

TEMA 11

SÍNTESIS DE FILTROS ACTIVOS. BIQUADS

11.1 Introducción

Las funciones de transferencia bicuadráticas de la forma,

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q_p} + \omega_o^2} \quad (11.1)$$

juegan un papel fundamental en el diseño de filtros activos. En muchas ocasiones se utilizan simplemente estas secciones de segundo orden en equipos de comunicaciones o de medida para eliminar ruido o interferencias.

Pero su uso más importante es como bloque básico en la construcción de filtros de mayor orden. Uno de los métodos más utilizados para construir filtros es la conexión en cascada de biquads. La función de transferencia que se ha de implementar se factoriza en el producto de funciones de segundo orden. Cada función se implementa mediante un biquad y se construye el filtro total mediante la conexión en cascada de los biquads. La elección y diseño del biquad más adecuado dependerá de la aplicación concreta. A la hora de seleccionar filtros adecuados deben tenerse en cuenta diferentes criterios:

- Un criterio fundamental es conseguir una baja sensibilidad a las variaciones de los componentes.
- Los valores de los componentes deben ser prácticos y la diferencia entre el máximo y el mínimo no sea excesivamente grande.
- Los filtros requieren normalmente un proceso de ajuste posterior por lo que dicho ajuste debe ser sencillo, preferiblemente los parámetros importantes, ω_o y Q , deben poder ajustarse independientemente.
- Los biquads tienen grandes cargas, como otros biquads en conexiones en cascada o realimentadas de lazo múltiple, por lo que es necesario que tengan baja impedancia de

salida y alta impedancia de entrada. En la realidad Z_{in} será fuertemente dependiente de la frecuencia, y la impedancia de salida está determinada por la impedancia de salida de los amplificadores operacionales que es no nula por lo que puede afectar significativamente el comportamiento del filtro.

11.2 Sensibilidad de filtros activos de segundo orden

Puesto que la sensibilidad va a ser un criterio fundamental en el diseño de biquads es conveniente estudiarla específicamente para este tipo de bloques. Hemos visto que su función de transferencia genérica es:

$$H_2(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (11.2)$$

En el único caso de interés los polos son complejos ($Q > 0.5$),

$$p_{1,2} = -\omega_o \left(\frac{1}{2Q} \mp j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad (11.3)$$

Los polos dominan el comportamiento en la banda pasante de los filtros por lo que su localización es muy importante y deberían ser insensibles a variaciones en los parámetros.

Si suponemos que ω_o y Q son funciones de un cierto parámetro x la sensibilidad semirelativa de uno de los polos se obtiene sin más que aplicar la definición:¹

$$Q_x^{p_1} = p_1 \left(S_x^{\omega_o} - j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) \quad (11.4)$$

La sensibilidad $Q_x^{p_2}$ es la conjugada de (11.4).

En la ecuación (11.4) se observa que la localización de un polo es $\sqrt{4Q^2 - 1} \cong 2Q$ veces más sensible a variaciones en ω_o que a variaciones en Q .

El desplazamiento del polo será:

$$dp_1 = p_1 \left(\frac{d\omega_o}{\omega_o} - j \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \frac{dQ}{Q} \right) \quad (11.5)$$

Si $dQ=0$ el polo se mueve radialmente acercándose o alejándose del origen:

1. Referirse a Sección 1.

$$dp_1 = \frac{d\omega_o}{\omega_o} p_1 \quad (11.6)$$

y si $d\omega_o=0$ el polo se mueve tangencialmente en un círculo de radio ω_o alrededor del origen:

$$dp_1 = -j \frac{(dQ/Q)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} p_1 \quad (11.7)$$

Ambos desplazamientos se ilustran en la Fig. 11.1.

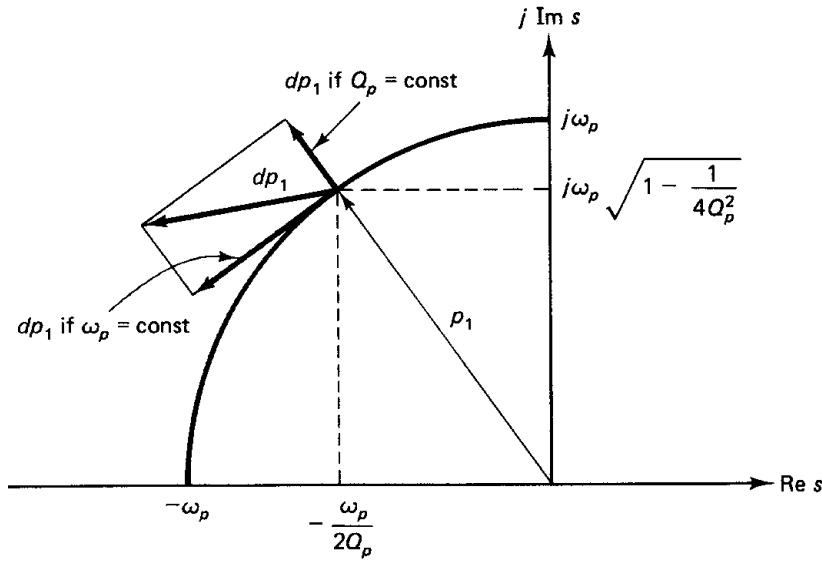


Figura 11.1: Ilustración del desplazamiento de polos en el plano s.

Veamos cuál es el efecto de la sensibilidad de los polos en la banda de paso de las secciones bicuadráticas. Si suponemos que en la función de transferencia de segundo orden x no afecta a los ceros y a la ganancia en dc se tiene que:

$$S_x^{H_2(s)} = \frac{Q_x^{p_1}}{s - p_1} + \frac{(Q_x^{p_1})^*}{s - p_1^*} \quad (11.8)$$

Si reducimos a denominador común y utilizamos las expresiones para p_1 y $Q_x^{p_1}$ se obtiene:²

$$S_x^{H_2(s)} = - \frac{\left(2\omega_o^2 + \frac{s\omega_o}{Q}\right) S_x^{\omega_o} - \frac{s\omega_o}{Q} S_x^Q}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (11.9)$$

Haciendo uso de:

2. Referirse a Sección 1.2.

$$S_x^{H(j\omega)} = S_x^{|H(j\omega)|} + jQ_x^{\phi(\omega)} \quad (11.10)$$

se puede obtener la sensibilidad de la magnitud:

$$\begin{aligned} S_x^{|H_2(j\omega)|} &= -\frac{2(1-\omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^{\omega_o} + \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^Q = \\ &= S_{\omega_o}^{|H_2|} S_x^{\omega_o} + S_Q^{|H_2|} S_x^Q \end{aligned} \quad (11.11)$$

donde $\omega_n = \omega/\omega_o$ es una frecuencia normalizada.

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_{\omega_o}^{|H_2|} &= -\frac{2(1-\omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} \\ S_Q^{|H_2|} &= \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1-\omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} \end{aligned} \quad (11.12)$$

El cociente de ambas sensibilidades es:

$$\frac{S_{\omega_o}^{|H_2|}}{S_Q^{|H_2|}} = -\frac{2(1-\omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{\omega_n^2/Q^2} = 2Q^2 \left(1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right) - 1 \quad (11.13)$$

que aumenta rápidamente con la distancia a ω_o . Para las frecuencias críticas de 3dB,

$$\omega \cong \omega_o \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \quad (11.14)$$

se obtiene,

$$S_{\omega_o}^{|H_2|} \cong \pm 2Q S_Q^{|H_2|} \quad (11.15)$$

Podemos concluir que en el diseño adecuado de secciones de segundo orden con altos valores de Q es más importante prestar atención a obtener valores pequeños de $S_x^{\omega_o}$ que a valores pe-

3. La aproximación realizada es:

$$\frac{S_{\omega_o}^{|H_2|}}{S_Q^{|H_2|}} = 2Q^2 \left(\frac{\frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{Q}}{1 + \frac{1}{4Q^2} \pm \frac{1}{Q}} \right) \cong \frac{1}{2} \pm 2Q - 1 - \frac{1}{4Q^2} \mp \frac{1}{Q} \cong 2Q$$

queños de S_x^Q . Si las variabilidades de ω y Q han de tener efectos parecidos en la función de transferencia, la variabilidad $\frac{d\omega_o}{\omega_o}$ debería ser Q veces más pequeña que dQ/Q ya que:

$$\frac{d|H_2(j\omega)|}{|H_2(j\omega)|} = S_{\omega_o}^{|H_2|} \frac{d\omega_o}{\omega_o} + S_Q^{|H_2|} \frac{dQ}{Q} \quad (11.16)$$

Esto se ilustra claramente en la Fig. 11.2 donde ambas sensibilidades aparecen dibujadas con la misma escala.

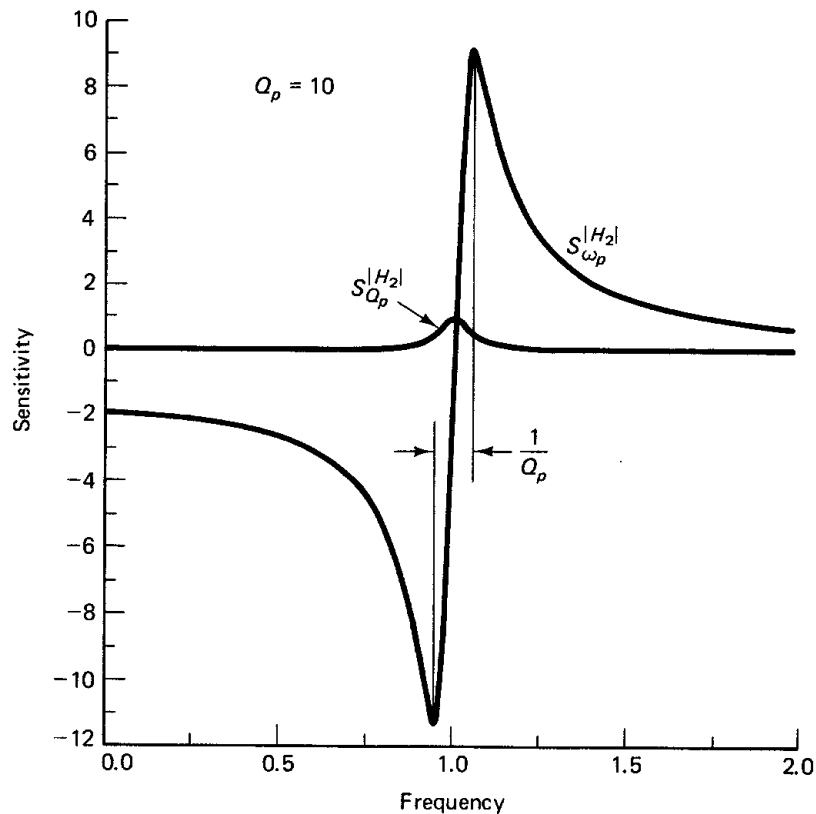


Figura 11.2: Las dos sensibilidades con igual escala.

11.3 Biquads monoamplificador

Ya hemos visto anteriormente como la combinación de un circuito RC con un elemento de ganancia en una configuración realimentada permitía obtener funciones de transferencia con polos complejos. Consideremos el esquema general de circuito RC activo realimentado de la Fig. 11.3. En él se han asignado nombres a todos los terminales y las flechas indican terminales que son entradas del circuito RC.

Referenciando las tensiones a tierra y denotando las funciones de transferencia de la red RC mediante:

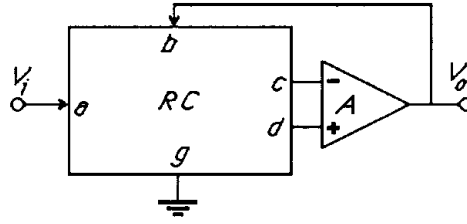


Figura 11.3: Configuración general RC-activa realimentada.

$$T_{kl}(s) = \frac{V_k}{V_l} = \frac{N_{kl}(s)}{D_o(s)} \quad k = c, d; l = a, b \quad (11.17)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{A(s)} V_o = [T_{da}(s) - T_{ca}(s)] V_i + [T_{db}(s) - T_{cb}(s)] V_o \quad (11.18)$$

por lo que la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s) + 1/A(s)} \quad (11.19)$$

Para que $H(s)$ sea de segundo orden es necesario que la red RC sea de segundo orden. Puede observarse que los ceros de transmisión del circuito RC activo están determinados por el camino de propagación directo mientras que los polos están determinados por el lazo de realimentación.

Las frecuencias naturales del circuito están determinadas por:

$$T_{cb}(s) - T_{db}(s) + 1/A(s) = 0 \quad (11.20)$$

que es independiente del nudo a, independiente de la conexión V_i , lógico puesto que las frecuencias naturales se obtienen con la respuesta a entrada cero. Puesto que los polos se obtienen para $V_i=0$ y los ceros dependen de donde se aplica la señal de entrada (el numerador depende de a) se deduce que se pueden crear los ceros de una función de transferencia sin afectar a los polos, conectando la señal de entrada a nudos que estuvieran conectados previamente a tierra. Por tanto, si tenemos un circuito con los polos deseados se pueden crear los ceros de transmisión necesarios sin más que eliminar total o parcialmente la conexión a tierra de algún elemento y conectando el terminal de entrada en ese punto.

Puede observarse en la Fig. 11.3 que implementar los polos de $H(s)$ significa implementar una tripuerta lo que puede ser muy complicado. Para simplificar el problema dividimos el circuito RC en dos bipuertas, como se muestra en la Fig. 11.4.

Con un análisis similar al realizado en (11.18) se obtiene que los polos son las raíces de:

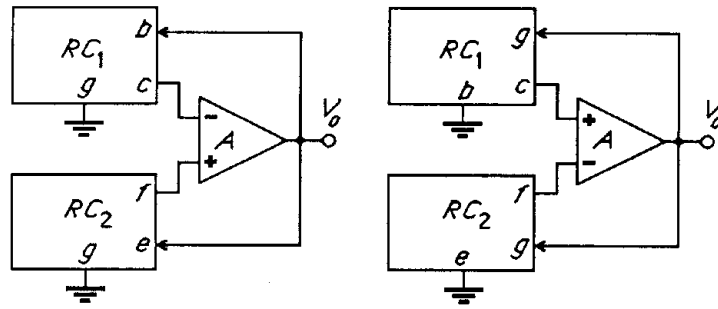


Figura 11.4: Separación de la red RC en dos partes: (a) circuito original, (b) circuito complementario.

$$T_{cb}(s) - T_{fe}(s) + \frac{1}{A(s)} = 0 \quad (11.21)$$

Las T_{ij} son funciones de transferencia de bipuertas por lo que son más sencillas de diseñar. Pero podemos escribir (11.21) en la forma:

$$\frac{1}{D_1(s)D_2(s)} \left[N_{cb}(s)D_2(s) - N_{fe}(s)D_1(s) + \frac{D_1(s)D_2(s)}{A(s)} \right] = 0 \quad (11.22)$$

La simplificación realizada se ha obtenido a costa de tener una función de transferencia de cuarto orden y por tanto, los polos se han de obtener de un polinomio de orden 4.⁴ Por ello, se hace una simplificación consistente en hacer una de las bipuertas independiente de la frecuencia, en las configuraciones que se muestran en la Fig. 11.5.

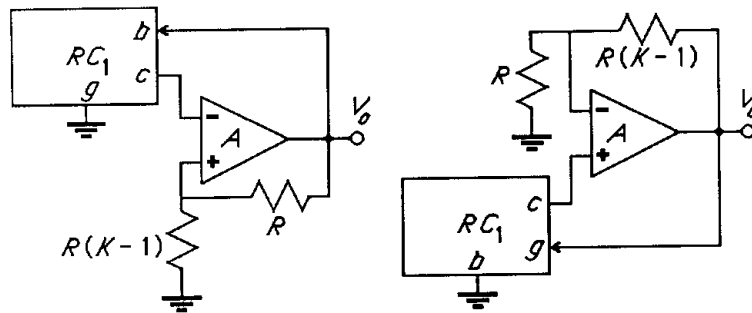


Figura 11.5: (a) Estructura ENF, (b) estructura EPF.

Los polos vienen entonces determinados para el circuito de la Fig. 11.5a por:

4. Se ha hecho la suposición de que $D_1 \neq D_2$. Si fueran iguales sería de orden 2 pero incluso diseñadas para ello, las tolerancias de los elementos haría que fueran distintas.

$$T_{cb}(s) - \frac{K-1}{K} + \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{D_1(s)} \left[N_{cb}(s) - \frac{K-1}{K} D_1(s) + \frac{D_1(s)}{A(s)} \right] = 0 \quad (11.23)$$

El camino principal de realimentación va al terminal inversor del A.O. pero también hay algo de realimentación positiva. Esto permite obtener factores de calidad más altos por lo que se llama circuito de realimentación negativa mejorada (ENF).

Mediante una sustitución simétrica se obtiene el circuito de la Fig. 11.5b que se denomina circuito de realimentación positiva mejorada (EPF). Este circuito es el circuito complementario del ENF y se puede obtener a partir de él mediante el proceso de transformación complementaria, que dice que los polos de un circuito RC activo con un A.O. no cambian si se intercambian los terminales de entrada del A.O. y la salida del A.O. con tierra. Para comprobarlo con el circuito de la Fig. 11.5b mediante análisis directo se obtiene que los polos están determinados por:

$$\frac{1}{K} - T_{cg}(s) + \frac{1}{A(s)} = 0 \quad (11.24)$$

y

$$T_{cg}(s) = \frac{V_{cb}}{V_{gb}} = \frac{V_{cg} + V_{gb}}{V_{gb}} = 1 - \frac{V_{cg}}{V_{bg}} = 1 - T_{cb} \quad (11.25)$$

por lo que los polos son los mismos que los de (11.23). Por tanto, la dependencia respecto a los elementos de circuito de los polos de los circuitos ENF y EPF son idénticas. Por tanto, si los circuitos RC son iguales, los circuitos ENF y EPF, además de todos sus casos particulares tendrán las mismas sensibilidades de los polos. Ya que éstas son las que controlan de forma más crítica el comportamiento en la banda pasante, los argumentos en favor de uno u otro no son demasiado relevantes. A menudo se utilizan filtros con A.O. en configuración de realimentación positiva con ganancia unidad o realimentación negativa con ganancia infinita, tal como se muestra en la Fig. 11.6. Estos no son más que casos especiales de los circuitos ENF y EPF para $K=1$. Los polos vienen dados por:

$$T_{cb}(s) + \frac{1}{A(s)} = 1 - T_{cg}(s) + \frac{1}{A(s)} = 0 \quad (11.26)$$

La dependencia de los polos respecto al A.O. es la misma luego aparentemente no hay ninguna diferencia respecto al comportamiento en sensibilidad de la estructura de ganancia unidad y de la de ganancia infinita.

Basándonos en los polos de estas estructuras a continuación veremos las condiciones que tienen que cumplir los subcircuitos RC para proporcionar secciones de segundo orden activas útiles.

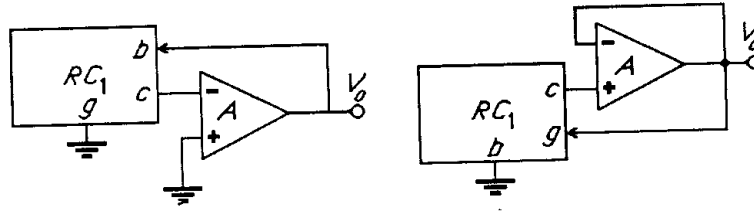


Figura 11.6: Casos especiales de las estructuras ENF y EPF: (a) estructura de realimentación negativa con ganancia infinita (NF); (b) estructura de realimentación positiva con ganancia unidad (PF).

Circuitos ENF: condiciones para minimizar sensibilidades

Consideremos primero el circuito ENF. Vimos que los subcircuitos debían ser circuitos de segundo orden por lo que su función de transferencia en general es:

$$T_{cb}(s) = \frac{N_{cb}}{D_1(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.27)$$

donde $q_p < 0.5$ ya que los polos de circuitos pasivos RC son simples, reales y negativos.

La expresión de los polos según (11.23) viene dada por las raíces de:

$$D(s) = N_{cb} - \left(\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A} \right) D_1(s) \quad (11.28)$$

Utilizando el modelo de un polo del A.O.:

$$A(s) = \frac{GB}{s + \sigma} = \frac{1}{s/GB + 1/A_0} \quad (11.29)$$

y llamando

$$k_0 = \frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0} \quad (11.30)$$

se obtiene:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + \left(a_2 - k_0 + \frac{\omega_1}{GB} \frac{1}{q_p} \right) s^2 + \left(a_1 - k_0 \frac{\omega_1}{q_p} + \frac{\omega_1^2}{GB} \right) s + a_0 - k_0 \omega_1^2 \quad (11.31)$$

Si consideramos el A.O. con producto ganancia-ancho de banda infinito se simplifica (11.31) a un polinomio de segundo orden:

$$D(s) = (a_2 - k_0)s^2 + \left(a_1 - k_0 \frac{\omega_1}{q_p}\right)s + (a_0 - k_0 \omega_1^2) \quad (11.32)$$

En la sección sobre sensibilidad de secciones de segundo orden se vio que las funciones de transferencia de segundo orden es $2Q$ veces más sensible a cambios en ω_o que a cambios en Q . Por tanto, es más importante conseguir sensibilidades pequeñas de ω_o que sensibilidades pequeñas de Q .

La frecuencia es:

$$\omega_o^2 = \frac{a_0 - k_0 \omega_1^2}{a_2 - k_0} \quad (11.33)$$

La ganancia en dc del amplificador operacional A_o es un parámetro de variabilidad muy alta.

Caso $a_0=a_2=0$

Una posibilidad para hacer ω_o independiente de A_o es:

$$a_0 = a_2 = 0 \quad (11.34)$$

Entonces T_{cb} es una función paso de banda:

$$T_{cb}(s) = \frac{(\omega_1/q_z)s}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.35)$$

Pero esta no es una solución válida ya que para el modelo más real del A.O. los coeficientes de s^3 y s^0 tienen distinto signo y por tanto hay alguna raíz en el semiplano derecho y el filtro ENF no es estable.

Caso $a_0=a_2\omega_1^2$

La otra posibilidad es:

$$a_0 = a_2 \omega_1^2 \quad (11.36)$$

En este caso, T_{cb} queda:

$$T_{cb}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.37)$$

De (11.33) se obtiene que

$$\omega_o = \omega_1 \quad (11.38)$$

5. Referirse a Sección 2.1

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q} \quad (11.39)$$

donde

$$\frac{q_z}{q_p} = 1 + q \quad (11.40)$$

De (11.39) deduce que si $a_2 > k_0$ para que $Q > 0$ es necesario que:

$$\frac{qk_0}{a_2 - k_0} < 1 \quad (11.41)$$

O utilizando la ecuación (11.30):⁶

$$\frac{1}{K} > 1 - \frac{1}{A_0} - a_2 \frac{q_p}{q_z} \approx 1 - a_2 \frac{q_p}{q_z} \quad (11.42)$$

Hemos visto que la frecuencia de polo ω_o es igual a la frecuencia de polo ω_1 del circuito RC pasivo. Por tanto, está determinada únicamente por elementos pasivos. Ya que por análisis dimensional ω_1 debe ser de la forma,

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (11.43)$$

se deduce que las sensibilidades de ω_o respecto a los elementos pasivos tienen el mínimo valor teórico: 0.5. A esto hay que añadir como se ha visto anteriormente que la sensibilidad de ω_o respecto a A_o es nula.

Circuitos EPF: condiciones para minimizar sensibilidades

6. Se obtiene de la siguiente manera:

$$qk_0 < a_2 - k_0$$

$$k_0 \frac{q_z}{q_p} < a_2$$

$$\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0} < \frac{a_2 q_p}{q_z}$$

$$1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{A_0} < \frac{a_2 q_p}{q_z}$$

A continuación hacemos un estudio equivalente para el filtro EPF. El circuito RC del filtro EPF debe tener la misma forma de (11.27):

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D_1(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.44)$$

Según (11.24) los polos vienen dado por los ceros de:

$$D(s) = \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{A}\right)D_1(s) - N_{cg}(s) \quad (11.45)$$

Sustituyendo (11.29) para la ganancia del A.O. y definiendo:

$$k_1 = \frac{1}{K} + \frac{1}{A_0} \quad (11.46)$$

se obtiene que $D(s)$ es:

$$D(s) = \frac{s^3}{GB} + s^2 \left(k_1 - a_2 + \frac{\omega_1}{GB q_p} \right) + s \left(k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - a_1 + \frac{\omega_1^2}{GB} \right) + k_1 \omega_1^2 - a_0 \quad (11.47)$$

Para $GB \rightarrow \infty$ se simplifica a:

$$D(s) = s^2(k_1 - a_2) + s \left(k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - a_1 \right) + k_1 \omega_1^2 - a_0 \quad (11.48)$$

Por tanto la frecuencia de polo ω_0 es:

$$\omega_0^2 = \frac{a_0 - k_1 \omega_1^2}{a_2 - k_1} \quad (11.49)$$

que es igual al ENF y por tanto conduce a las mismas conclusiones.

Caso $a_0=a_2=0$

La primera posibilidad de hacer ω_0 independiente de A_o es hacer $a_0=a_2=0$ con lo que $T_{cg}(s)$ es:

$$T_{cg}(s) = \frac{(\omega_1/q_z)s}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.50)$$

La frecuencia de polo resultante es:

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (11.51)$$

y el factor de calidad es:⁷

$$Q = \frac{q_z}{q - (1 - k_1)/k_1} \quad (11.52)$$

Para que el sistema sea estable debe ser $Q > 0$ y por tanto:

$$q > \frac{(1 - k_1)}{k_1} \quad (11.53)$$

Sustituyendo los valores de q y k_1 :

$$\begin{aligned} \frac{q_z}{q_p} - 1 &> \frac{1}{k_1} - 1 \\ \frac{1}{K} + \frac{1}{A_0} &> \frac{q_p}{q_z} \end{aligned} \quad (11.54)$$

Caso $a_0 = a_2 \omega_1^2$

La segunda posibilidad es hacer:

$$a_0 = a_2 \omega_1^2 \quad (11.55)$$

Entonces $T_{cg}(s)$ debe ser de la forma:

$$T_{cg}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.56)$$

Por tanto, la frecuencia de polo es:

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (11.57)$$

y al igual que en el filtro ENF el factor de calidad es:

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_1}{a_2 - k_1} q} \quad (11.58)$$

Para que el sistema sea estable debe ser $Q > 0$ y por tanto:

$$\frac{k_1 q}{a_2 - k_1} < 1$$

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{A_0} < a_2 \frac{q_p}{q_z} \quad (11.59)$$

Esto provoca un problema cuando el circuito se pone en marcha. Cuando el circuito recibe alimentación la ganancia del amplificador crece de alguna forma desde 0 a su valor final. Durante ese tiempo (11.59) no se cumple y por tanto pueden aparecer oscilaciones. Por tanto, en circuitos EPF solo se usa la primera posibilidad con $T_{cg}(s)$ del tipo paso de banda.

Estos diseños hacen Q independiente de K y A_0 . Q es función de ambos parámetros y puede utilizarse k_0 o k_1 para mejorar el valor de Q . Si en el circuito ENF escogemos $K=1$ entonces se obtiene el circuito NF de la Fig. 11.6a. Entonces $k_0 = -1/A_0 \approx 0$ y por tanto, $Q = q_z$.⁸ De forma similar, si escogemos $K=1$ en el circuito EPF obtenemos el circuito PF de la Fig. 11.6b. Entonces $k_1 = 1 + 1/A_0 \approx 1$ y $Q = q_z/q$.⁹

Circuito EPF: sensibilidades del factor de calidad

Una vez minimizadas las sensibilidades de ω_o es interesante considerar las sensibilidades del factor de calidad y utilizar el resto de parámetros libres de diseño para minimizarlas.¹⁰

Circuito ENF: sensibilidades del factor de calidad

Al igual que en el caso anterior se utilizan parámetros de diseño para minimizarlas.¹¹

Desviaciones debido a la dependencia con la frecuencia

La dependencia con la frecuencia del amplificador operacional va a causar desviaciones importantes de las características. No veremos en detalle el efecto del ancho de banda finito y nos limitaremos a escribir los resultados sobre la desviación producida en la frecuencia de polo

8. Tener en cuenta que:

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q}$$

9. Tener en cuenta que:

$$Q = \frac{q_z}{q - (1 - k_1)/k_1}$$

10. Referirse a Sección 2.3 para el cálculo analítico de dichas sensibilidades donde se pueden observar sus dependencias, pero en general en los problemas será más interesante hacer los cálculos desde el principio

11. Referirse a Sección 2.4.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\omega_o}{\omega_o} &\cong -\frac{1}{2Q}\Gamma_{A_0}^Q \frac{1}{|A(j\omega_o)|} \\ \frac{\Delta Q}{Q} &\cong \frac{1}{2Q}\Gamma_{A_0}^Q \frac{1}{|A(j\omega_o)|}\end{aligned}\quad (11.60)$$

Estas ecuaciones muestran que los errores en ω_o y Q son inversamente proporcionales a la ganancia del A.O. a la frecuencia ω_o y que aumentan con el producto ganancia-sensibilidad. De ahí que sea interesante minimizarlo.

Circuitos RC pasivos

Hasta ahora no nos hemos preocupado por la red RC, tan solo hemos comprobado que debe implementar una función de transferencia de la forma:

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (11.61)$$

donde debía cumplirse $a_0 = a_2\omega_1^2$ o bien $a_2 = a_0 = 0$.

Bipuertas LBT

Veamos la bipuerta "loaded bridged T" (LBT) que es una bipuerta complementaria a sí misma, ella y su complementaria tienen la misma topología, y se muestran en la Fig. 11.7.

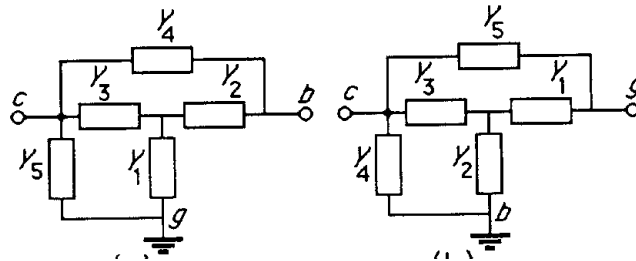


Figura 11.7: Circuito LBT y su complementario.

El análisis de la Fig. 11.7a conduce a la siguiente función de transferencia:¹²

$$T_{cb}(s) = \frac{N_{cb}(s)}{D(s)} = \frac{Y_2 Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (11.62)$$

De forma similar se obtiene para la función de transferencia del circuito de la Fig. 11.7b:

12. Referirse a Sección 2.5

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (11.63)$$

Como era de esperar ambas funciones tienen los mismos polos.

Como ya hemos dicho anteriormente los ceros de transmisión se crean desconectando total o parcialmente elementos conectados a tierra, como se muestra en los circuitos de la Fig. 11.8 correspondientes a los circuitos de la Fig. 11.7.

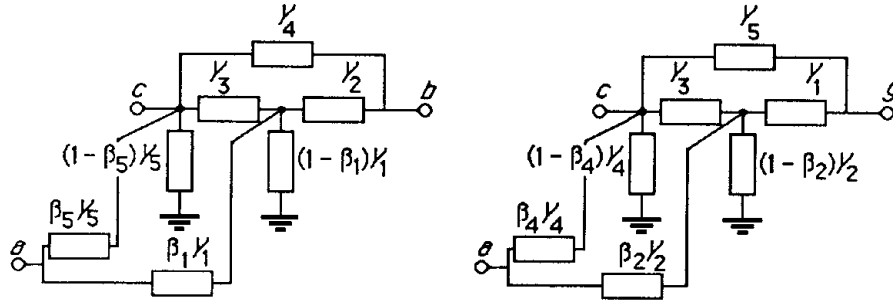


Figura 11.8: Circuitos de la Fig. 11.7 con desconexión parcial de los elementos conectados a tierra.

Las funciones de transferencia $T_{ca}(s)$ para dichos circuitos son:¹³

$$T_{ca}(s) = \frac{V_c}{V_a} \Big|_{V_b=0} = \frac{\beta_1 Y_1 Y_3 + \beta_5 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (11.64)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{V_c}{V_a} \Big|_{V_g=0} = \frac{\beta_2 Y_2 Y_3 + \beta_4 Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)}$$

Veamos la forma concreta que debe tener el circuito para implementar un filtro ENF. De (11.56) se obtiene que los coeficientes de menor y mayor orden de $N_{cb}(s)$ y $D(s)$ deben ser iguales. Parece razonable pensar que Y_5 debe ser 0 ya que afecta sólo los coeficientes de $D(s)$. Para que $T_{cb}(s)$ sea una función de transferencia de segundo orden hay dos opciones:

Caso 1

Consiste en hacer

$$Y_1 = G_1 \quad Y_2 = sC_2 \quad Y_3 = sC_3 \quad Y_4 = G_4 \quad (11.65)$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

¹³. Referirse a Sección 2.5.

$$T_{cb}(s) = \frac{s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4} \quad (11.66)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{s\beta_1 G_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4}$$

Por comparación con (11.56) se obtiene que:

$$a_2 = 1 \quad \omega_1^2 = \frac{G_1 G_4}{C_2 C_3}$$

$$q_z = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2}} \quad q_p = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2}(1 + G_1/G_4)} \quad (11.67)$$

$$q = \frac{q_z}{q_p} - 1 = \frac{G_1/G_4}{1 + C_2/C_3}$$

El circuito resultante para este caso con los posibles elementos conectados a la entrada se muestra en la Fig. 11.9.

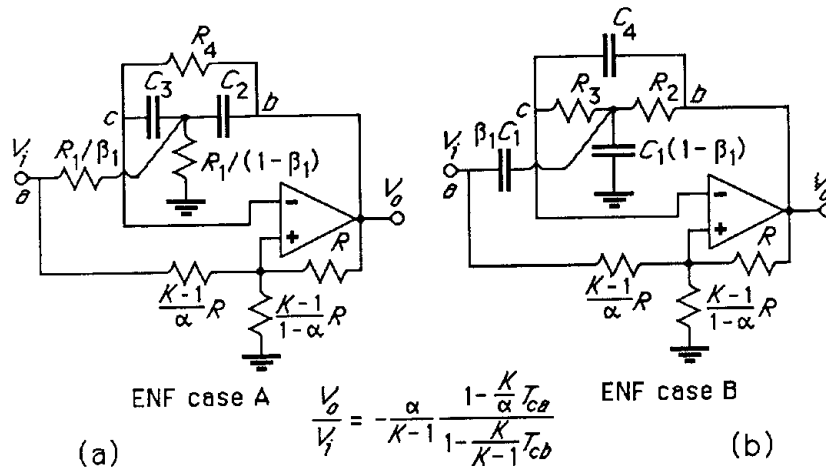


Figura 11.9: Circuitos ENF con bipuertas LBT para los dos casos estudiados.

La función de transferencia implementada es:¹⁴

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[G_4 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{G_1}{C_2} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (11.68)$$

donde,

14. Referirse a Sección 2.5.

$$\omega_o = \omega_1 \quad Q = \frac{q_z}{1 - (K-1)q} \quad (11.69)$$

Este circuito puede realizar funciones de filtrado paso de banda, pasa todo y notch (rechazo de banda) con los valores adecuados de α y β_1 .

Caso 2

Consiste en hacer

$$Y_1 = sC_1 \quad Y_2 = G_2 \quad Y_3 = G_3 \quad Y_4 = sC_4 \quad (11.70)$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

$$T_{cb}(s) = \frac{s^2 C_1 C_4 + s(G_2 + G_3)C_4 + G_2 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3} \quad (11.71)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{s\beta_1 C_1 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3}$$

Por comparación con (11.56) se obtiene que:

$$a_2 = 1 \quad \omega_1^2 = \frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}$$

$$q_z = \frac{\sqrt{C_1/C_4}}{\sqrt{G_2/G_3} + \sqrt{G_3/G_2}} \quad q_p = \frac{\sqrt{C_1/C_4}}{\sqrt{G_2/G_3} + \sqrt{G_3/G_2}(1 + C_1/C_4)} \quad (11.72)$$

$$q = \frac{q_z}{q_p} - 1 = \frac{C_1/C_4}{1 + G_2/G_3}$$

El circuito resultante con los posibles elementos conectados a la entrada, mostrado en la Fig. 11.9b, tiene como función de transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_3}{C_4} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (11.73)$$

donde,

$$\omega_o = \omega_1 \quad Q = \frac{q_z}{1 - (K-1)q} \quad (11.74)$$

Ambos circuitos son equivalentes y pueden utilizarse para implementar una función de transferencia de segundo orden.

11.4 Biquads multiamplificador

Como su propio nombre indica se trata de circuitos con más de un A.O. El hecho de utilizar más amplificadores debe estar justificado con una mejora de las sensibilidades. $S_x^{\omega_o}$ debe tener su mínimo teórico, debe ser también insensible a variaciones en la ganancia del A.O. Un producto ganancia-sensibilidad del orden de Q es de lo mejor que se puede conseguir por lo que las mejoras deben dirigirse a disminuir las sensibilidades pasivas de Q . Una segunda motivación para utilizar más amplificadores es construir distintas funciones de transferencia con la misma estructura de circuito, proporcionando las diferentes funciones de transferencia en los distintos nudos del mismo.

11.4.1 Biquads basados en GICs

Los GICs hemos visto que son circuitos para simulación de inductores. Consideremos un filtro pasivo de segundo orden, el que se muestra en la Fig. 11.10.

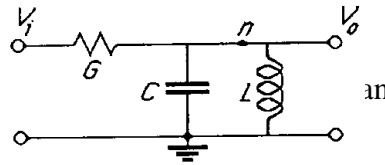


Figura 11.10: Filtro pasivo LC de segundo orden.

La función de transferencia realizada es:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{sC + 1/sL}}{\frac{1}{sC + 1/sL} + \frac{1}{G}} = \frac{sLG}{s^2LC + sGL + 1} = \frac{sG/C}{s^2 + sG/C + 1/LC} \quad (11.75)$$

La técnica se basa en sustituir el inductor por un GIC, uno de los mostrados en la Fig. 10.13. El problema es que debe tomarse la salida del filtro del nodo del inductor que no corresponde a la salida de ningún amplificador operacional. La solución consiste en utilizar un GIC de tipo 1. El circuito ya conectado se muestra en la Fig. 11.11.

En este GIC la tensión de salida del A.O. A1 es proporcional a la tensión del inductor:

$$V_o = V_n \left(1 + \frac{G_5}{G_4} \right) \quad (11.76)$$

Utilizando el modelo ideal de A.O. la admitancia de entrada es:

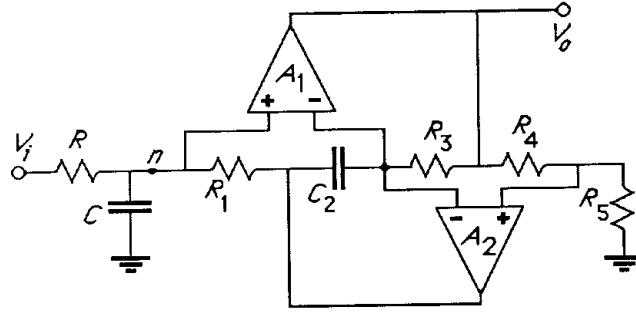


Figura 11.11: Biquad GIC paso de banda.

$$Y_{in} = \frac{Y_1 Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} = \frac{G_1 G_3 G_5}{s C_2 G_4} \quad (11.77)$$

luego el valor del inductor simulado es

$$L = \frac{C_2 G_4}{G_1 G_3 G_5} \quad (11.78)$$

Sustituyendo este valor en (11.75) se obtiene la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s \frac{G}{C} \left(1 + \frac{G_5}{G_4}\right)}{s^2 + s \frac{G}{C} + \frac{G_1 G_3 G_5}{C C_2 G_4}} \quad (11.79)$$

Luego la frecuencia de polo y el factor de calidad son:

$$\omega_o^2 = \frac{G_1 G_3 G_5}{C C_2 G_4} \quad Q = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{C_2}} \sqrt{\frac{G_1 G_3 G_5}{G_4}} \quad (11.80)$$

Las sensibilidades pasivas son:

$$\left| S_x^{\omega_o} \right| = \frac{1}{2} \quad \left| S_x^Q \right| = \frac{1}{2} \quad S_R^Q = 1 \quad (11.81)$$

Se ha conseguido con este circuito unas sensibilidades pasivas muy reducidas. Para que este circuito sea conveniente deberemos tener también sensibilidades activas bajas.

Para estudiar las sensibilidades activas es necesario analizar el GIC con un modelo del A.O. no ideal. Consideremos el GIC de tipo I de la Fig. 11.12.

El análisis del circuito de la Fig. 11.12 considerando una ganancia genérica $A(s)$ para los A.O. conduce a la siguiente expresión para la admitancia de entrada:

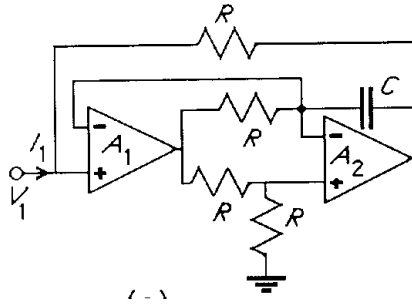


Figura 11.12: GIC de tipo I.

$$Y_{in}(s) = \frac{Y_1 Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} \frac{1 + \frac{1}{A_2} \left(1 + \frac{Y_4}{Y_5}\right) + \frac{1}{A_1} \frac{Y_2}{Y_3} \left(1 + \frac{Y_4}{Y_5}\right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_3}\right) \left(1 + \frac{Y_4}{Y_5}\right)}{1 + \frac{1}{A_1} \left(1 + \frac{Y_5}{Y_4}\right) + \frac{1}{A_2} \frac{Y_3}{Y_2} \left(1 + \frac{Y_5}{Y_4}\right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(1 + \frac{Y_3}{Y_2}\right) \left(1 + \frac{Y_5}{Y_4}\right)} \quad (11.82)$$

Vamos a utilizar el modelo de un polo:

$$A(s) = \frac{GB}{s} \quad (11.83)$$

y sustituimos los valores de las admitancias:

$$Y_1 = G_1 \quad Y_2 = sC_2 \quad Y_3 = G_3 \quad Y_4 = G_4 \quad Y_5 = G_5 \quad (11.84)$$

resulta que la admitancia del inductor simulado es:

$$Y_L = \frac{1}{sL_o} \left[\frac{1 + \frac{s}{GB_2} \frac{H}{H-1} + \frac{s^2}{GB_1} \frac{C_2}{G_3} \frac{H}{H-1}}{1 + \frac{s}{GB_1} \frac{H}{H-1} + \frac{1}{GB_2} \frac{G_3}{C_2} \frac{H}{H-1}} \right] \quad (11.85)$$

donde hemos despreciado los términos de segundo orden porque suponemos que $\omega^2 \ll GB_1 GB_2$ y

$$L_o = \frac{C_2 G_4}{G_1 G_3 G_5} \quad (11.86)$$

es el valor del inductor nominal y

$$H = 1 + \frac{G_5}{G_4} \quad (11.87)$$

Haciendo $s=j\omega$:

$$Y_L \cong \frac{1}{j\omega L_o} \left[\frac{1 + \frac{H}{H-1} \left(\frac{j\omega}{GB_2} - \frac{\omega^2 C_2}{GB_1 G_3} \right)}{1 + H \left(\frac{j\omega}{GB_1} + \frac{G_3}{GB_2 C_2} \right)} \right] \quad (11.88)$$

Si $x \ll 1$ se puede hacer la aproximación:

$$\frac{1}{1+x} \cong 1-x \quad (11.89)$$

por lo que aplicándolo a (11.88) se obtiene:

$$Y_L \cong \frac{1}{j\omega L_o} \left(1 - \frac{H}{H-1} \frac{\omega^2 C_2}{GB_1 G_3} + \frac{H}{H-1} \frac{j\omega}{GB_2} \right) \left(1 - H \frac{j\omega}{GB_1} - H \frac{G_3}{GB_2 C_2} \right) \quad (11.90)$$

Haciendo el producto y haciendo la misma operación anterior de eliminar los términos de segundo orden:

$$Y_L \cong \frac{1}{j\omega L_o} \left(1 - \frac{H}{H-1} \frac{\omega^2 C_2}{GB_1 G_3} - H \frac{G_3}{GB_2 C_2} \right) - \frac{1}{L_o} \left(\frac{H}{GB_1} - \frac{H}{H-1} \frac{1}{GB_2} \right) = \frac{1}{j\omega L} + G_L \quad (11.91)$$

Al considerar un modelo de un polo para los A.O. el inductor simulado tiene pérdidas (reflejadas en la conductancia en paralelo G_L) y el inductor tiene un cierto error.

La conductancia G_L se puede anular haciendo:

$$\frac{H}{GB_1} - \frac{H}{H-1} \frac{1}{GB_2} = 0 \quad (11.92)$$

Es decir,

$$H-1 = \frac{GB_1}{GB_2} \cong 1 \quad (11.93)$$

luego

$$\frac{G_5}{G_4} = 1 \quad (11.94)$$

y por tanto $H=2$.

Para minimizar el error del inductor hay que minimizar:

$$\frac{\omega^2 C_2}{GB_1 G_3} + \frac{G_3}{GB_2 C_2} \quad (11.95)$$

Depende de la frecuencia por lo que interesa evaluarlo a una frecuencia crítica, en nuestro caso $\omega = \omega_c = \omega_o$. Si suponemos además que $GB_1 \cong GB_2$ hay que minimizar:

$$\frac{\omega_o^2 C_2}{G_3} + \frac{G_3}{C_2} \quad (11.96)$$

o bien:

$$\frac{\omega_o C_2}{G_3} + \frac{G_3}{C_2 \omega_o} \quad (11.97)$$

Esto se minimiza para:

$$\frac{\omega_o C_2}{G_3} = 1 \quad (11.98)$$

por lo que:

$$C_2 = \frac{1}{\omega_o R_3} \quad (11.99)$$

Con estas opciones el valor nominal del inductor es

$$L_o = \frac{R_1}{\omega_o} \quad (11.100)$$

Por conveniencia escogemos las resistencias iguales:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_3 = R_4 = R_5 = R_o \\ C &= C_2 = \frac{1}{\omega_o R_o} \\ G &= \frac{1}{R} = \frac{\omega_o C}{Q} = \frac{1}{R_o Q} \end{aligned} \quad (11.101)$$

En general el producto ganancia-ancho de banda de los dos A.O. no será igual por lo que es necesario realizar algún ajuste de R_4 y R_5 .

11.4.2 Biquads con integradores

La principal ventaja de estos biquads es la versatilidad, al posibilitar la obtención de funciones de transferencia de distintos tipos simultáneamente en las diferentes salidas de los am-

plificadores operacionales. Están basados en el uso de integradores y amplificadores sumadores.

Consideremos una función de transferencia de segundo orden:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{N(s)}{s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (11.102)$$

Esta ecuación la podemos reordenar, dividir por s^2 y escribirla de la forma:

$$V_o = -\frac{\omega_o/Q}{s} V_o - \frac{\omega_o^2}{s^2} V_o + \frac{N(s)}{s^2} V_i \quad (11.103)$$

Vamos a considerar por ejemplo el caso en que $N(s)=H_o s^2$. Entonces (11.103) puede representarse mediante el diagrama de bloques de la Fig. 11.13.

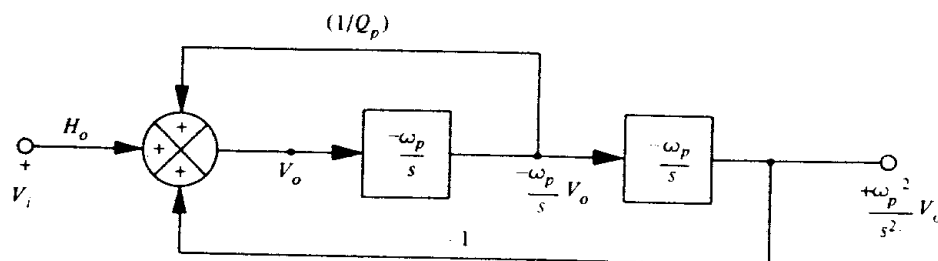


Figura 11.13: Diagrama de bloques del biquad.

Puede observarse que este diagrama de bloques tiene dos lazos de realimentación, uno de ellos controla ω_o mientras que el otro controla el factor de calidad Q . Por tanto, estos parámetros pueden controlarse independientemente lo que constituye otra ventaja adicional sobre los biquads con un solo amplificador operacional.

Biquad KHN

Una gran cantidad de biquads de este tipo se derivan del biquad KHN (en honor de sus inventores Kerwin, Huelsman y Newcomb), que se muestra en la Fig. 11.14. También se denomina filtro de variables de estado porque se deriva de la representación en variables de estado de la función de transferencia de segundo orden.

Suponiendo que los amplificadores operacionales son ideales se obtienen las siguientes funciones de transferencia:

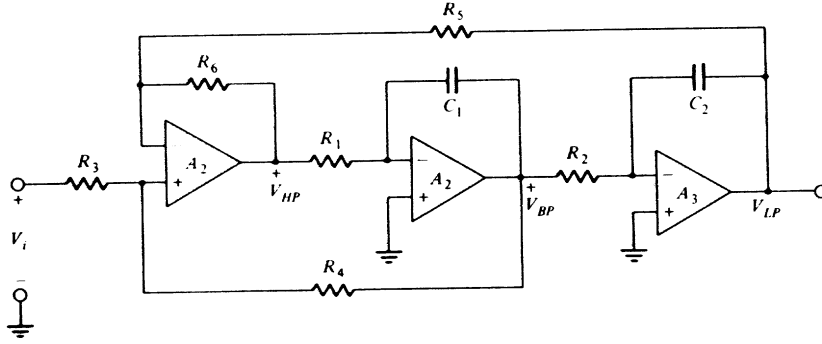


Figura 11.14: El biquad KHN.

$$V_{BP} = -\frac{V_{HP}}{R_1 C_1 s}$$

$$V_{LP} = -\frac{V_{BP}}{R_2 C_2 s} = \frac{V_{HP}}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2} \quad (11.104)$$

y aplicando al primer amplificador:

$$V_{HP} = A_1 \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} V_{BP} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_i - \frac{R_5}{R_5 + R_6} V_{HP} - \frac{R_6}{R_5 + R_6} V_{LP} \right] =$$

$$= A_1 \left[\frac{R_3}{R_3 + R_4} \left(-\frac{V_{HP}}{R_1 C_1 s} \right) + \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_i - \frac{R_5}{R_5 + R_6} V_{HP} - \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{V_{HP}}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2} \right] \quad (11.105)$$

Despejando V_{HP} :

$$V_{HP} \left[1 + \frac{A_1 R_3}{R_3 + R_4} \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{A_1 R_5}{R_5 + R_6} + \frac{A_1 R_6}{R_5 + R_6} \frac{1}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2} \right] = \frac{A_1 R_4}{R_3 + R_4} V_i \quad (11.106)$$

por lo que la función de transferencia suponiendo modelo ideal del amplificador operacional $A_1 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\frac{V_{HP}}{V_i} &= \frac{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}{\frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{R_5}{R_5 + R_6} + \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{1}{s^2 R_1 C_1 R_2 C_2}} = \\
&= \frac{s^2 \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) / \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)}{s^2 + s \frac{\left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) / \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)}{R_1 C_1} + \frac{R_6 / R_5}{R_1 R_2 C_1 C_2}}
\end{aligned} \tag{11.107}$$

y ω_o y Q se pueden extraer del denominador:

$$\omega_o^2 = \frac{R_6 / R_5}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad Q = \frac{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \sqrt{R_6 R_1 C_1}}{\left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right) \sqrt{R_5 R_2 C_2}} \tag{11.108}$$

Las sensibilidades de ω_o y Q son:

$$\begin{aligned}
S_{R_1, R_2, R_5, C_1, C_2}^{\omega_o} &= -0,5 = -S_{R_6}^{\omega_o} \\
S_{R_1, C_1}^Q &= -S_{R_2, C_2}^Q = 0,5 \\
S_{R_4}^Q &= -S_{R_3}^Q = \frac{R_4}{R_4 + R_3} < 1 \\
S_{R_5}^Q &= -S_{R_6}^Q = -\frac{Q}{2} \frac{R_5 - R_6}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \frac{\sqrt{R_2 C_2}}{\sqrt{R_5 R_6 R_1 C_1}}
\end{aligned} \tag{11.109}$$

Aunque Q puede ser grande la sensibilidad puede hacerse nula haciendo $R_5 = R_6$. Las bajas sensibilidades constituyen una de las mejores cualidades de este biquad.

Un procedimiento de diseño simple consiste en hacer:

$$\begin{aligned}
R_5 &= R_6 \\
R_1 &= R_2 = R \\
C_1 &= C_2 = C \\
R &= \frac{1}{\omega_o C}
\end{aligned} \tag{11.110}$$

Entonces de la ecuación del factor de calidad se obtiene:

$$2Q = 1 + \frac{R_4}{R_3} \quad (11.111)$$

luego

$$R_4 = R_3(2Q-1) \quad (11.112)$$

y entonces la ganancia para filtros paso de baja y paso de alta está limitada a:

$$H_o = 2 - \frac{1}{Q} \quad (11.113)$$

y para filtros paso de banda:

$$H_\theta = 1 - 2Q \quad (11.114)$$

Los valores de ω_o y Q se controlan independientemente ajustando R_1 y/o R_2 para ω_o y R_4 para Q . El parámetro R_6/R_5 que se asignado la unidad anteriormente puede considerarse parámetro libre para minimizar la sensibilidad activa de los polos obteniéndose entonces:

$$\frac{R_6}{R_5} = 0,732 \quad (11.115)$$

Biquad Tow-Thomas

Otro biquad muy utilizado es el biquad Tow-Thomas que se muestra en la Fig. 11.15, en el que se puede observar cómo se realiza la suma en nudo de tierra virtual.

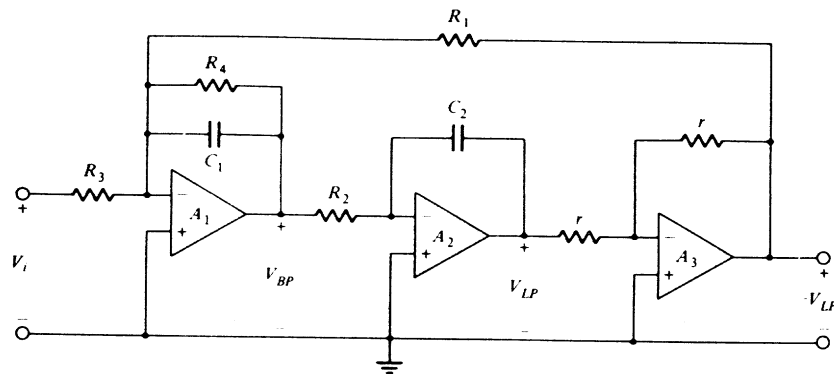


Figura 11.15: Biquad Tow-Thomas

Como se observa en la figura este biquad proporciona funciones de transferencia paso de baja y paso de banda. Una modificación de este biquad también es capaz de proporcionar paso de alta.

Una ventaja de este circuito es que al igual que en el KHN ω_o y Q se controlan independientemente pero en este caso Q y H_o se controlan mediante relaciones simples de resistencias

en lugar de conjuntos de ellas. Otra ventaja es que todos los terminales no inversores de los amplificadores están a tierra por lo que no hay problemas con el modo común.

Considerando amplificadores ideales las funciones son:

$$\begin{aligned}\frac{V_{BP}}{V_i} &= \frac{-s/(R_3 C_1)}{s^2 + \frac{s}{R_4 C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ \frac{V_{LP}}{V_i} &= \frac{1/(R_2 R_3 C_1 C_2)}{s^2 + \frac{s}{R_4 C_1} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}\end{aligned}\quad (11.116)$$

Las sensibilidades de ω_o y Q respecto a los elementos pasivos salen 0.5 o 1. Un posible procedimiento de diseño es hacer:

$$\begin{aligned}R_1 &= R_2 = R \\ C_1 &= C_2 = C \\ R &= \frac{1}{\omega_o C} \\ R_4 &= QR\end{aligned}\quad (11.117)$$

Respecto a R_3 :

$$\begin{aligned}R_3 &= \frac{R}{H_o} \quad \text{para paso de baja} \\ R_3 &= \frac{Q}{H_o} R \quad \text{para paso de banda}\end{aligned}\quad (11.118)$$

Cuando se tienen en cuenta los productos ganancia ancho de banda de los amplificadores se obtienen unas desviaciones de ω_o y Q :

$$\begin{aligned}\omega'_o &= \omega_o \left[1 - \frac{\omega_o}{GB} \left(1 + \frac{H_o}{2Q} \right) \right] \\ Q' &= \frac{Q}{1 - 4Q \frac{\omega_o}{GB}}\end{aligned}\quad (11.119)$$

Las desviaciones pueden ser muy importantes pudiendo hacerse inestable para $\omega_o Q > \frac{GB}{4}$.

Una posible solución es hacer una predistorsión de los valores de forma que al final obtenga los valores correctos.

Otra posibilidad consiste en conectar un condensador de compensación entre C_1 y C_2 de forma similar a como se hace en los esquemas de compensación pasiva de los integradores Miller.

Antes de conectar el condensador el retraso de fase es:

$$\Delta\phi_1 = -\text{atan}\frac{1}{|A_1|} \quad \Delta\phi_2 = -\text{atan}\frac{1}{|A_2|} \quad (11.120)$$

para los integradores y

$$\Delta\phi_3 = -2\text{atan}\frac{1}{|A_3|} \quad (11.121)$$

para el amplificador por lo que el retraso de fase neto es:

$$\Delta\phi = -4\text{atan}\frac{\omega}{GB} \quad (11.122)$$

El condensador introduce un adelanto de fase igual a $\omega C_c R_2$ por lo que se puede escoger C_c para compensar el retraso de fase.

Los biquads KHN implementan funciones LP, BP y HP mientras que el Tow-Thomas sólo LP y BP. Para obtener ceros de transmisión finitos es necesario utilizar técnicas de suma o bien 'feedforward'.

La técnica de suma se ha aplicado de manera más popular al biquad KHN y se ilustra en la Fig. 11.16.

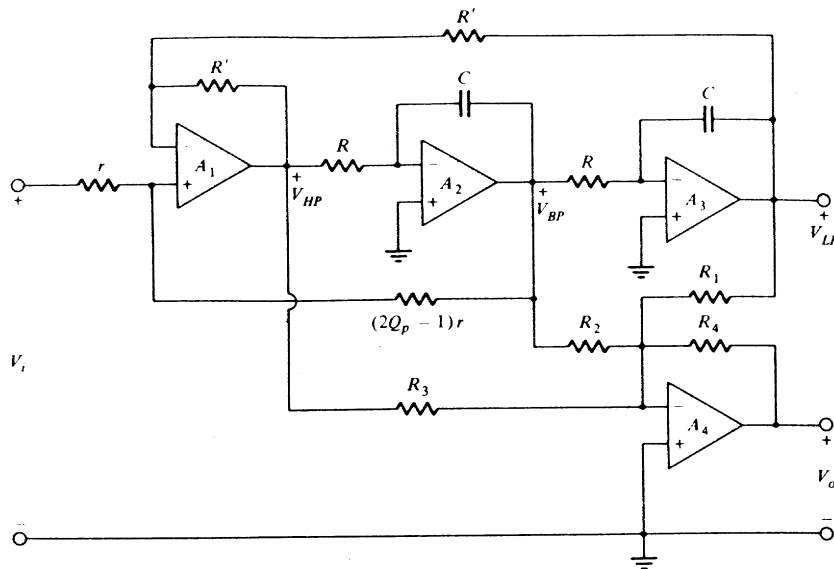


Figura 11.16: Realización de ceros de transmisión arbitrarios con el biquad KHN.

Suponiendo amplificadores operacionales ideales se obtiene que la función de transferencia es:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_4}{R_3} \frac{2Q-1}{Q} \frac{s^2 - \left(\frac{R_3}{R_2}\right)\omega_o Q + \frac{R_3}{R_1}\omega_o^2}{s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (11.123)$$

Se pueden conseguir filtros rechazo de banda (tanto high-pass notch como low-pass notch) mediante:

$$\begin{aligned} R_2 &= \infty \\ R_3 &= \frac{R_4 \left(2 - \frac{1}{Q}\right)}{H_o} \\ R_1 &= R_3 \frac{\omega_o^2}{\omega_z^2} \end{aligned} \quad (11.124)$$

y R_4 puede ser escogido arbitrariamente.

También se pueden hacer sin dificultades filtros pasa todo de la forma:

$$\frac{V_o}{V_i} = -H_o \frac{s^2 - \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (11.125)$$

Para el biquad Tow-Thomas se suele utilizar la técnica 'feedforward', consistente en desconectar parcialmente elementos conectados a tierra o conectar elementos a nudos de tierra virtual.

Para el biquad Tow-Thomas resulta el circuito de la Fig. 11.17.

Esta técnica no requiere otro amplificador pero requiere el condensador C_3 .

La función de transferencia implementada es:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{C_3}{C} \frac{s^2 + s \left[1 - \frac{rR_3}{RR_2}\right] / (R_3 C_3) + \frac{(RC)\omega_o^2}{R_1 C_3}}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2} \quad (11.126)$$

con $\omega_o = \frac{1}{RC}$.

Se pueden conseguir las siguientes funciones de transferencia (haciendo $C_3 = C$ por comodidad):

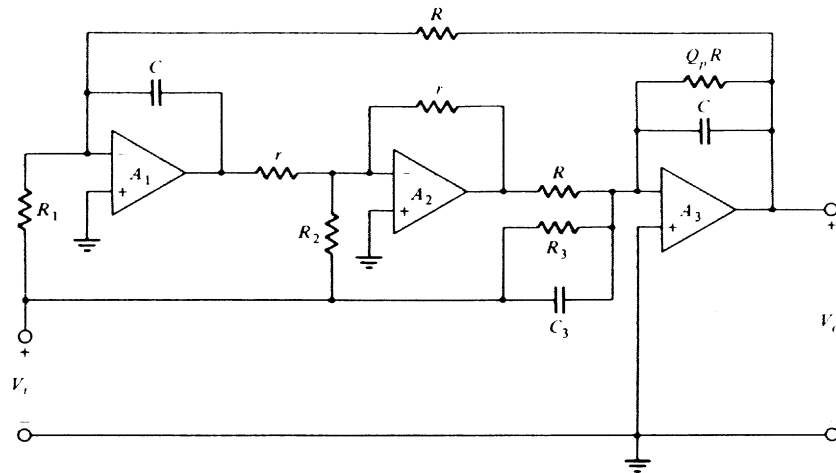


Figura 11.17: Realización de ceros de transmisión arbitrarios usando el biquad Tow-Thomas.

PASO DEBAJA	$R_2 = R_3 = \infty$	$C_3 = 0$	$\frac{R_1}{R} = \frac{1}{H_o}$	
PASO DE BANDA	$R_1 = \infty$	$C_3 = 0$		
	$R_2 = \infty$	$\frac{R}{R_3} = \frac{H_o}{Q}$	NO INVERSOR	
	$R_3 = \infty$	$\frac{r}{R_2} = \frac{H_o}{Q}$	INVERSOR	(11.127)
PASO DE ALTA	$R_1 = R_2 = R_3 = \infty$	$H_o = 1$	INVERSOR	
RECHAZO DE BANDA	$R_2 = R_3 = \infty$	$R_1 = R \frac{\omega_o^2}{\omega_z}$	$H_o = 1$	INVERSOR
(HIGH-PASS y LOW-PASS)				
PASA-TODO	$R_3 = \infty$	$R_1 = R$	$R_2 = Qr$	

11.5 Biquads con OTAs

El diseño con OTAs es muy sencillo. Consideremos por ejemplo la estructura de dos integradores anterior junto con otra que también se muestra en la Fig. 11.18 y es equivalente a la anterior.

En ambas estructuras los polos están dados por:

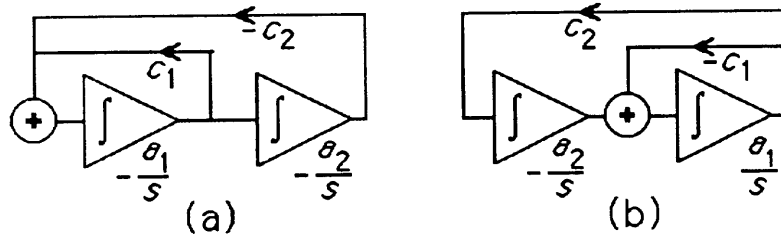


Figura 11.18: Estructuras de biquads con integradores.

$$s^2 + s\frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \quad (11.128)$$

Únicamente necesitamos pues integradores inversores y no inversores, sumadores y amplificadores o factores de escalado que pueden conseguirse con los circuitos de la Fig. 11.19.

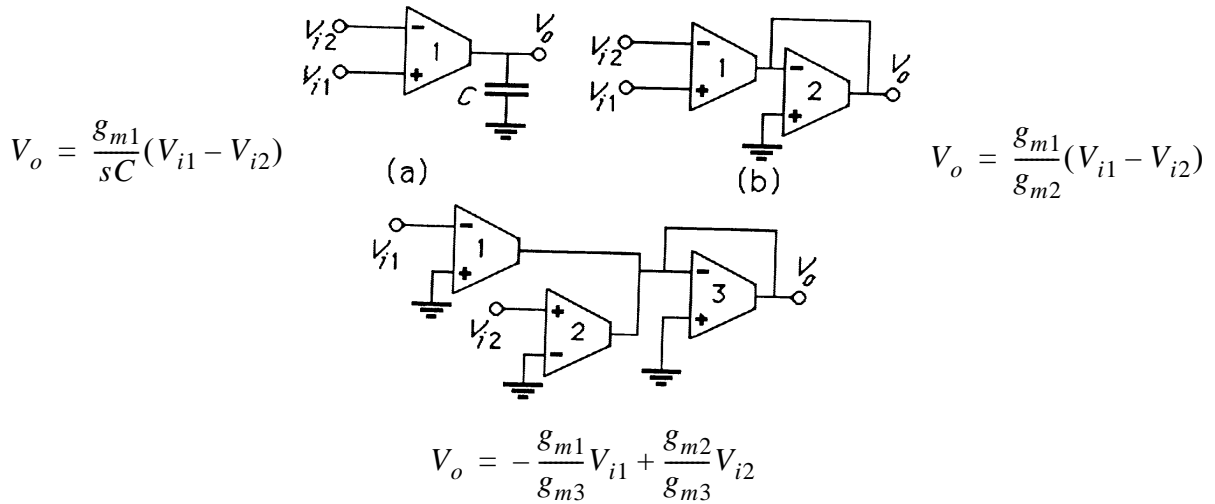


Figura 11.19: Integradores, amplificadores y sumadores con OTAs.

Conectando los bloques anteriores resulta los circuitos de la Fig. 11.20 que tienen los siguientes denominadores:

$$s^2 + s\frac{1}{C_1} \frac{g_{m1}g_{m3}}{g_{m5}} + \frac{g_{m1}g_{m2}g_{m4}}{C_1 C_2 g_{m5}} \quad (11.129)$$

$$s^2 + s\frac{1}{C_2} \frac{g_{m2}g_{m3}}{g_{m4}} + \frac{g_{m1}g_{m2}g_{m5}}{C_1 C_2 g_{m6}}$$

Para circuitos integrados es conveniente coger todas las transconductancias iguales por lo que resulta:

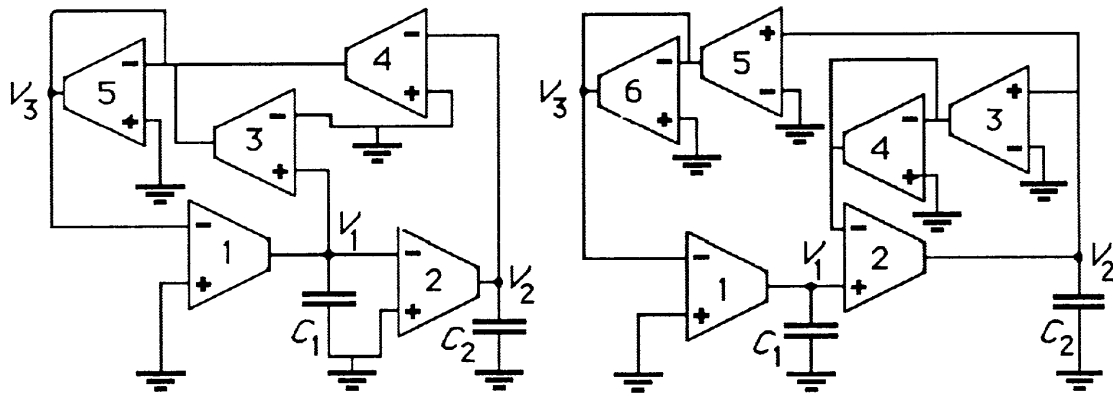


Figura 11.20: Biquads con OTAs.

$$\omega_o = \frac{g_m}{\sqrt{C_1 C_2}} \quad Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad (11.130)$$

Las sensibilidades son bajas pero la relación de condensadores es alta.

Puede observarse que los OTAs 3, 4, 5 y 6 pueden eliminarse y sustituirse por cortocircuitos pero es interesante mantenerlos para facilitar el escalado de tensión y dar mayor flexibilidad a los ceros de transmisión. Para establecer ceros de transmisión se pueden conectar tensiones de entrada a terminales que estaban a tierra. Asimismo se pueden inyectar intensidades a nodos de impedancia finita.

1. Sensibilidad de filtros activos de segundo orden

1.1 Sensibilidad de los polos de una sección de segundo orden

Una función de transferencia de segundo orden genérica es:

$$H_2(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (1)$$

La expresión de los polos es:

$$p_{1,2} = -\omega_o \left(\frac{1}{2Q} \mp j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad (2)$$

y aplicando la definición de sensibilidad semirelativa:

$$\begin{aligned} Q_x^{p_1} &= x \frac{\partial p_1}{\partial x} = -x \left(\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \frac{\partial \omega_o}{\partial x} - x \omega_o \left(-\frac{1}{2Q^2} - j \frac{\frac{1}{4Q^3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} = \\ &= p_1 S_x^{\omega_o} + S_x^Q \frac{\frac{p_1}{2Q}}{\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \left(-1 - \frac{\frac{j}{2Q}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) = \\ &= p_1 S_x^{\omega_o} + S_x^Q \frac{\frac{p_1}{2Q}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \left(\frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} - j \frac{1}{2Q}}{\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \right) = p_1 S_x^{\omega_o} - \frac{j p_1 S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 Sensibilidad de la función de transferencia

Si suponemos que en la ecuación (1) x no afecta a los ceros y a la ganancia en dc se tiene que:

$$S_x^{H_2(s)} = \frac{Q_x^{p_1}}{s - p_1} + \frac{(Q_x^{p_1})^*}{s - p_1^*} \quad (4)$$

Reducimos a denominador común y utilizamos las expresiones para p_1 y $Q_x^{p_1}$:

$$p_1 = -\omega_o \left(\frac{1}{2Q} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \quad Q_x^{p_1} = p_1 S_x^{\omega_o} - \frac{j p_1 S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad (5)$$

El producto de los dos factores del denominador de (4) proporciona la ecuación de segundo grado. Veamos el numerador:

$$\begin{aligned}
 (s - p_1^*)p_1 \left(S_x^{\omega_o} - j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) + p_1^* \left(S_x^{\omega_o} + j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) (s - p_1) &= \\
 = sp_1 \left(S_x^{\omega_o} - j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) + sp_1^* \left(S_x^{\omega_o} + j \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right) - p_1 p_1^* 2S_x^{\omega_o} &= \\
 = 2s \operatorname{Re}(p_1) S_x^{\omega_o} + 2s \operatorname{Im}(p_1) \frac{S_x^Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} - 2\omega_o^2 S_x^{\omega_o} &= \\
 = -s \frac{\omega_o}{Q} S_x^{\omega_o} + 2s \omega_o \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}{\sqrt{4Q^2 - 1}} S_x^Q - 2\omega_o^2 S_x^{\omega_o} &=
 \end{aligned} \tag{6}$$

O sea que la sensibilidad de la función de transferencia resulta:

$$S_x^{H_2(s)} = - \frac{\left(2\omega_o^2 + \frac{s\omega_o}{Q} \right) S_x^{\omega_o} - \frac{s\omega_o}{Q} S_x^Q}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \tag{7}$$

Haciendo uso de:

$$S_x^{H(j\omega)} = S_x^{|H(j\omega)|} + jQ_x^{\phi(\omega)} \tag{8}$$

se puede obtener la sensibilidad de la magnitud:

$$\begin{aligned}
 S_x^{|H_2(j\omega)|} &= - \frac{2(1 - \omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^{\omega_o} + \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2} S_x^Q = \\
 &= S_{\omega_o}^{|H_2|} S_x^{\omega_o} + S_Q^{|H_2|} S_x^Q
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\omega_n = \omega/\omega_o$ es una frecuencia normalizada.

Por tanto,

$$S_{\omega_o}^{|H_2|} = -\frac{2(1 - \omega_n^2) + \omega_n^2/Q^2}{(1 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2}$$

$$S_Q^{|H_2|} = \frac{\omega_n^2/Q^2}{(1 - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2/Q^2}$$
(10)

La representación de estas sensibilidades en la Fig. 1 muestra que son fuertemente dependientes con la frecuencia. Los máximos y mínimos se producen para:

$$\max \left\{ S_Q^{|H_2|} \right\} = 1 \quad \text{para} \quad \omega = \omega_o$$
(11)

y para Q grande:

$$\max \left\{ S_{\omega_o}^{|H_2|} \right\} \cong \frac{Q}{1 + 1/Q} \quad \text{para} \quad \omega \cong \omega_o \left(1 + \frac{1}{2Q} \right)$$

$$\min \left\{ S_{\omega_o}^{|H_2|} \right\} \cong -\frac{Q}{1 - 1/Q} \quad \text{para} \quad \omega \cong \omega_o \left(1 - \frac{1}{2Q} \right)$$
(12)

Puede observarse que los valores extremos ocurren aproximadamente en la frecuencia de 3 dB de la función de segundo orden.

2. Biquads monoamplificador

2.1 Circuitos ENF: condiciones para minimizar sensibilidades

Caso $a_0 = a_2 \omega_1^2$

En este caso, T_{cb} queda:

$$T_{cb}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2}$$
(13)

De

$$\omega_0^2 = \frac{a_0 - k_0 \omega_1^2}{a_2 - k_0}$$
(14)

se obtiene que

$$\omega_0 = \omega_1$$
(15)

Veamos el factor de calidad. El numerador del denominador de $H(s)$, que va a dar el denominador de la función de transferencia tiene la forma:

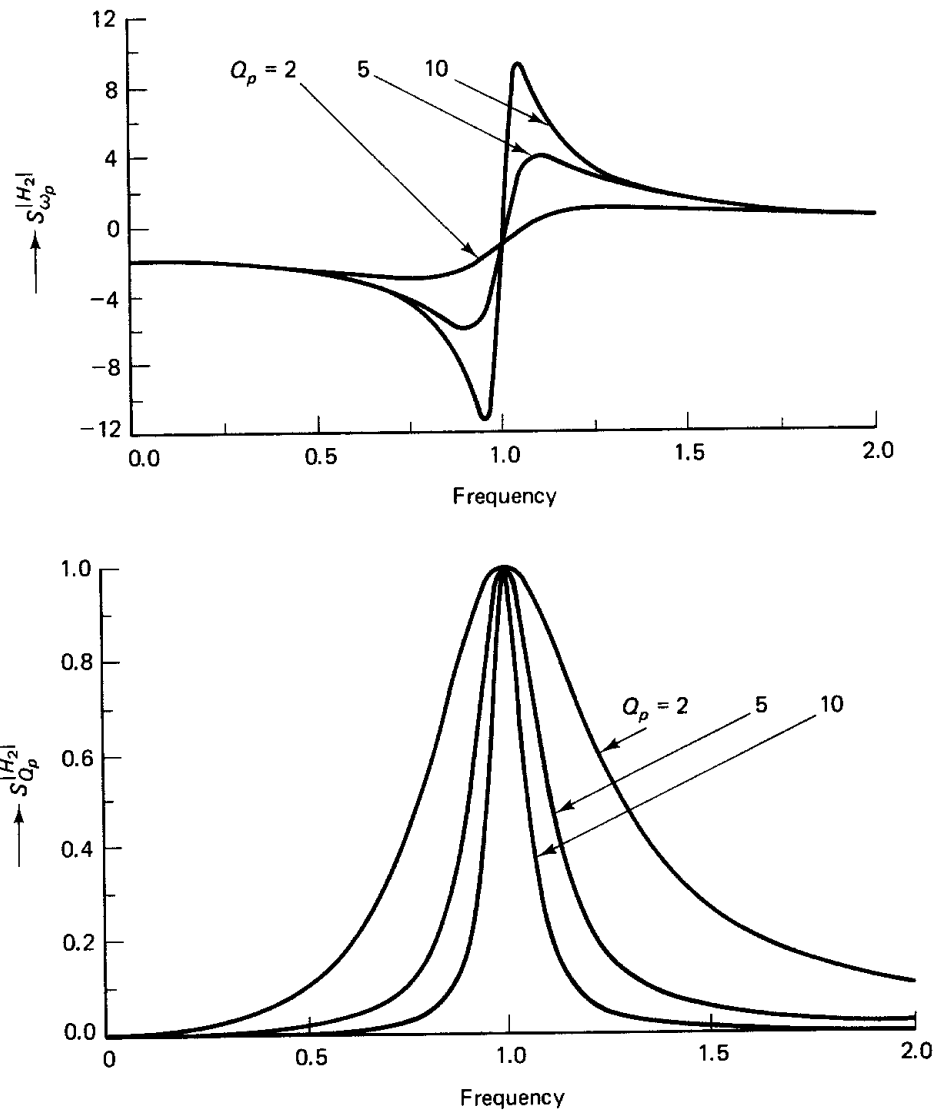


Figura 1: Sensibilidades de la magnitud de la función de transferencia a la frecuencia de polo ω_p y al factor de calidad de los polos Q_p .

$$\begin{aligned}
 N_{cb}(s) - \left(\frac{K-1}{K} - \frac{1}{A_0} \right) D_1(s) &= N_{cb}(s) - k_0 D_1(s) = \\
 &= a_2(s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2) - k_0(s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2)
 \end{aligned} \tag{16}$$

Si comparamos esto con la forma general del denominador de una función de transferencia de segundo orden:

$$s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \tag{17}$$

se obtiene igualando que:

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{a_2 \frac{\omega_1}{q_z} - k_0 \frac{\omega_1}{q_p}}{a_2 - k_0}$$

$$(a_2 q_p - k_0 q_z) Q = q_z q_p (a_2 - k_0) \quad (18)$$

$$Q = \frac{q_z q_p (a_2 - k_0)}{a_2 q_p - k_0 q_z} = \frac{q_z (a_2 - k_0)}{a_2 - k_0 (1 + q)} = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q}$$

donde

$$\frac{q_z}{q_p} = 1 + q \quad (19)$$

2.2 Circuitos EPF: condiciones para minimizar sensibilidades

Caso $a_0=a_2=0$

Entonces $T_{cg}(s)$ es:

$$T_{cg}(s) = \frac{(\omega_1/q_z)s}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (20)$$

La frecuencia de polo resultante es:

$$\omega_0 = \omega_1 \quad (21)$$

Veamos el factor de calidad. El numerador del denominador de $H(s)$, que va a dar el denominador de la función de transferencia tiene la forma:

$$\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{A_0}\right) D_1(s) - N_{cg}(s) = k_1 D_1(s) - N_{cg}(s) =$$

$$= k_1 (s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2) - s\omega_1/q_z \quad (22)$$

Si comparamos esto con la forma general del denominador de una función de transferencia de segundo orden:

$$s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \quad (23)$$

se obtiene igualando que:

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{k_1 \frac{\omega_1}{q_p} - \frac{\omega_1}{q_z}}{k_1}$$

$$(k_1 q_z - q_p) Q = q_z q_p k_1 \quad (24)$$

$$Q = \frac{q_z q_p k_1}{k_1 q_z - q_p} = \frac{q_z}{1 + q - \frac{1}{k_1}} = \frac{q_z}{q - (1 - k_1)/k_1}$$

2.3 Circuito EPF: sensibilidades del factor de calidad

Es interesante considerar ahora las sensibilidades del factor de calidad. Consideremos primero la estructura EPF. Las sensibilidades del factor de calidad son:

$$S_{k_1}^Q = \frac{k_1}{Q} \left(-\frac{q_z/k_1^2}{\left(q - \frac{1-k_1}{k_1}\right)^2} \right) = -\frac{1}{k_1} \frac{Q}{q_z} = -\frac{1}{k_1} \frac{1}{1+q} \frac{Q}{q_p} \quad (25)$$

Las demás sensibilidades pasivas:

$$S_x^Q = S_{q_z}^Q S_x^{q_z} + S_q^Q S_x^q = S_x^{q_z} - \frac{q}{Q} \frac{q_z}{\left(q - \frac{1-k_1}{k_1}\right)^2} S_x^q = S_x^{q_z} - q \frac{Q}{q_z} S_x^q = S_x^{q_z} - \frac{q}{1+q} \frac{Q}{q_p} S_x^q \quad (26)$$

El producto ganancia-sensibilidad resulta:

$$\Gamma_{A_0}^Q = A_0 S_{A_0}^Q = A_0 S_{k_1}^Q S_{A_0}^{k_1} = A_0 S_{k_1}^Q \frac{A_0}{k_1} \left(-\frac{1}{A_0^2} \right) = \frac{1}{k_1^2} \frac{Q}{q_z} = \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{1+q} \frac{Q}{q_p} \quad (27)$$

El cociente $q_z/q_p=1+q$ es un parámetro de diseño libre que puede utilizarse para minimizar las sensibilidades. Despejando k_1 de

$$Q = \frac{q_z}{q - (1 - k_1)/k_1} \quad (28)$$

se obtiene:

$$k_1 = \frac{1}{1 + q - q_z/Q} = \frac{1}{1 + q} \frac{1}{1 - q_p/Q} \quad (29)$$

y sustituyendo en (25) y (27) se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_{k_1}^Q &= -\left(1 - \frac{q_p}{Q}\right) \frac{Q}{q_p} = -\left(\frac{Q}{q_p} - 1\right) \\
\Gamma_{A_0}^Q &= (1+q) \left(1 - \frac{q_p}{Q}\right)^2 \frac{Q}{q_p} = (1+q) \left(\frac{Q}{q_p} - 2 + \frac{q_p}{Q}\right) \cong (1+q) \frac{Q}{q_p}
\end{aligned} \tag{30}$$

donde hemos supuesto que $Q \gg q_p$. Puede observarse que ambas sensibilidades pueden ser grandes. Respecto a las otras sensibilidades hay que remitirse a cada caso particular.

2.4 Circuito ENF: sensibilidades del factor de calidad

Veamos ahora las sensibilidades del factor de calidad para el circuito ENF a partir de la expresión del factor de calidad del mismo:

$$\begin{aligned}
S_{k_0}^Q &= \frac{k_0}{Q} \left(\frac{q_z q a_2 / (a_2 - k_0)^2}{\left(1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q\right)^2} \right) = \frac{Q}{q_z} k_0 q \frac{a_2}{(a_2 - k_0)^2} = \frac{a_2}{a_2 - k_0} \left(\frac{Q}{q_z} k_0 q \frac{1}{a_2 - k_0} \right) = \\
&= \frac{a_2}{a_2 - k_0} \left[\frac{Q}{q_z} \left(1 - \frac{q_z}{Q}\right) \right] = \frac{a_2}{a_2 - k_0} \left(\frac{Q}{q_z} - 1 \right) \\
S_x^Q &= S_{q_z}^Q S_x^{q_z} + S_q^Q S_x^q = S_x^{q_z} + \frac{q}{Q} \frac{q_z \frac{k_0}{a_2 - k_0}}{\left(1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q\right)^2} S_x^q = S_x^{q_z} + \frac{Q}{q_z} \frac{k_0 q}{a_2 - k_0} S_x^q
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\Gamma_{A_0}^Q = A_0 S_{A_0}^Q = A_0 S_{k_0}^Q S_{A_0}^{k_0} = \frac{1}{k_0} S_{k_0}^Q = \frac{1}{k_0} \frac{a_2}{a_2 - k_0} \left(\frac{Q}{q_z} - 1 \right)$$

Despejando k_0 de

$$Q = \frac{q_z}{1 - \frac{k_0}{a_2 - k_0} q} \tag{32}$$

se obtiene:

$$k_0 = \frac{a_2}{1 + q/(1 - q_z/Q)} \tag{33}$$

donde q es un parámetro de diseño libre. Con esta ecuación las sensibilidades pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
S_k^Q &= \left(1 - \frac{q_p}{Q}\right) \left(\frac{Q/q_p - 1}{q} - 1\right) \\
a_2 \Gamma_{A_0}^Q &= \frac{Q}{q_p} \left(1 - \frac{q_p}{Q}\right)^2 \frac{1+q}{q} \\
S_x^Q &= S_x^{q_z} + \left(\frac{Q}{q_z} - 1\right) S_x^q
\end{aligned} \tag{34}$$

En general, q_z , $S_x^{q_p}$ y S_x^q son funciones de q que deben ser conocidas antes de poder determinar el valor óptimo de q .

2.5 Bipuertas LBT

La bipuerta LBT es una bipuerta complementaria a sí misma, ella y su complementaria tienen la misma topología, y se muestran en la Fig. 11.7.

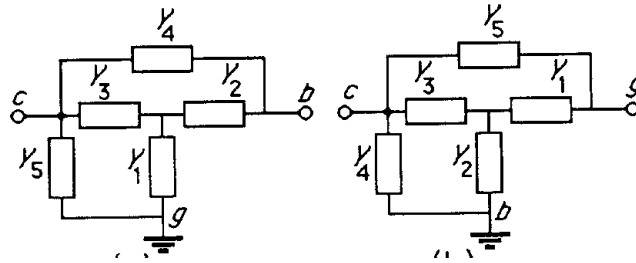


Figura 2: Circuito LBT y su complementario.

Veamos el análisis de la Fig. 11.7a:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} Y_4(V_c - V_b) + Y_3(V_c - V_x) + Y_5 V_c = 0 \\ Y_3(V_x - V_c) + Y_2(V_x - V_b) + Y_1 V_x = 0 \end{cases} \\
V_x = \frac{Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_c + \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_b \\
(Y_3 + Y_4 + Y_5) V_c = Y_4 V_b + \frac{Y_3^2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_c + \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} V_b
\end{aligned} \tag{35}$$

Luego la función de transferencia:

$$T_{cb}(s) = \frac{N_{cb}(s)}{D(s)} = \frac{V_c}{V_b} = \frac{Y_2 Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \tag{36}$$

De forma similar se obtiene para la función de transferencia del circuito de la Fig. 11.7b:

$$T_{cg}(s) = \frac{N_{cg}(s)}{D(s)} = \frac{Y_1 Y_3 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3(Y_1 + Y_2)} \quad (37)$$

Como era de esperar ambas funciones tienen los mismos polos.

Los ceros de transmisión se crean desconectando total o parcialmente elementos conectados a tierra, como se muestra en los circuitos de la Fig. 11.8 correspondientes a los circuitos de la Fig. 11.7.

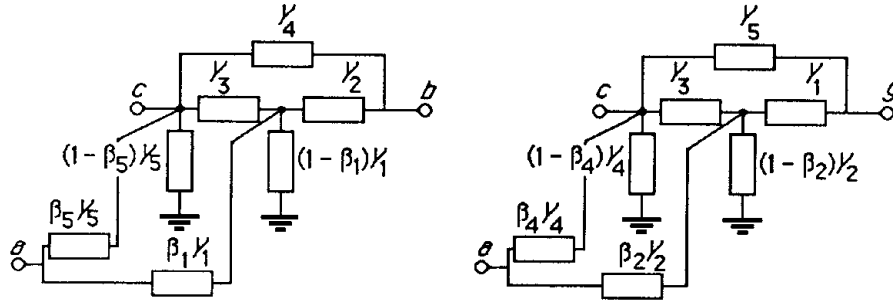


Figura 3: Circuitos de la Fig. 11.7 con desconexión parcial de los elementos conectados a tierra.

Calculamos la función de transferencia $T_{ca}(s)$ para el primero de ellos.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \beta_1 Y_1 (V_x - V_a) + Y_3 (V_x - V_c) + (1 - \beta_1) Y_1 V_x + Y_2 V_x = 0 \\ Y_3 (V_c - V_x) + Y_4 V_c + (1 - \beta_5) Y_5 V_c + \beta_5 Y_5 (V_c - V_a) = 0 \end{cases} \\ V_x = \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5}{Y_3} V_c - \frac{\beta_5 Y_5}{Y_3} V_a \\ -\beta_1 Y_1 V_a - Y_3 V_c + \frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5)}{Y_3} V_c - \frac{\beta_5 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_3} V_a = 0 \\ T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_b=0} = \frac{\beta_1 Y_1 Y_3 + \beta_5 Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5) - Y_3^2} \end{aligned} \quad (38)$$

Un análisis similar para el segundo circuito conduce a:

$$T_{ca}(s) = \left. \frac{V_c}{V_a} \right|_{V_g=0} = \frac{\beta_2 Y_2 Y_3 + \beta_4 Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_3 (Y_1 + Y_2)} \quad (39)$$

Veamos la forma concreta que debe tener el circuito para implementar un filtro ENF

Caso 1

Consiste en hacer

$$Y_1 = G_1 \quad Y_2 = sC_2 \quad Y_3 = sC_3 \quad Y_4 = G_4 \quad Y_5 = 0 \quad (40)$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

$$T_{cb}(s) = \frac{s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4} \quad (41)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{s\beta_1 G_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4}$$

Por comparación con

$$T_{cb}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (42)$$

se obtiene:

$$a_2 = 1 \quad \omega_1^2 = \frac{G_1 G_4}{C_2 C_3}$$

$$q_z = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2}} \quad q_p = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{C_2/C_3} + \sqrt{C_3/C_2}(1 + G_1/G_4)} \quad (43)$$

$$q = \frac{q_z}{q_p} - 1 = \frac{G_1/G_4}{1 + C_2/C_3}$$

El circuito resultante para este caso con los posibles elementos conectados a la entrada se muestra en la Fig. 11.9.

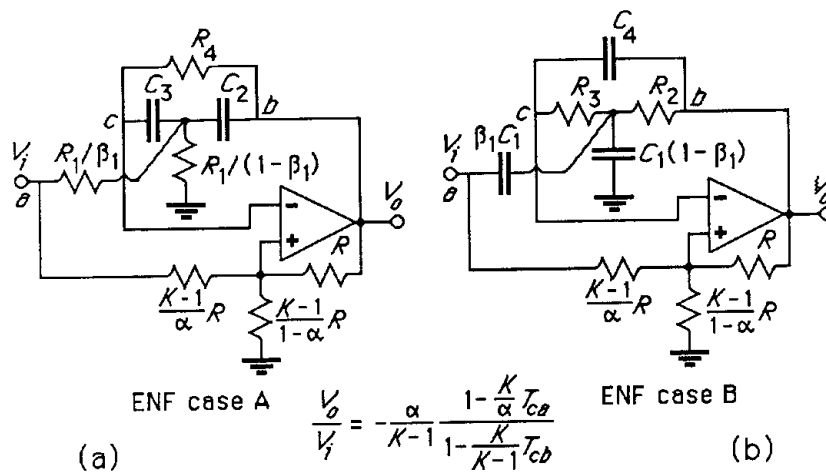


Figura 4: Circuitos ENF con bipuertas LBT para los dos casos estudiados.

Veamos la función de transferencia implementada. Con el modelo ideal del A.O. únicamente queda por obtener $T_{da}(s)$ de la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{T_{da}(s) - T_{ca}(s)}{T_{cb}(s) - T_{db}(s)} \quad T_{da}(s) = \frac{\frac{R(K-1)}{K-\alpha}}{\frac{K-1}{\alpha}R + \frac{R(K-1)}{K-\alpha}} = \frac{\alpha}{K} \quad (44)$$

La función de transferencia es pues:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{\alpha}{K} - \frac{s\beta_1 G_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4}}{\frac{s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4}{s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4} - \frac{K-1}{K}} = \\ &= \frac{\alpha s^2 C_2 C_3 + s\alpha[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + \alpha G_1 G_4 - sK\beta_1 G_1 C_3}{[s^2 C_2 C_3 + s(C_2 + C_3)G_4 + G_1 G_4]K - (K-1)[s^2 C_2 C_3 + s[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4] + G_1 G_4]} \quad (45) \\ &= \frac{s^2 + s\left[G_4\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) + \frac{G_1}{C_2}\left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha}\right)\right] + \omega_o^2}{s^2 + s\frac{[C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - KC_3 G_1]}{C_2 C_3} + \omega_o^2} \end{aligned}$$

Veamos el término en s del denominador para obtener el valor de Q :

$$\begin{aligned} \frac{C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - KC_3 G_1}{C_2 C_3} &= \frac{\omega_o}{Q} = \sqrt{\frac{G_1 G_4}{C_2 C_3}} \frac{1}{Q} \\ Q &= \frac{\sqrt{G_1 G_4 C_2 C_3}}{C_3(G_1 + G_4) + C_2 G_4 - KC_3 G_1} = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2}\left(1 + \frac{G_1}{G_4}\right)} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} - K\sqrt{\frac{C_3}{C_2}}\frac{G_1}{G_4}} = \\ &= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2}\left(1 + \frac{C_2}{C_3} - (K-1)\frac{G_1}{G_4}\right)}} = \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2}\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)} \frac{1}{1 - \frac{(K-1)G_1/G_4}{\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)}}} \quad (46) \\ &= \frac{\sqrt{G_1/G_4}}{\sqrt{\frac{C_3}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} \frac{1}{1 - \frac{(K-1)G_1/G_4}{\left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)}}} = \frac{q_z}{1 - (K-1)q} \end{aligned}$$

La función de transferencia resultante es pues:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[G_4 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{G_1}{C_2} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s \omega_o / Q + \omega_o^2} \quad (47)$$

donde,

$$\omega_o = \omega_1 \quad Q = \frac{q_z}{1 - (K - 1)q} \quad (48)$$

Caso 2

Consiste en hacer

$$Y_1 = sC_1 \quad Y_2 = G_2 \quad Y_3 = G_3 \quad Y_4 = sC_4 \quad Y_5 = 0 \quad (49)$$

Las funciones de transferencia resultantes por simple sustitución son:

$$T_{cb}(s) = \frac{s^2 C_1 C_4 + s(G_2 + G_3)C_4 + G_2 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3} \quad (50)$$

$$T_{ca}(s) = \frac{s\beta_1 C_1 G_3}{s^2 C_1 C_4 + s[C_4(G_2 + G_3) + C_1 G_3] + G_2 G_3}$$

Por comparación con

$$T_{cb}(s) = a_2 \frac{s^2 + s\omega_1/q_z + \omega_1^2}{s^2 + s\omega_1/q_p + \omega_1^2} \quad (51)$$

se obtiene que:

$$a_2 = 1 \quad \omega_1^2 = \frac{G_2 G_3}{C_1 C_4}$$

$$q_z = \frac{\sqrt{C_1/C_4}}{\sqrt{G_2/G_3} + \sqrt{G_3/G_2}} \quad q_p = \frac{\sqrt{C_1/C_4}}{\sqrt{G_2/G_3} + \sqrt{G_3/G_2}(1 + C_1/C_4)} \quad (52)$$

$$q = \frac{q_z}{q_p} - 1 = \frac{C_1/C_4}{1 + G_2/G_3}$$

El circuito resultante con los posibles elementos conectados a la entrada, mostrado en la Fig. 11.9b, tiene como función de transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \alpha \frac{s^2 + s \left[\frac{G_2 + G_3}{C_1} + \frac{G_3}{C_4} \left(1 - \beta_1 \frac{K}{\alpha} \right) \right] + \omega_o^2}{s^2 + s\omega_o/Q + \omega_o^2} \quad (53)$$

donde,

$$\omega_o = \omega_1 \quad Q = \frac{q_z}{1 - (K - 1)q} \quad (54)$$

Ambos circuitos son equivalentes y pueden utilizarse para implementar una función de transferencia de segundo orden.