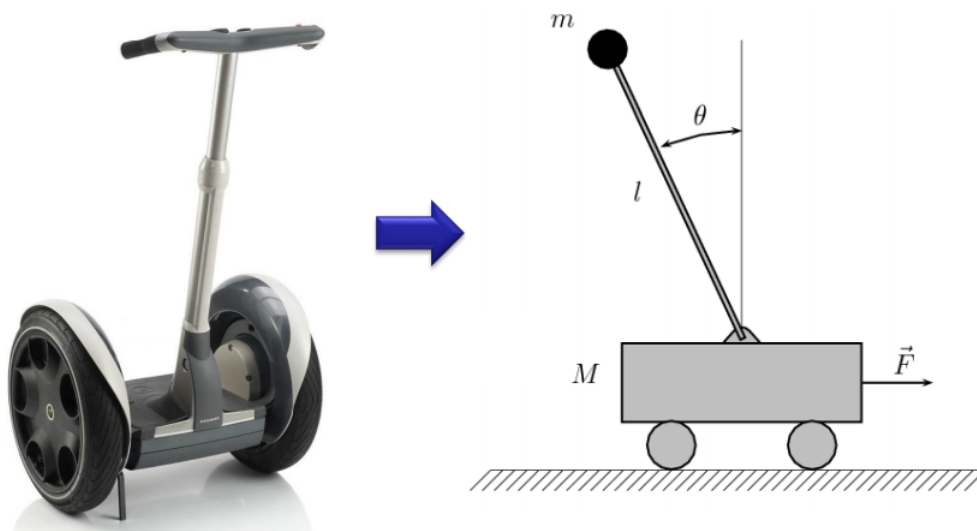

	Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales	Código:	MADO-76
		Versión	01
		Página:	63/97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de febrero 2019
Facultad de ingeniería		Area/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresion de este documento es una copia no controlada			


Práctica No4 Fundamentos de modelado de sistemas físicos



Apellidos y nombres	Alfaro Domínguez Rodrigo		
	Barrera Peña Víctor Miguel		
	Villeda Hernández Erick Ricardo		
Grpo:	4	Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto	Calificación
Brigada:	1		
Semestre:	2021-1	Fecha de ejecución: 24/11/2020	

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	64 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. A,5 I.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto. Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (1p.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (0,7.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (0,5p.)	Mala organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (0p.)	
Desarrollo de actividades. A,6 M.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (1p.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (0,7p.)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (0,5p.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (0p.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. A,1M A,3M A,7A A,2I A,4I	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (4p.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (3p.)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (2p.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (0p.)	
Reporte de la práctica. A,5I	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (4p)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (3p.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (2p.)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (0p.)	

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	65 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



Objetivos

- ☞ El alumno conocerá los fundamentos de modelado de sistemas físicos.
- ☞ El alumno identificará elementos básicos y su interconexión a través de sus propiedades físicas.
- ☞ El alumno aplicará los conocimientos de modelado de sistemas físicos para realizar aproximaciones matemáticas básicas.
- ☞ El alumno relacionará conceptos de modelado con elementos reales.

Recursos

1. Software
 - a) Matlab-Simulink
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
 - a) Computadora con 2GB RAM min.


Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1º	Voltaje alterno 	Electrocución 	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	<input type="checkbox"/>
Apellidos y nombres:				

Fundamento teórico

El modelado matemático sirve para interpretar de una manera homogénea un fenómeno físico, ¿Cómo saber que un modelo es una buena aproximación de un fenómeno?, esto depende sobretodo, de la aplicación para la cuál se diseño dicho modelo.

Para poder realizar un modelo matemático es necesario considerar las variables físicas dentro del fenómeno, es posible clasificar dichas variables como variables de flujo y variables de esfuerzo. Las variables de esfuerzo son aquellas variables que necesitan una referencia para poder definirse, por ejemplo, la diferencia de potencial o voltaje, la presión y la velocidad; las variables de flujo son aquellas variables que dentro del sistema o fenómeno toman una dirección específica, por ejemplo, la corriente, el gasto másico, la fuerza.

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	66 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

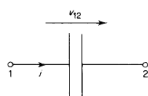
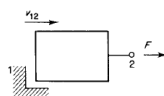
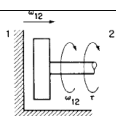
Tipo de sistema	Representación	Ley de constitución	Parámetros
Eléctrico		$i_C = C \frac{d}{dt} v_{C12}$	i_C : Corriente en el capacitor C : Capacitancia V_C : Voltaje en el capacitor
Mecánico Traslacional		$a = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} p$	$p = mv$ donde v es la velocidad p : cantidad de movimiento a : aceleración m : masa
Mecánico Rotacional		$\alpha = \frac{1}{J} \frac{d}{dt} h$	$h = J\omega$ donde ω es la velocidad angular h cantidad de movimiento angular α aceleración angular J momento de inercia

Figura 25. Almacenadores de Flujo

Una vez definidas las variables es posible definir los tipos de elementos que existen, los efectos de los elementos dentro de un sistema se pueden clasificar en tres

- Almacenadores de flujo.
- Almacenadores de esfuerzo.
- Disipadores

Los almacenadores de flujo y esfuerzo son considerados los elementos dinámicos dentro del sistema.

Almacenadores de flujo

Todos los almacenadores de flujo tienen la siguiente ley de constitución

$$e = K\phi(f) \quad (19)$$


donde e es un esfuerzo, K es una constante de proporcionalidad y f es el flujo. Los almacenadores de flujo se pueden observar en la Figura 25

Almacenadores de esfuerzo

Todos los almacenadores de esfuerzo tienen la siguiente ley de constitución

$$[h]f = K\phi(e) \quad (20)$$

donde e es un esfuerzo, K es una constante de proporcionalidad y f es el flujo. Los almacenadores de esfuerzo se observan en la Figura 26

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	67 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

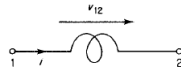
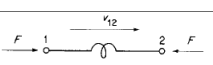
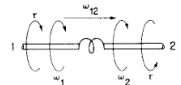
Tipo de sistema	Representación	Ley de constitución
Eléctrico		$V_L = L \frac{d}{dt} i_L$
Mecánico Traslacional		$F_{12} = K x_{12}$
Mecánico Rotacional		$\tau = K_\theta \theta_{12}$

Figura 26. Almacenadores de esfuerzo

Disipadores

Todos los disipadores tienen la siguiente ley de constitución

$$e = K f \quad (21)$$

donde e es un esfuerzo, K es una constante de proporcionalidad y f es el flujo. Los disipadores se pueden observar en la Figura 27

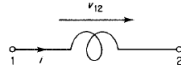
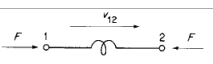
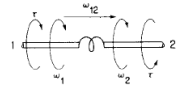

Tipo de sistema	Representación	Ley de constitución
Eléctrico		$V_L = L \frac{d}{dt} i_L$
Mecánico Traslacional		$F_{12} = K x_{12}$
Mecánico Rotacional		$\tau = K_\theta \theta_{12}$

Figura 27. Elementos disipadores

Elementos adicionales

Otro tipo de elementos que complementan a los mencionados, son las fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo, estas son las entradas a nuestros sistemas y siempre serán función de la variable física del sistema a modelar.

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	68 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Restricciones físicas

Los elementos dentro de la naturaleza interactúan entre sí de diferentes maneras, a esa forma de interactuar se le conoce como interconexión, dependiendo de esa interconexión el sistema tiene diferente comportamiento.

Existen dos formas básicas de interconexión, y de esas interconexiones se encuentran las restricciones físicas del sistema, éstas restricciones son las reglas que permiten analizar cada sistema.

- Para sistemas eléctricos las restricciones son las leyes de Kirchhoff, dichas restricciones son las siguientes:

$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i = 0 \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} i_j = 0 \quad (23)$$

Las restricciones anteriores se pueden resumir a que, la suma de voltajes en una rama es igual a cero, y que la suma de las corrientes en un nodo es igual a cero.

- Para sistemas mecánicos la ley que representa la restricción es la segunda ley de Newton, dicha ley es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i = 0 \quad (24)$$

Es decir, la suma de todas las fuerzas dentro del sistema mecánico es igual a cero.

- Para sistemas hidráulicos la restricción física es la ley de conservación de la masa que, para fluidos es la siguiente

$$\sum_{i=1}^{i=n} Q_i = 0 \quad (25)$$


Es decir, todo lo que entra dentro del sistema tiene que ser igual a todo lo que sale de él.

Las restricciones se pueden clasificar como:

- **Restricciones de compatibilidad:** Las restricciones de compatibilidad están asociadas a una interconexión en serie y es aplicable a las variables de esfuerzo dentro del sistema. Las ecuaciones básicas de estas restricciones tienen la siguiente representación en función de los esfuerzos y los flujos.

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_n \quad (26)$$

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n \quad (27)$$

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	69 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

- **Restricciones de continuidad:** Las restricciones de continuidad están relacionadas con la interconexión en paralelo y es aplicable a las variables de flujo dentro del sistema. Las ecuaciones que caracterizan estas restricciones son:

$$e = e_1 = e_2 = \dots = e_n \quad (28)$$

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad (29)$$


Metodología de modelado

- Primero se deben de identificar los elementos del sistema, es decir, almacenadores de flujo, almacenadores de esfuerzo, disipadores y fuentes.
- Establecer las leyes de constitución de cada elemento del sistema.
- Identificar el tipo de restricción, de compatibilidad y continuidad, dependiendo del sistema que se aborde.
- Plantear las restricciones físicas de cada sistema.
- Sustituir las relaciones de constitución en las restricciones físicas.

Cuestionario Previo


1. Identificar 2 sistemas físicos que se tengan en casa, con almacenadores de flujo y esfuerzo.

2. ¿Qué sistemas con elementos disipadores conoce?

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	70 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

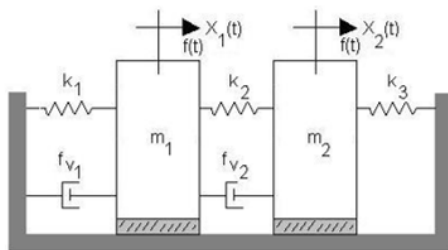
3. ¿Cuáles son las fuentes de esfuerzos y flujos en sistemas eléctricos y mecánicos?

4. Traer un elemento físico (mecánico o eléctrico) para su análisis.

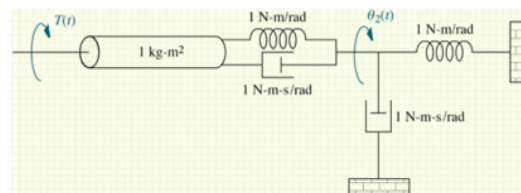
	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	71 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Desarrollo de la actividad

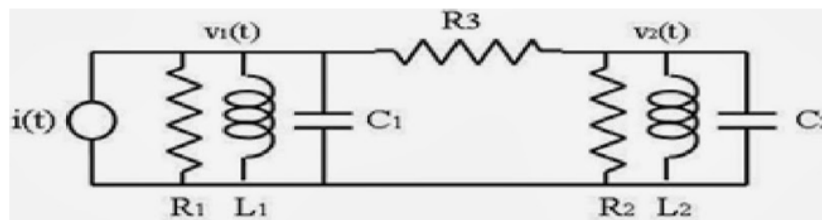
Actividad 1



Sistema 1



Sistema 2



Sistema 3

Figura 28. Sistemas

En la Figura 28 se muestran 5 sistemas diferentes, de los cuales se deben identificar las variables físicas, los elementos almacenadores de flujo, de esfuerzo, disipadores y fuentes de energía, una vez identificados los sistemas, llenar la tabla mostrada en la Figura 29

Actividad 2

Para el sistema mostrado en la Figura 41, obtener lo siguiente:

- El diagrama de cuerpo libre del sistema.
- Plantea sus restricciones de continuidad.
- Plantea sus restricciones de compatibilidad.
- Sustituye las relaciones constitutivas de cada elemento.


Actividad	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
Tipo	mecánico translacional.	mecánico rotacional.	eléctrico.
Variables físicas	x v a	θ ω α	v i
Almacenadores de flujo	m_1 m_2 $\dot{x} = \frac{p}{m}[kg]$	m_1 $\omega = \frac{H}{I}[Nms^2]$	C_1 C_2 $i = \frac{\lambda}{L}[Vs/A]$
Leyes de c. general	$a = \frac{1}{m} \frac{d}{dt} p$	$\alpha = \frac{1}{J} \frac{d}{dt} h$	$i_c = C \frac{d}{dt} VC$
Almacenadores de esfuerzo	k_1 k_2 k_3 $F = Kx[N/m]$	k_1 k_2 $\tau = K_\omega \omega[Nm/rad]$	L_1 L_2 $e = \frac{q}{C}[As/V]$
Leyes de c. general	$f_{12} = Kx_{12}$	$\tau = K_\theta \theta_{12}$	$V_L = L \frac{d}{dt} iL$
fuentes de energía	$f_1(t)$ $f_2(t)$	τ	i
Elementos disipadores	fv_1 fv_2 $F = b\dot{x}[Ns/m]$	$f\omega_1$ $f\omega_2$ $\tau = b_\omega \theta[Nms]$	R_1 R_2 R_3 $e = Ri[\Omega]$
Leyes de c. general	$f_{12} = Kx_{12}$	$\tau = K_\theta \theta_{12}$	$V_L = L \frac{d}{dt} iL$

Cuadro 1: Figura 29. Identificación de sistemas físicos

0.1. Solución

actividad

1

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	72 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Actividad	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
Variables físicas			
Almacenadores de flujo			
Almacenadores de esfuerzo			
fuentes de energía			
Elementos disipadores			

Figura 29. Identificación de sistemas físicos

Actividad 3

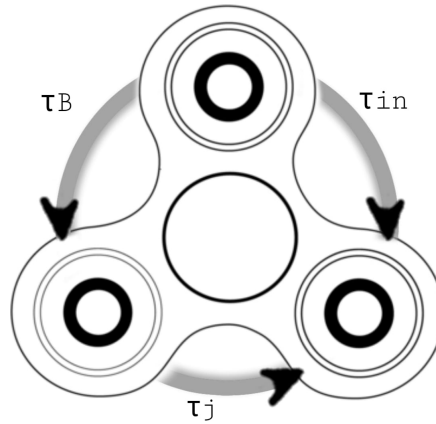
Obtener un sistema eléctrico equivalente al sistema trabajado en el punto anterior (dibujar esquema).

0.2. Solución

actividad

2

Diagrama de cuerpo libre:



Sistema mecánico rotacional.

τ_{in} =Fuente de energía(Fuerza de entrada).

τ_j =Masa(Inercia).

τ_B =Disipador(Fricción).

$$\tau_{in} = \tau_j + \tau_B$$

Donde: $\tau_j = J\alpha$, $\alpha = \dot{\omega}$ y $\tau_B = B\omega$

$\alpha = \dot{\omega}$ =primera derivada de la posición angular.

$$\tau_{in} = J\dot{\omega} + B\omega$$

$$\tau_{in} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}$$

Modelo matemático del sistema: $\tau_{in} = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}$

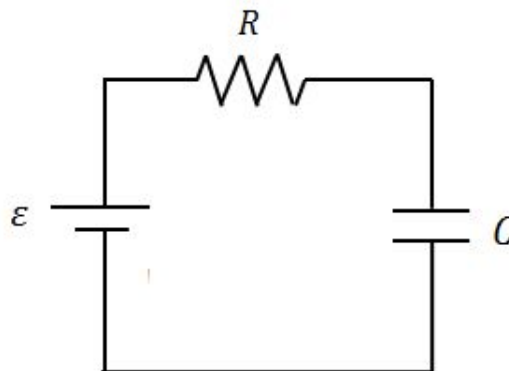
Actividad	Sistema1	Sistema2	Sistema3
"Variables físicas "	-	-	-. ^A lmacénadores de flujo ",-,-,- . ^A lmacénadores de esfuerzo ",-,-,-
"Fuentes de energía "	-	-	-. ^E lmentos disipadores ",-,-,-

0.3. Solución

actividad

3

Diagrama eléctrico equivalente:



Donde: Capacitor(C)=masa= τ_j , Resistencia(R)=disipador= τ_B , Fuente de energía(ϵ)= τ_{in} .


	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	73 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



Figura 30. Spinner

Actividad 4

En la Figura 31 se observa un diagrama simplificado del sistema de suspensión en una llanta de un automóvil, mediante la metodología de diseño estudiada obtener el modelo matemático del sistema de suspensión, especificando las variables físicas, los elementos almacenadores de flujo, esfuerzo, disipadores y fuentes.

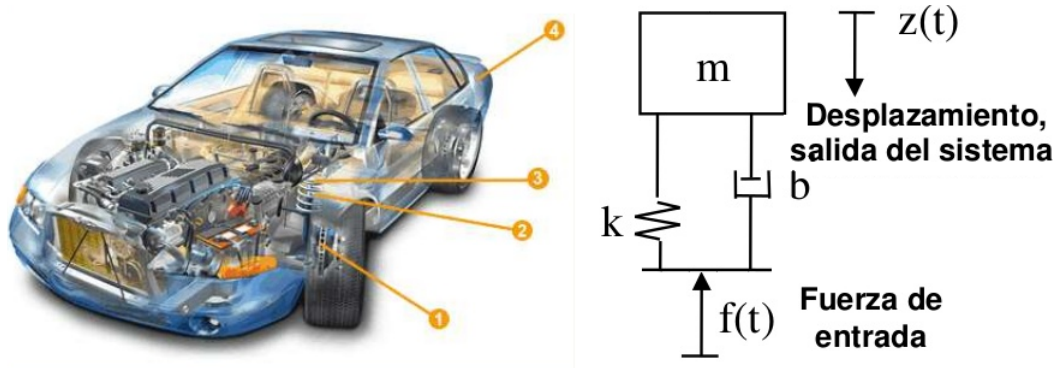


Figura 31. Modelo del sistema de suspensión

Una vez obtenido el modelo matemático defina los parámetros del sistema de suspensión considerando que la masa de un carro es aproximadamente de 2 toneladas y esta repartida en las cuatro llantas del automóvil. El objetivo es que los tripulantes sientan lo menos posible las irregularidades de las carreteras. Argumentar su resultado con ayuda de una simulación con matlab.

Actividad 4

En la figura 31 se observa un diagrama simplificado del sistema de suspensión en una llanta de un automóvil, mediante la metodología de diseño estudiado obtener el modelo matemático del sistema de suspensión especificando las variables físicas, los elementos almacenadores de flujo, esfuerzo, disipadores y fuentes. Una vez obtenido el modelo matemático defina los parámetros de sistema de suspensión considerando que la masa de un carro es aproximadamente de 2 toneladas y está repartida en las cuatro llantas del automóvil. El objetivo es que los tripulantes sientan lo menos posible las irregularidades de las carreteras. Argumentar su resultado con ayuda de una simulación con matlab.

El sistema mostrado consta de las siguientes variables:

- Fuerza de entrada ($f(t)$)
- Masa (M)
- Amortiguador (b)
- Resorte (k)
- Desplazamiento ($x(t)$), salida del sistema

Los cuales son catalogados de la siguiente manera:

Almacenador Flujo	Almacenador Esfuerzo	Disipador	Fuente de energía
Masa	Resorte	Amortiguador	Fuerza y el desplazamiento

Al ser un sistema mecánico nuestra restricción está presentada por la segunda Ley de Newton:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_i = 0 \quad (1)$$

En nuestro caso, la segunda Ley de Newton aplicada a nuestro sistema tiene la siguiente forma:

$$f(t) = f_k + f_B + f_m \quad (2)$$

Sustituyendo las definiciones de cada una de las fuerzas la expresión se transforma a:

$$f(t) = kx + Bv + ma \quad (3)$$

Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración como la primera derivada y la segunda derivada del desplazamiento respectivamente llegamos a:

$$f(t) = kx + Bx' + mx'' \quad (4)$$

Para continuar aplicaremos dos cambios de variables. La entrada va a corresponder a $x(t)$ y la salida a $y(t)$:

$$x(t) = ky(t) + By'(t) + my''(t) \quad (5)$$

Si a la ecuación anterior le aplicamos la transformada de laplace en ambos lados llegamos a la siguiente forma:

$$X(s) = kY(s) + BsY(s) + ms^2Y(s) \quad (6)$$

$$X(s) = Y(s)(k + Bs + ms^2) \quad (7)$$

Para finalizar usaremos la ecuación anterior para obtener la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(k + Bs + ms^2)} \quad (8)$$

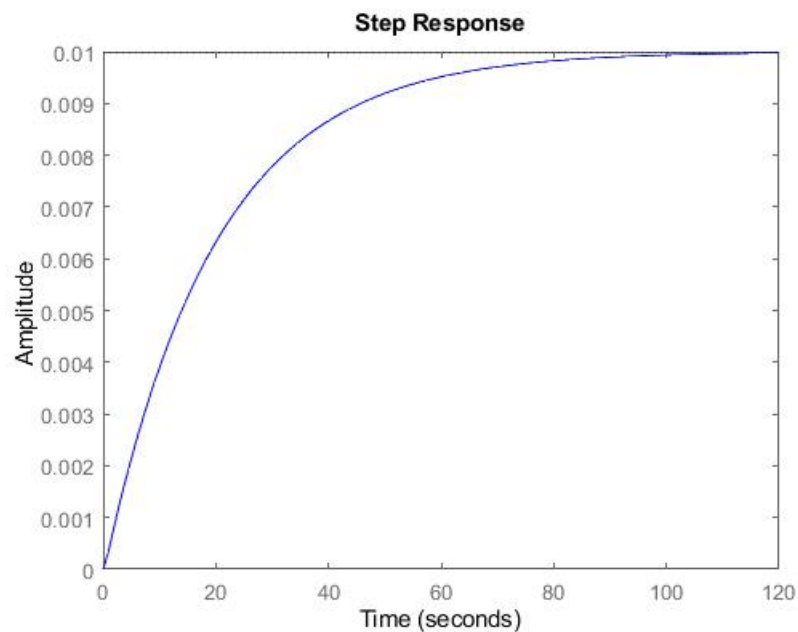
Para la simulación y observación de la respuesta del programa se utilizaron los siguientes comandos, tomando en cuenta que el valor de la masa del auto es de dos toneladas y por lo tanto la masa soportada por cada suspensión es de media tonelada:

```
H=tf([1],[m B K])
H=tf([1],[500 B K])
step(H,'-')
```


La respuesta del sistema va a depender de los valores asignados al amortiguador B y al resorte K. Esto nos va a generar cuatro posibles comportamientos:

- No amortiguado
- Subamortiguado
- Criticamente amortiguado
- Sobreamortiguado

Para nuestro diseño nos interesan las últimas dos reacciones, criticamente amortiguado y subamortiguado. Estos comportamientos los lograremos obtener si el valor de el amortiguador (B) es considerablemente mayor al del resorte (k). Si elegimos valores de tal forma en que k sea un 5 % del valor de B podemos obtener el comportamiento que deseamos, siendo este el de sobreamortiguado. En la siguiente gráfica se usó un valor de B



de dos mil y de k de cien.

	Manual de prácticas del Laboratorio de Señales y Sistemas	Código:	MADO-76
		Versión:	01
		Página:	74 / 97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de enero 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Actividad 5

En la Figura 32 se muestra un sistema híbrido, el cual consta de un sistema eléctrico y un motor de corriente directa, la entrada del sistema es la fuente de voltaje y la salida es la velocidad del motor.

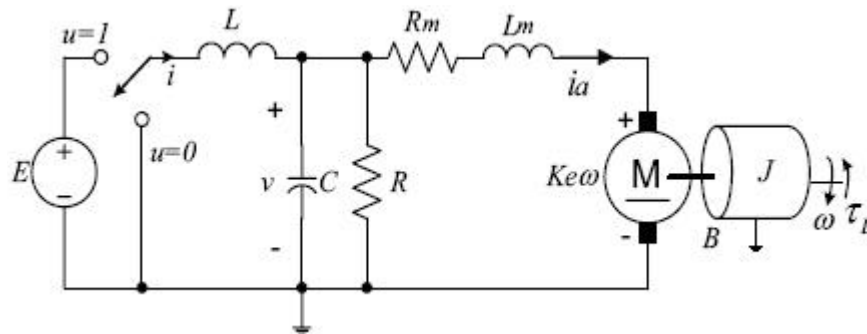


Figura 32. Sistema Híbrido

Los parámetros del sistema L , C , R y E son la inductancia, capacitancia, resistencia y voltaje de entrada constante del convertidor reductor, respectivamente. La corriente i es la corriente en el inductor y v es el voltaje en el capacitor del convertidor. L_m , K_e , K_m son la inductancia del circuito de armadura, la constante de fuerza electromotriz y la constante de par del motor, respectivamente. Las variables denotadas como i_a y w son la corriente del circuito de armadura y la velocidad angular de la carga mecánica del motor cuyo momento de inercia es J . El parámetro B es el coeficiente de fricción viscosa rotacional. La entrada τ_L representa un par de carga constante. La entrada de control se representa por la variable u , la cual simboliza la posición del interruptor que toma valores en el conjunto discreto $0, 1$.

Desarrolle la actividad de la siguiente forma:

1. Identificar el número de elementos que almacenan energía.
2. Identificar el número de restricciones físicas tanto de compatibilidad como de continuidad.
3. Plantear las restricciones físicas encontradas.
4. Sustituir las relaciones constitutivas de los elementos.
5. Obtener el modelo matemático de forma matricial.
6. ¿Qué se puede concluir del sistema físico obtenido?

1. Identificar el numero de elementos que almacenan energía:

El sistema presenta cuatro almacenadores de energía. La ecuación resultante va a ser de orden dos, debido a que el sistema presenta los dos tipos de elementos almacenadores (de flujo y de esfuerzo), siendo estos elementos los siguientes:

- Almacenadores de esfuerzo: Inductores L y L_m
- Almacenadores de flujo: Capacitor C y la masa rotada.

2. Identificar el número de restricciones físicas tanto de compatibilidad como de continuidad.

El sistema presenta cuatro restricciones físicas y se dividen de la siguiente forma: los dos circuitos en serie presentan restricciones de compatibilidad, mientras que la conexión en paralelo y la masa presentan restricciones de tipo de compatibilidad.

3. Plantear las restricciones físicas encontradas:

De la primera malla obtenemos el siguiente análisis:

$$E = V_L + v \quad (9)$$

Si analizamos uno de los nodos que conecta a la primera malla con la conexión en paralelo obtenemos:

$$i = i_c + i_r + i_a \quad (10)$$

De la segunda malla obtenemos el siguiente análisis:

$$v = V_{RM} + V_{LM} + VM \quad (11)$$

Y por último, del sistema de la masa obtenemos lo siguiente:

$$K_{ew} = J \frac{d}{dt} w + Bw - J_L \quad (12)$$

4. Sustituir las relaciones constitutivas de los elementos Sustituyendo las relaciones constitutivas de los elementos de la primera malla obtenemos:

$$E = L \frac{d}{dt} i(t) + w \quad (13)$$

En cuanto a los elementos constitutivos del análisis de la entrada de corriente al nodo alfa queda:

$$i = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i_a \quad (14)$$

Y finalmente podemos expresar el análisis de la segunda malla de la siguiente forma:

$$v = R_m i_a + L_m \frac{d}{dt} i_a + K_{ew} \quad (15)$$

5. Obtener el modelo matemático de forma matricial. La representación del modelo matemático en forma matricial responde a la siguiente forma:

$$x'(t) = A(y)x(t) + B(t)u(t) \quad (16)$$

La cual la podemos denotar como:

$$x' = Ax + Bu \quad (17)$$

Donde x' es el vector de variables de estados, A es la matriz de estados, x es el vector de estados, B es la matriz de entrada y u es el vector de entrada.

Para poder usar la expresión anterior debemos de dejar las ecuaciones de las restricciones de nuestro sistema en función de sus derivadas normalizadas. Po lo cual las ecuaciones a usar quedarán de las siguientes:

$$i' = -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}E \quad (18)$$

$$v' = \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v - \frac{1}{C}i_a \quad (19)$$

$$i'_a = \frac{1}{L_m}v - \frac{1}{L_m}R_m i_a - \frac{K_e}{L_m}w \quad (20)$$

$$w' = \frac{1}{J}k_e i_a - \frac{1}{J}B_w \quad (21)$$

Ya teniendo las ecuaciones despejadas podemos sustituir en la ecuación matricial obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} i' \\ v' \\ i'_a \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} & \frac{K_e}{L_m} \\ 0 & 0 & \frac{K_e}{J} & -\frac{B_w}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \\ i_a \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} E \quad (22)$$

6. ¿Qué se puede concluir del sistema físico obtenido?// Que la unión de distintos sistemas físicos nos da como resultado la unión de las ecuaciones de dichos sistemas, es decir, su modelo matemático va a ser la suma de los modelos matemáticos de cada uno de los subsistemas que conforman a dicho sistema.

1 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Referencias

- [1] Marco F. Duarte. 8.5 Casuality and Stability of Discrete-Time Linear Time-Invariant Systems. <https://cnx.org/contents/KilsjSQd@10.18:9kZ-CT3d@1/Causality-and-Stability-of-Discrete-Time-Linear-Time-Invariant-Systems>. Online; accessed 1 Noviembre 2020.
- [2] Gloria Mata Hernández, Víctor M Sánchez Esquivel, and Juan M Gómez González. Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, 2017.
- [3] Mitra K. Stability Condition of an LTI Discrete-Time System. [https://web.njit.edu/~akansu/Ch2\(3\)Handouts_3e.pdf](https://web.njit.edu/~akansu/Ch2(3)Handouts_3e.pdf), 2005. Online; accessed 1 Noviembre 2020.