

Fundação Getúlio Vargas
Escola de Matemática Aplicada



Fellipe Lopes
Rafael Barsotti

Modelagem Matemática do Crescimento da
Aveia utilizada na Agropecuária

Rio de Janeiro
2016

Sumário

1	Abstract	2
2	Introdução	3
3	Metodologia	4
4	Resultados	7
5	Conclusão	12
6	Referências	13
7	Apêndice A	15
7.1	Equações Diferenciais Ordinárias	15
7.2	Método de Separação de Variáveis	15
7.3	Modelo Logístico	15
7.3.1	Equilíbrio	16
7.3.2	Solução	17
8	Apêndice B	18

1 Abstract

Cattle raising for beef and dairy production make up the basis of the national agro-industry, sector that in 2014 was responsible for something around 22,0% of Brazil's GDP, according to "Assessoria de Gestão Estratégica do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (AGE/Mapa)"¹. Beyond being vital for the nation's economy, this sector is also responsible for the yearly consumption of 70%² of the nation's water resources and also for approximately 90% of the deforestation in the expanding frontier of the agribusiness. Therefore, due to pressures from the economical, social and environmental spheres, a deeper study of cattle feeding becomes necessary for the optimization of production.

One of the main sources of cattle's diet is wheat, partially because of its low cost production and its high resistance to long winter periods. Nowadays there are about 450 different species of the type wheat, however more than 75% of the world's total wheat output is of two special kinds known as *Avenasativa* and *Avenastrigosa*, or white and black wheat. Both are widely used for cattle feeding, but they also have unique characteristics such as resistance to plagues, temperature, grain size and overall biomass productivity.

Therefore the cattle's productivity is directly linked to its diet. This paper aims to model the growth of different wheat types using the logistic growth differential equation, in order to be able optimize the production minimizing the time interval between harvests. The models and results presented in this paper may also be generalized for modeling the productivity of other agricultural products with different objectives. Knowing the optimal choice, farmers are able to choose from a huge variety of options the one that optimizes their cattle's diet, and so allowing them to provide a final product of the highest quality.

¹<http://www.agricultura.gov.br/comunicacao/noticias/2014/12/produto-interno-bruto-da-agropecuaria-deve-ser-de-rs-1-trilhao>

²<http://www.abc.org.br/IMG/pdf/doc-5923.pdf>

2 Introdução

A criação de gado de corte e leiteiro constitui a base da indústria agropecuária nacional, setor que em 2014 foi responsável por cerca de 22,0% do PIB brasileiro, segundo a Assessoria de Gestão Estratégica do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (AGE/Mapa)³. Este setor, além de vital para a economia da nação, também é responsável pelo consumo de cerca de 70%⁴ dos recursos hídricos nacionais e por cerca de 90% do desmatamento nas áreas de expansão do agronegócio. Assim, pelas pressões econômicas, sociais, e ambientais, torna-se necessário um estudo aprofundado da alimentação do gado para otimização da produção.

Uma das principais fontes de alimentação do gado é a aveia, devido, em parte, a seu baixo custo de lavoura e sua resistência a períodos de inverno, podendo ser utilizada para forragem do solo. Atualmente contabilizam-se cerca de 450 espécies do gênero, porém mais de 75% do total cultivado mundialmente é de *Avenasativa* e *Avenastrigosa*, respectivamente aveias branca e preta. Ambas são amplamente utilizadas para forragem e alimentação animal, porém apresentam características diferentes como resistência a pragas e a temperatura, tamanho da folha e produtividade em termos de biomassa.

Deste modo, a produtividade das diversas espécies de aveia tem ligação indireta com a produtividade do gado. Este trabalho tem por objetivo modelar o crescimento de diferentes tipos de aveia através de uma expressão logística, de modo a prever o intervalo entre cortes que maximiza a produção. Além disso, os modelos e resultados obtidos podem ser generalizados e aplicados na comparação da produtividade de outras espécies agrícolas para outros fins. Tendo informações de otimização, o agropecuário é capaz de escolher a espécie que deve ser plantada para melhorar a criação de seu gado, podendo oferecer um produto de maior qualidade.

³<http://www.agricultura.gov.br/comunicacao/noticias/2014/12/produto-interno-bruto-da-agropecuaria-deve-ser-de-rs-1-trilhao>

⁴<http://www.abc.org.br/IMG/pdf/doc-5923.pdf>

3 Metodologia

As equações logísticas são uma possível forma de modelar o crescimento isolado das sementes de aveia, desde sua germinação até sua fase de corte:

$$\frac{dH_i}{dt} = w_i l_i n_i H_i \left(1 - \frac{H_i}{K}\right) \quad (1)$$

Neste modelo, H_i representa a altura de cada tipo de aveia, w_i e n_i são, respectivamente, as capacidades de absorção de água em mililitros por segundo e de nutrientes do solo em miligramas por segundo, l_i é a eficiência fotossintética em miligramas de glicose por lumen e K é a altura máxima em centímetros.

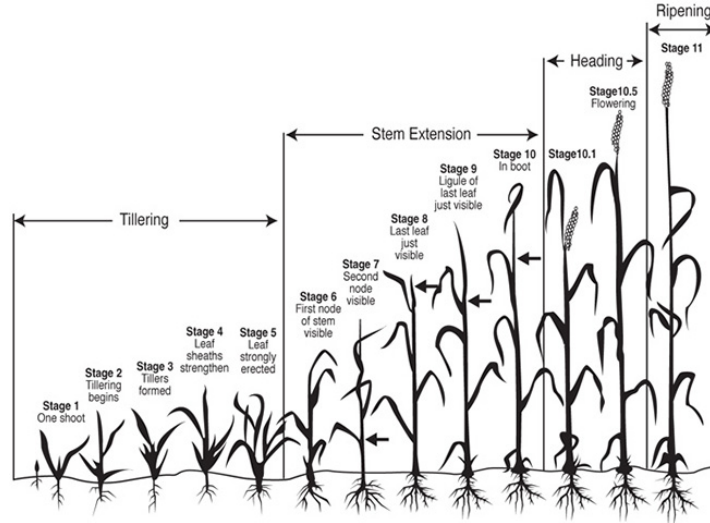


Figura 1: Estágios de crescimento da aveia

Resolvendo a equação 1, obtém-se $H_i(t)$. A partir daí basta calcular sua inversa e integrá-la da altura 0 até a altura mínima para obter o tempo total de espera do produtor até o primeiro corte.

$$\int_0^{H_{min}} t(H_i) dh \quad (2)$$

Define-se a produtividade de uma lavoura de Q sementes de aveia por hectare com massa seca média M_i em sua altura máxima conforme equação 3:

$$P_i(t) = H_i(t) \frac{M_i}{QK} \quad (3)$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{M_i}{QK} \frac{dH_i}{dt} \quad (4)$$

Todavia, a produtividade mostrada nas equações 3 e 4 é de uma unidade de aveia, ao longo do tempo. Para obter o valor correspondente a plantação como um todo, basta multiplicar pela quantidade de sementes Q. Assim, o fator Q torna-se irrelevante e as equações passam a ser:

$$P_i(t) = H_i(t) \frac{M_i}{K} \quad (5)$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{M_i}{K} \frac{dH_i}{dt} \quad (6)$$

Deve-se restringir o intervalo da função de produção a partir de um instante inicial, que representa o tempo necessário para que a aveia se desenvolva a ponto de poder ser cortada, até um instante final, que seria o tempo de vida útil da planta, a partir do qual a produtividade começa a decair exponencialmente.

$$P(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_{min} \\ H_i(t) \frac{M_i}{K}, & t_{min} \leq t \leq t_{max} \\ H_i(t) \frac{M_i}{K} e^{-k(t-t_{max})} H(t), & t \geq t_{max} \end{cases} \quad (7)$$

Como o tempo de vida útil da aveia é grande em comparação com o ciclo de corte, o decaimento da produtividade devido ao fator envelhecimento da planta será, para efeito do modelo estudado, desconsiderado. Logo, a equação da produtividade passa a ser:

$$P(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_{min} \\ H_i(t) \frac{M_i}{K}, & t_{min} \leq t \end{cases} \quad (8)$$

4 Resultados

Com o modelo especificado, é possível realizar simulações numéricas para averiguar a validade do modelo frente a realidade. Para simplificar a visualização, define-se r_i como o produto de w_i, n_i e l_i . Resolvendo a equação 1, obtém-se:

$$H(t) = \frac{KH_0}{H_0 + (K - H_0)e^{-rt}} \quad (9)$$

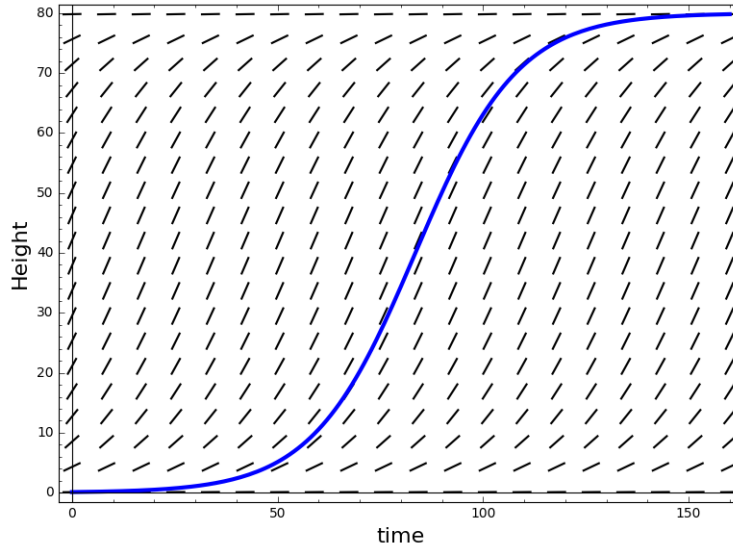


Figura 2: Gráfico da função 9 para $K = 80$ e $r = 0.1$

Como pode ser observado na Figura 2, o modelo é razoável no sentido qualitativo, pois há um crescimento inicial da altura da aveia até atingir sua altura máxima, onde permanecerá até o corte. Dado que cada aveia terá sua altura dependendo de fatores genéticos e ambientais, é natural que também tenha um r_i e um tempo de corte específicos.

Todavia, deve-se estimar qual r_i melhor descreve o crescimento da aveia. Para efeito de cálculo, será assumido que a altura média da aveia para o corte é 30 cm, e que o tempo médio de espera para chegar a tal altura é de 60 dias⁵. Resolvendo a equação 9 para os valores sugeridos, obtém-se $r_i = 0.2$. Porém, sabe-se que ocorrerão cortes em intervalos regulares para a alimentação do gado. Com esta consideração, gera-se o gráfico da figura 3

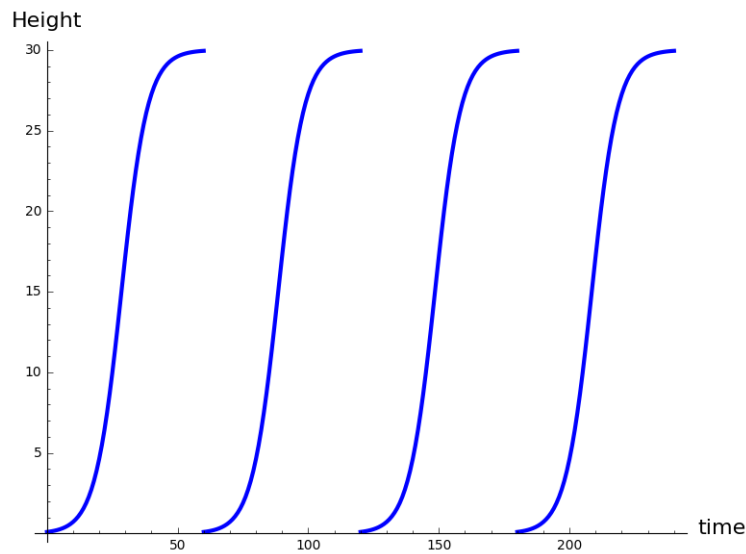


Figura 3: Gráfico da função 9 considerando ciclos de corte de 60 dias, $K = 30$ e $r = 0.2$

⁵<http://www.beefpoint.com.br/radares-tecnicos/pastagens/aveia-forrageira-uma-alternativa-para-o-inverno-4943/>

Conhecido o comportamento de uma unidade de aveia, pode-se observar a produção geral para cada tipo específico de aveia. Utilizando a equação 5, sabendo que o tempo de corte da aveia branca (FAPA 2) é de 40 dias para uma massa seca média $M_1 = 1225$ kg/hectare e que o tempo de corte para a aveia preta (IAPAR 61) é de 30 dias para uma massa seca média $M_2 = 938$ kg/hectare.⁶

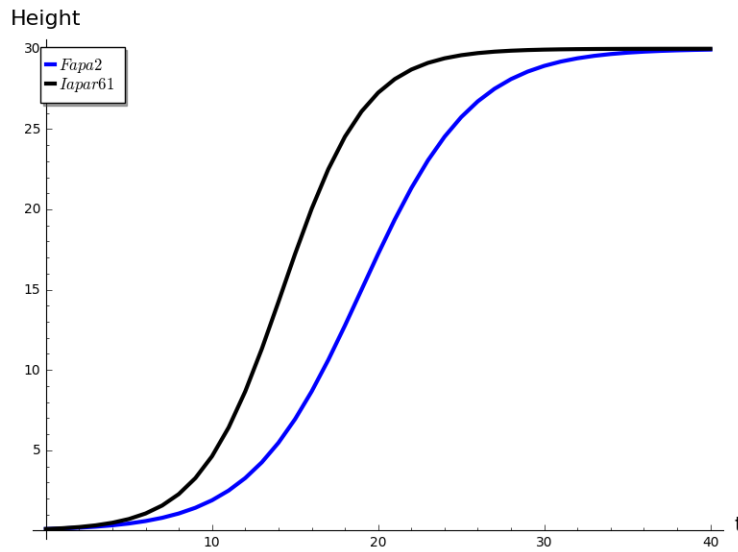


Figura 4: Comparação do crescimento da aveia preta (IAPAR 61), com $K = 30$ e $r_1 = 0.4$, e da aveia branca (FAPA 2), com $K = 30$ e $r_2 = 0.3$

Do gráfico da figura 4 é possível inferir que a aveia preta de fato tem uma vantagem devido ao menor ciclo de corte. Porém, ao observar o gráfico da produtividade na figura 5 percebe-se que a aveia branca tende a gerar mais matéria seca que a aveia preta ao longo do ciclo de corte.

⁶Ver Tabela "Dados-Unijuí-2014.xlsx"

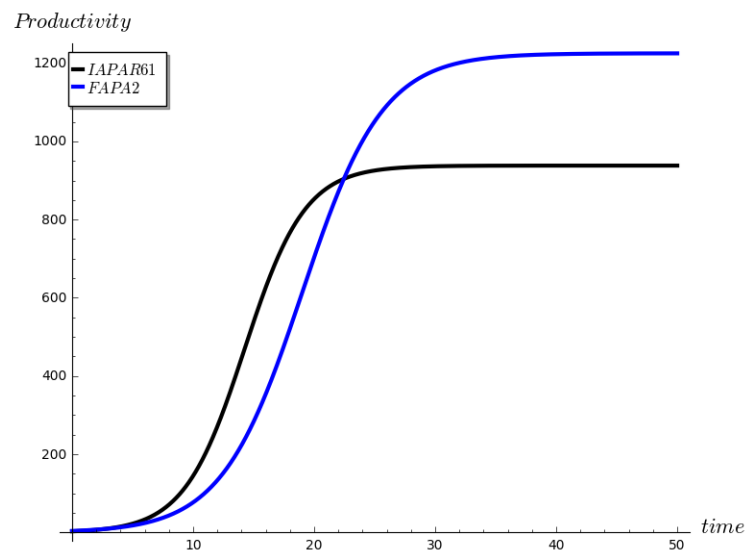


Figura 5: Comparação da produtividade da aveia branca (FAPA 2) com a aveia preta (IAPAR 61)

Utilizando os dados mostrados nas tabelas 1 e 2⁷, obtém-se os seguintes gráficos comparativos da massa seca real e estimada produzida pelas aveias

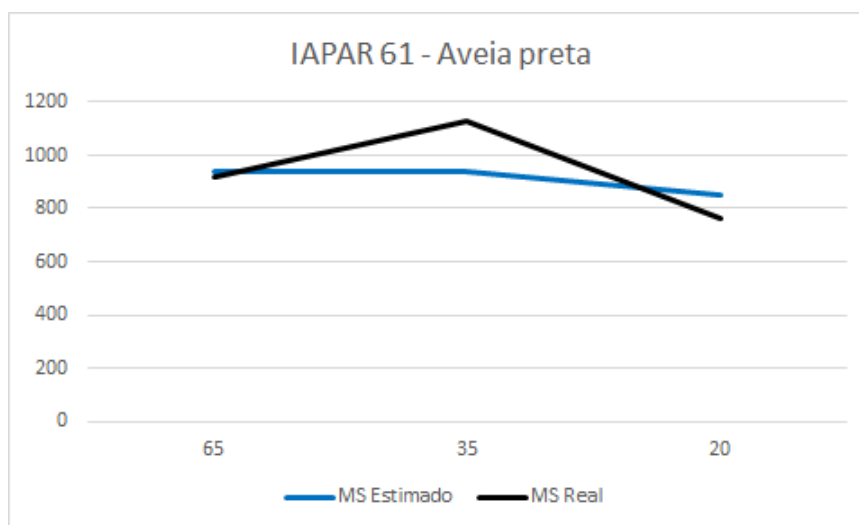


Figura 6: Comparação da MS estimada e real de aveia preta (IAPAR 61)

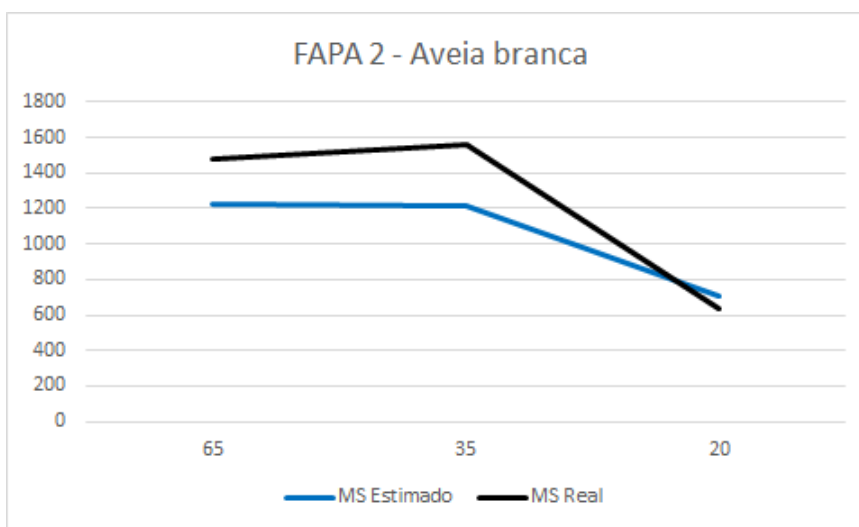


Figura 7: Comparação da MS estimada e real de aveia branca (FAPA 2)

⁷Ver Apêndice B

5 Conclusão

Inicialmente, pode-se concluir que ambas as aveias, branca e preta, são boas escolhas para utilização como pastagem. A primeira tendo como principal característica sua maior produtividade, ao passo que a segunda se destaca por sua velocidade maior de crescimento. O produtor deve ter em mente qual foco quer em sua plantação, para melhor escolher a aveia utilizada, otimizando assim seu produto final.

Comparando o modelo com dados reais⁸, obtemos um erro quadrático médio de aproximadamente 2344 para a aveia preta (IAPAR 61) e 90395 para a aveia branca (FAPA 2). Observando os dados das tabelas 1 e 2, vemos que o modelo se aproximou bastante do real para um ciclo curto (20 dias) e se distanciou quando o ciclo tornou-se maior (65 dias).

O erro se dá, em parte, devido as simplificações do modelo, sendo ainda possível de ser aplicado para ciclos curtos com alguma precisão. Novos trabalhos podem aprimorar o modelo para que ele se torne mais condizente com os dados reais mesmo para ciclos longos.

⁸Ver Tabela "Dados-Unijuí-2014.xlsx"

6 Referências

- [1] KREMER, D. I. M. *Modelagem matemática de efeitos genético e ambientais sobre o desempenho de genótipos de aveias forrageiras no noroeste do Rio Grande do Sul*. 2014. 98f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - DCEEng da UNIJUÍ. UNIJUÍ, Rio Grande do Sul.
- [2] RIZZARDI, M. A. *et al.* *Competição por recursos do solo entre ervas daninhas e culturas*. *Ciência Rural*. Santa Maria, v. 31, n.4, p.701-714, 2001.
- [3] FENNER, M. *Seeds: The Ecology of Regeneration in Plant Communities*. In: CRAWLEY, M. J. *Seed Predator and Plant Population Dynamics*. Cabi Publishing, 2009.p.167-183.
- [4] BORTOLINI, P. C. *et al.* *Cereais de inverno submetidos ao corte no sistema de duplo propósito*. *Revista Brasileira de Zootecnia*, Viçosa, v. 33, n. 1, p. 45-50, 2004.
- [5] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 607 p.
- [7] VERHULST, P. F. (1845). *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* [Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase]. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*. 18-142
- [8] KOICHI, UNAMI *Stochastic modelling and control of rainwater harvesting systems for irrigation during dry spells*. Volume 88. New York: Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems. pp. 185-195.
- [9] BANIK, P *A mathematical model on the effect of M. denticulata weed on different winter crops*. Volume 90. In Chapman RN, editor.Biosystems. pp. 818-829.
- [10] Bobak, C *Modelling an Aquaponic Ecosystem Using Ordinary Differential Equations*. *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering*. California. pp. 189-196.
- [11] WANG, E.; ENGEL, T. *Simulation of phenological development of wheat crops*. *Agricultural Systems*, v.58, p.124, 1998.
- [12] HELDWEIN, A. B. *Modelagem do desenvolvimento de trigo considerando diferentes temperaturas cardinais e métodos de cálculo da função de resposta à temperatura*. *Pesquisa agropecuária brasileira*, Brasília, v.44, n.6, p.545-553, jun. 2009
- [13] MCMASTER, G. S. ; WILHELM, W. W. ;FRANK ,A .B .*Developmental sequences for simulating crop phenology for water-limiting conditions*.

Australian Journal of Agricultural Research, v.56 , p.1277-1288 , 2005.

[14] MALLMANN, E.S.C . ;BERTO ,L. J.*Simulação do crescimento Potencial de pastagens de Tifton*. 85, UNIJUÍ, Ijuí, RS.

[15] ALBERTO, C. M. *Modelagem do desenvolvimento e do balanço de água no solo em trigo*. 2008. 122p. Tese (Doutorado). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

[16]GONZÁLEZ, F.G.; SLAFER, G.A.; MIRALLES, D.J. *Vernalization and photoperiod responses in wheat reproductive phases*. Field Crops Research, v.74, p.183-195, 2002.

[17] Macmaster S, Gregory. *et al.. Optimizing Wheat Harvest Cutting Height for Harvest Efficiency and Soil and Water Conservation*. Agronomy Journal. Vol 92. No 6.

7 Apêndice A

7.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Diversas áreas da ciência caem e recaem em problemas que envolvem equações diferenciais. O estudo destas equações começou desde que Fermat, Newton e Leibniz criaram o cálculo, e se intensificou no século XVIII, com Euler. A capacidade de resolver tais equações nos permitiu avançar as fronteiras do conhecimento em áreas como ondulatória, radioatividade, eletromagnetismo e crescimento de espécies, dentre inúmeras outras aplicações. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem tem o seguinte aspecto:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (10)$$

Neste trabalho nos restringiremos a estudar as EDO's de primeira ordem resolvíveis pelo método de separação de variáveis.

7.2 Método de Separação de Variáveis

Segundo Boyce [2012], se a EDO puder ser escrita como

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (11)$$

integrando ambos os lados da equação (2) em x , obtemos

$$\int M(x) dx + \int N(y) \frac{dy}{dx} dx = 0 \quad (12)$$

então, através de uma mudança de variável, a equação poderá ser resolvida por integral direta

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = 0 \quad (13)$$

7.3 Modelo Logístico

Suponhamos uma variável N cujo crescimento ao longo do tempo queremos avaliar. O modelo básico de crescimento populacional considera que a taxa de variação $\frac{dN}{dt}$ está relacionada com a taxa de natalidade n e a de mortalidade m , consideradas constantes, conforme a equação a seguir

$$\frac{dN}{dt} = (n - m) N \quad (14)$$

Mas segundo Verhulst, o modelo logístico de crescimento pressupõe que a taxa de natalidade e a de mortalidade dependem linearmente da densidade populacional na região observada. Assim, podemos descrever a nova taxa n' de natalidade e m' de mortalidade como:

$$n' = n - aN \quad (15)$$

$$m' = m + bN \quad (16)$$

onde n e m passam a ser, respectivamente, as taxas de natalidade e mortalidade no início da observação. a e b são constantes que representam como a quantidade N afetará as taxas.

Desenvolvendo (5) com as expressões (6) e (7), obtemos:

$$\frac{dN}{dt} = [(n - aN) - (m + bN)] N \quad (17)$$

Desenvolvendo (8), obtemos:

$$\frac{dN}{dt} = (n - m) N \left[1 - \left(\frac{a + b}{n - m} \right) N \right] \quad (18)$$

Supondo $r = n - m$ como sendo o fator de crescimento inicial da população e $\frac{a+b}{n-m} = K$ o limite populacional, temos:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (19)$$

que é a equação diferencial conhecida para o crescimento logístico.

7.3.1 Equilíbrio

O equilíbrio no crescimento logístico ocorre quando $\frac{dN}{dt} = 0$, pois assim não haverá mais alteração na população. Da equação (19), obtemos:

$$rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = 0 \quad (20)$$

Assim sendo, para o equilíbrio ocorrer, $r = 0$, $N = 0$ ou $N = K$. Mas como é esperado que N e r sejam não nulos, provamos que K é o ponto de saturação da população observada.

7.3.2 Solução

A EDO da equação (10) pode ser resolvida por separação de variáveis, fazendo

$$\frac{K}{N(K-N)}dN = rdt \quad (21)$$

Integrando de ambos os lados teremos:

$$\int_{N_0}^N \frac{K}{N(K-N)}dN = \int_0^t rdt \quad (22)$$

Cuja solução será dada por:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt}} \quad (23)$$

8 Apêndice B

Tabela 1: MS real e estimada para a aveia preta (IAPAR 61) em diferentes ciclos de corte

t	MS Real	MS Estimado	Desvio Quadrático Médio
20	852,5	763	2,777778
35	937,7	1128	1,867778
65	938	918	7028,028
			2344,224

Tabela 2: MS real e estimada para a aveia branca (FAPA 2) em diferentes ciclos de corte

t	MS Real	MS Estimado	Desvio Quadrático Médio
20	704	634	0,111111
35	1215	1556	93,44444
65	1225	1484	271093,8
			90395,78