Ejercicio 9.1

Se pide implementar el siguiente filtro digital de segundo orden:

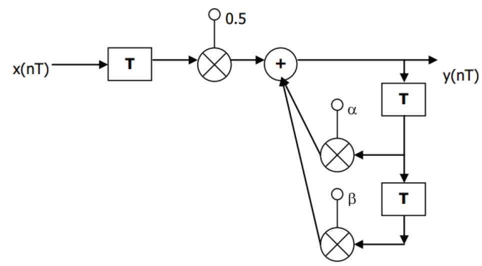

Figure 1: Filtro a implementar

El cual está descripto por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(nT) = 0.5 \cdot x(nT - T) + \alpha \cdot y(nT - T) + \beta \cdot y(nT - 2T)$$

Para facilitar las cuentas, elegimos normalizar el período T a la unidad de manera tal que $T = 1$, lo cual permite reescribir la ecuación anterior como:

$$y(n) = 0.5 \cdot x(n - 1) + \alpha \cdot y(n - 1) + \beta \cdot y(n - 2)$$

Dada la arbitrariedad de las constantes β y α, se decide hacer un análisis previo del sistema para lograr establecer el tipo de respuesta del mismo.

Dado que la respuesta transitoria del filtro está ligada exclusivamente a la ecuación homogénea del mismo, se decide analizar primeramente dicha ecuación:

$$y_h(n) - \alpha \cdot y_h(n - 1) - \beta \cdot y_h(n - 2) = 0$$

Donde $y_h(n)$ es la solución homogénea del sistema.

Proponemos entonces $y_h(n) = A \cdot \lambda^n$, $A, \lambda \epsilon C$ como solución, lo cual nos lleva a la ecuación carácterística del sistema:

$$\lambda^2 - \alpha \cdot \lambda - \beta = 0$$

De aquí llegamos a los posibles valores de λ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \cdot \beta}}{2}$$

Notamos que $|\lambda_{1,2}| = |\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4 \cdot \beta}}{2}|$, pero si $\alpha^2 + 4 \cdot \beta < 0$, el mismo pujede ser reescrito como $|\lambda_{1,2}| = -\beta$,donde para este caso β es necesariamente negativo.

Observando el discriminante de la expresión de $\lambda_{1,2}$, podemos distinguir entre los siguientes casos:

- $\alpha^2 + 4 \cdot \beta < 0$:

  El sistema tendrá una respuesta homogénea de tipo $y_h(n) = C_1 \cdot |\lambda_{1,2}|^n \cdot cos(\omega \cdot n) + C_2 \cdot |\lambda_{1,2}|^n \cdot sen(\omega \cdot n)$, con $C_1, C_2 \epsilon R$, $w = Arg(\lambda_1) = arctg(\sqrt{\frac{-4\beta - \alpha^2}{\alpha}})$

  El sistema por lo tanto oscilará con una frecuencia de $f = \frac{\omega}{2\pi}$, y dependerá la del valor de $|\lambda_{1,2}|$ la cantidad de períodos en los cuales esta oscilación será apreciable. El sistema cae dento del caso subamortiguado.

  Es importante notar que el sistema será estable únicamente en el caso en que $|\lambda_{1,2}| < 1$. Utilizando el hecho de que $|\lambda_{1,2}| = e^{ln|\lambda_{1,2}|}$, se podrá entonces hallar la constante de tiempo del sistema al resolver la ecuación $e^{ln|\lambda_{1,2}| \cdot n \cdot T} = e^{-1}$. Como n es un número entero, en general no se podrá hallar un n que cumpla esta igualdad exactamente y por ende la constante de tiempo τ estará dada por $\tau = n_0 \cdot T$, siendo n_0 el mínimo n que cumpla con $n \geq \frac{-1}{ln|\lambda_{1,2}| \cdot T}$

- $\alpha^2 + 4\beta > 0$:

  El sistema tendrá una respuesta homogénea de tipo $y_h(n) = C_3 \cdot \lambda_1^n + C_4 \cdot \lambda_2^n$, con $C_3, C_4 \epsilon R$ por lo que si $|\lambda_{1,2}| < 1$, entonces el sistema será estable.

- $\alpha^2 + 4\beta = 0$:

  El sistema tendrá una respuesta homogénea de tipo $y_h(n) = C_5 \cdot \lambda^n + C_6 \cdot n \cdot \lambda^n$, con $C_6, C_5 \epsilon R$, por lo que si $|\lambda_{1,2}| < 1$, entonces el sistema será estable.

Implementación digital del filtro

Se implementa el filtro a partir de un programa escrito en python. Se obtienen las respuestas al impulso y al escalón para caracterizar al sistema. Se utilizan los parámetros α y β impuestos por consigna y se prueba con algunos valores extra que podrían resultar de interés.

Casos especiales de prueba

Se utilizaron los siguientes casos de prueba para aquellos parámetros que resultan de interés. Se probaron entonces los parámetros de consigna:

- $\alpha = 1; \beta = -\frac{1}{2}$
- $\alpha = \frac{1}{3}; \beta = -\frac{1}{8}$
- $\alpha = \frac{4}{3}; \beta = -\frac{25}{32}$

Todos estos sistemas impuestos por consigna, serán oscilantes ya que cumplen con $\alpha^2 + 4 \cdot \beta < 0$. Es por esta razón que sólo probar estos casos resulta insuficiente a la hora de explorar los posibles escenarios que podría presentar esta configuración.

Se simularon entonces los siguientes casos a enumerar, con las razones de por qué estos fueron elegidos:

- $\alpha = -1; \beta = \frac{1}{2}$ para probar aquellos casos en los que α resulta negativo y β positivo. Este caso en particular resulta en $|\lambda_{1,2}| = 1$, por lo que el filtro es inestable: caso divergente.
- $\alpha = -\frac{1}{3}; \beta = -\frac{1}{8}$ para probar aquellos casos en los que tanto α como β son negativos.
- $\alpha = \frac{1}{10}; \beta = \frac{1}{20}$ para probar aquellos casos en los que tanto α como β son positivos. Este caso necesariamente implicará $\alpha^2 + 4\beta > 0$. Además $|\lambda_{1,2}| < 1$ y por lo tanto el sistema es bibo-estable.
- $\alpha = 1; \beta = -\frac{1}{4}$ para probar aquellos casos en los que $\alpha^2 + 4\beta = 0$.

Respuesta impulsiva

Se procederá a mostrar las respuestas impulsivas para el filtro de consigna con distintos parámetros, haciendo un análisis en aquellos casos en los que se considera necesario:

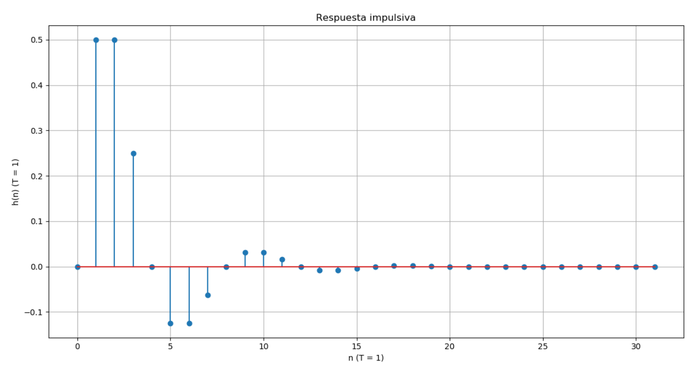

Figure 2: $\alpha = 1; \beta = \frac{1}{2}$

Se observan oscilaciones en la respuesta impulsiva del filtro con los parámetros $\alpha = 1; \beta = -\frac{1}{2}$. Siguiendo el análisis del transitorio mencionado anteriormente, se observa que $\alpha^2 + 4 \cdot \beta$=-1 < 0, por lo que el filtro con estos parámetros cae dentro del caso oscilatorio, lo cual coincide con lo simulado. Se nota también que habrá que esperar al menos quince períodos de tiempo para que el sistema se estrablezca y se pueda considerar como finalizado el periódo transitorio del sistema. Utilizando el criterio mencionado en la sección anterior y teniendo en cuenta el retardo sobre la entrada, se observa que la constante de tiempo del sistema será $n = 4$ para un período T =1. Esto se puede visualizar correctamente en el gráfico.

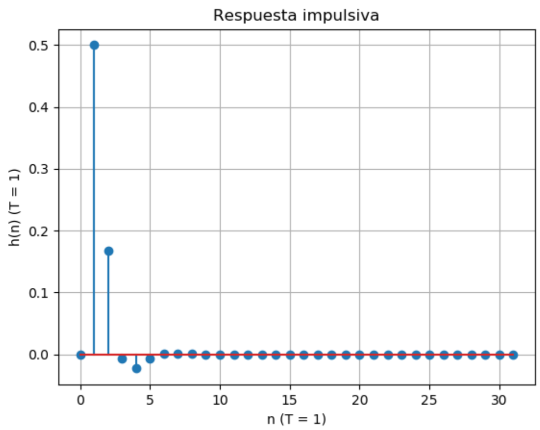

Figure 3: $\alpha = \frac{1}{3}; \beta = -\frac{1}{8}$

Se vuelve a apreciar un carácter oscilante para el sistema debido a $\alpha^2 + 4 \cdot \beta$=-1.88 < 0. El sistema tiene una constante de tiempo claramente más chica que el sistema anterior y esto se deduce por un $|\lambda_{1,2}|$mucho más chico que para el sistema anterior.

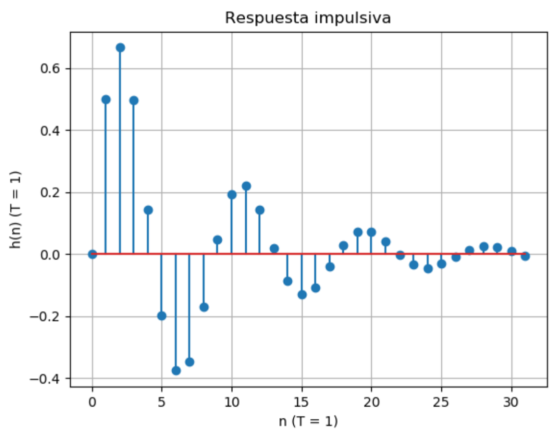

Figure 4: $\alpha = \frac{4}{3}; \beta = -\frac{25}{32}$

Se vuelve a apreciar un carácter oscilante para el sistema debido a $\alpha^2 + 4 \cdot \beta$=-1.34 < 0.

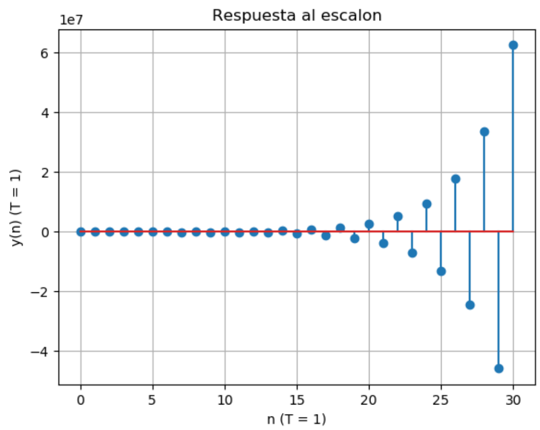

Figure 5: $\alpha = -1; \beta = \frac{1}{2}$

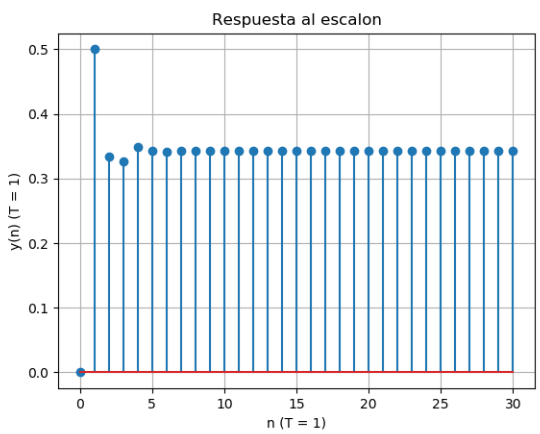

Figure 6: $\alpha = -\frac{1}{3}; \beta = -\frac{1}{8}$

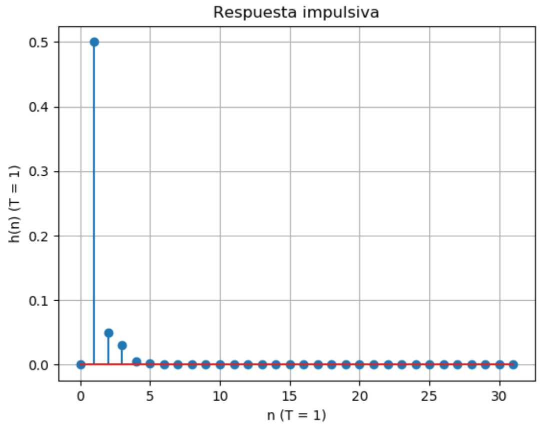

Figure 7: $\alpha = \frac{1}{10}; \beta = \frac{1}{20}$

$\alpha = 1; \beta = -\frac{1}{4}$

Respuesta al escalón

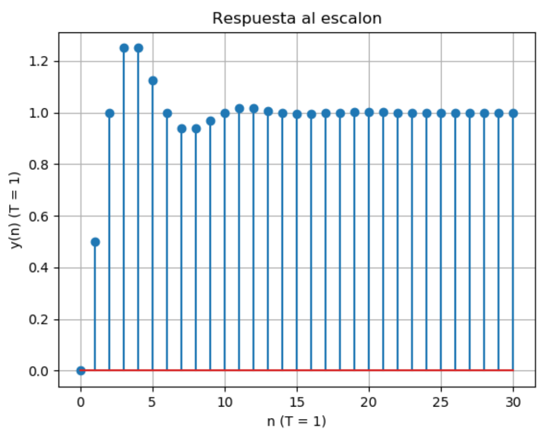

Figure 8: $\alpha = 1; \beta = -\frac{1}{2}$

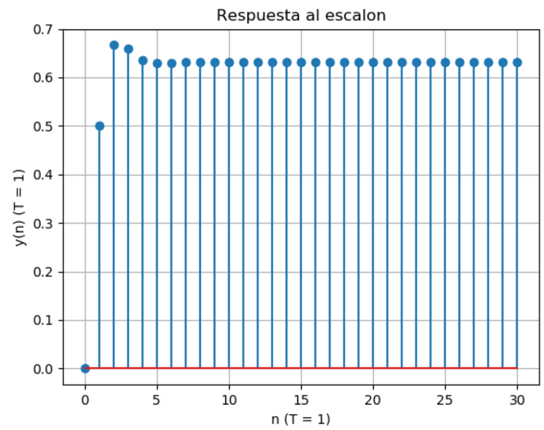

Figure 9: $\alpha = \frac{1}{3}; \beta = -\frac{1}{8}$

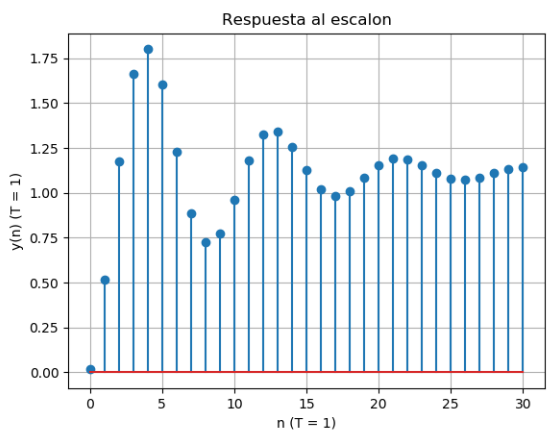

Figure 10: $\alpha = \frac{4}{3}; \beta = -\frac{25}{32}$

.