

# Filtros

Las señales de entrada a medir, definidas por consigna para el grupo, son:

1.  $x_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_{in}t)$ , con  $f_{in} = 1kHz$
2.  $x_2(t)$ , siendo esta la extensión periódica de  $A \cdot \sin(2\pi f_{in}t)$ , con  $t \in [0; 3\pi]$
3.  $x_3(t)$ , siendo esta la extensión periódica de  $A \cdot t^2$ , con  $t \in [-2\tau; 2\tau]$  y  $f_0 = \frac{1}{4\tau}$

Notamos que como todas las señales son periódicas, su espectro estará dado por el Desarrollo en Serie de Fourier (DSF) de las mismas y por ende este espectro será discreto.

Notamos, a su vez, que tanto la función  $\frac{3}{2}$  seno como la cuadrática tendrán infinitos armónicos de la frecuencia fundamental, y que es por esta razón que el filtro pasabajos a utilizar necesariamente tendrá que eliminar algunas componentes en frecuencia de la señal original para poder realizar un muestreo que cumpla con el criterio de Nyquist.

Se buscará entonces diseñar el filtro Anti-Aliasing de manera tal que un porcentaje suficiente de potencia de la señal original se encuentre dentro de la banda pasante, pudiéndose así preservar y muestrear correctamente la información correspondiente a esta señal. A su vez, la frecuencia de corte de este filtro y la limitación en ancho de banda consecuente de la misma deberá ser tal que la frecuencia de muestreo necesaria para cumplir el criterio de Nyquist sea realizable por los componentes encargados de realizar el sampleo. Haciendo un análisis previo del oscilador, el Sample and Hold y la llave analógica, se decidió que la máxima frecuencia de sampleo realizable para el sistema es de 50kHz. Como se busca oversamplear (muestrear a frecuencias mayores a las de Nyquist) para lograr una mayor calidad de señal, la frecuencia de corte  $f_p$  del filtro deberá entonces ser mucho menor a 25kHz.

Teniendo en cuenta que en realidad el criterio de Nyquist utiliza un filtro pasabajos ideal para llegar a la condición  $f_b \leq 2 \cdot f_s$ , se decide tomar como frecuencia limitante de ancho de banda  $f_b$  no a la frecuencia de corte  $f_p$  sino a la frecuencia  $f_a = 1.5f_p$  definida por consigna. Dado que necesitamos que luego de esta banda la señal esté completamente atenuada, y teniendo en cuenta que el sistema digital cuantiza en 8 bits, sabemos que deberá atenuarse aproximadamente 48 (dB) en la frecuencia  $f_a$  para poder considerar atenuada completamente cualquier componente.

Procedemos entonces a realizar un análisis espectral de las distintas señales de entrada para poder definir la frecuencia  $f_p$  del filtro. Para esto hallamos el DSF de cada una de las señales y buscamos cuál señal será aquella que acumule menor cantidad de potencia a frecuencias mayores, porque ésta será entonces la determinante.

## Análisis espectral de las señales a muestrear

Se desea determinar la potencia total de las señales a medir y el porcentaje de potencia de la señal original resultante de eliminar armónicos de frecuencias superiores a  $f_p$  o  $f_a$  según corresponda. Para esto se calculan los coeficientes de Fourier de las señales anteriormente mencionadas  $x_i(t)$ , con  $i = 1; 2; 3$  y luego se aplica la identidad de Parseval para calcular la

potencia de la señal como  $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{n \in Z} |X_n|^2 = P$ . Es importante destacar que la potencia de la señal medida será en realidad proporcional a este valor, ya que es necesario tener en cuenta el valor de la carga sobre la cual se la mide para obtener un valor real, pero que sin embargo la relación porcentual entre potencias tendrá el mismo valor que el calculado.

Procedemos entonces a calcular el DSF de las  $x_i(t)$ :

- $x_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_{in}t)$ , con  $f_{in} = 1kHz$

La señal en frecuencia estará representada por  $A \cdot \delta(f - f_{in})$  y por ende tendrá una única componente en frecuencia en  $f_{o1} = 1kHz$  de amplitud A. Dado que la señal tiene un único armónico, para que esta llegue a cuantizarse se elegirá una  $f_p > 1kHz$  de manera tal que la señal no sea atenuada por el filtro.

- $x_2(t)$

Los coeficientes de fourier del desarrollo exponencial, para esta señal, estarán dados por:

$$X_n = \frac{A \cdot (-1)^n}{2f_{o2}^3 \cdot n^2 \pi^2} \text{ y } X_0 = \frac{1}{12 \cdot f_{o2}^3} \text{ con } f_{o2} = \frac{1}{4 \cdot \tau}$$

De manera tal que

$$x_2(t) = \sum_{n \in Z} X_n e^{i \cdot 2\pi f_{o2} n \cdot t}$$

Notamos que como la señal es real y par, por lo que los coeficientes  $X_n$  son pares y el DSF de la señal estará expresado en una serie de cosenos, de la forma:

$$x_1(t) = \sum_{n \in Z} X'_n \cos(2\pi n f_{o2} t), \text{ con } X'_n = \frac{A \cdot (-1)^n}{2f_{o2}^3 \cdot n^2 \pi^2} \text{ y } X'_0 = X_0$$

Vemos luego que la potencia de la señal sin filtrar es  $P_2 = C^2 \cdot \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} + X_0^2$  y que la potencia de la señal filtrada es  $P'_2 = C^2 \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} + X_0^2$ , donde  $C = \frac{A}{2 \cdot f_{o2}^3 \cdot \pi^2}$  y  $m \in N$ , con m la cantidad de armónicos que no son atenuados por el filtro. Estas igualdades nos permiten obtener la relación entre las potencias de la señal filtrada y sin filtrar como  $\frac{P'_2}{P_2} = \frac{X_0^2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4}}{X_0^2 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4}}$

- $x_3(t)$

Los coeficientes de fourier del desarrollo exponencial, para esta señal, estarán dados por:

$$C_n = \frac{-9 \cdot A}{f_o \pi (4n^2 - 9)}, \text{ con } f_o = \frac{2 \cdot f_{in}}{3}$$

De manera tal que

$$x_3(t) = \sum_{n \in Z} C_n e^{i \cdot 2\pi f_o n \cdot t}$$

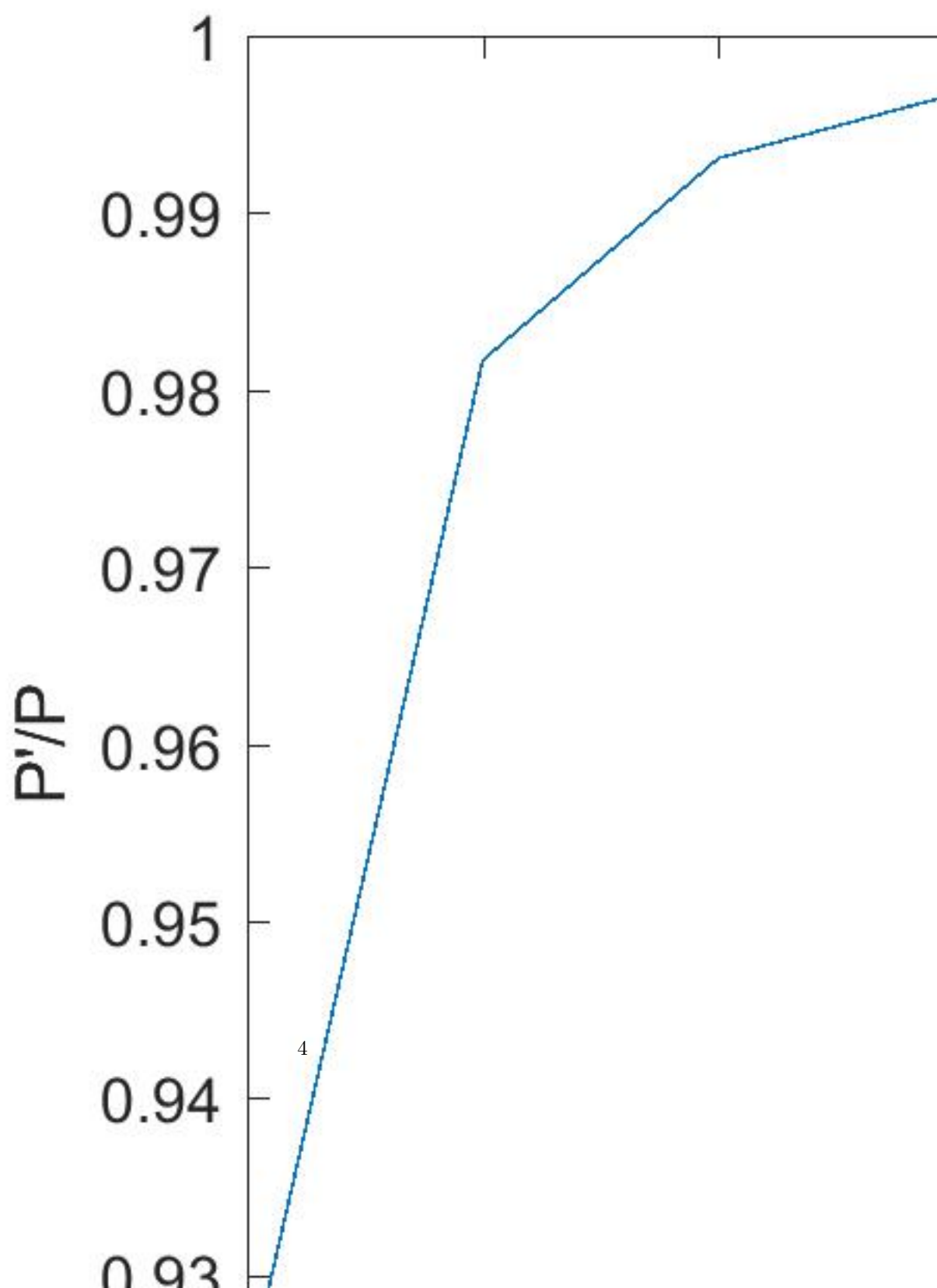
$x_3(t)$  también es una señal real y par y por ende su DSF también podrá expresarse como una serie de cosenos, dada por:

$$x_1(t) = \sum_{n \in Z} C'_n \cos(2\pi n f_o t), \text{ con } C'_n = \frac{-18 \cdot A}{f_o \pi (4n^2 - 9)}$$

Análogo al caso anterior, la relación de potencias estará dada entonces por  $\frac{P'_3}{P_3} = \frac{\sum_{n=-m}^m \frac{1}{(4n^2-9)^2}}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(4n^2-9)^2}}$

Ya establecidas las relaciones de potencia entre señal filtrada y sin filtrar, procedemos a graficar estas relaciones en función de la frecuencias para poder elegir la frecuencia de corte del filtro:

## Relación de po



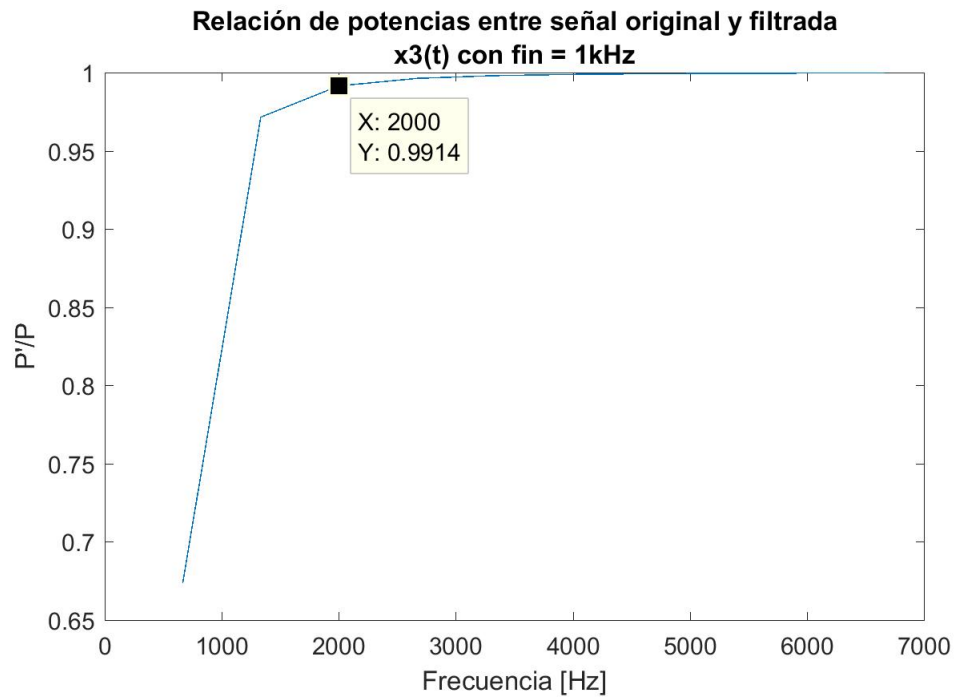


Figure 2: Relación de potencia resultante según los armónicos no atenuados para  $x_3(t)$

Como conclusión, se deduce que con una frecuencia de corte  $f_p=5kHz$  se conservará al menos el 99% de la potencia de las señales originales.

De aquí, debido a las condiciones impuestas por consigna, queda determinada  $f_a=7.5$  kHz. En el caso en que se suponga al filtro como ideal, tomando la frecuencia de muestreo mayor a 10kHz se podrá muestrear la señal correctamente. Si en cambio tomamos la frecuencia  $f_a$  como indicante que no habrá amplitud significativa a partir de esta frecuencia, entonces la frecuencia de muestreo mínima será 15kHz.