

Remuestreo

Sea el sistema que muestra la figura, el sistema dado por consigna completo:

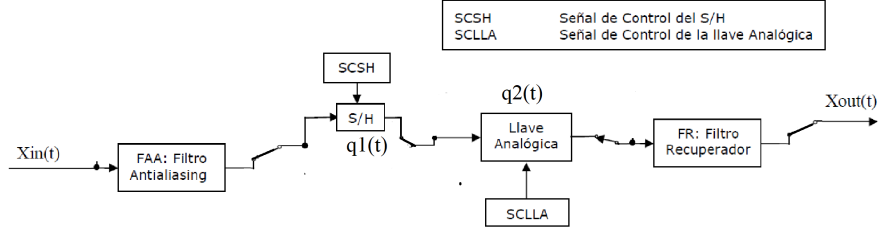


Figure 1: Sistema impuesto por consigna

Dicho sistema puede ser modelado como:

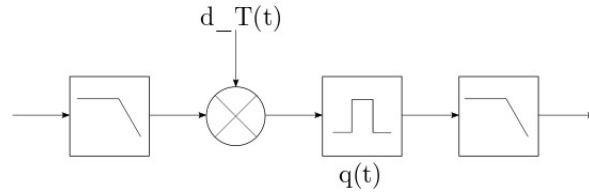


Figure 2: Modelo del sistema impuesto por consigna

Donde d es el duty cycle ($0.05 \leq d \leq 0.95$) de muestreo, y el duty cycle es la relación en tiempo entre el tiempo en que se está emitiendo el pulso y el tiempo total entre emisiones de pulso. Llamando a $d \cdot T = \tau$, donde d es el tiempo de prendido de la llave analógica y T es el tiempo de hold del sample and hold, $q(t) = \prod(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau})$, cuya transformada de fourier, o respuesta en frecuencia del filtro es

$q(t)$ resulta ser la respuesta al impulso del sub-sistema, dada por:

$$q(t) = q_1(t) * q_2(t) = \prod\left(\frac{t - \frac{d \cdot T}{2}}{d \cdot T}\right) \quad (1)$$

Donde d es el duty cycle ($0.05 \leq d \leq 0.95$) de muestreo, y el duty cycle es la relación en tiempo entre el tiempo en que se está emitiendo el pulso y el tiempo total entre emisiones de pulso. Llamando a $d \cdot T = \tau$, donde d es el tiempo de prendido de la llave analógica y T es el tiempo de hold del sample and hold, $q(t) = \prod(\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau})$, cuya transformada de fourier, o respuesta en frecuencia del filtro es

$$Q(f) = \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f \frac{\tau}{2}} \quad (2)$$

$H(f)$ representa la respuesta en frecuencia del filtro Anti-Aliasing, que coincide con la respuesta en frecuencia del filtro Recuperador.

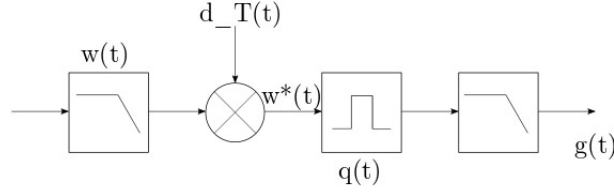


Figure 3: Respuesta a una entrada genérica, $w(t)$

Respuesta del sistema a una entrada genérica

Sea una entrada genérica al sistema completo $w(t)$.

Luego de pasar por el filtro Anti-Aliasing y de ser muestreada, esta señal se convertirá en

$$w^*(t) = [w(t) \odot h(t)] \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n \cdot T) = w(t) \cdot \delta_T(t)$$

donde T es el período de muestreo (sample) del Sample and Hold y \odot representa la convolución entre 2 señales..

Visto en frecuencia, $W^*(f) = [W(f) \cdot H(f)] \cdot \frac{1}{T} \odot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - n \cdot f_o) = W(f) \cdot H(f) \cdot f_o \odot \delta_{f_o}(f) = f_o \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(f - n \cdot f_o) \cdot H(f - n \cdot f_o)$, con $f_o = \frac{1}{T}$

Luego de pasar por el sample and hold y por el filtro recuperador, se obtiene la salida total del sistema como:

$$G(f) = f_o \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(f - n \cdot f_o) \cdot H(f - n \cdot f_o) \cdot H(f) \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f \frac{\tau}{2}}$$

Respuesta del sistema a una entrada particular

Sea la señal de entrada al sistema $W_j(f) = A_j \cdot \delta(f - f_j)$.

Entonces, usando la expresión recién obtenida, la señal a esta entrada en frecuencia estará dada por:

$$G_j(f) = f_o \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_j \cdot \delta(f - f_j - n \cdot f_o) \cdot H(f_j) \cdot H(f_j - n \cdot f_o) \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f_j \tau - n \cdot f_o \tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi (f_j - n \cdot f_o) \frac{\tau}{2}} \quad (3)$$

Si el filtro fue diseñado correctamente según el criterio de Nyquist, entonces $|H(f_j - n \cdot f_o)| \approx 0, \forall n \neq 0$

Entonces, la expresión queda anterior reducida a:

$$G_j(f) = A_j \cdot f_o \cdot \delta(f - f_j) \cdot H(f_j)^2 \cdot \tau \cdot \text{sinc}(f_j \tau) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f_j \frac{\tau}{2}}$$

Tomando en cuenta que el espectro de la señal $x_j(t)=A_j \cdot \cos(2\pi \cdot f_j \cdot t)$ es $X_j(f) = \frac{1}{2} \cdot W_j(f) + \frac{1}{2} \cdot W_j(-f)$ y teniendo en cuenta la paridad de $|H(f)|$ y la imparidad de la fase de $H(f)$ por ser un filtro pasabajos real, además de la paridad de la función $\text{sinc}(f)$, por superposición se obtiene la salida a la entrada $X_j(f)$ como

$$Y_j(f) = A_j \cdot |H(f_j)|^2 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \text{sinc}(f_j \cdot \tau) \cdot \cos(2\pi \cdot f_j \cdot (\frac{\tau}{2} + 2 \cdot \gamma_j)) \cdot [\delta(f - f_j) + d(f + f_j)] \quad (4)$$

donde γ_j es el valor de la fase de $H(f_j)$.

Reemplazando entonces por la igualdad anteriormente mencionada $d \cdot T = \tau$, se llega a

$$Y_j(f) = A_j \cdot |H(f_j)|^2 \cdot d \cdot \text{sinc}(f_j \cdot d \cdot T) \cdot \cos(2\pi \cdot f_j \cdot (\frac{d \cdot T}{2} + 2 \cdot \gamma_j)) \cdot [\delta(f - f_j) + d(f + f_j)] \quad (5)$$

Notamos que el desfase que otorga el filtro $Q(f)$ es lineal con respecto a la frecuencia y por ende no produce distorsión. Esto querrá decir que la distorsión que produce el filtro $Q(f)$ será únicamente en módulo y no en fase, según el valor de τ .

Asumiendo entonces la salida en función del tiempo puede ser luego escrita como:

$$y_j(t) = A_j \cdot |H(f_j)|^2 \cdot d \cdot \text{sinc}(f_j \cdot d \cdot T) \cdot \cos(2\pi \cdot f_j \cdot (\frac{d \cdot T}{2} + 2 \cdot \gamma_j)) \cdot \cos(2\pi \cdot f_j \cdot t) \quad (6)$$

Señales moduladas en AM

Dada la siguiente señal modulada en AM:

$$x_c(t) = A_{máx} \cdot [\frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 1.8 \cdot f_{in} \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 2 \cdot f_{in} \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi \cdot 2.2 \cdot f_{in} \cdot t)] \quad (7)$$

notamos que la misma puede ser escrita como una suma de las funciones $x_j(t)$ mencionadas anteriormente, de forma tal que $x_c(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, donde:

- $A_1 = \frac{A_{máx}}{2}, f_1 = 1.8 \cdot f_{in}$
- $A_2 = A_{máx}, f_2 = 2 \cdot f_{in}$
- $A_3 = A_1, f_3 = 2.2 \cdot f_{in}$

De aquí, aplicando nuevamente superposición obtenemos la salida $y_c(t)$ a la entrada $x_c(t)$ como $y_c(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$, o vista en frecuencia como $Y_c(f) = \sum_{i=1}^3 Y_i(f)$.

De esta fórmula se desprende que el espectro de la señal modulada se deformará más a un duty cycle mayor, ya que la campana del *sinc* aumenta en ancho a medida que τ disminuye.

En cuanto a la potencia, como la salida es una superposición de deltas en frecuencia, podemos hallar la potencia total utilizando la identidad de Párseval según

$$P=2 \cdot \sum_{i=1}^3 A_i^2 \cdot |H(f_i)|^4 \cdot \frac{\tau^2}{T^2} \cdot \text{sinc}^2(f_i \cdot \tau) \quad (8)$$

Luego, aproximando a la ganancia del filtro como unitaria en toda la banda de paso:

$$P=2 \cdot \sum_{i=1}^3 A_i^2 \cdot \frac{\tau^2}{T^2} \cdot \text{sinc}^2(f_j \cdot \tau) = d^2 \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^3 A_i^2 \cdot \text{sinc}^2(f_j \cdot d \cdot T) \quad (9)$$

La fórmula anterior indica que la potencia total de la señal muestreada será inversamente proporcional al cuadrado del duty cycle. De aquí se deduce que tendrá que haber una relación de compromiso entre la pérdida de potencia que otorga el duty cycle y la deformación al módulo del espectro de la señal que produce el mismo (ya mostramos antes que la deformación del espectro que produce el valor de τ es únicamente en módulo y NO en fase).

Elegiendo un período de $T = \frac{1}{15 \times 10^3} s$, graficamos la potencia total en función del duty cycle d:

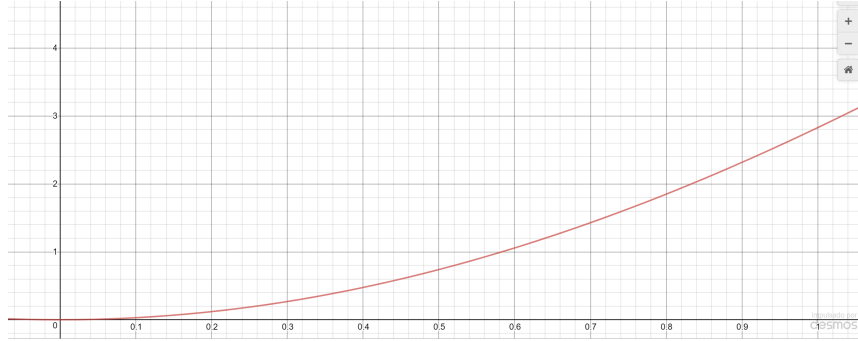


Figure 4: Potencia total en función del duty cycle

Se grafican luego las curvas de potencia de cada componente en frecuencia en función del duty cycle d:

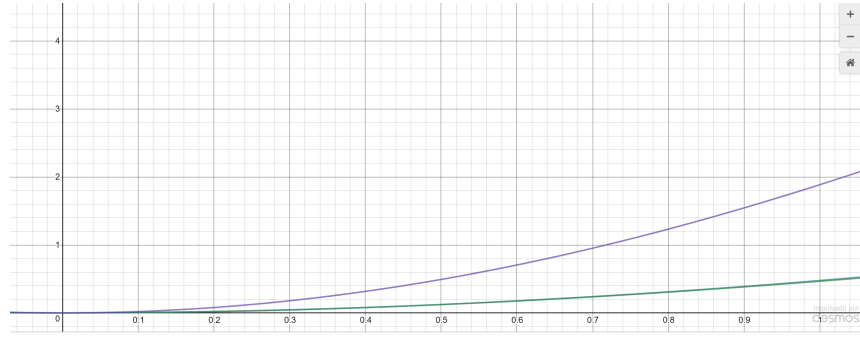


Figure 5: Potencia de cada componente f_j en función del duty cycle

Se observa que para este valor de T , ambas funciones son estrictamente crecientes en el rango $d \in [0; 1]$, por lo que se elegirá el duty cycle más grande posible para obtener la mayor potencia total posible y preservar lo más posible las señales. Es importante hacer notar que si bien el espectro de la señal se deforma, se podría aplicar un filtro digital una vez que la señal ya ha sido digitalizada podrá revertir esta deformación agregada.