

# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

## 22.67 SEÑALES ALEATORIAS

TRABAJO PRÁCTICO DE SIMULACION N°2

---

### Trabajo práctico

---

*Grupo 4:*

Manuel DIEGUEZ  
Leg. 56273

Matías LARROQUE  
Leg. 56597

Manuel MOLLÓN  
Leg. 58023

Ezequiel VIJANDE  
Leg. 58057

*Profesor:*  
Gustavo Abraham HIRCHOREN

Entregado: 30 de Junio de 2019

## Índice

1 Ejercicio 2.1	2
2 Implementación de un predictor óptimo lineal sobre una grabación de voz	9

## 1 Ejercicio 2.1

- Se pide estimar los primeros 128 valores de la autocorrelacion de la secuencia aleatoria  $X(n)$  adjunta con la consigna.

La estimación se realizo con dos estimadores distintos dados por las siguientes formulas:

Estimador no polarizado:

$$\hat{R}_{np}(k) = \hat{R}_{np}(-k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k), \forall k < N \quad (1)$$

Estimador polarizado:

$$\hat{R}_p(k) = \hat{R}_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k), \forall k < N \quad (2)$$

$$\hat{R}_p(k) = \hat{R}_{np}(k) = 0, \forall k \geq N$$

Se puede ver fácilmente que la diferencia entre ambos estimadores esta dado por una constante según:

$$\begin{aligned} \hat{R}_p(k) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N-k}{N-k} \cdot \sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)X(i+k) = \frac{N-k}{N} \hat{R}_{np}(k) \\ \hat{R}_p(k) &= \frac{N-k}{N} \hat{R}_{np}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

A continuación se muestra la gráfica realizada en matlab para los valores estimados de la autocorrelacion utilizando ambos estimadores:

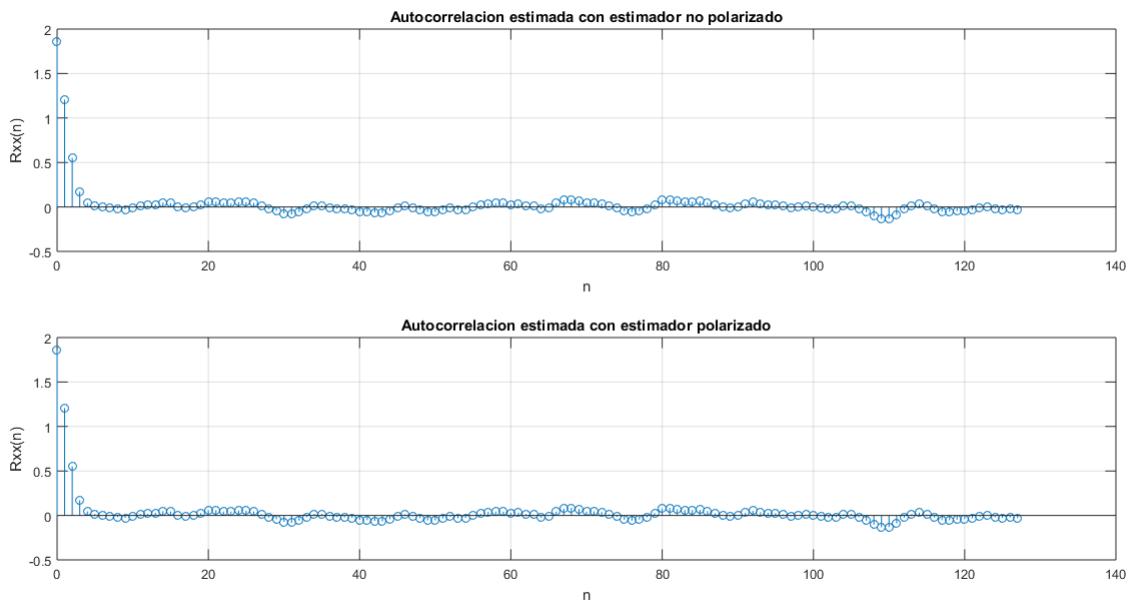


Figura 1: Autocorrelacion estimada obtenida a partir de una función muestra de la secuencia aleatoria.

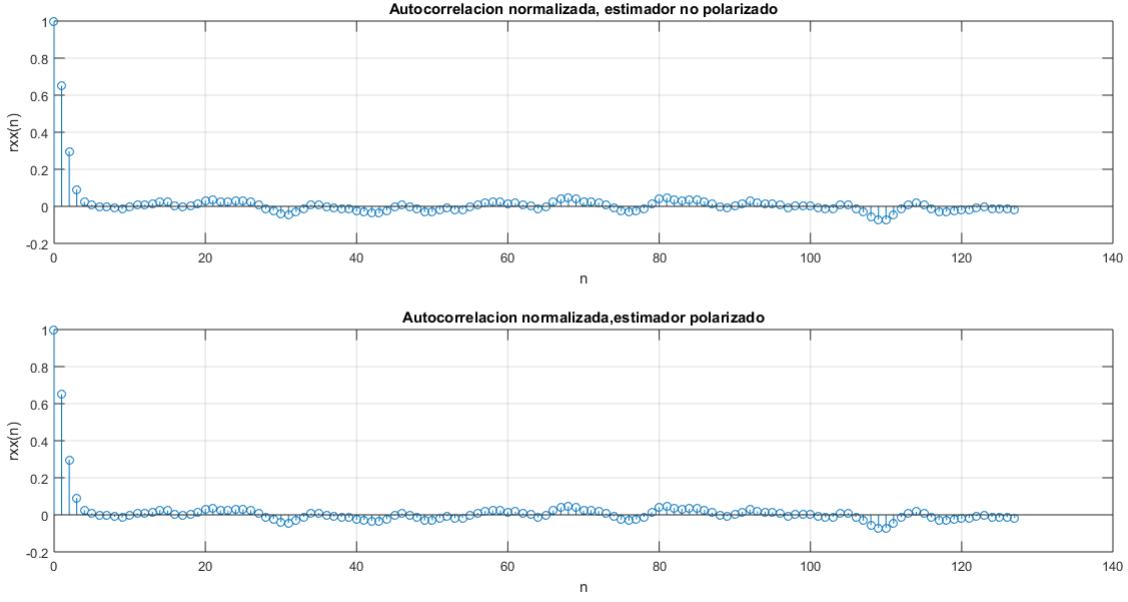


Figura 2: Autocorrelacion normalizada

Tanto para el caso de la autocorrelacion como para el de la autocorrelacion normalizada se puede ver que la gráfica correspondiente al estimador polarizado es prácticamente idéntica a la del estimador no polarizado. Esto tiene sentido ya que la relación entre los estimadores difiere de 1 a medida que se incrementa el  $k$ , por lo que para el peor caso  $k=127$ , se tiene que:

$$\frac{R_p}{R_{np}} = \frac{N-k}{N} = \frac{4096-127}{4096} \approx 0,969$$

## 2. Se pide estimar y graficar los coeficientes de autocorrelacion parcial $\phi_{k,k}$ de la secuencia.

La estimación de dicho coeficientes se obtuvo de aplicar la ecuación de Yule-Walker utilizando los valores de  $\hat{R}(k)$  calculados previamente, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & \hat{r}_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{r}_{xx}(p-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}}_R \cdot \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{p,1} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{p,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{xx}(p) \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{p,1} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{p,p} \end{pmatrix} = R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \hat{r}_{xx}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{xx}(p) \end{pmatrix} \tag{4}
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica obtenida de estimar los primeros 127 coeficientes de correlación parcial utilizando la ecuación (4):

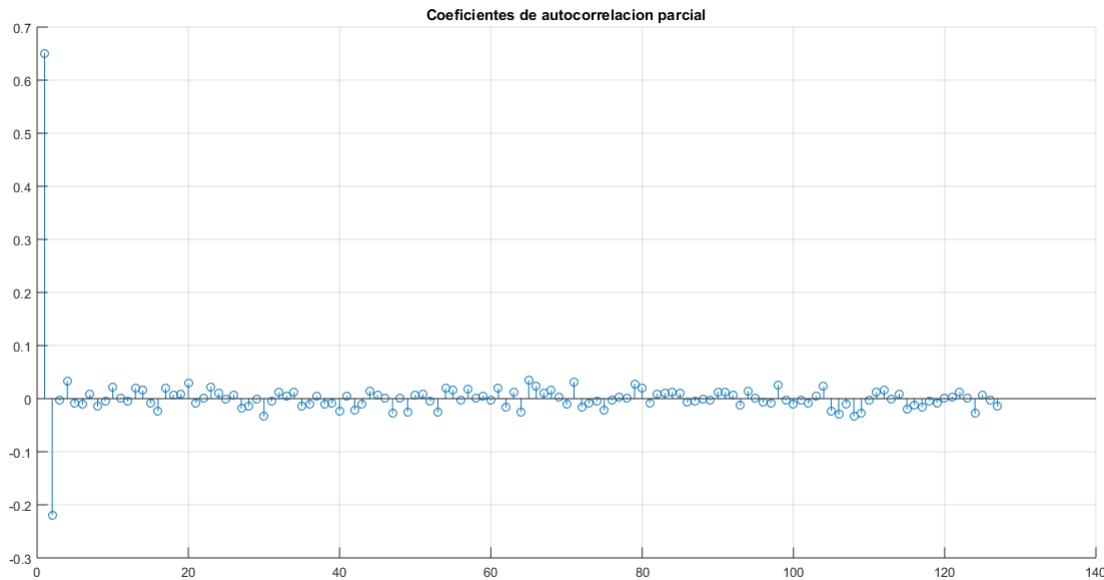


Figura 3: Coeficientes de autocorrelacion parcial estimados

**3. Se pide ajustar la secuencia aleatoria  $X(n)$  a un modelo y orden determinado a partir de lo observado.**

Es posible ajustar la secuencia a un modelo teórico determinado según la forma de la gráfica de la autocorrelación estimada, y de la gráfica de los coeficientes de correlación parcial de la secuencia aleatoria. Para la gráfica de la autocorrelación puede verse que la misma tiene la forma de una exponencial decreciente para los primeros 5 o 6 valores de la misma. Luego de estos primeros valores se tiene que los puntos oscilan cerca del cero.

En cuanto a los coeficientes de correlación parcial, se puede ver en la figura (3) que los primeros dos valores toman valores considerablemente mayores (en modulo) que el resto de los coeficientes. A fines prácticos puede considerarse que los primeros dos coeficientes son los únicos no nulos.

Teniendo en cuenta las características mencionadas previamente y la siguiente tabla<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Tabla obtenida del libro “Random Signals Detection, Estimation and Data Analysis-Sam Shanmugan, Arthur Breipohl”, pagina 591

TABLE 9.1 AUTOCORRELATION FUNCTIONS BEHAVIOR AS A FUNCTION OF ARMA ORDER

ARMA $(p, q)$ Order	Behavior of $r_{xx}(k)$	Behavior of $\phi_{k,k}$
(1, 0)	Exponential decay (sign may alternate)	$\phi_{1,1}$ is the only nonzero partial autocorrelation coefficient
(0, 1)	$r_{xx}(1)$ is the only nonzero autocorrelation coefficient	Exponential decay
(1, 1)	Exponential decay for $k \geq 2$	Exponential decay for $k \geq 2$
(2, 0)	Sum of two exponential decays or damped sinewave	Only $\phi_{1,1}$ and $\phi_{2,2}$ nonzero
(0, 2)	Only $r_{xx}(1)$ and $r_{xx}(2)$ are nonzero	Dominated by mixtures of exponentials or damped sinewave

Figura 4: Modelos teóricos adecuados a partir de las graficas de autocorrelacion. 'p' es el orden correspondiente a la parte autoregresiva del modelo ARMA mientras que 'q' es el orden correspondiente a la parte moving average del modelo ARMA.

Se decidió que el modelo ARMA(2,0), que es lo mismo que un modelo auto-regresivo de orden 2, es el que mejor ajusta a la secuencia aleatoria X(n). La forma y parámetros de dicho modelo es la siguiente:

$$X(n) = \phi_{21}X(n-1) + \phi_{22}X(n-2) + e(n) \quad (5)$$

Donde  $e(n)$  es un ruido blanco gaussiano de varianza unitaria y para minimizar el error cuadrático medio los estimadores se definen como:

$$\hat{\phi}_{21} = \frac{\hat{R}_{xx}(1) \cdot [\hat{R}_{xx}(0) - \hat{R}_{xx}(2)]}{\hat{R}_{xx}(0)^2 - \hat{R}_{xx}(1)^2} = \frac{\hat{r}_{xx}(1) \cdot [1 - \hat{r}_{xx}(2)]}{1 - \hat{r}_{xx}(1)^2} \approx 0,7932$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{\hat{R}_{xx}(0) \cdot \hat{R}_{xx}(2) - \hat{R}_{xx}(1)^2}{\hat{R}_{xx}(0)^2 - \hat{R}_{xx}(1)^2} = \frac{\hat{r}_{xx}(2) - \hat{r}_{xx}(1)^2}{1 - \hat{r}_{xx}(1)^2} \approx -0,219$$

#### 4. Calcular analíticamente $R_{xx}(k)$ y $r_{xx}(k)$ ( $k=0,\dots,127$ ) graficar y comparar con la estimada.

Para un modelo auto regresivo de orden 2 se tienen las siguientes relaciones entre la autocorrelacion de la secuencia y los parámetros del modelo:

$$R_{xx}(m) = \phi_{21}R_{xx}(m-1) + \phi_{22}R_{xx}(m-2) \quad (6)$$

$$\sigma_x^2 = R_{xx}(0) = \frac{\sigma_N^2(1 - \phi_{22})}{(1 + \phi_{22})(1 - \phi_{21} - \phi_{22})(1 + \phi_{21} - \phi_{22})} \quad (7)$$

$$r_{xx}(m) = \phi_{21}r_{xx}(m-1) + \phi_{22}r_{xx}(m-2) \quad (8)$$

$$r_{xx}(0) = 1$$

Y teniendo en cuenta que:

$$R_{xx}(m) = R_{xx}(-m) = \sigma_x^2 r_{xx}(m) = \sigma_x^2 r_{xx}(-m)$$

Se pueden calcular los valores de  $R_{xx}(m)$  utilizando los estimadores  $\hat{\phi}_{21}$  y  $\hat{\phi}_{22}$  haciendo uso de las ecuaciones (6) y (7).

Asimismo, es evidente que con las mismas ecuaciones se pueden calcular los  $r_{xx}(m)$ . A continuación se presentan las gráficas en las que se comparan las auto-correlaciones teóricas de  $X(n)$  con las  $\hat{R}_{xx}(m)$  y las  $\hat{r}_{xx}(m)$  estimadas anteriormente:

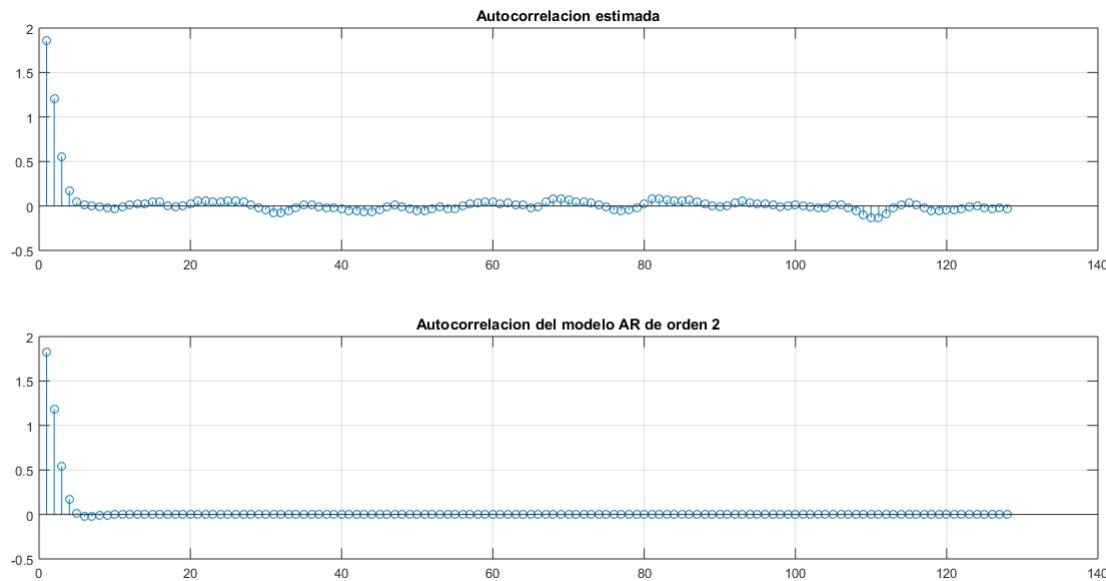


Figura 5: Autocorrelacion estimada y teórica

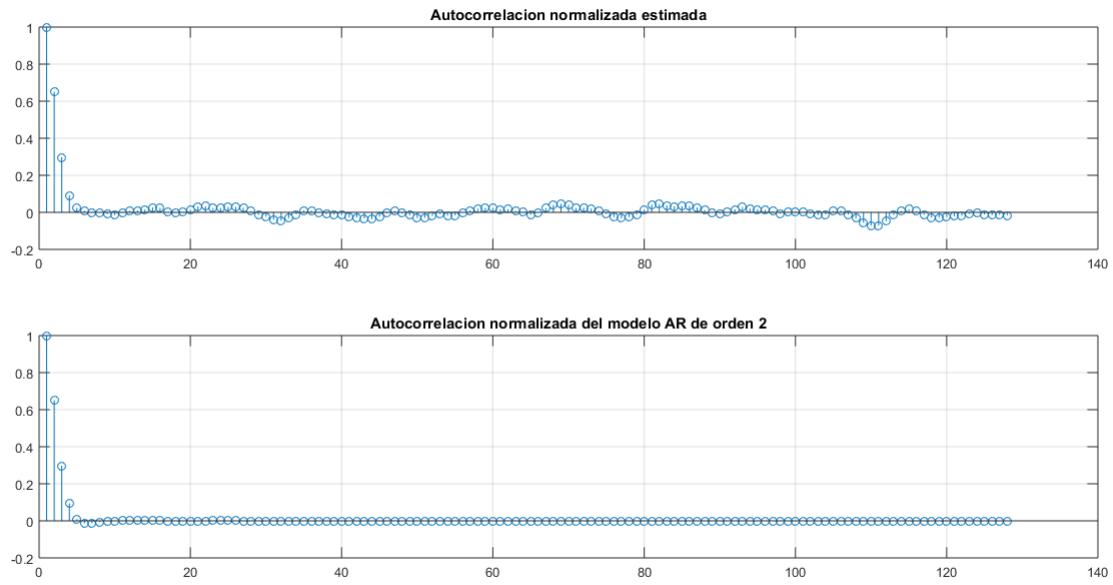


Figura 6: Autocorrelacion normalizada estimada y teórica

La autocorrelacion de un modelo auto-regresivo de orden 2 esta dado por la suma de dos exponentiales. En este caso se puede ver que el modelo teórico coincide casi de manera perfecta para los primeros 7 valores de la autocorrelacion, para los demás valores la autocorrelacion teórica es prácticamente nula dado que decrece exponencialmente. Sin embargo, los valores de autocorrelacion estimados para  $m \geq 7$  aunque toman valores pequeños, no son tan cercano al cero como en el modelo teórico. Ademas, no tienden a cero exponencialmente sino que tienen una forma senoidal que oscila alrededor del cero.

**5. Estimar la densidad espectral de potencia de  $X(n)$  utilizando dos métodos distintos(promediacion de periodogramas y transformada de Fourier de la autocorrelacion estimada)**

A continuación se presenta la gráfica de la densidad espectral de potencia (psd) de  $X(n)$  calculada de 3 maneras distintas.

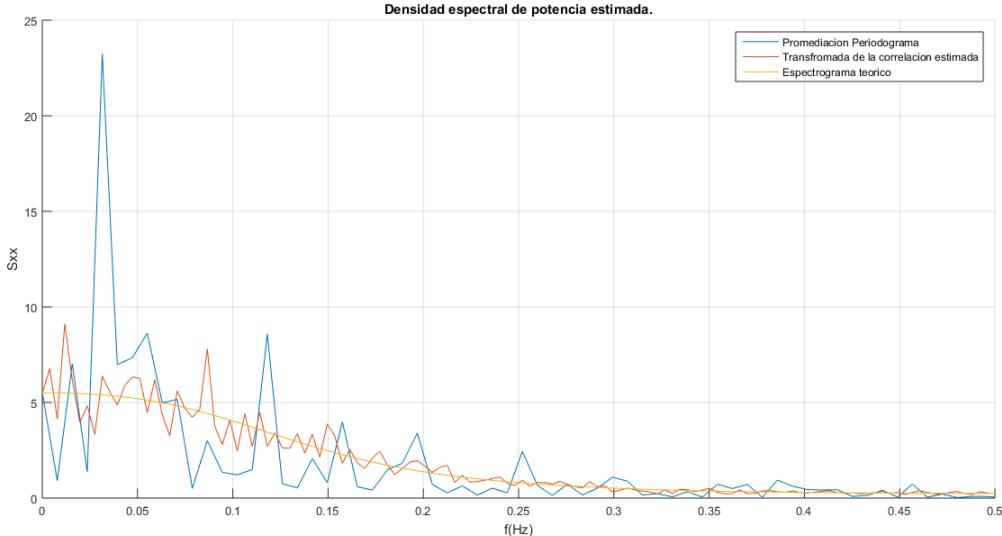


Figura 7: Densidades espectrales de potencia calculadas

La gráfica teórica se consiguió utilizando la fórmula de psd para un modelo AR de orden 2:

$$S_{xx_{teorico}}(f) = \frac{\sigma_N^2}{|1 - \phi_{21}e^{-j2\pi f} - \phi_{22}e^{-j4\pi f}|^2} \approx \frac{\sigma_N^2}{|1 - \hat{\phi}_{21}e^{-j2\pi f} - \hat{\phi}_{22}e^{-j4\pi f}|^2}, |f| < \frac{1}{2} \quad (9)$$

Mientras que la curva naranja se obtuvo mediante la fft de la autocorrelación estimada según:

$$\hat{S}_{xx_{Fourier}}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}_{xx}(k) e^{-j2\pi kf}, |f| < \frac{1}{2} \quad (10)$$

y la curva correspondiente a la promediación de periodogramas se obtuvo usando el siguiente estimador de psd:

$$\hat{S}_{xx_N} = \frac{1}{N} |X(f)|^2, |f| < \frac{1}{2} \quad (11)$$

$$\hat{S}_{xx_{periodograma}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_{xx_n}(f) \quad (12)$$

Se aplica la ecuación (11) para  $n$  bloques de  $X(n)$  de largo  $\left[\frac{N}{n}\right]$  cada uno. Donde  $X(f)$  es la transformada de Fourier de la función muestra de  $X(n)$  almacenada,  $N$  es el número de muestras almacenadas de dicha función (4096) y se toma  $n = 32$ .

Comparando las gráficas puede verse que todas tienen forma similar. Sin embargo, parece que la gráfica obtenida de la transformación de la autocorrelación estimada toma valores más similares a la psd teórica que la curva obtenida mediante la promediación de periodogramas. Esto es posible ya que el estimador mediante

promediacion de periodogramas es un estimador sesgado, y mientras mas muestras se utilizan para calcular la  $X(f)$  se tiene que su valor medio se asemeja a la verdadera psd. A pesar de esto, existe una relación de compromiso entre que tan sesgado es el estimador y que tan grande es su varianza, no se puede disminuir uno sin que el otro incremente. Para la gráfica realizada se utilizo una ventana cuadrada para dividir los bloques de la función muestra y aplicar la promediacion de periodogramas. Cambiando el tipo de ventana empleada y el numero de bloques utilizados para la promediacion, es posible que se pueda conseguir una estimación mas precisa que la que se obtuvo transformando los valores de autocorrelacion estimados.

## 2 Implementación de un predictor óptimo lineal sobre una grabación de voz

Primero se escuchó el audio original, al que luego se le sumó AWGN de varianza  $\sigma^2 = 10^{-3}$ . Como resultado se tiene una señal con ruido. En la siguiente imagen se puede ver la comparación entre la señal original con la señal + ruido blanco:

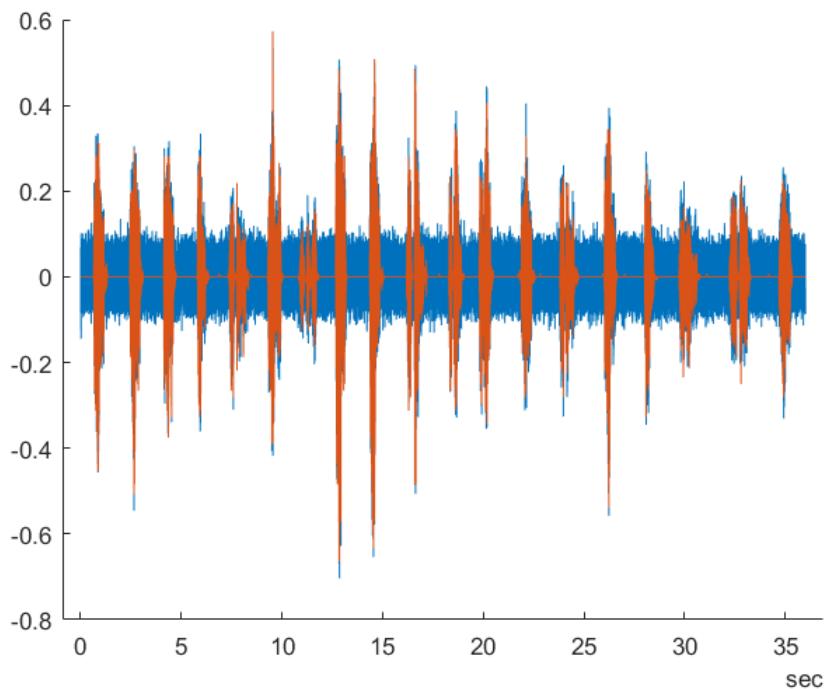


Figura 8: Señal Original vs Señal + AWGN

Teniendo en cuenta que la señal de audio es ergódica cada  $20ms$ , se separa el audio en ventanas de ese largo, donde a cada una se busca el predictor optimo y luego se concatenan todas las ventanas.

Luego se estima la auto-correlación de la señal original teniendo en cuenta que el ruido blanco esta incorrelacionado con la señal, por lo que se tiene:

$$R_{XX}(n) = R_{SS}(n) + R_{NN}(n) = R_{SS}(n) + \delta(n) \cdot \sigma^2$$

Por lo que despejando se obtiene:

$$R_{SS}(n) = \begin{cases} R_{XX}(n) - \delta(n) \cdot \sigma^2 & n = 0 \\ R_{XX}(n) & n \neq 0 \end{cases}$$

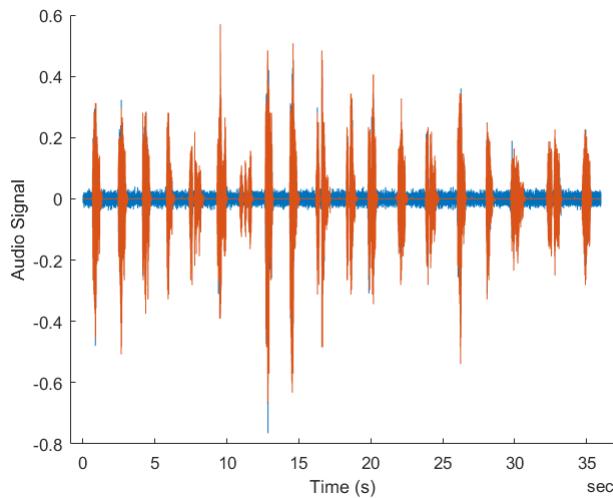
Luego de tener las auto-correlaciones, se crea la matriz y el vector de la ecuación Yule-Walker, dada por la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & R_{ss}(2) & \cdots & R_{ss}(N-1) \\ R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & R_{ss}(1) & \cdots & R_{ss}(N-2) \\ R_{ss}(2) & R_{ss}(1) & R_{ss}(0) & \cdots & R_{ss}(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{ss}(N-1) & & & \cdots & R_{ss}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ss}(1) \\ R_{ss}(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{ss}(N) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

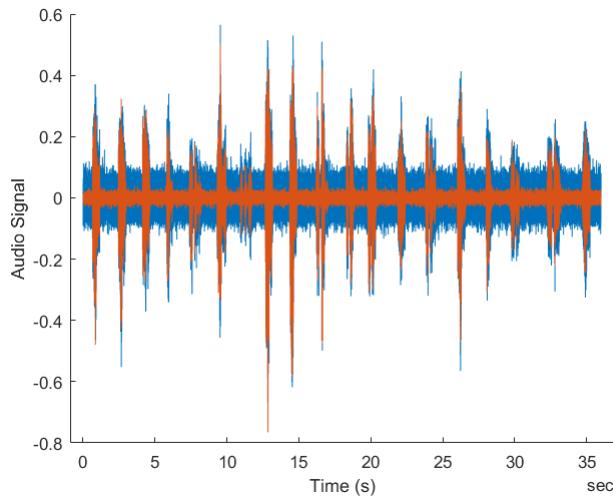
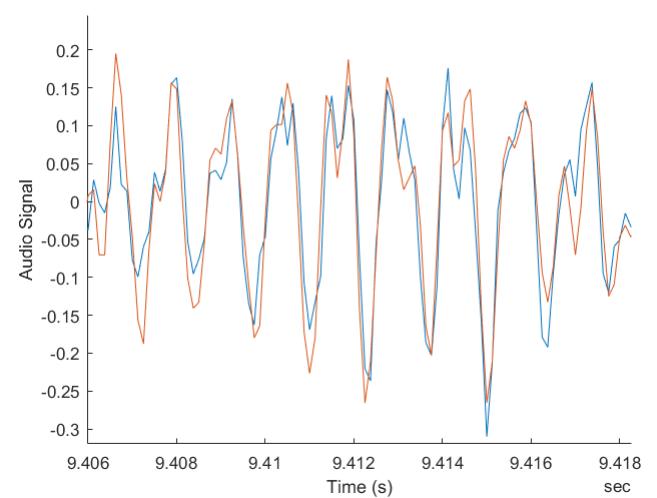
Figura 9: Ecuación de Yule-Walker

Despejando de esta formula se obtienen los coeficientes del filtro. Luego de tener estos coeficientes, se convoluciona la señal con los coeficientes, obteniendo así el predictor optimo.

A continuación se muestra en una figura el resultado obtenido en comparación a las señales originales:



(a) Señal original vs señal predecida



(b) Señal predecida vs señal original + AWGN

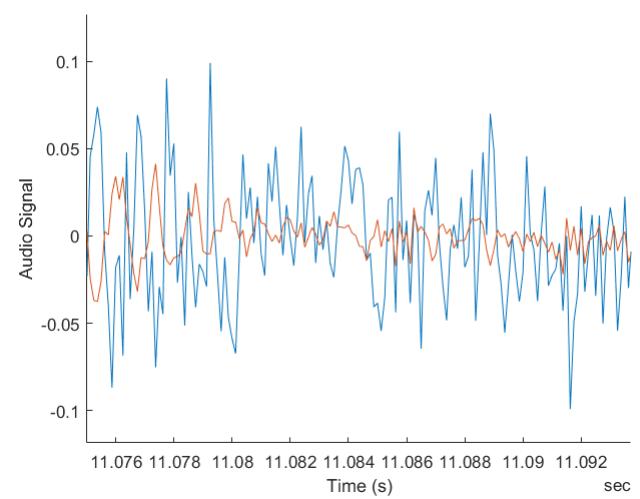


Figura 10: Comparación con señal predecida

Luego se calculo el error, resultando en la siguiente función:

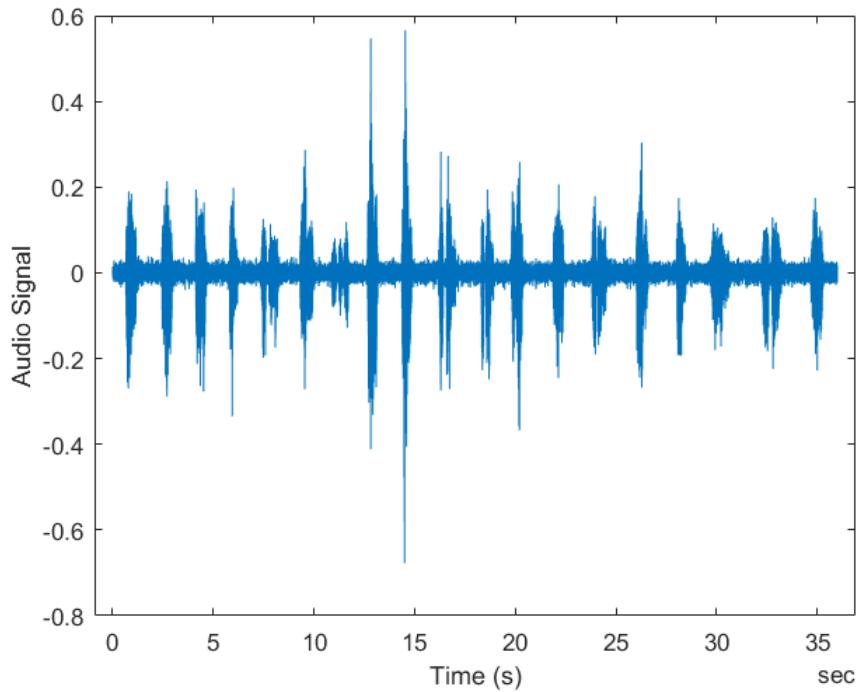


Figura 11: Señal error

Con estos datos se calculo la ganancia de predicción, dada por la formula:

$$G_p = \frac{\sum_{i=1}^N S(i)^2}{\sum_{i=1}^N e(i)^2}$$

Este procedimiento se aplico con un orden de filtro desde  $n = 1$  a  $n = 20$ , mostrando que efectivamente la maxima ganancia de predicción estaba en el orden entre 10 a 15. Esto se puede ver en el siguiente graficó:

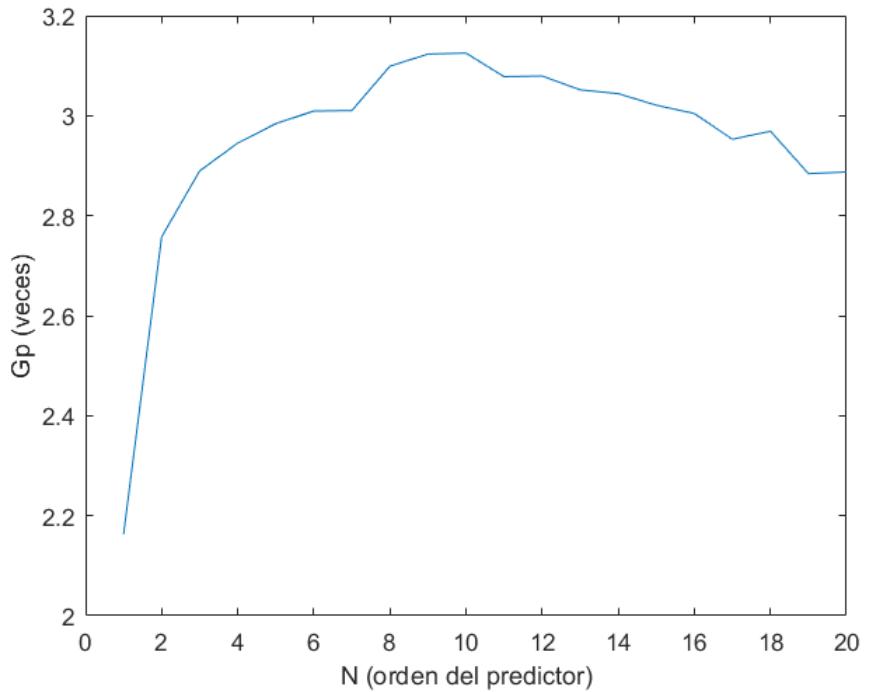


Figura 12: Ganancia de predicción vs orden del filtro

Luego se escucharon el audio con ruido y el audio predecido, confirmando que efectivamente se pudo predecir correctamente la señal de audio original, eliminando considerable parte del ruido agregado.