição dos dados, pôde-se dar início à reanálise dos dados ajustados para o período de janeiro de 2015 a dezembro de 2016. A Figura 31 mostra o comportamento geral dos dados ao longo desse período.

**Figura 31 – comportamento geral dos dados semanais de CO<sub>atm</sub> após o ajuste fino dos dados**



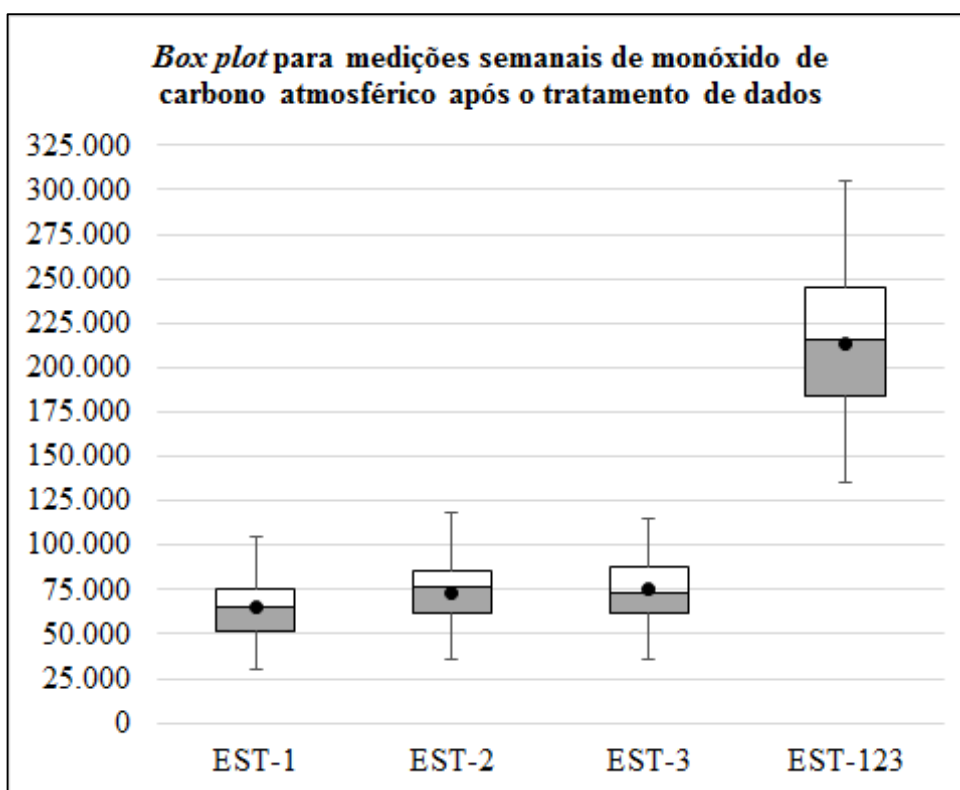
Fonte: Elaboração própria (2018).

Constata-se, na Figura 31, maior linearidade dos dados ao longo do ano de 2015 e aumento do volume de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  emitido a partir do ano de 2016. Ainda assim, a ANOVA se mostrou favorável à análise dos dados com excessão da estação 3.

#### 4.1.4 Modelos de previsão de dados para demandas futuras

Até o prezado momento realizou-se a análise variância para verificar se havia diferença estatística significativa entre os dados semanais coletados nas três estações de monitoramento da qualidade do ar. O período que melhor se adaptou ao modelo foi o de dados semanais de janeiro de 2015 a dezembro de 2016. A Figura 32 mostra o *box plot* devidamente atualizado para esse período em vigência.

**Figura 32 – Gráfico *box plot* para dados semanais de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  após o ajuste fino de dados. Período: janeiro-2015 a dezembro-2016**



Fonte: elaboração própria (2018).

Constata-se, na Figura 32, que os dados aparentam estar igualmente dispersos (média e mediana bem próximas), demonstrando certa proximidade com a distribuição Normal.

Conforme observado no referencial teórico, Field (2011) propõe (Figura 17) a realização do teste de Levene para verificar a homogeneidade das variâncias desde que os

tamanhos das amostras sejam iguais. Como o ano de 2015 teve 46 semanas e o de 2016 teve 45 períodos, optou-se por agregar a este ano primeira semana 2017, igualando-se assim o tamanho amostral anual. O resultado das análises levando-se em consideração o fator ‘Semana’ com um nível de 5% de significância é mostrado na Tabela 12.

**Tabela 12 – Teste de Levene para igualdade de variâncias dos dados semanais de CO<sub>atm</sub>**

Estação	Desvio-padrão amostral semanal		Teste de Levene	
	2015	2016	Z	p-value
Estação 1	11.387,70	10.736,06	0,474	0,493
Estação 2	12.449,30	21.402,27	9,573	0,003
Estação 3	12.308,46	24.496,04	24,347	0,000
Estações 1, 2 e 3	28.707,74	47.621,39	17,196	0,000

Fonte: Elaboração própria (2018) com dados do *software* SPSS.

Verifica-se, na Tabela 12, que somente a estação 1 não apresentou diferenças significativas nas variâncias de acordo com o teste de Levene. Ou seja, não se rejeitou a hipótese de igualdade de variâncias entre os anos 2015 e 2016 para os dados da estação 1. Já para os demais testes, isso não aconteceu.

De acordo com o próprio tutorial do SPSS, o teste não-paramétrico de Kruskal-Wallis para amostras independentes é uma alternativa para a ANOVA de fator único caso as suposições dos dados seguirem a distribuição Normal for violada. Ressalta-se que análise de variância tem como premissas (dentre outras) os fatos de que as populações das quais as amostras são extraídas apresentem distribuições aproximadamente normais e de que as populações apresentem o mesmo desvio-padrão (MANN, (2009).

O teste de Kruskal-Wallis testa as hipóteses de que as populações possuem funções de distribuição iguais (H<sub>0</sub>) contra a de que pelo menos duas populações possuem diferentes funções de distribuição (H<sub>1</sub>). Dessa forma, a realização desse teste no *software* SPSS evidenciou os seguintes valores (TAB. 13):

**Tabela 13 – Teste de Kruskal-Wallis para identificação de igualdade de funções de distribuição em dados semanais de CO<sub>atm</sub> (2015-2016)**

Descrição	Qui-quadrado	p-value
Estação 1	14,99	1,000
Estação 2	43,34	0,542
Estação 3	59,04	0,078
Estações 1, 2 e 3	43,19	0,549

Fonte: Elaboração própria (2018) com dados do *software* SPSS.

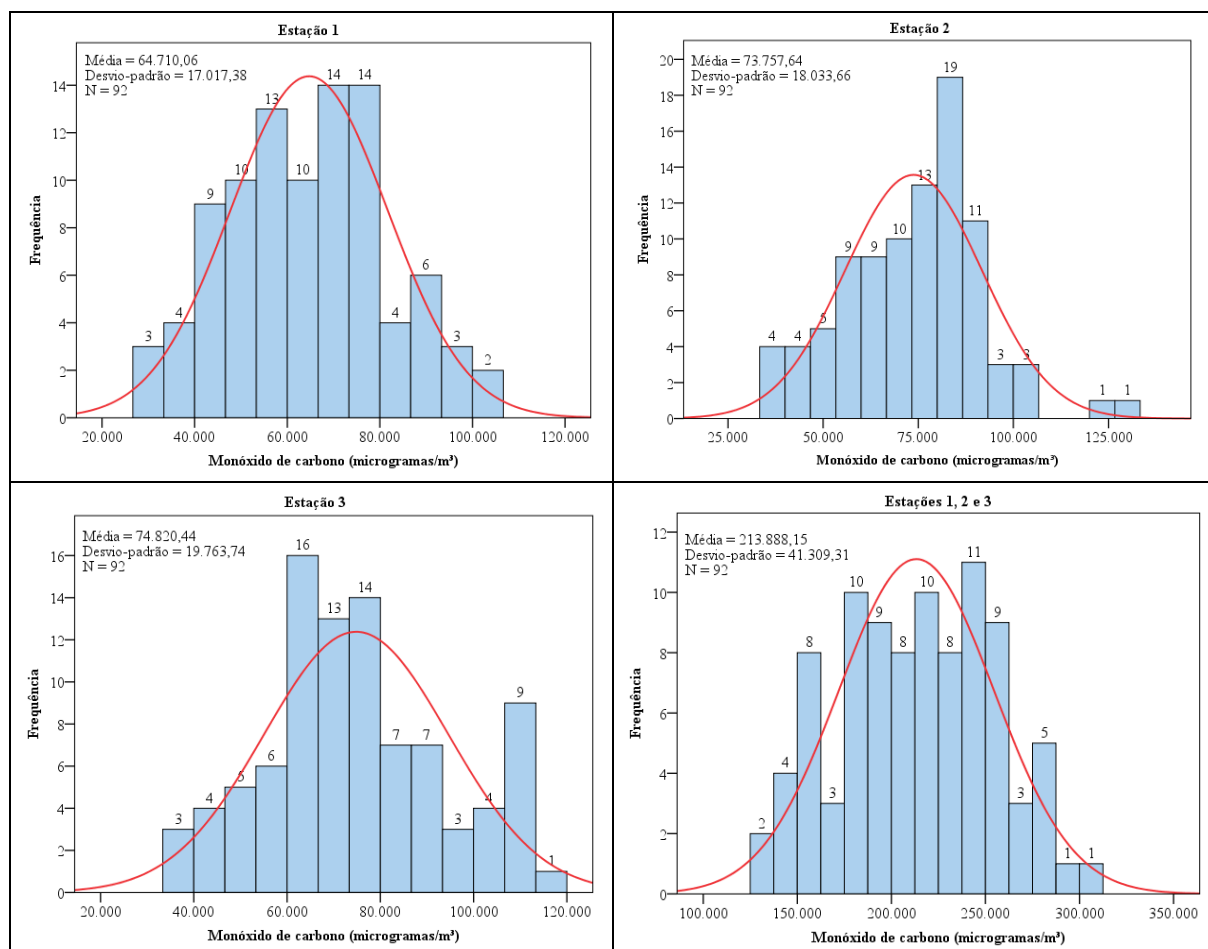
De acordo com a Tabela 13, verifica-se, a um nível de 5% de significância, a não rejeição da hipótese nula em todos os quatro casos. Ou seja, constata-se que os dados semanais



de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  possuem funções de distribuição iguais nas 46 semanas analisadas nos anos de 2015 e 2016.

Ademais, os histogramas referentes aos dados semanais de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  para verificar a proximidade com essa distribuição são mostrados na Figura 33.

**Figura 33 – Histograma para os dados semanais de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  das estações analisadas (2015-2016)**



Fonte: Elaboração própria (2018) com dados do *software* SPSS.

Apesar de nenhuma das imagens dispostas na Figura 33 apresentar semelhança com a distribuição Normal, valores como os erros padrão (que estimam a variabilidade das amostras), as máximas, mínimas e desvios-padrão continuam bem próximos uns dos outros, explicando de certa forma o ajuste do modelo. A análise descritiva referente aos dados fornecidos pelas estações é mostrada na Tabela 14.

**Tabela 14 – Estatística descritiva para dados semanais de CO<sub>atm</sub> após ajuste fino de dados**

Estação	N	Mínimo	Máximo	Soma	Média		Desvio-padrão	CV
					Estatística	Erro Padrão		
EST_1	92	30.579,63	104.679,85	5.953.325,68	64.710,06	1.774,18	17.017,38	26,3
EST_2	92	36.253,80	118.821,84	6.763.906,01	73.520,72	1.814,88	17.407,68	23,7
EST_3	92	35.942,77	114.974,45	6.883.480,73	74.820,44	2.060,51	19.763,74	26,4
EST_123	92	135.170,14	304.716,46	19.622.509,54	213.288,15	4.306,79	41.309,31	19,4

Fonte: Elaboração própria (2018).

Findando essa etapa, uma das formas de verificar se os dados estão normalmente distribuídos se dá com o auxílio do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov (K-S), disponível em diversos *softwares* estatísticos.

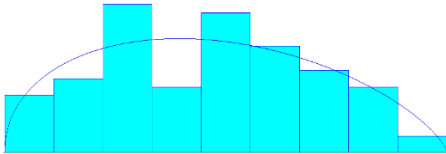
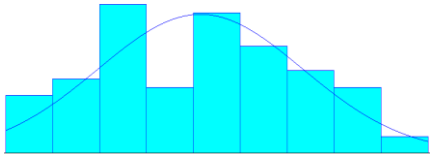
O teste K-S pode ser aplicado em pequenas amostras, é válido somente para distribuições contínuas e seu teste se baseia nas comparações de probabilidades acumuladas observada e teórica. O teste de hipóteses é elaborado da seguinte forma:

$$\begin{cases} H_0: \text{os dados amostrais seguem a distribuição teórica desejada.} \\ H_1: \text{os dados amostrais não seguem a distribuição teórica desejada.} \end{cases}$$

A hipótese  $H_0$  é rejeitada ao se comparar os testes calculado e tabelado ( $K - S_{\text{calculado}} \neq K - S_{\text{tabelado}}$ ) ou por meio da análise do *p-value* encontrado ( $p - value < \alpha$ ), teste este de maior poder estatístico que o mencionado anteriormente.

Assim, para as amostras tratadas, utilizou-se os seguintes parâmetros de entrada: adoção de um nível de significância  $\alpha = 5\%$  para  $n = 49$  amostras (ou meses),  $K - S_{\text{crítico}} = 0,1923$  e desejando-se inferir que os dados amostrais são normalmente distribuídos. Os resultados fornecidos pela ferramenta de análise estatística *Input Analyzer*® são mostrados na Tabela 15.

**Tabela 15 - Ajuste de dados à melhor distribuição, aproximação pela Normal e discriminação dos dados.**

Descrição	Distribuição Beta	Distribuição Normal
Representação gráfica		
Distribuição	135.000 + 170.000 * BETA(1,47 , 1,72)	NORM(213.000, 41.100)
Erro quadrático	0,009245	0,013042
K-S <sub>calculado</sub>	0,053400	0,104000
<i>p-value</i> correspondente	> 0,15	> 0,15
Valor mínimo		135.170,14
Valor máximo		304.716,46
Coefficiente de variação		19,3%

Fonte: Elaboração própria com dados do *software Input Analyzer*.

Como resposta ao teste K-S realizado, constata-se, a um nível de significância de 5%, que não há evidências suficientes para provar a rejeição da hipótese  $H_0$ . Ou seja, constata-se que os dados seguem a distribuição Beta, e os mesmos podem ser aproximados para a distribuição Normal uma vez que  $p\text{-value} < \alpha$  (teste mais robusto) e  $K\text{-S}_{\text{calculado}} < K\text{-S}_{\text{tabelado}}$  em ambos os casos.

Em suma, pode-se afirmar que as três estações de monitoramento da qualidade do ar capturam, mensalmente, uma quantia de  $(213.000 \pm 41.100) \mu\text{g.m}^{-3}$  de monóxido de carbono atmosférico.

As estimativas supracitadas podem ser utilizadas na geração de dados futuros (100 ou 200 anos, ou mais) em modelos matemáticos como o predador-presa, sendo esses valores usados no cálculo da ‘taxa de natalidade’ de dióxido de carbono a ser predado pelos vegetais. A taxa considerada é constante e linear, e não exponencial (que aumenta indefinidamente) ou logarítmica, que aumenta até certo ponto e a partir daí permanece constante.

## 4.2 Implementação do modelo matemático de Lotka-Volterra

Ressalta-se que, antes de iniciar a elaboração desse estudo, o monóxido de carbono resulta da combustão incompleta do carbono ou de compostos de carbono (CHANG; GOLDSBY, 2013). Cita-se, por exemplo, a formação desse composto a partir da oxidação da hulha, da combustão do carvão vegetal e do gás de iluminação, da queima de combustíveis por veículos automotores e aviões (CHAVES, 2007), dentre outros.

Para que o modelo matemático seja implementado, assumiu-se que toda e qualquer molécula de monóxido de carbono seria transformada em dióxido de carbono de forma espontânea e instantânea. Ou seja, para efeitos desse estudo, considerou-se que as estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar fazem coletas e leituras de  $\text{CO}_2$ , necessário à etapa de fotossíntese e consequente subsistências dos vegetais, e não do  $\text{CO}_{\text{atm}}$ .

Ainda, com o objetivo de seguir o sistema internacional de unidades, optou-se por modificar a densidade de microgramas por metro cúbico ( $\mu\text{g.m}^{-3}$ ) para partes por milhão (ppm) conforme a Equação (34), adaptada de Davis e Masten (2016).

$$Conc. ppm = \frac{Conc. \frac{\mu g}{m^3}}{Peso\ molecular} \times 22,4136 \times \frac{T^{\circ}C + 273,15}{273,15} \times \frac{760 mmHg}{P_{atm}} \times \frac{1}{1.000} \quad (34)$$

Onde:

Conc. ppm – medida do gás em análise, em partes por milhão;

Conc.  $\mu g/m^3$  – concentração do gás em análise, medida pelas estações automáticas de monitoramento do ar;

22,4136 – volume ocupado por um mol de gás ideal (pressão de 1 atmosfera, temperatura de 273 Kelvin), em L/mol;

$T^{\circ}C$  – temperatura do local em análise. Para a cidade de Ipatinga/MG adotou-se a temperatura média anual de  $24^{\circ}C$ ;

760 mmHg – pressão atmosférica, em milímetros de mercúrio, ao nível do mar;

Peso molecular – peso molecular dos átomos que compõem o gás em análise, em g/mol. No caso, peso molecular do  $CO_2 = 44$  g/mol;

$P_{atm}$  – pressão atmosférica do local de análise, em mmHg. Para o município de Ipatinga,  $P_{atm} = 739$  mmHg.

De acordo com o Sistema Internacional de Unidades (2012), publicado pelo Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO), a nomenclatura *ppm* (equivalente a  $10^{-6}$ , em valor relativo, ou uma unidade para cada  $10^6$  unidades) é usada para valores de grandezas adimensionais ou de dimensão ‘um’ como, por exemplo, o número de moléculas. Boguski (2006) corrobora ao afirmar que concentrações de substâncias químicas no ar são normalmente medidas em unidades de massa de produtos químicos (miligramas, microgramas etc.) por volume de ar (ex. metro cúbico), e Davis; Masten (2016) complementam ao declarar que a vantagem do *ppm* em relação ao  $\mu g.m^{-3}$  é que mudanças na temperatura e pressão, no primeiro caso, não irão mudar a razão entre o volume do poluente e o volume de ar.

Já em relação ao modelo matemático de Lotka-Volterra, conforme mencionado no referencial teórico, o mesmo é utilizado para explicar a interação entre duas espécies em um sistema fechado, onde uma delas (predador) se alimenta de outra (presa), e que as equações formam um sistema autônomo com (pelo menos) uma solução periódica.

Para esse estudo, considerou-se que as árvores são os predadores naturais do dióxido de carbono atmosférico e que elas se alimentam única e exclusivamente do  $CO_2$ . O sistema de equações diferenciais é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Presas:} \quad & \frac{dC}{dt} = k.C - a.C.L \\ & k; a; r; b > 0. \\ \text{Predadores:} \quad & \frac{dL}{dt} = -r.L + b.C.L \end{aligned}$$

De acordo com essas equações não lineares, a implementação do modelo só é possível com o fornecimento de seis dados principais: as estimativas iniciais a respeito das populações de presas (C) e de predadores (L), e as constantes positivas referentes às taxas de ‘crescimento’ da presa (k), de predação (a), de mortalidade do predador (r) e de crescimento do

predador (b). Os tópicos a seguir oferecem mais detalhes a respeito de como calcular essas quantidades.

#### 4.2.1 População inicial ‘C’ de presas

Seja  $C = C(t)$  a população de dióxido de carbono limitada ao município de Ipatinga/MG, em um instante  $t$ . Analisando-se o histórico de dados coletados pelas três primeiras estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, constatou-se que as mesmas capturaram as seguintes quantidades anuais de monóxido de carbono atmosférico (TAB. 16):

**Tabela 16 – Quantidade total de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  capturada pelas estações 1, 2 e 3**

Ano	Quantidade de $\text{CO}_{\text{atm}}$ capturada pelas estações 1, 2 e 3	
	$\mu\text{g.m}^{-3}$	ppm
2014	9.780.906,98	5.574,19
2015	10.420.738,40	5.938,83
2016	9.055.355,17	5.160,69

Fonte: Elaboração própria (2018)

Como o estudo da ANOVA contemplou os anos de 2015 e 2016, assumiu-se que a população inicial  $C$  de monóxido de carbono atmosférico seria de  $9.738.046,79 \mu\text{g.m}^{-3}$  – média desses dois anos, ou mais precisamente  $5.549,76 \text{ ppm}$  de acordo com a Equação (34).

#### 4.2.2 População inicial ‘L’ de predadores

Seja  $L = L(t)$  uma certa população de vegetais que convivem com o dióxido de carbono município de Ipatinga/MG, em um dado instante  $t$ .

De acordo com Saliba (2018), o Viveiro de Mudas da Usiminas, reconhecido como Reserva Particular do Patrimônio Nacional (RPPN), contribui para que o município de Ipatinga se mantenha no *ranking* das cidades brasileiras com o maior índice de espaço verde por habitante por metro quadrado. Segundo o autor, a empresa siderúrgica Usiminas se responsabilizou, somente em 2017, pelo plantio de 4.787 novas árvores nas áreas internas da companhia e outras 3.588 em áreas externas à empresa, além de doar outras 11.000 mudas a instituições da região.

Como o total de 8.375 árvores foram realmente plantadas pela empresa no município de Ipatinga (não se encontrou notícias a respeito de onde foram plantadas as 11.000

outras mudas), assumiu-se que essa quantia seria a população inicial  $L$  de predadores que iria preda os 5.549,76 ppm de (agora) CO<sub>2</sub>. Em outras palavras, deve-se plantar 8.375 árvores para cada 5.549,76 ppm capturados pelas estações automáticas.

#### 4.2.3 Taxa 'k' de crescimento das presas (monóxido/dióxido de carbono)

Independentemente do objeto de estudo aqui abordado, por se tratar de crescimento de populações, Zill e Wright (2015); Volterra (1928) utilizam a equação de crescimento/decrescimento populacional – também conhecida por Zill e Cullen (2001) como investigação da dinâmica populacional – desenvolvida no ano de 1798 pelo economista inglês Thomas Malthus (EQ. 35).

$$\frac{dP}{dt} = k.P \rightarrow \frac{dP}{P} = k.dt \xrightarrow{\text{Integrando, tem-se}} P = P_0.e^{k.t} \quad (35)$$

Onde:

$P$  = número de indivíduos em um instante  $t$ ;

$P_0$  = número de indivíduos no instante  $t = 0$ ;

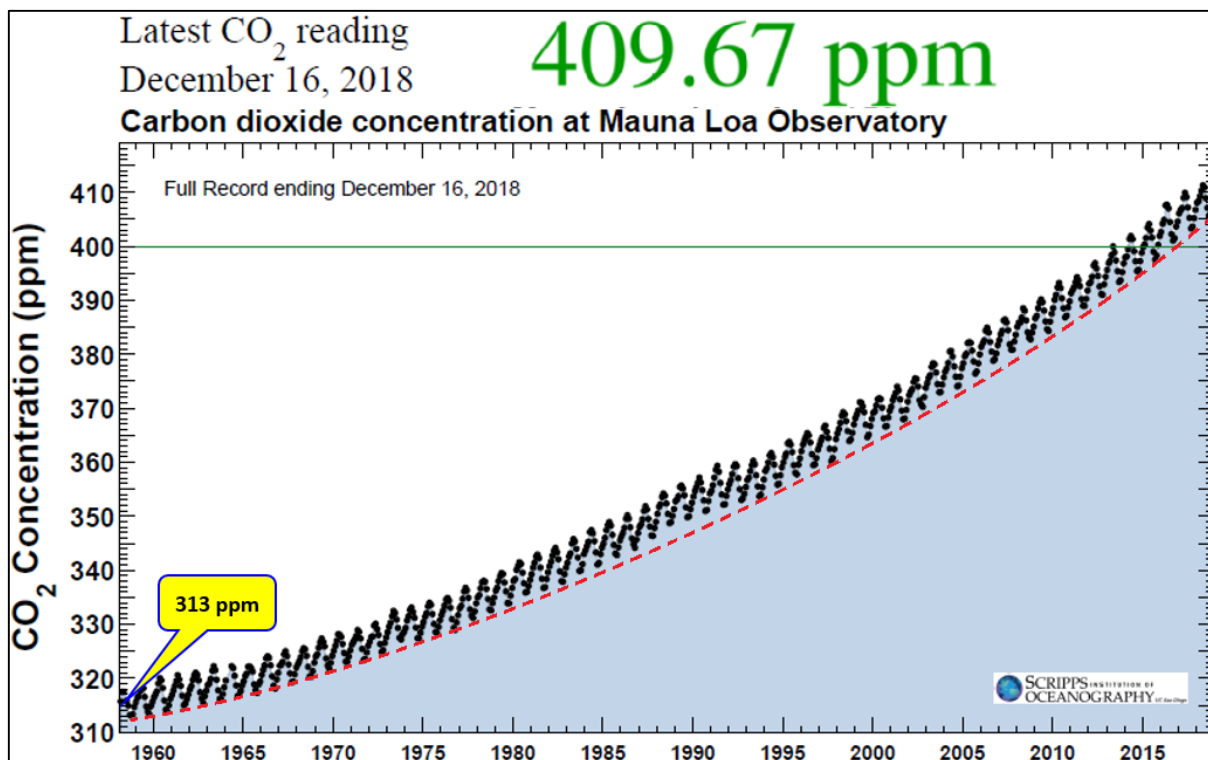
$k$  = constante de crescimento ( $k > 0$ ) ou decrescimento ( $k < 0$ ) do objeto de estudo;

$t$  = tempo.

Na Equação (35), Zill e Cullen (2001) assumem como premissa o fato de que a taxa de crescimento populacional depende do tamanho da população  $P$ . Para encontrar a constante de crescimento, os dados iniciais a serem fornecidos são a população inicial do dióxido de carbono ( $P_0$ ), a população final ( $P$ ) e o tempo demandado para que ocorresse esse aumento.

De acordo com Monroe (2013), o primeiro dia de operação do equipamento montado pelo pesquisador Charles David Keeling se deu em março de 1958 e o mesmo registrou uma concentração de CO<sub>2</sub> atmosférico de 313 ppm. Já em dezembro de 2018, o valor mostrado pelo *site* de *internet* The Keeling Curve era de 409,67 ppm. A Figura 34 mostra a evolução dessas quantias ao longo dos anos.

Figura 34 – Crescimento ‘populacional’ de dióxido de carbono nos últimos 60 anos



Fonte: Adaptado de The Keeling Curve (2018).

Verifica-se, na Figura 34, que o aumento da concentração de CO<sub>2</sub> tem ocorrido de forma exponencial (linha pontilhada, em vermelho), validando o modelo criado por Malthus. De posse das populações inicial e final e do tempo de observação mostrados nessa figura, calculou-se a constante  $k$  de crescimento com o auxílio da Equação (35) da seguinte forma:

$$P = P_0 \cdot e^{k \cdot t} \rightarrow \frac{P}{P_0} = e^{k \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = k \cdot t$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{409,67}{313,00}\right)}{60} = 0,0044858128$$

Constata-se, assim, que a taxa (ou coeficiente)  $k$  de crescimento do dióxido de carbono é de 0,0044858128.

#### 4.2.4 Taxa ‘a’ de predação

A taxa de predação, ou coeficiente de ataque é calculado por meio da efetividade da captura do CO<sub>2</sub> pelos vegetais e da expectativa de vida das árvores. De posse dessas informações, estipulou-se as seguintes condições iniciais:

1. A efetividade de captura de CO<sub>2</sub> pelos vegetais é de 95%. Ou seja, 95% das moléculas de CO<sub>2</sub> são absorvidas pelas árvores, e os 5% restantes ficam retidos em ruas da cidade, telhados de casas, solo etc., ou até mesmo absorvidas por outros seres vivos, não servindo como substrato alimentar). A título de comparação, o Segundo Simpósio sobre os Oceanos em um Mundo com Elevado CO<sub>2</sub>, realizado em outubro de 2008, apontou que cerca de 25% do CO<sub>2</sub> emitido pela ação do homem é absorvida pelos oceanos, tornando-os mais ácidos (HOOD *et al.*, 2008). Porém, o fato de o gás se deslocar para os oceanos não significa que o mesmo será eliminado pelo meio ambiente;

2. Segundo Rosa (2013), um estudo realizado pelo Instituto Totum e pela Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz (ESALQ), da Universidade de São Paulo (USP) em parceria com a Fundação SOS Mata Atlântica, divulgado em fevereiro de 2013, estima que cada árvore da Mata Atlântica absorve 163,14 quilos de CO<sub>2</sub> equivalente ao longo de seus primeiros 20 anos de vida. Para encontrar este valor, realizou-se cálculos com base em árvores entre 3 e 11 anos de idade e projetada uma expectativa de vida de 20 anos dos vegetais analisados.

A taxa de predação pode ser calculada com o auxílio da própria equação das presas do modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = kC - a.C.L \quad \rightarrow \quad \frac{dC}{dt} = C.(k - a.L) \quad \rightarrow \quad \frac{dC}{C} = (k - a.L).dt \quad \text{Integrando,} \\ \text{tem-se:} \\ C = C_0.e^{(k-a.L).t} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = (k - a.L).t \end{aligned} \quad (36)$$

Substituindo os valores na Equação (36), tem-se:

$$\ln(0,95) = (0,0044858128 - a.8.375).20 \quad \rightarrow \quad a = 0,0000008418$$

Verifica-se que a taxa  $a$  de predação encontrada para os vegetais é de  $8,418 \times 10^{-7}$ .

#### 4.2.5 Taxa 'r' de mortalidade dos predadores, na ausência de alimento

O cálculo da taxa de mortalidade dos predadores seguiu o mesmo raciocínio utilizado no cálculo da 'taxa de natalidade' (ou de crescimento) do CO<sub>2</sub>. Um detalhe importante é que, por se tratar de índice de mortalidade, o coeficiente  $k$  deve ser negativo.

A premissa aqui adotada é a de que 95% das árvores cultivadas completem o ciclo de 20 anos de idade. Ou seja, assumiu-se que 5% das mudas poderiam não se desenvolver ou



até mesmo morrer em função da falta de cuidados, do baixo índice de precipitação, de solos com baixa qualidade, do recobrimento da área por plantas invasoras, da presença de gado, de queimadas, depredações ou até mesmo por infestação de formigas (EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA – EMBRAPA, [201-?]).

A título de comparação com esse percentual, Maran *et al.* (2015) realizaram um experimento onde se plantou mudas de *Araucaria angustifolia* de pequeno porte (20 a 25 centímetros, um ano de cultivo em viveiro) e médio porte (40 a 50 centímetros, dois anos de cultivo) em uma área de floresta natural com cobertura de copas igual ou superior a 50%. Após 36 meses de observação, os percentuais de sobrevivência das mudas pequenas e grandes foram, respectivamente, de 53,9% e 82,8%.

Dessa forma, adaptando-se a Equação (35) para o coeficiente  $r$  de mortalidade dos vegetais, tem-se:

$$P = P_0 \cdot e^{-r \cdot t} \rightarrow \frac{P}{P_0} = e^{-r \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -r \cdot t$$

$$r = \frac{-\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)}{t} = \frac{-\ln(0,95)}{20} = 0,0025646647$$

Conclui-se que a taxa  $r$  de mortalidade dos predadores é 0,0025646647.

#### 4.2.6 Taxa 'b' de crescimento dos predadores

De volta ao modelo de Lotka-Volterra, a equação dos predadores é dada por:

$$\frac{dL}{dt} = -r \cdot L + b \cdot C \cdot L \rightarrow \frac{dL}{dt} = L \cdot (-r + b \cdot C) \rightarrow \frac{dL}{L} = (-r + b \cdot C) \cdot dt \quad \begin{array}{l} \text{Integrando,} \\ \text{tem-se:} \end{array}$$

$$L = L_0 \cdot e^{(-r+b \cdot C) \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = (-r + b \cdot C) \cdot t \quad (37)$$

De acordo com o *site* de *internet* Diário do Aço (2018), o município de Ipatinga é considerado como sendo um dos mais arborizados do país, com mais de 100 mil árvores plantadas em áreas públicas. Considerando-se que: (1) esta população inicial de vegetais, (2) a cada ano que passa são acrescentados 8.375 árvores, (3) a população de CO<sub>2</sub> seja de 5.549,76 ppm e (4) cada árvore tenha uma vida útil de 20 anos, tem-se:

$$\ln\left(\frac{108.375}{100.000}\right) = (-0,0025646647 + b \cdot 5.549,76) \cdot 20$$

$$b = 0,0000011779$$

Verifica-se que a taxa  $b$  de crescimento dos predadores encontrada para os vegetais é de  $11,779 \times 10^{-7}$ .

#### 4.2.7 Validação das taxas obtidas

Calculadas as quantidades e taxas necessárias à implementação do modelo, a etapa seguinte consistiu na análise criteriosa dos dados encontrados. A Tabela 17 mostra o resumo os valores estudados.

**Tabela 17 – Resumo das constantes necessárias à implementação do modelo.**

Descrição	Sigla	Valor/quantidade
População inicial de dióxido de carbono (ppm)	C	8.786,62
População inicial de vegetais (und)	L	8.375,00
Taxa de crescimento do dióxido de carbono	k	0,0044858128
Taxa de predação	a	0,0000008418
Taxa de mortalidade dos vegetais	r	0,0025646647
Taxa de crescimento dos vegetais	b	0,0000011779

Fonte: Elaboração própria (2018)

Conforme mostrado no referencial teórico, todas as constantes  $k$ ,  $a$ ,  $r$  e  $b$  calculadas e mostradas na Tabela 17 são positivas. O sistema de equações diferenciais devidamente preenchido é mostrado na Equação (38).

$$\begin{aligned} \text{Presas:} \quad \frac{dC}{dt} &= 0,0044858128 \cdot C - 0,0000008418 \cdot C \cdot L \\ \text{Predadores:} \quad \frac{dL}{dt} &= -0,0025646647 \cdot L + 0,0000011779 \cdot C \cdot L \end{aligned} \quad (38)$$

No referencial teórico, a Equação (27)  $k \cdot \ln L - a \cdot L + r \cdot \ln C - b \cdot C = H$ , com a constante arbitrária de integração  $H > 0$ , trouxe a solução geral para o modelo que deve ser seguida e obedecida por todas as soluções do modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Assim, ao se substituir os valores dispostos na Tabela 17 essa equação, tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
k \cdot \ln L & & 0,0044858128 \times \ln(8.375) \\
-a \cdot L & & -0,0000008418 \times 8.375 \\
+r \cdot \ln C & \Rightarrow & +0,0025646647 \times \ln(5.549,76) \\
-b \cdot C & & -0,0000011779 \times 5.549,76 \\
===== & & ===== \\
H & & H \quad \Rightarrow \quad H = 0,049044297
\end{array}$$

Os cálculos realizados mostram que a constante  $H$  é positiva, e tal fato valida o modelo mostrado na Equação (38).

#### 4.2.8 Soluções de equilíbrio para o modelo matemático

Validadas as taxas de natalidade e mortalidade das populações de presas e de predadores, a etapa seguinte consistiu em encontrar as soluções de equilíbrio do sistema uma vez que seria “[...] impossível encontrar fórmulas explícitas para  $C$  e  $L$  como funções de  $t$ .” pois o sistema é acoplado ( $C$  e  $L$  aparecem nas duas equações e isso impede a resolução de uma equação, e depois a outra (STEWART, 2016, p. 563). Ou seja, as formulações matemáticas têm que ser resolvidas de maneira simultânea; em contrapartida, pode-se usar métodos gráficos para analisar as equações, gráficos estes a serem mostrados mais adiante.

Em relação às soluções constantes – ou soluções de equilíbrio, o autor supracitado afirma que as populações  $C$  de presas e  $L$  de predadores serão constantes se ambas as derivadas forem iguais a zero, ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} = C' &= C \cdot (0,0044858128 - 0,0000008418 \cdot L) = 0 \\
\frac{dL}{dt} = L' &= L \cdot (-0,0025646647 + 0,0000011779 \cdot C) = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

Uma possível solução é dada por  $C = 0$  e  $L = 0$ . Esse valores fazem total sentido para Stewart (2016) uma vez que, na inexistência de dióxido de carbono e de vegetais, as populações não vão aumentar. A outra solução constante é

$$L = \frac{0,0044858128}{0,0000008418} \cong 5.329 \qquad C = \frac{0,0025646647}{0,0000011779} = 2.177,38$$

Assim, uma segunda condição de equilíbrio entre ambas as populações consistirá nas quantias de 5.329 árvores e de 2.177,38 ppm de dióxido de carbono. Isso significa que são necessárias 5.329 árvores para suportar uma ‘população anual’ constante de 2.177,38 ppm de

CO<sub>2</sub>, lembrando que este último valor se refere à média anual (2015-2016) desse gás estufa capturado por apenas três estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar.

Em suma, verificou-se a existência de duas soluções de equilíbrio para o sistema em análise:

✓ (0,0), que satisfaz as condições iniciais da inexistência tanto de presas como de predadores;

✓  $\left(\frac{r}{b}, \frac{k}{a}\right)$ , que satisfaz à condição  $(k - a.L) = 0$ , referente à equação das presas e onde se encontra a resposta para o ponto de equilíbrio da população de predadores, e à condição  $(-r + b.C) = 0$ , referente à equação dos predadores e onde se encontra a resposta para o ponto de equilíbrio da população de presas.

#### **4.2.9 Resolução numérica e interpretação gráfica do modelo matemático**

De acordo com Bassanezi e Ferreira Júnior (1988), o interesse é saber o que acontecerá no futuro com as populações de presas e de predadores quando os seus tamanhos iniciais são conhecidos.

Na construção de gráficos, diversos livros voltados às áreas de Cálculo e de Equações Diferenciais fazem menções teóricas sobre a construção de campos de direções, de órbitas do sistema e de equações matemáticas que explicam a evolução das populações ao longo do tempo. Para simplificar o estudo – não o tratando de forma estritamente teórica, mas dando preferência à aplicação prática, optou-se por não abordar os princípios que norteiam esses assuntos da matemática aplicada ao se utilizar a Equação (39).

Caso seja de interesse do leitor, existem diversos livros dessa área que oferecem detalhes a respeito da construção do campo de direções (geralmente os primeiros capítulos). Já em relação aos cálculos teóricos que levam à criação dos gráficos de órbitas do sistema de equações no plano de fase e da evolução das populações ao longo do tempo, deixa-se como sugestão a leitura/estudo das páginas 384 a 389 do livro publicado pelos autores Rodney Carlos Bassanezi e Wilson Castro Ferreira Júnior (*Equações Diferenciais com Aplicações*, editora Harbra, São Paulo, 1988), onde os mesmos que explicam as etapas para as suas consecuições com grande riqueza de detalhes.

Dados esses pressupostos, realizou-se a solução numérica do modelo ajustado ao foco do estudo – Equação (38) com o auxílio do *software MS Excel*<sup>®</sup>. A ‘máscara’ de entrada de dados na planilha e cálculos numéricos lá realizados são mostrados na Figura (35).

Figura 35 – Dados de entrada e cálculos numéricoa para a implementação gráfica do modelo.

2018-12 - Modelo final v-07 - Microsoft Excel

ARQUIVO

PÁGINA INICIAL

INSERIR

LAYOUT DA PÁGINA

FÓRMULAS

DADOS

REVISÃO

EXIBIÇÃO

SUPLEMENTOS

Colar

Calibri

11

A

A

N

I

S

Quebrar Texto Automaticamente

Mesclar e Centralizar

Geral

%

000

Formatação Condicional

Formatar como Tabela

Estilos de Célula

Inserir

Excluir

Formatar

Classificação e Filtros

Área de Transf...

Fonte

Alinhamento

Número

Estilo

Células

Edição

A1

X

✓

fx

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

Modelo matemático predador-presa

Ano (t)

Presa - C(t)

Predador - L(t)

0

5.549,76

8.375

1

5.535,47

8.408,26

2

5.521,06

8.441,52

3

5.506,53

8.474,76

4

5.491,89

8.507,98

5

5.477,13

8.541,19

6

5.462,26

8.574,37

7

5.447,28

8.607,54

8

5.432,19

8.640,68

9

5.416,99

8.673,79

10

5.401,68

8.706,87

11

5.386,26

8.739,92

12

5.370,74

8.772,94

13

5.355,12

8.805,92

14

5.339,39

8.838,86

15

5.323,56

8.871,76

16

5.307,63

8.904,61

17

5.291,60

8.937,42

18

5.275,48

8.970,18

19

5.259,26

9.002,89

Resolução numérica (métodos de Euler e de Runge-Kutta)

C' (t)

L' (t)

C (t+0.5)

L (t+0.5)

C' (t+0.5)

L' (t+0.5)

-14,23

33,27

5.542,65

8.391,63

-14,29

33,26

-14,35

33,26

5.528,30

8.424,89

-14,41

33,25

-14,47

33,25

5.513,83

8.458,14

-14,53

33,24

-14,58

33,23

5.499,24

8.491,37

-14,64

33,22

-14,70

33,22

5.484,54

8.524,59

-14,76

33,21

-14,81

33,20

5.469,73

8.557,78

-14,87

33,19

-14,93

33,18

5.454,80

8.590,96

-14,98

33,16

-15,04

33,15

5.439,76

8.624,11

-15,09

33,14

-15,15

33,13

5.424,62

8.657,24

-15,20

33,11

-15,26

33,10

5.409,36

8.690,34

-15,31

33,08

-15,36

33,07

5.394,00

8.723,41

-15,42

33,05

-15,47

33,03

5.378,53

8.756,44

-15,52

33,02

-15,57

33,00

5.362,96

8.789,44

-15,63

32,98

-15,68

32,96

5.347,28

8.822,40

-15,73

32,94

-15,78

32,92

5.331,50

8.855,32

-15,83

32,90

-15,88

32,88

5.315,62

8.888,20

-15,93

32,85

-15,98

32,83

5.299,64

8.921,03

-16,03

32,81

-16,08

32,78

5.283,57

8.953,81

-16,13

32,76

-16,17

32,73

5.267,39

8.986,55

-16,22

32,71

-16,27

32,68

5.251,12

9.019,23

-16,32

32,65

Parâmetros do modelo

Parâmetro

Valor

L(t)

8.375,00

C(t)

5.549,76

k

4,4858E-03

a

8,4185E-07

r

2,5647E-03

b

1,1779E-06

População inicial de árvores

População inicial de CO2

Natalidade presas

Mortalidade presas

Natalidade predadores

Mortalidade predadores

$$\frac{dC}{dt} = k.C - a.C.L$$

$$\frac{dL}{dt} = -r.L + b.C.L$$

Fonte: Elaboração própria (2018).

Os cálculos matemáticos realizados na planilha mostrada na Figura 35 foram feitos da seguinte forma:

1. Inseriu-se, no tempo  $t = 0$ , as populações iniciais de  $\text{CO}_2$  e de vegetais projetados para o estudo (células C4 e C5, respectivamente);

2. As colunas F e G da planilha mostram a primeira implementação numérica dos dados. Na coluna F, multiplicou-se a constante  $k$  (célula N6) pela população inicial  $C$  e subtraiu-se o valor pelo produto dos valores das constantes  $a$  (célula N7),  $C$  e  $L$ , seguindo as orientações da equação matemática das presas ( $dC/dt = k.C - a.C.L$ ). Realizou-se o mesmo raciocínio de cálculo para a coluna G, acompanhando agora a formulação elaborada para os predadores ( $dL/dt = r.L + b.C.L$ ); as constantes  $r$  e  $b$  se encontram nas células N8 e N9, respectivamente. As colunas F e G receberam os nomes de  $C'(t)$  e  $L'(t)$  em alusão às derivadas  $dC/dt$  e  $dL/dt$ , respectivamente;

3. As colunas H e I tiveram como objetivo simular o aumento/redução das populações de presas e de predadores. Na coluna H, por exemplo, somou-se a população inicial de presas (célula C4) à célula F4 (derivada inicial das presas) multiplicada por um passo  $h$  no valor escolhido de 0,5, de acordo com a Equação (24) referente ao método das retas tangentes de Euler. Fez-se o mesmo para a coluna I, porém, para a população de predadores;

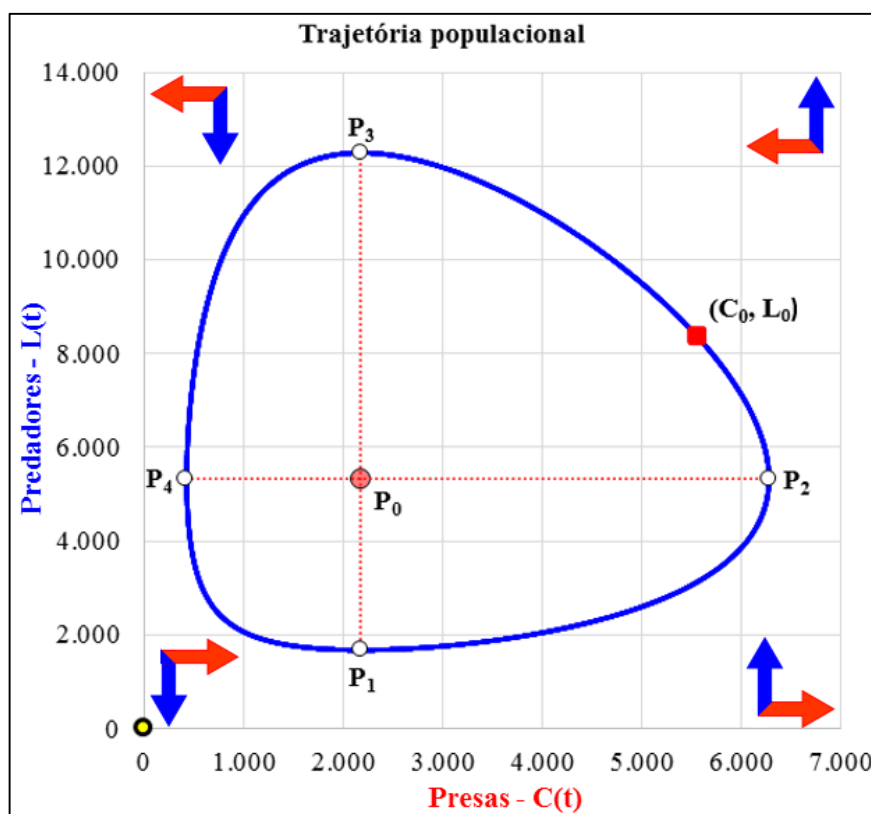
4. Para as colunas J e K, repetiu-se o passo 2 com uma diferença: não se utilizou o valor das populações iniciais (células C4 e C5), mas sim as calculadas nas células H4 e I4, completando-se o segundo passo  $h$ ;

5. Findando a sequência de cálculos matemáticos, os novos valores das populações de presas e de predadores para o ano seguinte ( $t = 1$ ) foi dado através da soma da população inicial de cada um deles (células C4 e D4) com os valores encontrados nas J4 e K4.

Os cálculos realizados nas células C5, D5 e F4 a K4 foram replicados para outras 15.000 linhas abaixo, simulando 15.000 anos. Os dados de interesse são apenas as interações entre as populações de presas e de predadores (colunas C e D, somente), não significando que todos esses valores devam ser necessariamente utilizados.

Embora apenas 2.057 dados fossem suficientes para completar o ciclo, optou-se por utilizar todas as 15.000 iterações na elaboração do gráfico referente às trajetórias populacionais (Figura 36). O objetivo do autor foi verificar se algum ponto (ou conjunto de pontos) destoava dos demais. Constatou-se que esta suposição não ocorreu. Já o segundo gráfico (dinâmica populacional) foi gerado com a utilização das 6.500 primeiras iterações (Figura 37).

Figura 36 – Solução do modelo predador-presa: espaço de fase (C, L)



Fonte: Elaboração própria (2018).

Constata-se na Figura 36 a presença de um ponto central e de quatro outros pontos que o circundam, marcando as mudanças de direção da curva, além dos pontos  $(0, 0)$  e  $(C_0, L_0)$ .

Conforme mencionado anteriormente, os pontos  $(0, 0)$  e  $P_0 (2.177,38, 5.329)$  são considerados pontos de equilíbrio para o  $CO_2$  e os vegetais, sendo  $P_0$  também denominado ponto de centro uma vez que a curva da trajetória populacional o circunda.

Em relação aos cinco pontos marcados na curva, cita-se primeiramente o ponto  $(C_0, L_0)$ , responsável pelo início da resolução numérica do modelo. Já os pontos  $P_1$  e  $P_3$  evidenciam a população mínima (1.679) e máxima (12.284) dos predadores, e  $P_2$  e  $P_4$  mostram as variações mínima (428,55 ppm) e máxima (6.271,15 ppm) da população de presas. Ressalta-se que a formação dos pares desses pontos envolve a participação da abscissa ou da ordenada do ponto  $P_0$  – ex.  $P_1 (2.177,38, 1.679)$ ,  $P_2 (6.271,15, 5.329)$ .

Em relação aos arcos mostrados na Figura 36, verifica-se que no trecho  $P_1 \rightarrow P_2$ , principalmente em  $P_1$ , que não existem árvores suficientes para manter o equilíbrio entre as populações e, assim, tanto a população de presas como a de predadores continua aumentando.

Já no fragmento  $P_2 \rightarrow P_3$ , alega-se que existem tantas árvores que o dióxido de carbono já não mais consegue evitá-las. Dada grande presença de predadores – e que ainda continua a aumentar, a população de presas começa a diminuir.

Em um terceiro momento, dada a escassez de presas, a população de predadores também começa a declinar (parcela  $P_3 \rightarrow P_4$ ). A partir do ponto  $P_4$  e esse acontecimento começa a beneficiar a população das presas, que passa a aumentar, gerando nova mudança no comportamento da curva (trecho  $P_4 \rightarrow P_1$ ), com a população de predadores ainda em declínio e a de presas volta a crescer.

Sumarizando essa etapa de análise, independentemente do declínio/crescimento dos protagonistas desse estudo, verifica-se certa defasagem em relação aos ciclos. Por exemplo, no fragmento  $P_4 \rightarrow P_1$ , enquanto a população de presas já está aumentando, a de predadores ainda está diminuindo; o mesmo acontece com os demais. Trata-se de um comportamento típico do sistema em função dos cálculos realizados; Bassanezi e Ferreira Júnior (1988) declaram que a defasagem entre as populações é de  $\frac{1}{4}$  e Boyce e DiPrima (2010, p. 415-416) corroboram ao afirmar que “[...] a oscilação da população predadora vem depois da oscilação de presas.”, e ambas as afirmações foram realmente constatadas no modelo mostrado na Figura 33.

Confirma-se também que a curva mostrada na Figura 36 (lembrando que foram utilizados 15.000 pares de dados e que os 2.057 dados iniciais seriam suficientes para ‘completar’ o ciclo) parece ser fechada. Ou seja, ao se completar o circuito, tem-se a impressão de sempre estar retornando ao mesmo ponto. Ademais, observa-se que os pontos permanecem ao redor do ponto crítico e estacionário  $P_0$ , evidenciando a formação de um sistema estável, com uma solução periódica e comprovando as afirmações de Zill, Wright (2015); Bassanezi, Ferreira Júnior (1988).

Para determinar a trajetória de fase – isto é, para verificar se o modelo está seguindo o sentido horário ou anti-horário, basta apenas substituir algum ponto (C, L) encontrado na curva na primeira equação (sentido de deslocamento das presas) ou na segunda equação diferencial (sentido de deslocamento dos predadores) do modelo de Lotka-Volterra (STEWART, 2016). A Tabela 18 mostra os resultados obtidos com a implementação desses quatro pontos na Equação (38).



Tabela 18 – Trajetória de fase

Ponto	Presas C(t)	Predadores L(t)	Resultado $d/dt$	Conclusão
Equação diferencial referente às presas (eixo horizontal): $dC/dt = k.C - a.C.L$				
P <sub>1</sub>	2.177,38	1.679	6,7	$dC/dt > 0$ . A população C está aumentando em P <sub>1</sub> , indicando movimentação para a direita (no caso, sentido anti-horário).
P <sub>3</sub>	2.177,38	12.284	-12,7	$dC/dt < 0$ . A população C está diminuindo em P <sub>3</sub> , indicando movimentação para a esquerda (no caso, sentido anti-horário).
Equação diferencial referente aos predadores (eixo vertical): $dL/dt = -r.l + b.C.L$				
P <sub>2</sub>	6.271,15	5.329	25,7	$dL/dt > 0$ . A população L está aumentando em P <sub>2</sub> , indicando movimentação para cima (no caso, sentido anti-horário).
P <sub>4</sub>	428,55	5.329	-11,0	$dL/dt < 0$ . A população L está diminuindo em P <sub>4</sub> , indicando movimentação para baixo (no caso, sentido anti-horário).

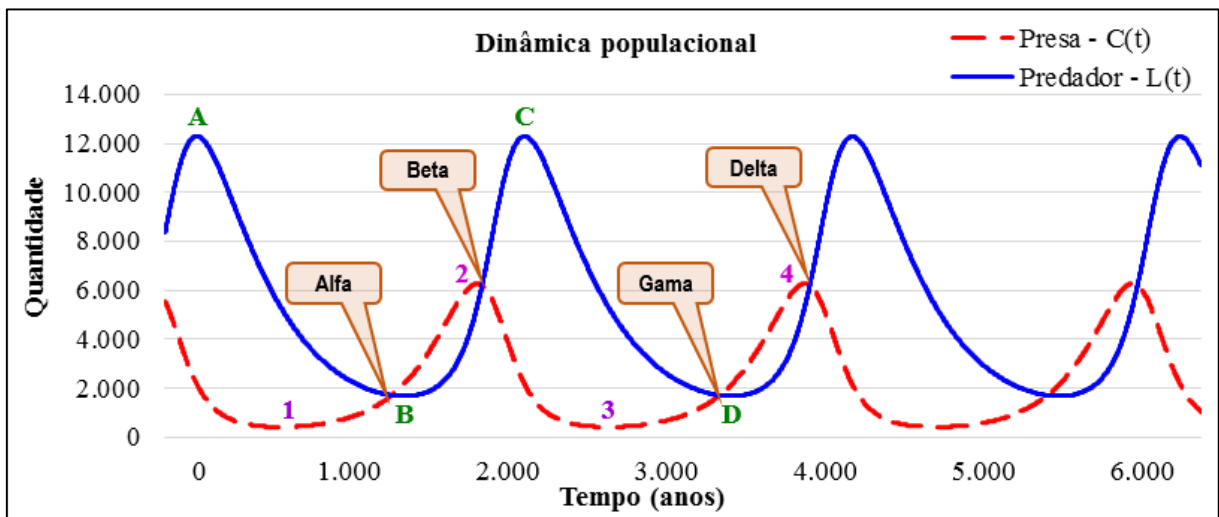
Fonte: Elaboração própria (2018).

Onde:  $k = 0,0044858128$ ;  $a = 0,0000008418$ ;  $r = 0,0025646647$ ;  $b = 0,0000011779$ .

Ou seja, verifica-se na Tabela 18 que todos os pontos apontam para uma trajetória no sentido anti-horário.

A análise qualitativa do modelo matemático de Lotka-Volterra geralmente se dá com a utilização de dois gráficos: o espaço de fase, mostrando o ciclo das presas e dos predadores – já avaliado, e a interação entre as espécies ao longo do tempo (FIG. 37).

Figura 37 – Variações nas populações de presas e de predadores em função do tempo



Fonte: Elaboração própria (2018).

O período de análise utilizado para a confecção da Figura 37 foi de 6.500 anos, gerando três ciclos (espaços de fase) completos. Verifica-se que as populações de predadores e de presas chegam a se igualar, cruzando-se em dois pontos dentro de um único ciclo. Após o

primeiro cruzamento entre as linhas, a população de presas passa a ser maior do que a de predadores, e depois do segundo cruzamento a situação se inverte. Ressalta-se que a população de predadores no instante  $t = 0$  é de 8.375 vegetais e a de presas de 5.549,76 ppm de CO<sub>2</sub>.

Uma análise mais apurada da Figura 37 pode ser feita por meio da justaposição desta com o histórico de dados que contempla os cálculos numéricos. A Tabela 19 mostra os principais valores a serem analisados em conjunto com a figura mencionada.

**Tabela 19 – Dados relevantes obtidos na construção do gráfico de evolução de predadores e presas**

Descrição	Ponto	Qtde Presa – C(t)	Qtde Predador – L(t)	Ano
Análise das quantias referentes aos predadores				
Máximo predador	A	2.182,19	12.284,24	198
	C	2.179,74	12.284,25	2.255
Mínimo predador	B	2.180,73	1.678,63	1.498
	D	2.175,32	1.678,63	3.554
Análise das quantias referentes às presas				
Máximo presa	2	6.271,15	5.323,498	1.957
	4	6.271,15	5.328,42	4.014
Mínimo presa	1	428,55	5.329,06	724
	3	428,55	5.326,95	2.781
Cruzamento dos gráficos de predadores e presas				
Mais CO <sub>2</sub> do que árvore	Alfa	1.717,40	1.715,73	1.420
	Gama	1.718,40	1.715,55	3.477
Mais árvore que CO <sub>2</sub>	Beta	6.199,54	6.206,19	1.989
	Delta	6.198,66	6.211,83	4.046

Fonte: Elaboração própria (2018).

Na Tabela 19, a diferença entre duas medidas máximas, duas mínimas ou duas interseções traz o valor de 2.057 anos. Ou seja, demoram 2.057 anos para que os predadores e presas completem um ciclo.

Fazendo-se a justaposição da Tabela 19 com a Figura 37, observa-se que a partir dos pontos marcados em ‘alfa’ e em ‘gama’, a quantidade de CO<sub>2</sub> passa a ser maior do que a dos vegetais, e a situação se inverte nos pontos ‘beta’ e ‘delta’. O período de tempo entre essas inversões é de 569 anos (representação de 27,7% em relação aos 2.057 anos do ciclo). Ainda, o intervalo entre os pontos ‘gama’ e ‘beta’ é de 1.488 anos (representação de 72,3% perante o ciclo da dinâmica populacional).

Essas últimas informações contradizem com o que foi afirmado por Bassanezi e Ferreira Júnior (1988). Segundo os autores, a defasagem é de  $\frac{1}{4}$  de ciclo entre as presas e os predadores. Teoricamente, isso significaria 514,25 anos mas no estudo de caso encontrou-se um atraso de 569 anos, um pouco maior do que o valor teórico. Dessa forma, constata-se que, se a população de CO<sub>2</sub> começar a aumentar, a população de vegetais iniciará o seu processo de crescimento cerca de 570 anos depois.

Constatou-se também que a solução numérica das equações diferenciais ordinárias se mostrou efetiva na resolução do modelo matemático. Como nem sempre é possível encontrar uma única solução, principalmente em equações não lineares, a solução numérica trouxe uma gama de outras soluções em função das quantidades de presas.

Ou seja, para uma determinada quantia anual  $C$  de monóxido de carbono capturado pelas três estações automáticas, deve-se plantar anualmente uma certa quantidade  $L$  de vegetais. Talvez esta quantia deva ser um pouco maior do que esse valor (em média,  $1,4631L$ ) para suprir o percentual médio de sobrevivência de 68,35% mudas de *Araucaria angustifolia* segundo Maran *et al.* (2015) (53,9% para as mudas pequenas e 82,8% para as mudas grandes). Assim, para que 100 árvores cheguem à idade adulta, deve-se plantar 147 mudas uma vez que apenas 68,35% delas sobreviverão.

Adotando-se esse percentual médio de sobrevivência das mudas e confrontando-o com as 8.375 árvores plantadas pela empresa siderúrgica Usiminas em 2017, constata-se que apenas 5.724 vegetais chegarão à idade adulta.

Por outro lado, procurou-se nos cálculos realizados numericamente as quantidades de vegetais calculados para uma população de 5.549,76 ppm de CO<sub>2</sub>. A Tabela 20 mostra os resultados encontrados.

**Tabela 20 – População média de predadores mantendo-se a população inicial de presas**

Ano	População		
	Presas C(t)	Predadores L(t)	Predadores L(t)*1,4631
0	<b>5.549,76</b>	8.375,00	12.253,46
1.839-1.840	5.551,57	3.137,65	4.590,70
2.057	5.547,03	8.381,33	12.262,72
3.896	5.548,41	3.127,58	4.575,96
4.113-4.114	5.551,40	8.371,13	12.247,80
5.953	5.550,38	3.129,97	4.579,46
6.170-6.170	5.548,68	8.377,51	12.257,13
Media	5.549,60	6.128,60	8.966,75

Fonte: Elaboração própria (2018)

Verifica-se, na Tabela 20, a presença de três situações que envolvem os valores de dióxido de carbono: uma média mínima de 4.582 mudas para gerar 3.132 árvores adultas, uma média geral de 8.967 mudas para gerar 6.129 árvores adultas, e uma média máxima de 12.255 mudas para gerar 8.376 árvores.

Em relação às árvores adultas, adotando-se o valor médio de 6.129 vegetais necessários ao consumo médio anual de 5.549,60 ppm de CO<sub>2</sub> e confrontando o primeiro valor

com as 8.375 árvores plantadas pela Usiminas em 2017 (destas, 5.724 vegetais chegarão à idade adulta), verifica-se que há um *déficit* de 405 árvores adultas (593 mudas, aproximadamente).

Apesar de ter encontrado uma quantia deficitária para o plantio de vegetais, afirma-se que não seria justo ‘punir’ somente essa empresa. Ressalta-se que o modelo utilizou somente dados referentes às árvores plantadas por ela e não por outras entidades/associações/prefeitura, e que as três estações de monitoramento da qualidade do ar fornecem informações de poluição atmosférica vindas de todos os envolvidos no sistema, seja da empresa, veículos, queimadas etc.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo teve como propósito verificar a interação entre a produção excessiva de dióxido de carbono pela ação humana (*e.g.* realização de desmatamentos e uso do carvão e petróleo para obtenção de energia) e o seu consumo por vegetais.

Conhecendo-se das consequências catastróficas que esse aumento traz para o meio ambiente, visualizou-se a possibilidade de desenvolver um modelo de equações matemáticas que evidenciasse a interação entre a produção de  $\text{CO}_2$  e seu consumo por vegetais como forma preventiva de não agressão ao meio ambiente. Dessa forma, para as mãos do homem, as árvores podem ser consideradas como o predador natural do  $\text{CO}_2$ , podendo mitigar essa situação, eliminando os excessos ou até mesmo da reduzindo a concentração desse poluente no ar atmosférico.

Utilizou-se, para tal, conhecimentos sobre o modelo matemático de equações diferenciais não lineares de Lotka-Volterra – ou modelo predador-presa, onde se considerou que os vegetais seriam os únicos predadores do  $\text{CO}_2$  e que o único substrato alimentar das árvores seria esse gás.

No referencial teórico, por se tratar de um assunto que envolve a realização da fotossíntese, estudou-se as possibilidades de se calcular a taxa fotoquímica por meio de conhecimentos advindos da termodinâmica e da capacidade dos vegetais processarem o  $\text{CO}_2$  em função da taxa de luminosidade, da concentração desse gás poluente e da temperatura ambiente.

Em relação aos cálculos termodinâmicos propriamente ditos, constatou-se que seria necessário a realização de um grande aprofundamento teórico para se analisar as interações moleculares de transformação do dióxido de carbono atmosférico em oxigênio ( $\text{O}_2$ ), envolvendo – talvez – o uso de equipamentos especiais de medição, e não se mostrando muito eficaz para o propósito do autor.

Porém, o assunto ali tratado possibilitou a obtenção de conhecimento sobre a energia livre de Gibbs, onde a utilização de tabelas de dados e a realização de cálculos matemáticos básicos (adição, subtração e multiplicação) constata a espontaneidade ou não da ocorrência de uma determinada reação de acordo com a segunda lei da termodinâmica (ex. combustão espontânea do magnésio na presença de oxigênio).

Esse assunto foi crucial para o desenvolvimento do trabalho, onde se procurou verificar se o  $\text{CO}_{\text{atm}}$  medido pelas estações automáticas poderia se transformar em  $\text{CO}_2$  de forma

espontânea, ou não. Obteve-se êxito nessa etapa, onde o valor de  $\Delta G$  encontrado para a transformação química  $2.CO + O_2 \rightarrow 2.CO_2$  foi de  $-514,38 \text{ kJ/mol}$ . A obtenção do valor negativo por si só já garante que a reação ocorra de maneira espontânea (CHANG; GOLDSBY, 2013). Esse cálculo, porém, não faz menções a respeito do tempo demandado para que ocorra a reação.

Em se tratando da parte teórica sobre a fotossíntese, verificou-se que a luz faz parte do processo de acordo com a equação química  $6CO_2 + 12H_2O \xrightarrow{\text{Luz}} C_6H_{12}O_6 + 6H_2O + 6O_2$  fornecida por Klink (2007) e Karp (2005). Embora o autor tivesse posse das medições horárias das quantidades de CO capturadas pelas estações de monitoramento da qualidade do ar, constatou-se que a obtenção da taxa de fotossíntese por meio do cálculo da quantidade de energia luminosa em função dos espectros de luz também demandaria grande conhecimento teórico e utilização de equipamentos de medição especializados (ex. fotômetro), e optou-se por procurar outros meios de cálculo.

Como esse capítulo também abordou tópicos a respeito da taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa, da concentração de  $CO_2$  e da temperatura, constatou-se que a taxa de fotossíntese poderia não afetada pela interação de nenhum desses três parâmetros. As conclusões para esse assunto foram as seguintes:

✓ Embora possam existir estudos, não se encontrou referencial teórico a respeito do cálculo da taxa de fotossíntese em função da intensidade luminosa para plantas nativas da região de Ipatinga/MG, tampouco de árvores pertencentes à mata Atlântica da qual o município faz parte. Ressalta-se que foram encontrados diversos estudos que fazem menções ao cálculo da taxa de fotossíntese saturada por luz e por  $CO_2$  ( $A_{pot}$ ). Cita-se, por exemplo, o trabalho realizado por Mendes (2012) onde a referida taxa é mensurada em  $\mu mol.m^{-2}.s^{-1}$  (medida de difusão do gás  $CO_2$  no espaço intercelular). Houve, assim, uma incompatibilidade de critérios de medição uma vez que as estações automáticas fazem leituras em volume ( $\mu g.m^{-3}$ ); tal incompatibilidade de medidas provocou a inviabilidade de se fazer essa análise;

✓ Para a taxa de fotossíntese em função da concentração de  $CO_2$ , o *site* de *internet* EducaBras (2018) mostrou uma reportagem mencionando que ensaios realizados em laboratórios encontraram uma quantia ótima de 0,2% de  $CO_2$  (2.000 *ppm* de  $CO_2$ ), uma vez que para valores acima dessa concentração o processo fotótico já não mais aumentava. Como a concentração mundial se encontra em torno de 410 *ppm*, descartou-se a hipótese redução da taxa fotoquímica em função da concentração de  $CO_2$ ;

✓ Para a taxa de fotossíntese em função da temperatura, Araújo e Deminiciis (2009, p. 467) afirmam que “As temperaturas consideradas moderadamente altas (35 a 42°C) podem causar danos diretos ao aparato fotossintético [...]”. Taiz *et al.* (2015) afirmam que os vegetais caracterizados como C<sub>3</sub> apresentam uma taxa ótima de fotossíntese em temperaturas entre 20 a 25°C ao passo que as espécies C<sub>4</sub> exibem uma taxa fotossintética mais otimizada em temperaturas que variam entre 25 e 35°C. Como a cidade de Ipatinga tem uma temperatura média de 24°C, também se descartou essa hipótese de redução de taxa.

Dadas essas limitações, optou-se por mudar o foco do trabalho para uma maneira mais simples de resolução, com o auxílio de compiladores eletrônicos. A ideia inicial seria a realização do tratamento de dados fornecidos pelas estações de monitoramento da qualidade do ar, e a comprovação de que os mesmos seguiriam a distribuição Normal de probabilidade, curva esta muito conhecida e difundida na área da estatística. De posse de uma média e de um desvio-padrão, os dados seriam compilados em um sistema computacional para gerar valores aleatórios para o gás estufa, e resolver o modelo de equações diferenciais para então fornecer a resposta da análise das diversas situações/cenários.

Dado esse novo cenário, iniciaram-se então as análises do comportamento dos dados de monóxido de carbono (agora considerados como CO<sub>2</sub>) capturados por quatro estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar, instaladas em quatro bairros distintos do município em análise. Constatou-se que a máquina automática nº 4 (bairro Veneza) teve o seu fornecimento de dados interrompido e as informações por ela fornecidas foram eliminadas do conjunto de dados. Realizou-se o tratamento de dados, e a aplicação da análise de variância e teste de Tukey indicaram que os valores semanais das três estações juntas, de janeiro de 2015 a dezembro de 2016, foram os que apresentaram menor interferência nos dados analisados. Concluiu-se, com um nível de significância de 5%, que as médias semanais das estações eram estatisticamente iguais.

Essa notícia proporcionou a elaboração de um modelo de previsão de dados de CO<sub>2</sub> para períodos futuros. Em uma análise preliminar, observou-se que os dados aparentavam estar igualmente dispersos (média e mediana bem próximas), demonstrando certa proximidade com a distribuição Normal. A elaboração do teste de Levene para verificar a homogeneidade das variâncias não foi rejeitada somente para os dados da estação nº 1, localizada no bairro Bom Retiro. As outras duas estações, instaladas nos bairros Cariru e Cidade Nobre, e a soma do dados das três máquinas, foram todas rejeitadas nesse teste.

Em uma segunda análise, de acordo com o próprio tutorial do SPSS, o teste não-paramétrico de Kruskal-Wallis para amostras independentes seria uma alternativa para a ANOVA de fator único caso a suposição de os dados seguirem a distribuição Normal (uma das premissas da análise de variância) fosse violada. O modelo de Kruskal-Wallis testa as hipóteses de que as populações possuem funções de distribuição iguais ( $H_0$ ) contra a de que pelo menos duas populações possuem diferentes funções de distribuição ( $H_1$ ). O teste mostrou a não rejeição da hipótese nula  $H_0$ .

Dessa forma, elaborou-se o teste estatístico Kolmogorov-Smirnov (K-S) para verificar se os dados estariam uniformemente distribuídos, ou não, lembrando que esse teste verifica a hipótese de os dados amostrais seguirem uma determinada distribuição teórica desejada. A ferramenta de análise estatística *Input Analyzer*<sup>®</sup> trouxe como resultado que a distribuição que melhor se aderiu ao conjunto de dados foi a Beta ( $135.000 + 170.000 * \text{BETA}(1,47, 1,72)$ ,  $p\text{-value} > 0,15$ ). Fazendo-se a aproximação pela distribuição Normal de probabilidade, encontrou-se o valor NORM(213.000, 41.100).

As estimativas supracitadas poderiam ser utilizadas na geração de dados futuros (100 ou 200 anos, ou mais) em modelos matemáticos como o predador-presa, sendo esses valores usados no cálculo da ‘taxa de natalidade’ de dióxido de carbono a ser predado pelos vegetais. A taxa considerada é constante e linear, e não exponencial (que aumenta indefinidamente) ou logarítmica, que aumenta até certo ponto e a partir daí permanece constante.

Porém, o uso de compiladores para a geração de inúmeros dados/cenários inicialmente pretendida nesse trabalho não se mostrou proativa. Essa análise demandaria o conhecimento de outros *softwares* e, dada a complexidade do trabalho, também demandaria grande tempo de aprendizagem e pesquisa.

Mais uma vez o trabalho foi modificado. Desta vez, optou-se pela abordagem mais simples de todas: solucionar manualmente o modelo predador-presa por meio da realização de métodos numéricos.

Para implementar o modelo matemático de Lotka-Volterra, assumiu-se que os valores de monóxido de carbono captados pelas estações automáticas de monitoramento da qualidade do ar se transformariam em dióxido de carbono de forma não somente espontânea, mas também instantânea uma vez que os vegetais necessitam de  $\text{CO}_2$  e não  $\text{CO}_{\text{atm}}$  para realizar a fotossíntese.



Feita essa premissa, optou-se por transformar a escala de leitura das máquinas automáticas de microgramas por metro cúbico ( $\mu g.m^{-3}$ ) para partes por milhão (*ppm*), seguindo os critérios do Sistema Internacional de Medição.

A implementação do modelo matemático se deu com o fornecimento das populações iniciais de presas e predadores e de 4 taxas principais. Os dados foram calculados da seguinte forma:

✓ População inicial ‘C’ de presas (5.549,76 *ppm*): média anual de 2015 e de 2016 uma vez que os dados referentes a esses anos foram os que melhor se aderiram ao estudo de ANOVA;

✓ População inicial ‘L’ de predadores (8.375 árvores): quantidade de árvores realmente plantadas pela empresa siderúrgica Usiminas no município de Ipatinga no ano de 2017. Uma forma de interpretação para os dois valores supracitados é que se deve plantar 8.375 árvores para cada 5.549,76 *ppm* capturados pelas estações automáticas;

✓ Taxa ‘k’ de crescimento das presas (0,0044858128): calculada com o auxílio da equação de crescimento populacional de Thomas Malthus. As populações inicial e final de CO<sub>2</sub> para um período de 60 anos foram adquiridas através do *site de internet The Keeling Curve*;

✓ Taxa ‘a’ de predação ( $8,48 \times 10^{-7}$ ): calculada com o auxílio da própria equação diferencial das presas, com uma taxa de 95% de efetividade de captura de CO<sub>2</sub> pelas árvores e expectativa de vida de 20 anos para os vegetais;

✓ Taxa ‘r’ de mortalidade dos predadores (0,0025646647): semelhante ao cálculo da ‘taxa de natalidade’ do CO<sub>2</sub>, tomando-se o cuidado em modificar o coeficiente ‘k’ para o valor negativo e adotando-se a premissa de que 95% dos vegetais alcançariam os 20 anos de idade;

✓ Taxa ‘b’ de crescimento dos predadores ( $11,779 \times 10^{-7}$ ): calculada com a equação diferencial dos predadores, com populações inicial de 100.000 árvores e final de 108.375 vegetais.

Substituindo as constantes, o modelo de equações diferenciais não linear se transformou em

$$\text{Presas: } \frac{dC}{dt} = 0,0044858128.C - 0,0000008418.C.L$$

$$\text{Predadores: } \frac{dL}{dt} = -0,0025646647.L + 0,0000011779.C.L$$

e a validação dessas taxas se deu com a equação geral  $k \ln L - a \cdot L + r \ln C - b \cdot C = H$ , onde a constante  $H$  teve seu valor calculado em 0,049 ( $H > 0$ ), estando a mesma de acordo com o que foi observado no referencial teórico.

Validado o modelo, calculou-se as soluções de equilíbrio do sistema: uma delas foi o ponto  $(0, 0)$  – no caso da inexistência de presas e de predadores, e outra foi o ponto de equilíbrio  $P_0 (2.177,38, 5.539)$ .

A solução numérica para o modelo matemático proporcionou a elaboração de dois gráficos para se fazer análises qualitativas. O primeiro deles foi o espaço de fase: constatou-se que as equações matemáticas calculadas para a interação entre as populações estudadas formou um sistema autônomo fechado com somente uma solução periódica em função da dificuldade em calcular outras soluções de forma manual. Resalta-se que existem diversos outros sistemas que fornecem diversas soluções periódicas. A defasagem de  $\frac{1}{4}$  de ciclo dos predadores em relação às presas – afirmada por Bassanezi e Ferreira Júnior (1988) – foi constatada nesse gráfico, assim como a sua movimentação em sentido anti-horário, bem comum em todos os modelos predador-presa.

O segundo gráfico qualitativo, também conhecido como gráfico de dinâmica populacional, foi elaborado levando-se em consideração as variações de tamanho das populações ao longo do tempo. Neste esboço, constatou-se que o modelo completa um ciclo a cada 2.057 anos, e que a defasagem dos predadores em relação às presas é de 27,7% (570 anos), um pouco maior que o atraso de  $\frac{1}{4}$  visto em teoria.

A solução numérica das equações diferenciais ordinárias se mostrou efetiva na resolução do modelo matemático. Como nem sempre é possível encontrar uma única solução, principalmente em equações não lineares, a solução numérica trouxe uma gama de outras soluções em função das quantidades de presas.

Assim para uma determinada quantia anual  $C$  de monóxido de carbono capturado pelas três estações automáticas, deve-se plantar anualmente uma certa quantidade  $L$  de vegetais. Verificou-se que esta quantia deve ser, em média, de  $1,4631L$  para suprir o percentual médio de sobrevivência de 68,35% mudas de *Araucaria angustifolia* de acordo com Maran *et al.* (2015). Desse forma, para que 100 árvores cheguem à idade adulta, deve-se plantar 147 mudas uma vez que apenas 68,35% delas sobreviverão.

Adotando-se esse percentual médio de sobrevivência das mudas e confrontando-o com as 8.375 árvores plantadas pela empresa siderúrgica Usiminas em 2017, constatou-se que apenas 5.724 vegetais chegariam à idade adulta. Por outro lado, ao se analisar os dados

numéricos, observou-se que seria necessário uma quantia média de 6.129 vegetais adultos para consumir o volume de 5.549,76 ppm de CO<sub>2</sub> (média das captações anuais entre 2015 e 2016).

Confrontando-se a expectativa de crescimento de vegetais plantados pela Usiminas com (5.724 árvores) o valor numérico encontrado (6.129 árvores), verificou-se a presença de um *déficit* de 405 árvores adultas (593 mudas, aproximadamente).

Apesar de ter encontrado uma quantia deficitária para o plantio de vegetais, não seria justo ‘punir’ somente aquela empresa siderúrgica. Ressalta-se que o modelo utilizou somente dados referentes às árvores plantadas por ela e não por outras entidades/associações/prefeitura, e que as três estações de monitoramento da qualidade do ar fornecem informações de poluição atmosférica vindas de todos os envolvidos, seja da empresa, veículos, queimadas etc.

Quanto ao objetivo geral do estudo, obteve-se êxito na utilização do modelo matemático de Lotka-Volterra, fazendo-se a modelagem da interação entre o aumento/declínio da concentração de dióxido de carbono atmosférico e seu consumo por árvores na cidade de Ipatinga/MG.

Para os objetivos específicos, constatou-se que todos eles foram atendidos. As quantidades das duas populações e o cálculo das quatro constantes principais foram feitas de acordo com a ocorrência de fatos reais (evitando-se suposições abstratas), o modelo matemático foi implementado com o auxílio do método de resolução numérica de Euler, e a interpretação das respostas mostrou que o plantio de árvores se encontra deficitário em 593 mudas em função da população inicial de predadores inserida no modelo.

Já para o problema de pesquisa, constatou-se que o modelo matemático que pode atuar no fornecimento de soluções para mitigar a produção de dióxido de carbono atmosférico pelo ser humano é o de Lotka-Volterra. Ele pode prover soluções por meio da sua implementação, considerando as árvores como sendo os predadores naturais do gás carbônico, inferindo valores iniciais das populações de predadores e presas e calculando-se as constantes necessárias à consecução do referido modelo.

Em relação ao trabalho como um todo, conseguiu-se elaborar um modelo matemático que explicasse numericamente a interação do CO<sub>2</sub> com os vegetais em nível local (com maior riqueza de detalhes) e não global, com estimativas de valores obtidos por meio de equações gerais.



## 6 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os cálculos matemáticos aqui realizados envolveram medições de  $\text{CO}_{\text{atm}}$  de somente três estações de monitoramento da qualidade do ar. Para trabalhos futuros, como os critérios para se encontrar valores aleatórios seguindo a distribuição Normal de probabilidade não foram utilizados, sugere-se que o trabalho seja refeito, agora com os dados históricos das quatro estações e com maiores informações a respeito do plantio de árvores por outras entidades e/ou pela prefeitura.

Propõe-se também que sejam utilizados *softwares* dedicados à resolução de equações diferenciais como o Maple, Wolfram, wxMaxima, Matlab, R, dentre outros, nos cálculos do modelo predador-presa destacado no estudo de caso, uma vez que estes podem realizar cálculos mais apurados e trazer gráficos com mais informações (ex. gráfico do espaço de fase com vários ciclos – um englobando o outro – e evidenciando as setas de direção de movimentação do circuito).

Esse trabalho pode ser refeito, acrescentando ao modelo matemático coletas de dados das quantias de dióxido de carbono capturadas em Ipatinga/MG e outras fontes que indiquem o plantio de vegetais por organizações não governamentais, prefeituras, outras empresas etc., além da Usiminas.

Aconselha-se, ainda, que esse estudo seja replicado a outros gases estufa como o metano ( $\text{CH}_4$ ), óxido nitroso ( $\text{N}_2\text{O}$ ) e os tão mencionados clorofluorcarbonos (CFCs) juntamente com os seus devidos predadores.

Há também a possibilidade de se inserir outros critérios/formulações no modelo original de Lotka-Volterra como, por exemplo, equações que envolvam índices de temperatura que influenciem na taxa de fotossíntese, índices pluviométricos etc.



## REFERÊNCIAS

AFONSO, Clito. **Termodinâmica para Engenharia**. Revisão técnica Felipe Direito. 1. ed. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. [Porto]: FEUP Edições, 2012.

ALISSON, Elton; IZIQUE, Claudia; LOPES, Noêmia. Mudanças no clima do Brasil até 2100. **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP**. 10 set. 2013. Disponível em: <<http://agencia.fapesp.br/mudancas-no-clima-do-brasil-ate-2100/17840/>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

AMABIS, José Mariano; MARTHO, Gilberto Rodrigues. **Biologia em Contexto**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

ANDRADE, Lilia de Lima. Poluição Atmosférica. **InfoEscola: navegando e aprendendo**. Mai. 2017. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/ecologia/poluicao-atmosferica/>>. Acesso em: 24 jul. 2018.

ARAÚJO, Saulo Alberto do Carmo; DEMINICIS, Bruno Borges. Fotoinibição da fotossíntese. **Revista Brasileira de Biociências**. Porto Alegre, v. 7, n. 4, p. 463-472, out./dez. 2009. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/seerbio/ojs/index.php/rbb/article/view/1009>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

ASSOCIAÇÃO Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6023**: informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002a.

ASSOCIAÇÃO Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6024**: numeração progressiva das seções de um documento escrito: apresentação. Rio de Janeiro, 2012.

ATKINS, Peter; JONES, Loretta. **Princípios de Química**: questionando a vida moderna e o meio ambiente. Tradução técnica Ricardo Bicca Alencastro. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

\_\_\_\_\_; DE PAULA, Julio. **Físico-química**: volume 1. Tradução e revisão técnica Edilson Clemente da Silva; Márcio José Estillac de Mello Cardoso; Oswaldo Esteves Barcia. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 2 v.

BARNOLA, J. M. *et al.* Vostok ice core provides 160,000-year record of atmospheric CO<sub>2</sub>. **Nature**. v. 329, october 1987, p. 408. Disponível em: <<http://www.nature.com/nature/journal/v329/n6138/pdf/329408a0.pdf>>. Acesso em: 16 mar. 2017.

BARRÈRE, Martine. **Terra, Patrimônio Comum**: a ciência a serviço do meio ambiente e do desenvolvimento. Tradução Estela dos Santos Abreu. São Paulo: Nobel, 1992.

BARRETO, Márcio. **Física**: Newton para o ensino médio. São Paulo: Papirus, 2002.

BARROSO, Juliane Matsubara (Org.). **Química**: revisão: ensino médio. Coleção Ser Protagonista. Volume único. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2014.

BARROW, Gordon M. **Físico-química**. Tradução Raimundo Nonato Damasceno e Irvin Viluce León. Rio de Janeiro: Reverté, 1982.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Equações Diferenciais Ordinárias**: um curso introdutório. Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC – UFABC, Santo André, 19 fev. 2016. Apostila. Disponível em: <<http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/iedo/notasdeaulas/equacoes-diferenciais-ordinarias-rodney.pdf>>. Acesso em: 5 abr. 2018.

\_\_\_\_\_; FERREIRA JÚNIOR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.

BELTRÃO, Napoleão Esberard de; OLIVEIRA, Maria Isaura Pereira de. **Diferenciação na Produção de Energia Entre Oleaginosas (Metabolismo C3) e Energéticas (C4)**. 1. ed. Campina Grande: Embrapa, 2008.

BIOLOGIA vegetal. **The Amazing Biology**. 05 abr. 2013. Disponível em: <<https://theamazingbiology.weebly.com/provas/archives/04-2013>>. Acesso em: 22 mai. 2018.

BJÖRKMAN, O. Responses to Different Quantum Flux Densities. (1981) In: Lange O. L., Nobel P.S., Osmond C.B., Ziegler H. (eds) **Physiological Plant Ecology I**, v. 12. A. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. p. 57-107. Disponível em: <[https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-68090-8\\_4](https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-68090-8_4)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

BONINI, Altair *et alii*. **História Ensino Médio**. 2. ed. Curitiba: SEED-PR, 2006.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BROWN, Theodore L.; LEMAY, H. Eugene; BURSTEN, Bruce E. **Química, a Ciência Central**. Tradução Robson Matos. Revisão técnica André Fernando de Oliceira e Astréa F. de Souza Silva. 9. ed, 5. reimpr. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

BUMBEERS, Fernando. Como será o clima da Terra em 2100? **Revista Galileu**. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2015/06/como-sera-o-clima-da-terra-em-2100.html>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

CAIN, Michael L.; BOWMAN, Willian D.; HACKER, Sally D. **Ecologia**. Tradução Armando Molina Divan Junior *et al.* 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2018.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino; SILVA, Roberto da. **Metodologia Científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

CHANG, Raymond; GOLDSBY, Kenneth A. **Química**. 11. ed. Rio Grande do Sul: McGraw-Hill, 2013.

\_\_\_\_\_. **Físico-química**: para as ciências químicas e biológicas. Tradução Elizabeth P. G. Arêas; Fernando R. Ornellas. 3. ed. Porto Alegre: AMGH Editora, 2010.



CHAVES, Nelson. **Nelson Chaves – O Homem Além do Tempo**: a palavra de um cientista que amava sua terra e sua gente. Universidade Federal de Pernambuco. Centro de Ciências da Saúde, Departamento de Nutrição; prefácio Bertoldo Cruse Grande de Arruda; posfácio Emília Aureliano de Alencar Monteiro. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2007.

CINCO meses de monitoramento da qualidade do ar em Ipatinga/MG. **Associação Brasileira do Ministério Público do Meio Ambiente – ABRAMPA**. 28 nov. 2010. Disponível em: <<https://abrampa.jusbrasil.com.br/noticias/2478523/cinco-meses-de-monitoramento-da-qualidade-do-ar-em-ipatinga-mg>>. Acesso em: 06 jan. 2019.

COLLARES, Carlos Fernando. Testes post-hoc para análise de variância (ANOVA): um tutorial básico. **Blog do C.F.C.** 03 fev. 2011. Disponível em: <<http://carloscollares.blogspot.com/2011/02/testes-post-hoc-para-analise-de.html>>. Acesso em: 30 jul. 2018.

CONTI, Fátima. Teste de hipóteses e significância. **Instituto de Ciências Biológicas**, Universidade Federal do Pará – UFPa, Belém, 3 out. 2009. Disponível em: <<http://www.cultura.ufpa.br/dicas/biome/biopdf/biotestes.pdf>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

COR e frequência. **Só Física**. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2018. Disponível em: <[http://www.sofisica.com.br/conteudos/Otica/Refracaodaluz/cor\\_e\\_frequencia.php](http://www.sofisica.com.br/conteudos/Otica/Refracaodaluz/cor_e_frequencia.php)>. Acesso em: 11 jul. 2018.

CURTOSE. **Portal Action**. 2018-a. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/estatistica-basica/26-curtose>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

DAVIS, Mackenzie L.; MASTEN, Susan J. **Princípios de Engenharia Ambiental**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2016.

ESTRATÉGIA de recuperação/plantio em área total/plantio por mudas. **Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa**. Versão 3.59.3, [201-?]. Disponível em: <<https://www.embrapa.br/codigo-florestal/plantio-por-mudas>>. Acesso em: 01 jan. 2019.

ERROS cometidos nos testes de hipóteses. **Portal Action**. 2018-b. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/inferencia/511-erros-cometidos-nos-testes-de-hipoteses>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

ERROS tipo I e tipo II e suas aplicações. **Reliability HotWire**. Reliasoft Corporation, 1992-2014. Edição 57, dez. 2009. Disponível em: <<http://www.reliasoft.com.br/hotwire/edicao57/conceito57.htm>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

FARIA, Bruna. Comparações múltiplas – teste de Tukey. **ABG Consultoria**. 25 set. 2017. Disponível em: <<http://www.abgconsultoria.com.br/blog/como-interpretar-uma-analise-de-variancia-anova/>> Acesso em: 30 jul. 2018.

\_\_\_\_\_. Como interpretar uma análise de variância (ANOVA)? **ABG Consultoria**. 10 jul. 2017. Disponível em: <<http://www.abgconsultoria.com.br/blog/como-interpretar-uma-analise-de-variancia-anova/>> Acesso em: 30 jul. 2018.

FATORES limitantes da fotossíntese. **EducaBras**. Disponível em: <[https://www.educabras.com/ensino\\_medio/materia/biologia/reino\\_vegetal/aulas/fatores\\_limitantes\\_da\\_fotossintese](https://www.educabras.com/ensino_medio/materia/biologia/reino_vegetal/aulas/fatores_limitantes_da_fotossintese)>. Acesso em: 16 jul. 2018.

FIELD, Andy. **Descobrimdo a Estatística com o SPSS**. Tradução Lorí Viali. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

FONSECA, João José Saraiva. **Metodologia da Pesquisa Científica**. Fortaleza: Universidade Estadual do Ceará, 2002. Apostila.

FONSECA, Martha Reis Marques da. **Química (Ensino Médio) I**. 1. ed. v. 1. São Paulo: Atica, 2013.

FREUND, John E. **Estatística Aplicada: economia, administração e contabilidade**. Tradução Claus Ivo Doering. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

FREITAS, Carlos Machado de. **Um Equilíbrio Delicado: crise ambiental e a saúde no planeta**. Rio de Janeiro: Garamond, 2011.

GARCÍA, Francisco Sabater. La luz como factor ambiental para las plantas. In: UNIVERSIDAD DE MURCIA. 31, 1977, p. 1-24, [Murcia]. **Anais...** Disponível em: <<http://revistas.um.es/analesumciencias/article/viewFile/102821/97751>>. Acesso em: 16 jul. 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOKLANY, Indur M. Potential consequences of increasing atmospheric CO<sub>2</sub> concentration compared to other environmental problems. **Technology**, v. 75, p. 189-213, abr. 2000. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/f5bb/eb844e5eae378047aa825298fc98a4ad4d5a.pdf>>. Acesso em: 10 jul. 2018.

GRINGS, José Fernando. **O que é uma Equação Diferencial Linear**. 17 abr. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=xhffg1ACtwg>>. Acesso em: 18 jul. 2018.

**Houaiss Eletrônico**. Versão monousuário 3.0 [Programa de computador]. Copyright © 2001..2009 Instituto Antônio Houaiss. [Rio de Janeiro]: Objetiva, 2009.

HEWITT, Paul G. **Física Conceitual**. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

HOLZNER, Steven. **Física II para Leigos**. Tradução Lara Regina. Revisão técnica Luís da Mota. Rio de Janeiro: Alta Books, 2012.

HOOD, Maria (ed.); BROADGATE, Wendy (ed.); URBAN, Ed (ed.); GAFFNEY, Owen (ed.). **Acidificação Oceânica: sumário para formuladores de políticas públicas segundo simpósio sobre oceanos em um mundo com elevado CO<sub>2</sub>**. Tradução e edição em português: Escritório Regional do IGBP no Brasil. Revisão técnica: Rosane Gonçalves Ito. Disponível em: <[http://www3.inpe.br/igbp/arquivos/acidificacao\\_oceanica\\_revisao\\_Final\\_Jan\\_2011\\_lo\\_res.pdf](http://www3.inpe.br/igbp/arquivos/acidificacao_oceanica_revisao_Final_Jan_2011_lo_res.pdf)>. Acesso em: 26 dez. 2018.

HOPKINS, Willian G.; HÜNER, Norman P. A. **Introduction to Plant Physiology**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2009.

JEAN-CLAUDE, Keller; PIERRE-ANDRÉ, Haldi. **The Consequences of an Increase of the Atmospheric CO<sub>2</sub> Concentration**, a global survey of our current state of knowledge. In: WORLD ENGINEER'S CONVENTION. Geneva, 2011.

JOOS, Fortunat. Climate and carbon cycle representation in Integrated Assessment Models. 23 dez. 2009. Disponível em: <<http://hassler-j.iies.su.se/courses/climate/joos09.pdf>>. Acesso em: 05 fev. 2017.

KARP, Gerald. **Biologia Celular e Molecular**: conceitos e experimentos. Tradução Maria Dalva Cesario *et al.* 3. ed. Barueri: Manole, 2005.

KIRSCHBAUM, M. U. F. **The Sensitivity of C<sub>3</sub> photosynthesis to increasing CO<sub>2</sub> concentration**: a theoretical analysis of its dependence on temperature and background CO<sub>2</sub> concentration. In: PLANT, CELL AND ENVIRONMENT (1994), v. 17, 747-754.

KLINK, Carlos. **Quanto Mais Quente, Melhor?** Desafiando a sociedade civil a entender as mudanças climáticas. São Paulo: Peirópolis; Brasília, DF: IEB – Instituto Internacional de Educação do Brasil, 2007.

KNIGHT, Randall D. **Física**: uma abordagem estratégica. Tradução Iuri Duquia Abreu. Revisão técnica Trieste Freire Ricci. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. 4 v. em 2.

KOZAKEVICH, Daniel Norberto. Seção 8: equações diferenciais não lineares. Departamento de Matemática, Centro de Física-Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, 10 jun. 2003. Apostila. Disponível em: <[http://mtm.ufsc.br/~daniel/sem1\\_05/edo/farlow/sec8.pdf](http://mtm.ufsc.br/~daniel/sem1_05/edo/farlow/sec8.pdf)>. Acesso em: 18 jul. 2018.

LEVINE, Gustav. **A Guide to SPSS for Analysis of Variance**. Hillsdale: Lawrence Earlbaum Associates, 1991.

MANN, Prem S. **Introdução à Estatística**. Tradução Eduardo Benedito Curtolo; Teresa Cristina Padilha de Souza. [Reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MARAN, Jéssica Caroline *et al.* Análise de sobrevivência em plantios com enriquecimento de *Araucaria angustifolia* usando mudas de grande e pequeno porte. In: CONGRESSO FLORESTAL PARANAENSE, 5., 2015, Curitiba. Novas tecnologias florestais: **Anais..** [Curitiba]: Associação Paranaense de Empresas de Base Florestal, 2015. Disponível em: <<http://www.bdpa.cnptia.embrapa.br/consulta/busca?b=pc&id=1027184&biblioteca=vazio&busca=1027184&qFacets=1027184&sort=&paginacao=t&paginaAtual=1>>. Acesso em: 01 jan. 2019.

MARCEL, Guellity. **Plantas C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> e CAM**: fixação de carbono. 15 fev. 2014. Disponível em: <<https://www.euquerobiologia.com.br/2014/02/plantas-c3-c4-e-cam-fixacao-de-carbono.html>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

MARENCO, Ricardo A.; Lopes, Nei F. **Fisiologia Vegetal**: fotossíntese, respiração, relações hídricas e nutrição mineral. Viçosa: Editora UFV, 2009.

MARTINEZ, Carlos Alberto *et al.* Respostas das plantas ao incremento atmosférico de dióxido de carbono e da temperatura. **Revista de Geografia Física**. [Recife], v. 8, p. 635-650, 10 nov.

2015. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/287804710>>. Acesso em: 14 jul. 2018.

MENDES, Keila Rêgo. **Influência dos ritmos circadianos na condutância estomática e fotossíntese em espécies florestais sob condições de sub-bosque na Amazônia Central**. 2012. 121 f. Tese (Doutorado em Ciências Biológicas–Instituto Nacional de Pesquisas da Amazônia – INPA, Manaus, 2012).

MENEGUELLI, Gisella. A Terra vai ferver: a previsão é +4° até 2100. **GreenME**. Disponível em: <<https://www.greenme.com.br/informar-se/ambiente/4441-a-terra-vai-ferver>>. Acesso em: 25 jul. 2018.

MERCHANT, Brian. A Terra Terá Oceanos Completamente Diferentes em 2100. **VICE Brasil**. Disponível em: <[https://motherboard.vice.com/pt\\_br/article/pg37dn/os-oceanos-em-2100-serao-bem-diferentes](https://motherboard.vice.com/pt_br/article/pg37dn/os-oceanos-em-2100-serao-bem-diferentes)>. Acesso em: 25 jul. 2018.

**Michaelis Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Versão 2.0. [São Paulo]: Melhoramentos, 2018. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br>>. Acesso em: 03 jul. 2018.

MONROE, Rob. The history of the Keeling Curve. **The Keeling Curve**. 3 abr. 2013. Disponível em: <<https://scripps.ucsd.edu/programs/keelingcurve/2013/04/03/the-history-of-the-keeling-curve/>>. Acesso em: 14 jul. 2017.

MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, Geroje C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. Tradução e revisão técnica Verônica Calado. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

MOORE, John T. **Química para Leigos**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2008.

MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton O. **Estatística Básica**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

MORRISON, J. I. L.; LAWLOR, D. W. Interactions between increasing CO<sub>2</sub> concentration and temperature on plant growth. **Plant, Cell & Environment**, v. 22, p. 659-682, 2002.

NASCIMENTO, Dinalva Melo do. **Metodologia do Trabalho Científico: teoria e prática**. [Prefácio à primeira edição Ruy Povoas]. 2. ed. Belo Horizonte: Fórum, 2008.

NEFTEL, A. *et al.* Evidence from polar ice cores for the increase in atmospheric CO<sub>2</sub> in the past two centuries. **Nature International Journal of Science**. v. 315, 45-47, 02 maio 1985.

NELSON, David L.; COX, Michael M. **Princípios de Bioquímica de Lehninger**. Tradução e revisão técnica Carla Dalmaz; Carlos Termignoni; Maria Luiza Saraiva Pereira. 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 2019.

NETTO, Augusto Pimazzoni. Como interpretar a significância estatística. **Sociedade Brasileira de Diabetes – SBD**. 20 mar. 2007. Disponível em: <<https://www.diabetes.org.br/publico/colunistas/20-dr-augusto-pimazzoni-netto/125-como-interpretar-a-significancia-estatistica>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

OITO tipos de calendários usados pelo mundo. **Revista Galileu**. 12/01/2016. Disponível em <<https://revistagalileu.globo.com/Cultura/noticia/2016/01/oito-tipos-de-calendarios-usados-pelo-mundo.html>>. Acesso em 06 mai. 2018.

OLIVEIRA, Altamir Fernandes de [organizador]. **Elaboração, Gestão e Avaliação de Projetos de Pesquisa**: releituras de grandes obras com exemplos práticos de pós-graduandos em Tecnologia, Ambiente e Sociedade. São Paulo: Ixtlan, 2017.

PELLEGRINI, Marco Cesar; DIAS, Adriana Machado; GRINBERG, Keila. **Novo Olhar História**. v-1. São Paulo: FTD, 2010. 3 v.

PINTO-COELHO, Ricardo Motta. **Fundamentos em Ecologia**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

PIRES, Denise Elvira. Divisão Social do Trabalho. **Dicionário da educação profissional em saúde**, Fundação Oswaldo Cruz, Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <<http://www.sites.epsjv.fiocruz.br/dicionario/verbetes/divsoctra.html>>. Acesso em: 27 jul. 2018.

PORTAL da Educação. Disponível em: <<https://www.portaleducacao.com.br>>. Acesso em: 09 jul. 2018.

PRIMEIRA Lei da Termodinâmica. **Portal da Educação**. 14 set. 2015. Disponível em: <<https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/educacao/primeira-lei-da-termodinamica/67284#>>. Acesso em: 08 jul. 2018.

PRIMEIRA Lei da Termodinâmica e Energia Interna. **Khan Academy**, 2018. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/science/physics/thermodynamics/laws-of-thermodynamics/v/first-law-of-thermodynamics-internal-energy>>. Acesso em: 07 jul. 2018.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

QUAIS são os erros do tipo I e II? **Suporte ao Minitab 18**. 2017. Disponível em: <<https://support.minitab.com/pt-br/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/type-i-and-type-ii-error/>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

RANGEL, Djalma Araújo. **Proposta de um procedimento para identificar, avaliar e priorizar riscos em cadeias de suprimentos**. Dissertação (Mestrado em engenharia de Produção). Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGEPP, Centro de Tecnologia, Campus I, Universidade Federal da Paraíba – UFPB, João Pessoa, 2012.

REIS, Edna Afonso; REIS, Ilka Afonso. Análise descritiva de dados. **Relatório Técnico do Departamento de Estatística da UFMG**, 1 ed., jun.2002. Disponível em: <<http://www.est.ufmg.br/portal/arquivos/rts/rte0202.pdf>>. Acesso em: 27 jul 2018.

ROSA, Mayra. Cada árvore da Mata Atlântica chega a retirar 163 kg de CO2 da atmosfera. **CicloVivo**, 2013. Disponível em: <<https://ciclovivo.com.br/planeta/meio-ambiente/cada-arvore-da-mata-atlantica-chega-a-retirar-163-kg-de-co2-da-atmosfera/>>. Acesso em: 04 dez. 2018.

SACHS, Jeffrey D. **A Era do Desenvolvimento Sustentável**. Tradução Jaime Araújo. Revisão técnica Pedro Elói Duarte. 1. Ed. Lisboa: Actual, 2017

SADAVA, David *et al.* **Vida: a ciência da biologia**. Tradução Carla Denise Bonan *et al.* 8. ed. v. 3. Porto Alegre: Artemed, 2009. 3 v.

SALIBA, William. Usiminas Mantém ‘Fábrica de Árvores’ no Vale do Aço. **Carta de Notícias**, 2018. Disponível em: <<https://cartadenoticias.com.br/2018/06/usiminas-mantem-fabrica-de-arvores-no-vale-do-aco/>>. Acesso em: 03 dez. 2018.

SAMPIERI, Roberto Hernández; COLLADO, Carlos Fernández; LUCIO, Pilar Baptista. **Metodologia de Pesquisa**. Tradução Fátima Conceição Murad; Melissa Kassner; Sheila Clara Dystyler Ladeira. Revisão técnica Ana Gracinda Queluz Garcia; Paulo Heraldo Costa do Valle. 3. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

SADAVA, David *et al.* **Vida: a ciência da biologia**. Tradução Carla Denise Bonan... [et al]. 8. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

SERVIÇO Público Federal. **Conselho Regional de Química 19ª Região – CRQ XIX**. Concurso público, Paraíba, 19 mar. 2017. Disponível em: <[https://www.qconcursos.com/arquivos/prova/arquivo\\_prova/53955/educa-2017-crq-19-regiao-pb-agente-fiscal-prova.pdf](https://www.qconcursos.com/arquivos/prova/arquivo_prova/53955/educa-2017-crq-19-regiao-pb-agente-fiscal-prova.pdf)>. Acesso em: 24 jul. 2017.

SIGNIFICANCE in Statistics & Surveys. Disponível em: <<https://www.surveysystem.com/signif.htm>>. **Creative Research Systems**, 2016. Acesso em: 29 jul. 2018.

SIGNIFICÂNCIA estatística e prática. **Suporte ao Minitab 18**. 2017. Disponível em: <<https://support.minitab.com/pt-br/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/statistical-and-practical-significance/>>. Acesso em: 29 jul. 2018.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muzkat. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. 4. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.

SISTEMA Internacional de Unidades – SI. **Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO)**. 1ª edição brasileira da 8ª edição do BIPM, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <[http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si\\_versao\\_final.pdf](http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf)>. Acesso em: 29 dez. 2018.

SOUZA, Dalva Inês de. **Manual de Orientações para Projetos de Pesquisa**. Novo Hamburgo: FESLSVC, 2013.

SPSS Kruskal-Wallis Test – simple tutorial with exemple. **SPSS Tutorials**. Disponível em: <<https://www.spss-tutorials.com/spss-kruskal-wallis-test-simple-tutorial-with-example/>>. Acesso em: 22 dez. 2018.

STEVENSON, William J. **Estatística Aplicada à Administração**. São Paulo: Harbra, 2001.

STEWART, James. **Cálculo**: volume 2. Tradução Helena Ávila de Castro. Revisão técnica Ricardo Miranda Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

TAIZ, Lincoln *et al.* **Fisiologia e Desenvolvimento Vegetal**. Revisão técnica Paulo Luiz Oliveira. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2017.

TESTE de Tukey. **Portal Action**. 2018-c. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/manual-anova/teste-de-tukey>>. Acesso em: 30 jul. 2018.

TESTE de Tukey (TSD - Tukey Significant Difference). **Portal Action**. 2018-d. Disponível em: <<http://www.portalaction.com.br/anova/31-teste-de-tukey>>. Acesso em: 30 jul. 2018

**THE Keeling Curve**. Disponível em: <<https://scripps.ucsd.edu/programs/keelingcurve/>>. Acesso em 14 jul. 2017.

TREVISAN, Luis Augusto; LUZ, Fabiano Meira de Moura. Prey-predator modeling of CO<sub>2</sub> atmospheric concentration. **Cornell University**. [2008?]. Disponível em: <<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0805/0805.0819.pdf>>. Acesso em: 02 fev. 2017.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à Estatística**. Tradução e revisão técnica Ana Maria Lima de Farias; Vera Regina Lima de Farias e Flores. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

\_\_\_\_\_. **Introdução à Estatística**: atualização da tecnologia. Tradução e revisão técnica Ana Maria Lima de Farias; Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

VALLADARES NETO, José *et al.* Boxplot: um recurso gráfico para a análise e interpretação de dados quantitativos. **Revista Odontológica do Brasil Central**, Goiás, v. 26, n. 76, p. 1-6, 2017. Disponível em: <<http://www.robrac.org.br/seer/index.php/ROBRAC/article/view/1132>>. Acesso em: 27 jul. 2018.

VIDOTTI, Isaura Maria Gonçalves *et al.* **Interações e Transformações III**: química – ensino médio – livro do aluno / GEPEC. 2. ed. 4. reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

VIEIRA, Elvis Lima *et al.* **Manual de Fisiologia Vegetal**. São Luís: EDUFMA, 2010.

VILATE, Jayme E. Sistemas dinâmicos. In: \_\_\_\_\_, **Documentação para Engenharia e Física**. Universidade do Porto, cap. 7, 11 abr. 2018. Disponível em: <[https://def.fe.up.pt/dinamica/sistemas\\_dinamicos.html#sec-7.3.1](https://def.fe.up.pt/dinamica/sistemas_dinamicos.html#sec-7.3.1)>. Acesso em: 19 jul. 2018.

IPATINGA. WIKIPEDIA. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ipatinga>>. Acesso em: 14 dez. 2018.

LISTA de bairros de Ipatinga. **Wikipedia**. <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista\\_de\\_bairros\\_de\\_Ipatinga](https://pt.wikipedia.org/wiki/Lista_de_bairros_de_Ipatinga)>. Acesso em: 14 dez. 2018.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A; [colaborador A. Lewis Ford]. **Termodinâmica e Ondas**. Tradução Cláudia Santana Martins. Revisão técnica Adir Moysés Luiz. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.

ZILL, Dennis G.; WRIGHT, Warren S. **Equaciones Diferenciales com Problemas com Valores em la Frontera**. Traducción Ana Elizabeth García Hernández. Revisión técnica Edmundo Palacios Pastrana. 8. ed. Santa Fe: Cengage Learning, 2015.

\_\_\_\_\_; CULLEN, Michael R. **Matemática Avançada para a Engenharia 1:** equações diferenciais elementares e transformada de Laplace. Tradução Fernando Henrique Silveira. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

\_\_\_\_\_. **Equações Diferenciais**, volume 1. Tradução Antonio Zumpano. Revisão técnica Antonio Pertence Jr. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

\_\_\_\_\_. **Equações Diferenciais**, volume 2. Tradução Alfredo Alves de Faria. Revisão técnica Antonio Pertence Júnior. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.



## Apêndice A – Equações diferenciais ordinárias (uma breve imersão)

Para Zill e Cullen (2009), as equações diferenciais lineares são consideradas uma família ‘amigável’ de equações diferenciais. Assim, há sempre uma boa possibilidade de se encontrar algum tipo de solução para uma equação linear de primeira ordem ou de ordem superior.

A forma de uma equação diferencial ordinária linear geral de ordem  $n$  está descrita na equação 1, a seguir (ZILL; CULLEN, 2015).

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1)$$

Zill e Cullen (2009) afirmam que, nesta equação, para o caso  $n = 1$ , a equação diferencial de primeira ordem fica sendo

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2)$$

e é chamada de equação linear na variável dependente  $y$ . Ainda:

- ✓ Se  $g(x) = 0$ , a equação linear (2) passa a ser denominada de homogênea;
- ✓ Caso contrário, a equação é dita não-homogênea.

O impacto das nomenclaturas supracitadas se dá no método de resolução da equação diferencial. Ademais, conforme os autores Zill e Cullen (2009), dividindo-se ambos os lados da equação (2) pelo coeficiente  $a_1(x)$ , obtém-se uma forma mais útil (também conhecida como forma padrão) de uma equação linear, conforme mostrado na equação 3.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (3)$$

O objetivo da equação 3, segundo Zill e Cullen (2009), é encontrar uma solução em um dado intervalo  $I$  para o qual ambas as funções  $P(x)$  e  $f(x)$  são contínuas.

Finalizando este breve introdutório, Boyce e DiPrima (2015) citam alguns métodos de resolução de equações diferenciais (E.D.s) de primeira ordem e de ordem superior. O Quadro 7 mostra as principais metodologias de solução.

**Quadro 6 – Tipos de equações diferenciais ordinárias lineares**

ED LINEAR	MÉTODO DE SOLUÇÃO
1ª ordem	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Variáveis separáveis;</li> <li>✓ Equações homogêneas;</li> <li>✓ Equações exatas;</li> <li>✓ Método do fator integrante;</li> <li>✓ Equação diferencial de Bernoulli, Ricatti e Clairaut (transformação de uma ED não linear em linear);</li> <li>✓ Aproximações numéricas (método de Euler);</li> <li>✓ Método de Picard.</li> </ul>
Ordem superior	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Wronskiano;</li> <li>✓ Construção de uma segunda solução a partir de uma solução conhecida;</li> <li>✓ Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes;</li> <li>✓ Método dos coeficientes indeterminados para equações não homogêneas;</li> <li>✓ Método da variação de parâmetros;</li> <li>✓ Equações de Euler.</li> <li>✓ ...</li> </ul>

Fonte: Elaboração própria (2018).

**APÊNDICE B – Estatística descritiva a respeito dos dados de CO<sub>atm</sub> nas estações de monitoramento da qualidade do ar 1, 2 e 3**

Descrição	Estação 1		Estação 2		Estação 3	
	Antes	Depois	Antes	Depois	Antes	Depois
Mínimo (mín)	23.167,98	23.807,25	21.150,31	27.295,45	21.854,61	25.779,87
Média	55.654,17	56.838,64	57.352,04	58.873,06	63.489,59	64.142,04
Mediana	55.295,86	55.790,88	57.249,70	58.812,49	62.040,89	62.975,00
Máximo (máx)	93.304,24	93.304,24	169.895,33	109.726,65	118.369,20	100.615,00
Dispersão total (máx - mín)	70.136,26	69.496,99	148.745,02	82.431,20	96.514,59	74.835,13
% Dispersão (depois ÷ antes)	-	-0,91%	-	-44,58%	-	-22,46%
1º Quartil (Q1)	45.729,98	46.621,76	43.475,02	45.553,58	21.854,61	25.779,87
3º Quartil (Q3)	65.686,10	67.704,89	70.118,26	71.466,23	118.369,20	100.615,00
Intervalo inter-quartis (Q3 - Q1)	19.956,12	21.083,13	26.643,24	25.912,65	96.514,59	74.835,13
Erro padrão	991,33	980,62	1.259,03	1.138,15	1.154,36	1.088,01
Modo	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D	#N/D
Desvio padrão	14.467,94	14.311,64	18.374,99	16.610,70	16.847,39	15.879,03
Curtose	-0,34	-0,41	5,25	-0,48	0,58	-0,13
Assimetria	0,20	0,24	1,05	0,22	0,61	0,39
Intervalo	70.136,26	69.496,99	148.745,02	82.431,20	96.514,59	74.835,13
Contagem	213	213	213	213	213	213
Nível de confiança (95,0%)	1.954,12	1.933,01	2.481,83	2.243,53	2.275,50	2.144,71

Descrição	Estação 1	
	Antes	Depois
Soma	11.854.337,57	12.106.629,71
Variância da amostra	209.321.324,20	204.822.903,42

Descrição	Estação 2	
	Antes	Depois
Soma	12.215.984,47	12.539.961,01
Variância da amostra	337.640.308,11	275.915.335,47

Descrição	Estação 3	
	Antes	Depois
Soma	13.523.283,44	13.662.254,29
Variância da amostra	283.834.680,81	252.143.507,14

ANEXO 1 – Evolução histórica do CO<sub>2</sub> nos últimos 10.000 anos