TEMA 4. MINIMIZACIÓN

1. Definición

Minimizar es reducir una función booleana a su mínima expresión con el fin de optimizar la implementación. Existen 3 métodos de minimización:

A. Álgebra de Boole

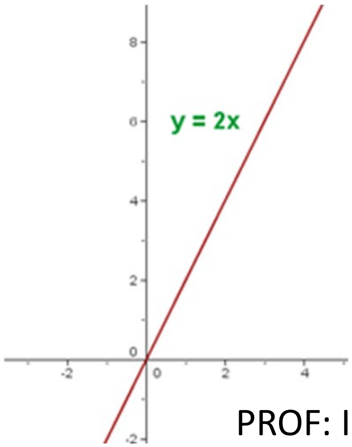
Es un método 100% algebráico que me sirve para minimizar funciones booleanas con cualquier número de variables.

B. Mapas de Karnaugh

Método gráfico para minimizar funciones booleanas con un pequeño número e variables (máx. 5 ó 6)

Ej. f(x)= 2x **Mundo euclidiano**

x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6



PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Diapositiva 1

---

4 INICIA TEMA 4
Senet Ferriz, 26/08/2020

C. Quine McCluskey

Método tabular e iterativo, y por lo tanto susceptible de ser programado por computadora, y nos sirve para minimizar funciones booleanas con un gran número de variables.

2. Mapas de Karnaugh

a) Introducción

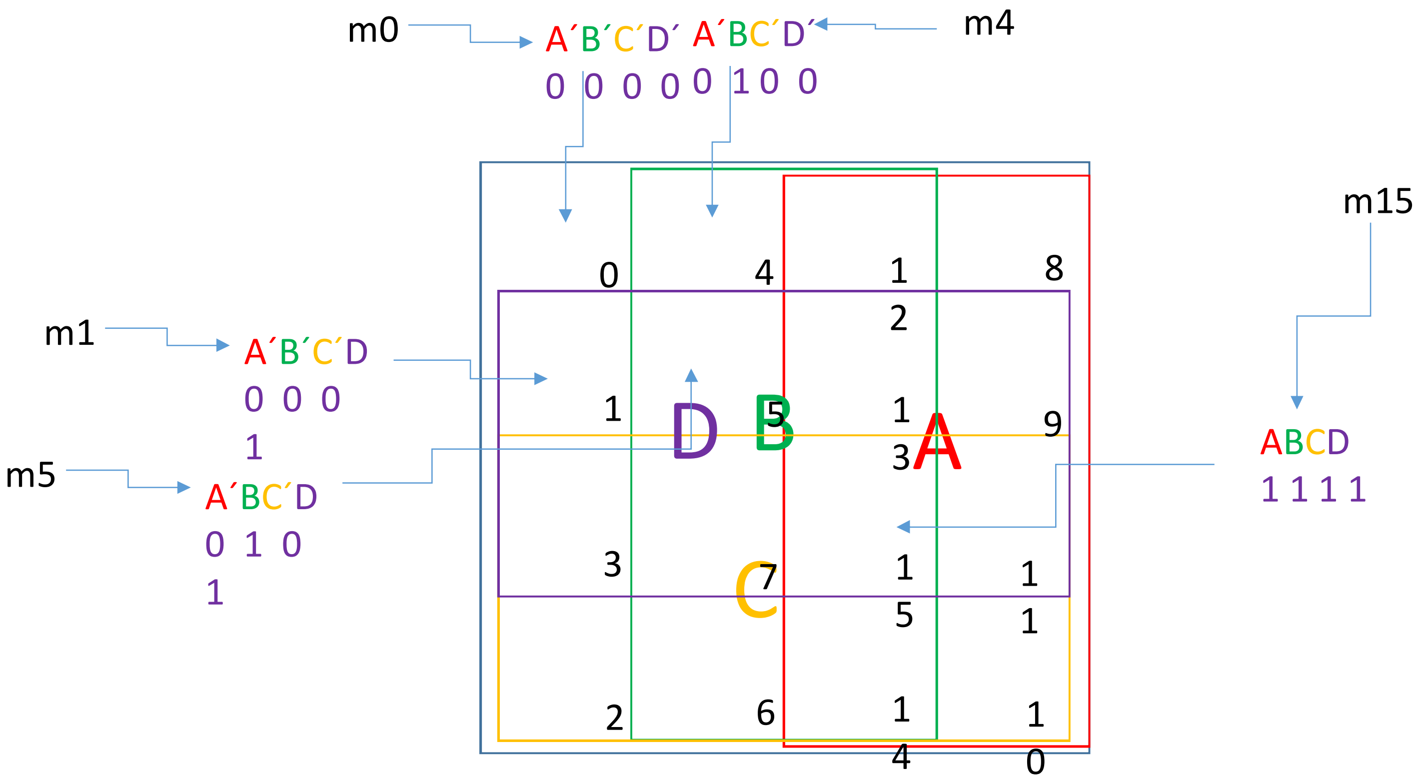
Un mapa de Karnaugh es una representación gráfica de un espacio booleano que puede contener una o varias funciones booleanas y equivale a una tabla de verdad.

b) Construcción de un mapa de Karnaugh

1.-Puesto que el mapa de Karnaugh representa un espacio booleano de **n** número de variables, al definir la región de cada variable (dominio) se generan cuadritos de forma tal que cualquier par de cuadritos inmediatos deben de corresponder a condiciones de combinaciones de variables lógicamente adyacentes, es decir, **QUE DIFIERAN EN UN SOLO BIT.**

2.-El mapa de Karnaugh debe ser lo más cuadrado posible

3.-Si deseamos representar un espacio booleano de **n** variables, el mapa de Karnaugh tendrá 2^n cuadritos.



PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

PENSAR TODO TODO TODO EN POTENCIA DE 2

B

A' B' C' D' 0 0 0 0 0	A' B' C' D' 0 1 0 0 4	A' B' C' D' 1 1 0 0 12	A' B' C' D' 1 0 0 0 8
A' B' C' D 0 0 0 1 1	A' B' C' D' 0 1 0 1 5	A' B' C' D' 1 1 0 1 13	A' B' C' D' 1 0 0 1 9
A' B' C' D' 0 0 1 1 3	A' B' C' D' 0 1 1 1 7	A' B' C' D' 1 1 1 1 15	A' B' C' D' 1 0 1 1 11
A' B' C' D' 0 0 1 0 2	A' B' C' D' 0 1 1 0 6	A' B' C' D' 1 1 1 0 14	A' B' C' D' 1 0 1 0 10

D

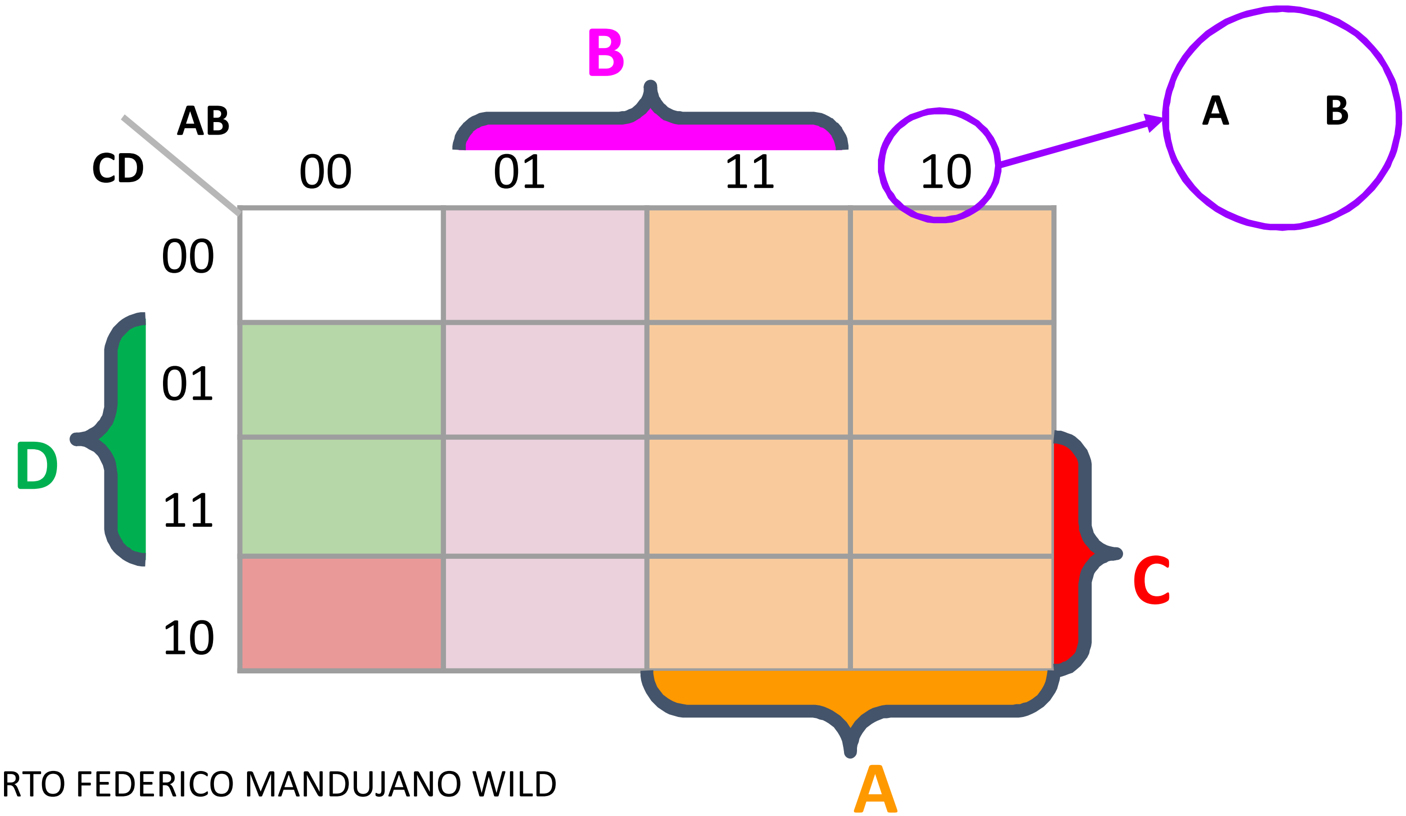
C

A

COMO HAY 4 VARIABLES (n=4) HAY 2^4=16 CUADRITOS

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

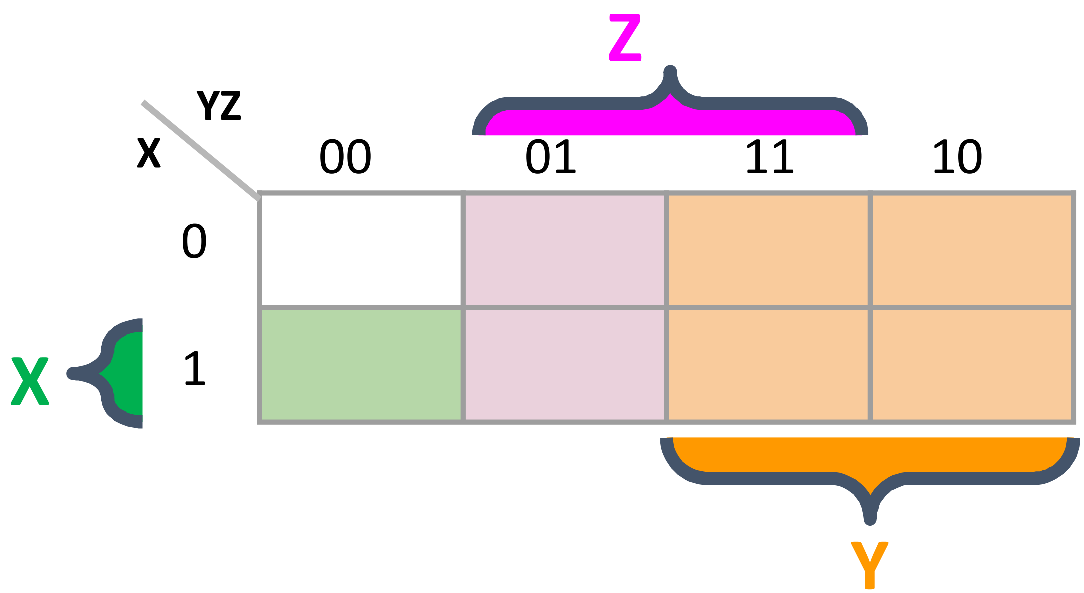
Podemos observar en la construcción de este mapa de Karnaugh que al definir los término de cada variable A, B, C, D se generan los cuadritos y si definimos bien la región de cada variable el mapa cumple con la adyacencia lógica. Para lograr dicha adyacencia, en lugar de tener que pensar y quebrarnos la cabeza, bastará con nombrar renglones y columnas siguiendo el **código GRAY,** esto es:



PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Construir un mapa de Karnaugh de tres variables X, Y, Z.



PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

PENSAR TODO TODO TODO EN POTENCIA DE 2

Una vez que tenemos un mapa de Karnaugh podemos representar una función booleana.

Ejemplo

Representar la siguiente función booleana en un mapa de Karnaugh

X	Y	Z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Z \ XY	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

PENSAR TODO TODO TODO EN POTENCIA DE 2

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

I. Minimización en suma de productos utilizando mapas de Karnaugh

Los pasos a seguir son:

1. Llenar el mapa de Karnaugh correspondiente con el valor de la función booleana, para ello es conveniente que la función booleana esté expresada en forma canónica o en una tabla de verdad.

2. Considerar las condiciones Don't care como *.

3. Agrupar los 1's adyacentes en grupos de números de unos potencia de 2 (1, 2, 4, 8, …)

4. Si ayuda tomar los * como 1's se toman. Con el fin de **hacer grupos MÁS GRANDES** se vale tomar más de 1 vez los 1's siempre y cuando **no existan conjuntos redundantes**.

5. Identificar la mínima cantidad de grupos que **agrupen a todos los 1's.**

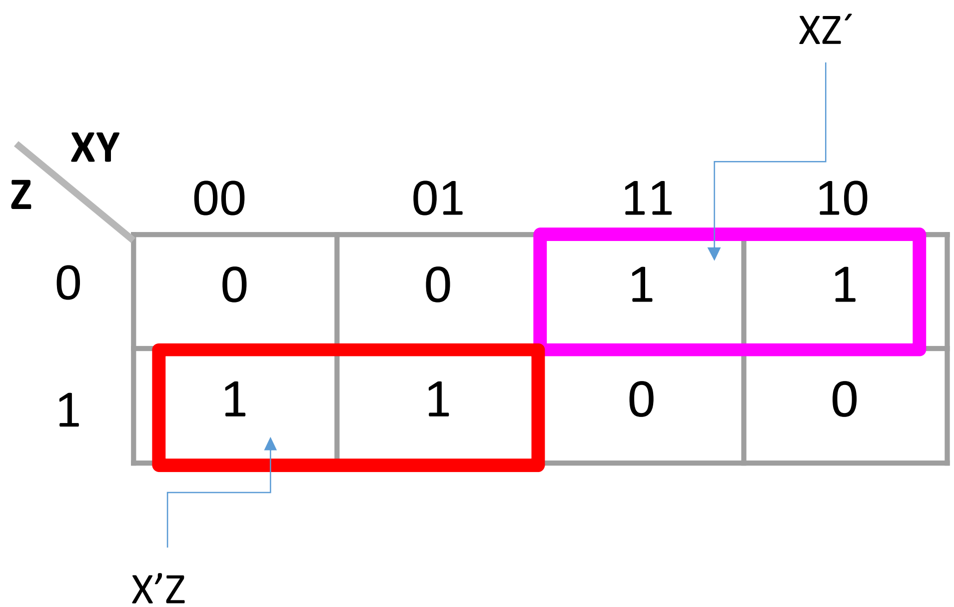
6. La función minimizada en suma de productos será igual a la suma de los dominios de esos grupos.

7. La minimización NO es única, pero SÍ mínima.

Una vez que tenemos una función booleana representada en un mapa de Karnaugh podemos minimizarla.

Ejemplo
Minimizar la siguiente función booleana utilizando un mapa de Karnaugh

X	Y	Z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



f(X,Y,Z)sp=XZ´+X’Z

PENSAR TODO TODO TODO EN POTENCIA DE 2

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Dada la siguiente función booleana representada en un mapa de Karnaugh, minimizarla.

SI MEDIO ESTÁ, NO LO TOMO EN CUENTA

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	*	0
01	0	0	*	1
11	1	0	*	*
10	0	1	*	*

Son adyacentes

Debe ser lo más cuadrado posible

Hay 3 grupos:

1. Su dominio está en A y D ∴ AD
2. Su dominio está en BCD’
3. Su dominio está en B’CD

f(A,B,C,D) = AD + BCD’ + B’CD

GRUPO GRANDE = DOMINIO PEQUEÑO

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Minimizar la siguiente función booleana F(A, B, C, D, E) = **∑m** (0, 2, 8, 11, 15, 18, 20, 21, 27, 28, 29, 31)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	1	1	0
01	0	0	0	0	0	1	1	0
11	0	0	1	1	1	1	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

A’C’D’E’

ACD’

BDE

B’C’DE’

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Minimizar la siguiente función booleana F(A, B, C, D, E) = $\sum m$ (0, 2, 8, 11, 15, 18, 20, 21, 27, 28, 29, 31)

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	1	1	0
01	0	0	0	0	0	1	1	0
11	0	0	1	1	1	1	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	1

CONJUNTO REDUNDANTE

Es aquel conjunto donde todos sus elementos ya están agrupados en otro grupo.

F(A,B,C,D,E) = A’C’D’E’ + B’C’DE’ + BDE + ACD’

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Minimizar la siguiente función de 5 variables.

YZ \ VWX	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1		1			1	1	1
01	1		1			1	1	1
11			1			1		
10			1	1	1	1		

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Minimizar la siguiente función de 6 variables.

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001								
011								
010	1			1	1			1
110	1			1	1			1
111								
101								
100	1			1	1			1

DEF \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1			1	1			1
001								
011								
010	1			1	1			1
110	1			1	1			1
111								
101								
100	1			1	1			1

f(A,B,C,D,E,F) = C’F’

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Podemos observar en este ejemplo que, para la gente común y corriente, nos resultó poco evidente observar la adyacencia. Sin embargo, podemos utilizar algunos “trucos” para minimizar mapas de Karnaugh con muchas variables, algunos de estos “trucos” consisten en dividirlo en mapas más manejables (4x4) de tal forma que cada nuevo mapa tendrá un superdominio correspondiente.

TRUCO 1

Este truco es un método mixto de minimización

1. Dividir el mapa de Karnaugh en diferentes regiones en donde **cada región tendrá un superdominio** (es conveniente dividir el mapa de Karnaugh en mapas de 4x4).
2. Minimizar cada mapa independientemente, tratando de **ser congruente** con los demás mapas.
3. Obtener la función minimizada de cada mapa y **premultiplicarla con su superdominio** correspondiente.
4. Sumar las funciones obtenidas de cada mapa.
5. Minimizar la nueva función utilizando álgebra de boole.

Ejemplo

Dada la siguiente función booleana minimizarla con el “truco” 1.

YZ \ VWX	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1			1	1			1
01		1				1	1	
11		1					1	
10	1	1		1	1		1	1

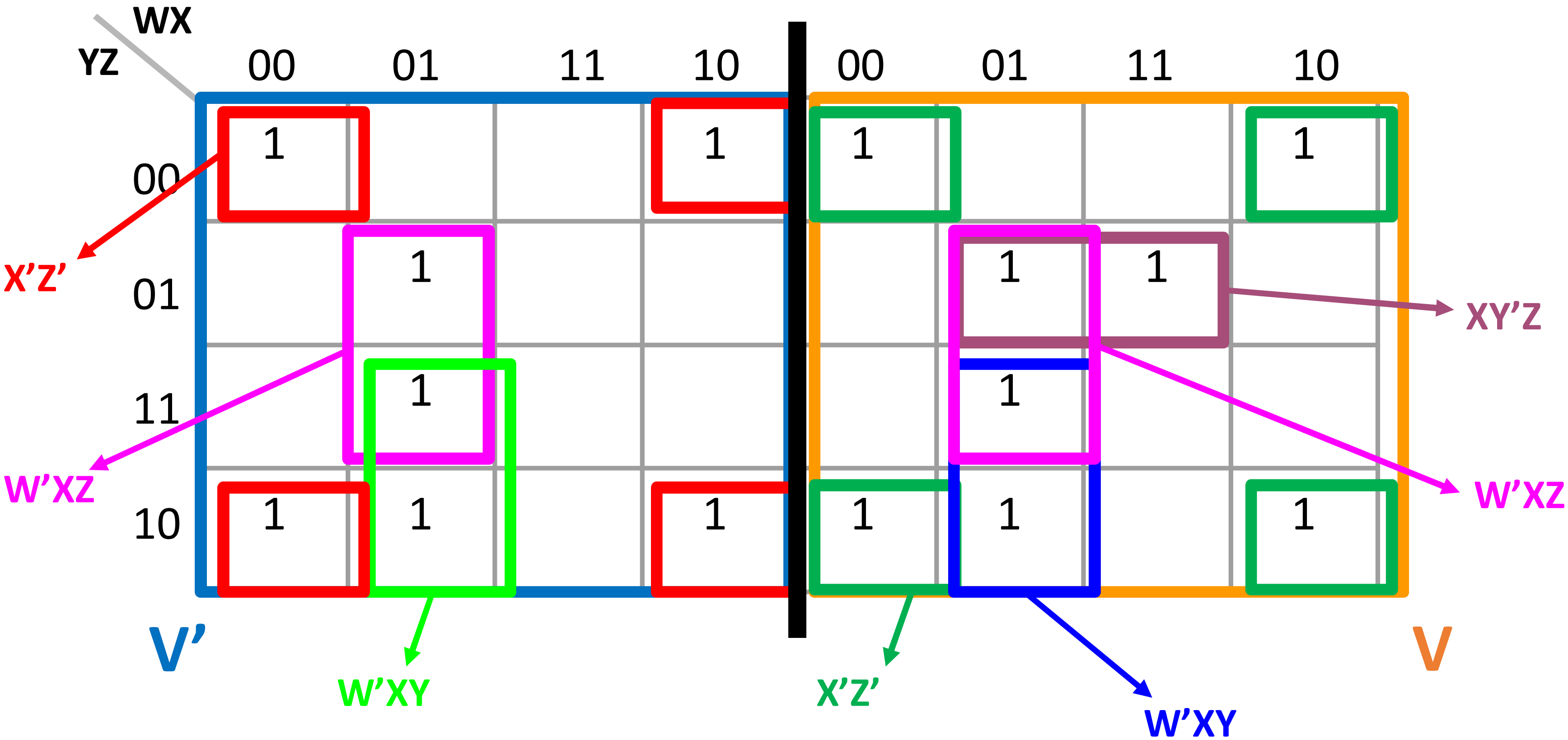
V’

V

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

YZ \ WX	00	01	11	10	00	01	11	10
	V'				V			
00	1			1	1			1
01		1				1	1	
11		1				1		
10	1	1		1	1	1		1

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD



f’= V’ [X’Z’+W’XZ+W’XY]   f’’= V [X’Z’+W’XY+XY’Z+W’XZ]

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

$f' = \mathbf{V'}\,[X'Z' + W'XZ + W'XY]$ $\qquad$ $f'' = \mathbf{V}\,[X'Z' + W'XY + XY'Z + W'XZ]$

$f = f' + f''$

$= \mathbf{V'}\,[X'Z' + W'XZ + W'XY] + \mathbf{V}\,[X'Z' + W'XY + XY'Z + W'XZ]$

$= V'X'Z' + V'W'XZ + V'W'XY + VX'Z' + VW'XY + VXY'Z + VW'XZ$

$= X'Z'\,(V'+V) + W'XZ\,(V'+V) + W'XY(V'+V) + VXY'Z$

$\mathbf{f = X'Z' + W'XZ + W'XY + VXY'Z}$

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

TRUCO 3

Este truco consiste en agrupar las expresiones de residuos U que aparezcan en celdas adyacentes de la misma forma que se agrupan los 1's, multiplicando por su dominio o prefijo correspondiente, esto es:

1. Se agrupan los residuos U y U´. Para facilitar la agrupación podemos considerar que **U+U'=1** y **U*+U'*=***.
2. Realizar una transformación del mapa con las siguientes reglas:
   a) Transformar las U, U', U* y U'* a 0.
   b) Transformar las U'* + U, U*+U' a * siempre y cuando, al menos el término sin * haya sido agrupado.
   c) Transformar U'* + U, U*+U' a 1 cuando ninguno de los términos haya sido agrupado ó sólo el término con *.
   d) Transformar los 1's en *'s si y sólo si, los dos términos del 1 hayan sido agrupados.
3. Minimizar el nuevo mapa que solo contiene 1's, 0's y *'s.
4. La función minimizada será igual a la suma de lo obtenido en el paso **1** más el paso **3**.

PERO ANTES:

Dada la siguiente función booleana de variables A, B, C, D, E minimizar utilizando un mapa de Karnaugh variables C, D, E.

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

A	B	C	D	E	f
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1

A	B	C	D	E	f
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

A	B	C	D	E	f
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1

A	B	C	D	E	f
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

B	C	D	E	f
0	0	0	0	A
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	A’
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	A
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	A’
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

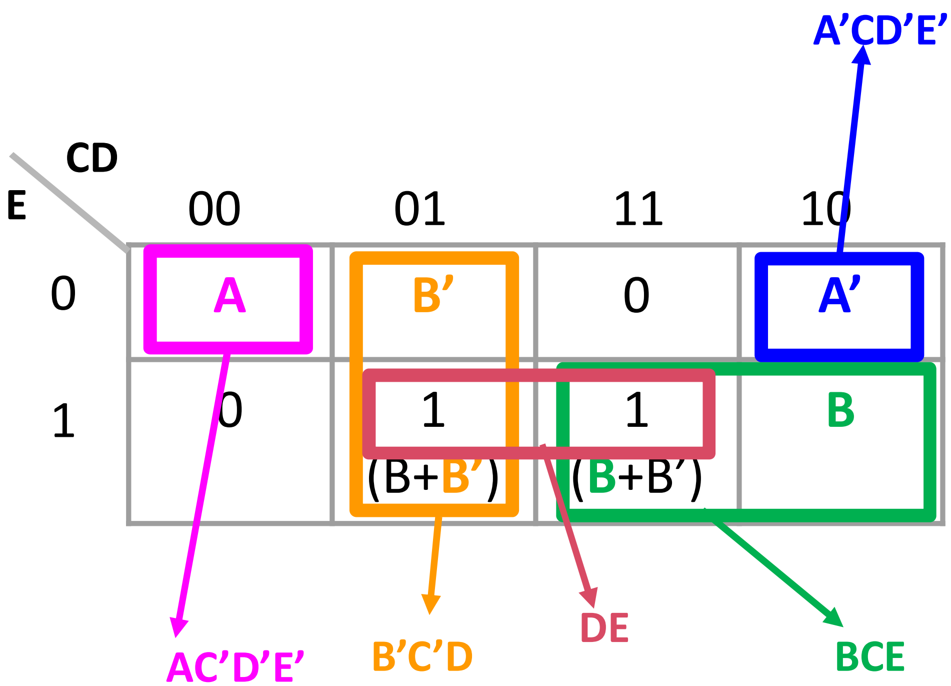
COMO VEMOS, YA SE ELIMINÓ LA COLUMNA A, YA QUE EN LA FUNCIÓN ESTÁ REFLEJADO EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN PARA CUANDO A=0 Y A=1. AHORA HACEMOS LO MISMO CON B

EN FORMA GENERAL

$f = a'f' + a f''$

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

C	D	E	f
0	0	0	A
0	0	1	0
0	1	0	B’
0	1	1	1
1	0	0	A’
1	0	1	B
1	1	0	0
1	1	1	1



f_{sp}= AC’D’E’ + B’C’D + BCE + A’CD’E’ + DE

f =AC´D´E´+B´C´D+A´CD´E´+BCE+DE

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Para demostrar que el Truco 3 sí funciona, minimizaremos la función SIN reducir.

A'CD'E

AC'D'E'

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	1	0	1	0	0	1
01	0	0	1	0	0	1	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0	0	0	1

DE

BCE

B'C'D

$f_{sp}= AC'D'E' + B'C'D + BCE + A'CD'E' + DE$

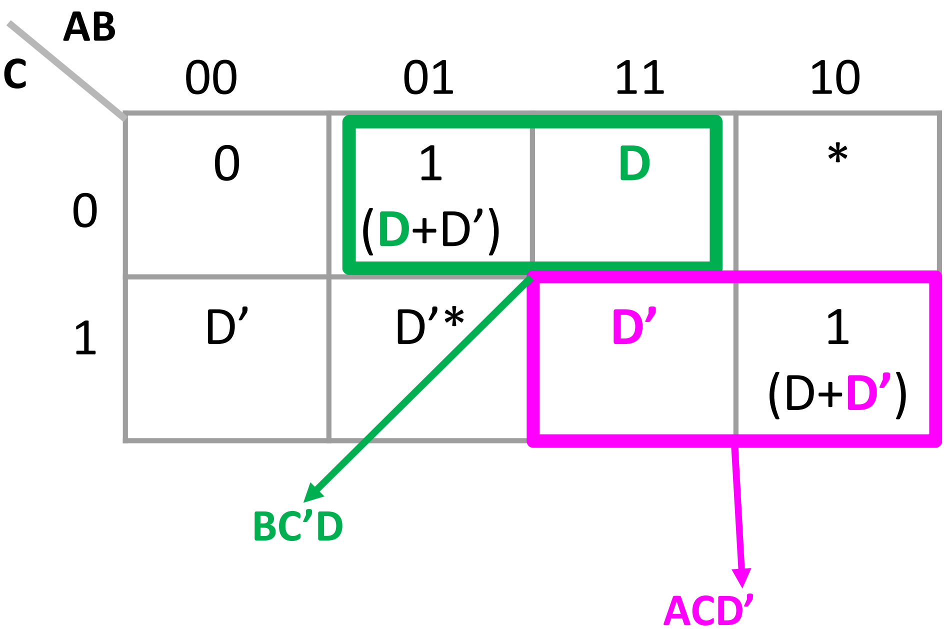
Ejemplo 2

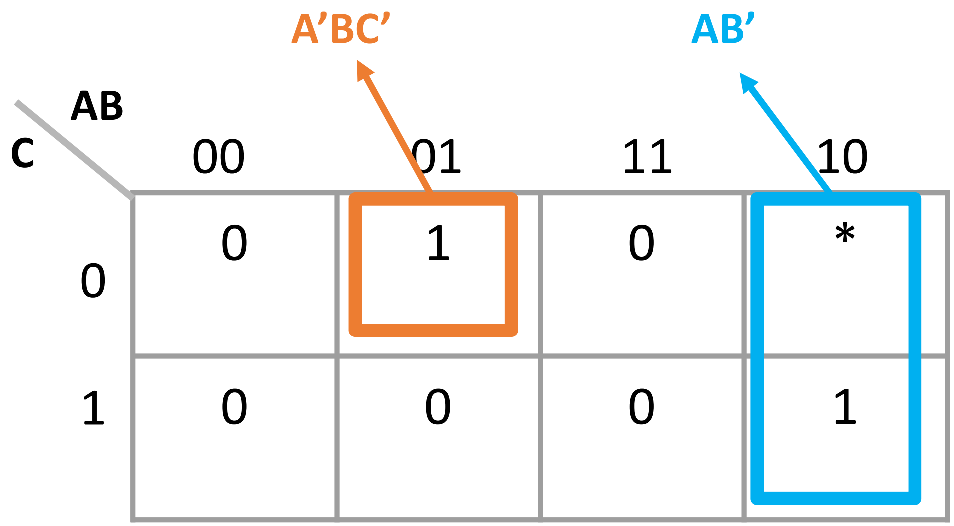
Dada la siguiente función booleana de variables A, B, C, D minimizar utilizando un mapa de Karnaugh variables A, B, C.

A	B	C	D	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	*
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	*
0	1	1	1	0
1	0	0	0	*
1	0	0	1	*
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

A	B	C	f	Justificación
0	0	0	0	D’ ▪ 0 + D ▪ 0
0	0	1	D*	D’ ▪ 0 + D*
0	1	0	1	D’ ▪ 1 + D ▪ 1
0	1	1	D’*	D’ ▪ * + D ▪ 0
1	0	0	*	D’ ▪ * + D* = *(D’+D)
1	0	1	1	D’ ▪ 1 + D ▪ 1
1	1	0	D	D’ ▪ 0 + D ▪ 1
1	1	1	D’	D’ ▪ 1 + D ▪ 0

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

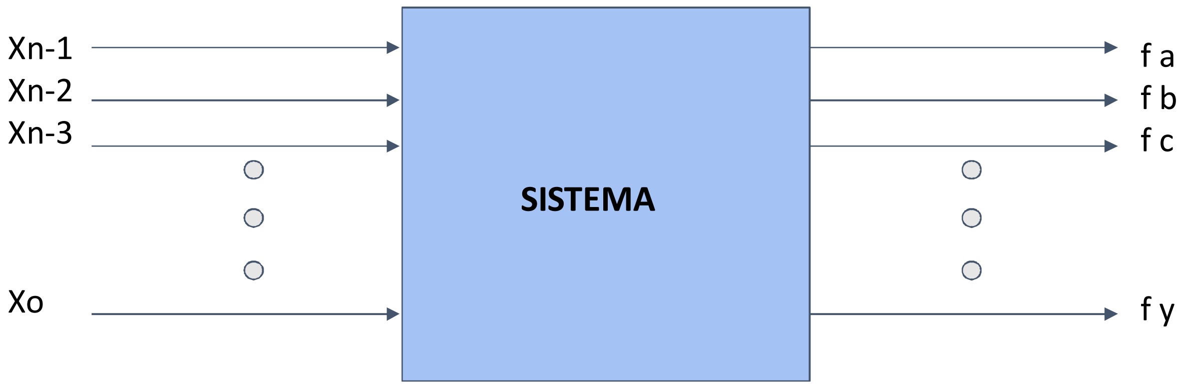




$f_{sp} = ACD' + BC'D + A'BC' + AB'$

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

II. **Minimización de sistemas con múltiples funciones o salidas**



NOTA: ¿CUÁNTAS FUNCIONES BOOLEANAS PUEDE TENER EN UN ESPACIO BOOLEANO DE N VARIABLES?

2^{2^n}

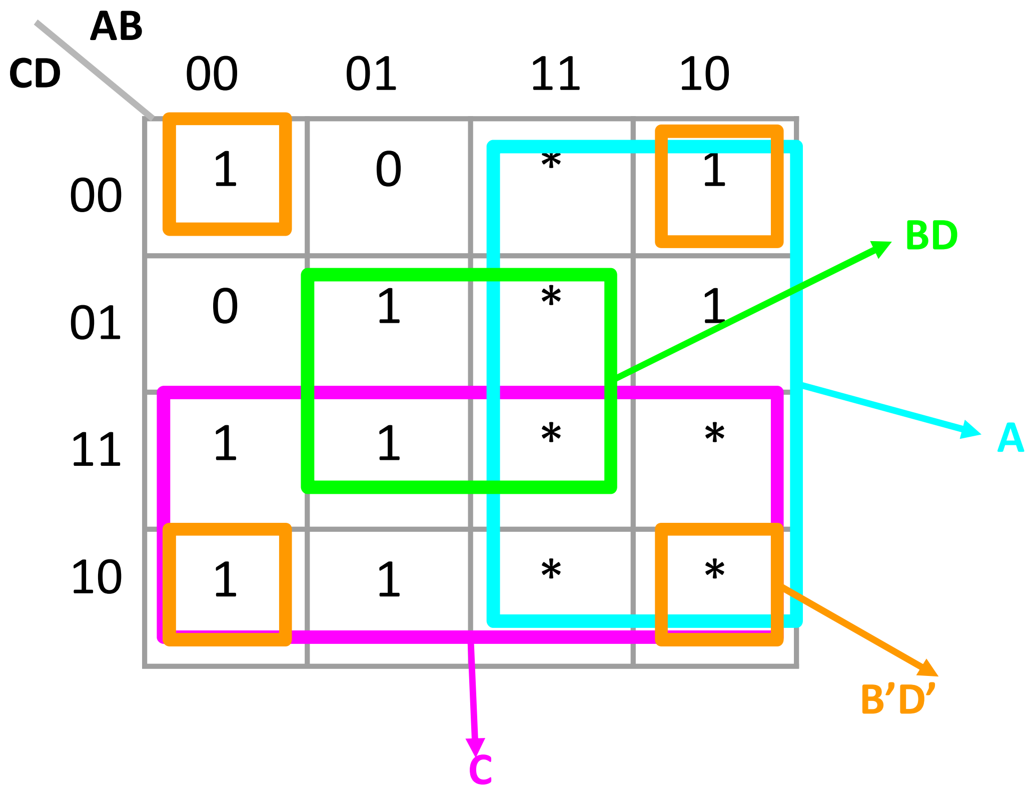
PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo

Minimizar las funciones booleanas del código de 7 segmentos.

A	B	C	D	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
0	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1	0
0	**0**	**0**	**1**	0	1	1	0	0	0	0
0	**0**	**1**	**0**	1	1	0	1	1	0	1
0	**0**	**1**	**1**	1	1	1	1	0	0	1
0	**1**	**0**	**0**	0	1	1	0	0	1	1
0	**1**	**0**	**1**	1	0	1	1	0	1	1
0	**1**	**1**	**0**	1	0	1	1	1	1	1
0	**1**	**1**	**1**	1	1	1	0	0	0	0
1	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1	1
1	**0**	**0**	**1**	1	1	1	1	0	1	1

Para f1



$f_1 = C + B'D' + A + BD$

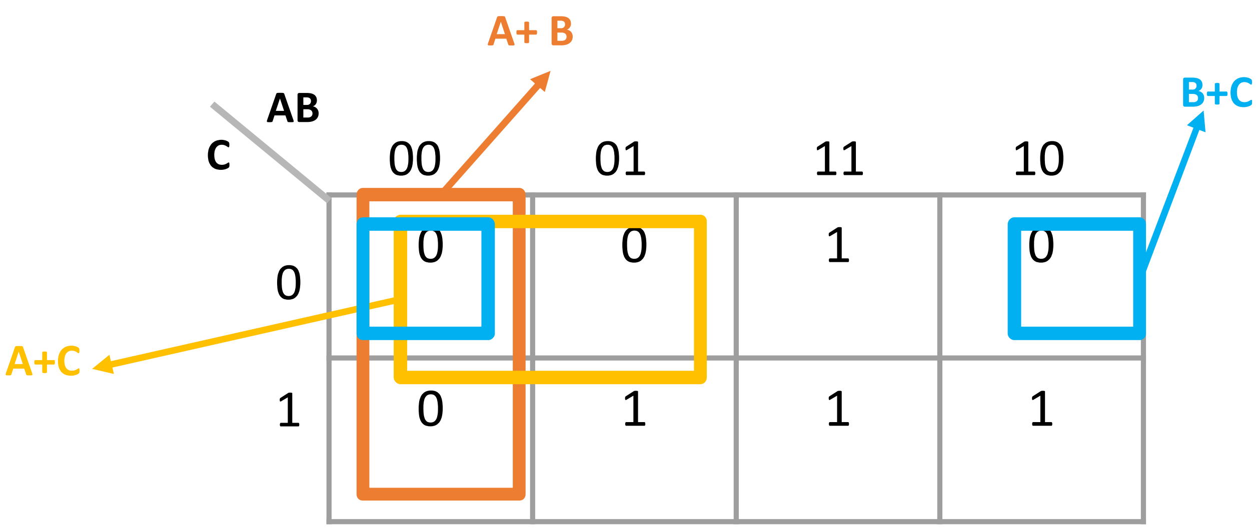
PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

III. Minimización en producto de sumas utilizando mapas de Karnaugh

Para obtener la minimización en producto de sumas tenemos que agrupar los 0’s de la misma forma que se agrupan los 1’s en las funciones de suma de productos, solo que el dominio de cada grupo es la suma de las variables complementadas.

Ejemplo

Dada la siguiente función booleana dada en un mapa de Karnaugh, minimizar en producto de sumas.



$f_{ps} = (A+B)\,(B+C)\,(A+C)$

Ejercicio

De la función anterior, obtener:

a) La función en mintérminos — $fm=\sum m(3,5,6,7)$
b) La función negada en mintérminos — $f'm=\sum m(0,1,2,4)$
c) La función en maxtérminos — $fM=\prod M(0,1,2,4)$
d) La función negada en maxtérminos — $f'M= \prod M(3,5,6,7)$
e) La función minimizada en suma de productos — $fsp=AB+BC+AC$
f) La función negada minimizada en suma de productos — $f'sp= A'B'+B'C'+A'C'$
g) La función minimizada en producto de sumas — $fps= (A+B)(B+C)(A+C)$
h) La función negada minimizada en producto de sumas — $f'ps= (A'+B')(B'+C')(A'+C')$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

PROF: ING. ROBERTO FEDERICO MANDUJANO WILD

Ejemplo 2

Minimizar la siguiente función booleana.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.