Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. $A,5\ I$.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto.Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (**1p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0,7**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0,5p**.)	Mala organización. Impuntualidad. Confunsión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p**.)	
Desarrollo de actividades. $A,6\ M$.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**1p**.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**0,7p**.)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0,5p**.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p**.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. $A,1M$ $A,3M$ $A,7A$ $A,2I$ $A,4I$	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (**4p**.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p**.)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (**2p**.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p**.)	
Reporte de la práctica. $A,5I$	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (**3p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (**2p**.)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p**.)	

Objetivos

☞ El alumno estudiará el concepto de función de transferencia.

☞ El alumno caracterizará la respuesta de sistemas de primer orden a las entradas impulso y escalón.

Recursos

1. Software
   a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
   a) Computadora con 2GB RAM min.

Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
		Apellidos y nombres:		

Fundamento teórico

Función de Transferencia

Uno de los métodos más comunes y útiles para representar a un sistema lineal e invariante en el tiempo, el cual es modelado por medio de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, es a través de su función de transferencia. El concepto de función de transferencia surge de la integral de convolución como herramienta para caracterizar la salida de un sistema causada por cualquier señal de entrada arbitraria mediante el conocimiento de la respuesta al impulso del sistema, esto es,

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t>0, \tag{11}$$

y la transformada unilateral de Laplace de señales; ésta transformada, además de ser lineal, tiene la siguiente propiedad,

$$\mathcal{L}\left\{x_1(t) * x_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\} = X_1(s)X_2(s), \tag{12}$$

en donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución entre las señales de tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $\mathcal{L}\left\{(\cdot)\right\}$ denota la transformada de Laplace de $(\cdot)$ y $X_1(s)$ y $X_2(s)$ son las respectivas transformadas de $x_1(t)$ y

$x_2(t)$. La propiedad anterior, nos indica que la transformada de Laplace de la convolución de dos señales es igual al producto de las transformadas de Laplace correspondientes. Aplicando la propiedad (11) a (12) obtenemos la siguiente expresión,

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

en donde $Y(s)$, $H(s)$ y $X(s)$ son las transformadas de Laplace de la señal de salida de estado cero, de la respuesta al impulso y de la entrada del sistema, respectivamente. El cociente entre las transformadas de Laplace de la señal de salida y la señal de entrada, se conoce como la función de transferencia del sistema,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s).$$

La función de transferencia es fácil de determinar una vez que el sistema ha sido descrito mediante una ecuación diferencial; se debe mencionar que se trabaja con sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en ingles). La función de transferencia no es exclusiva de este tipo de sistemas sino que también puede ser extendida a sistemas con múltiples entradas y salidas. Considere un ejemplo un sistema de tercer orden en el que la ecuación diferencial que describe su comportamiento con $x(t)$ como una entrada y $y(t)$ como salida es,

$$a_0 dddot y(t) + a_1\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_0\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2 x(t)$$

Para encontrar la función de transferencia, como primer punto se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (considerando condiciones iniciales nulas)

$$a_0 s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 X(s)$$

La función de transferencia se define como la relación entre la salida y la entrada, esto es,

$$(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)Y(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + b_2)X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

El polinomio que se obtiene en el denominador de la función de transferencia recibe el nombre de polinomio característico, el cual determina el comportamiento del sistema (rápido, lento, oscilatorio, sub-amortiguado, etc). Generalmente el coeficiente a_0 de la función de transferencia es igualado a 1.

Para el caso general de una ecuación diferencial de orden n con m derivadas en la entrada (los superíndices en paréntesis indican el orden de la derivada):

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + ... + b_{m-1}\dot{x}(t) + b_m x(t)$$
$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + ... + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + ... + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n}$$

Esto puede ser escrito como

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(m-i)}$$

tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$Y(s)\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i} = X(x)\sum_{i=0}^{m} b_i s^{m-i}$$

y calculando el cociente entre las transformadas de la salida y la entrada, se tiene lo siguiente,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{m-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}} = \frac{\mathcal{L}(salida)}{\mathcal{L}(entrada)}$$

La función de transferencia es una representación de estado cero del sistema, solamente si las condiciones iniciales son cero.

Patrón de polos y ceros

Un sistema es regularmente definido en términos de los polos y los ceros de su función de transferencia. Como se mencionó anteriormente un sistema puede ser descrito a través de su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Reescribiendo $H(s)$ en su forma estándar tal que el término de orden superior del numerador y el denominador son unitarios.

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0}\frac{s^2 + \frac{b_1}{b_0}s + \frac{b_2}{b_0}}{s^3 + \frac{a_1}{a_0}s^2 + \frac{a_2}{a_0}s + \frac{a_3}{a_0}}$$

El término constante (b_0/a_0) multiplica la relación de los polinomios los cuales pueden ser factorizados

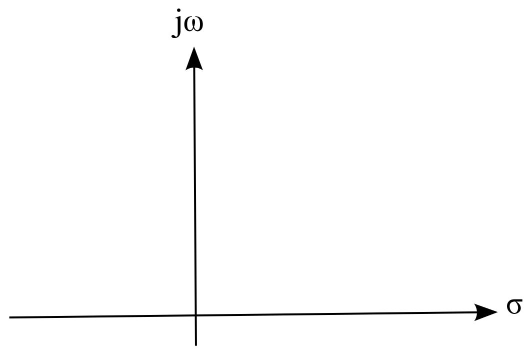
$$H(s) = k\frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

Donde $k = b_0/a_0$, el cual es conocido como término constante. Los términos z_i son los ceros de la función de transferencia, si $s \to z_i$ el numerador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia también es cero. Los términos p_i son los polos de la función de transferencia; si $s \to p_i$ el denominador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia tiende a infinito.

En el caso general de una función de transferencia con un numerador de orden m y un denominador de orden n, puede ser representada como:

$$H(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

El patrón de polos y ceros de la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLI) es una gráfica en el plano complejo s donde los ceros se describen con el símbolo 'o'y los polos con el símbolo 'x'.



Un sistema con función de transferencia $H(s)$ es estable si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo.

Respuesta a una entrada escalón

Una de las entradas más utilizadas con fines de prueba, es el escalón unitario que se define como:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}$$

Se puede encontrar fácilmente la respuesta de un sistema debido a una entrada escalón si se conoce la función de transferencia del sistema,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

la salida con condiciones nulas (por lo tanto se habla de la repuesta en estado cero) es simplemente determinada por

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

por lo que la respuesta al escalón queda determinada por

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

Inmediatamente se puede determinar dos características de la respuesta al escalón, los valores inicial y final, entonces:

Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$
$$\lim_{t\to 0^+} y_\gamma(t) = \lim_{s\to\infty} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to\infty} H(s)$$

Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$
$$\lim_{t\to\infty} y_\gamma(t) = \lim_{s\to 0} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to 0} H(s)$$

El resultado puede ser escrito como:

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty)$$
$$y_\gamma(\infty) = H(0)$$

Si se considera un sistema de primer orden genérico cuya función de transferencia está dada por,

$$H(s) = \frac{bs+c}{s+a}$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios, se debe mencionar que b o c (no ambos) pueden ser cero. Para obtener la respuesta al escalón unitario, la función de transferencia $H(s)$ es multiplicada por $1/s$

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s}\frac{bs+c}{s+a}$$

Utilizando el teorema del valor final e inicial, se puede determinar

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty) = b$$
$$y_\gamma(\infty) = H(0) = \frac{c}{a}$$
$$\tau = \frac{1}{a}$$