
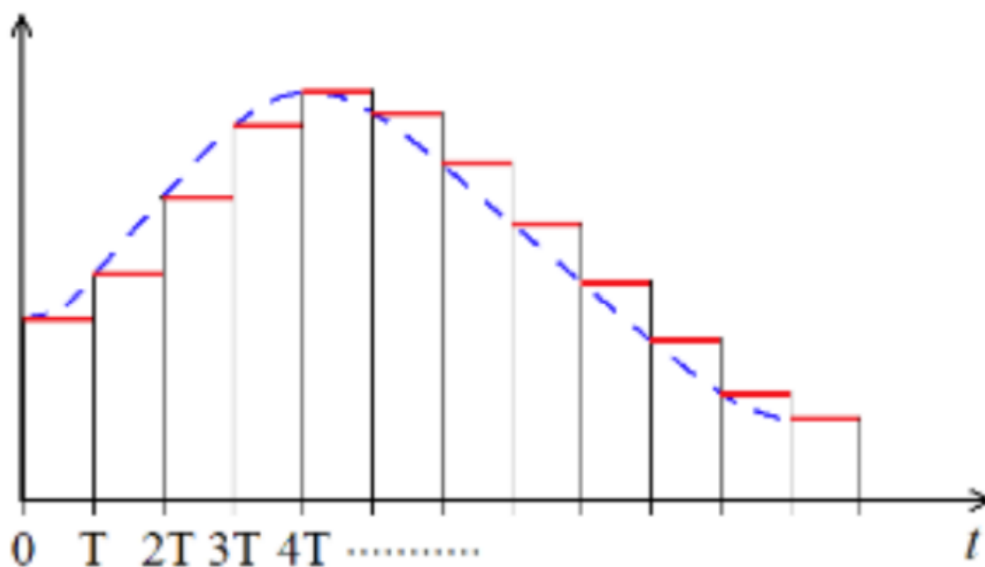


| | | | |
|---|--|---|--------------------|
|  | Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales | Código: | MADO-76 |
| | | Versión | 01 |
| | | Página: | 40/97 |
| | | Sección ISO: | 8.3 |
| | | Fecha de emisión: | 28 de febrero 2019 |
| Facultad de ingeniería | | Area/Departamento: Laboratorio de control y robótica | |
| La impresion de este documento es una copia no controlada | | | |

Práctica No3 Transformada Z y aplicaciones a sistemas de tiempo discreto



| | | | |
|---------------------|---------------------------------|--|--------------|
| Apellidos y nombres | Alfaro Domínguez Rodrigo | | |
| | Barrera Peña Víctor Miguel | | |
| | Villeda Hernández Erick Ricardo | | |
| Grpo: | 4 | Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto | Calificación |
| Brigada: | 1 | | |
| Semestre: | 2021-1 | Fecha de ejecución: 22/09/2020– 29/09/2020 | |

1. Previo

1.1. ¿Qué métodos se pueden utilizar para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto?

- Convolución discreta.
- Transformada discreta de Fourier
- Transformada discreta de Laplace
- Transformada Z

1.2. ¿Cuál es la relación entre las variables s y z? ¿Cómo se relaciona el plano complejo en s con el plano complejo en z?

1.2.1. Transformada Z

- Es una nueva herramienta matemática que simplifica el análisis y la síntesis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.
- Análoga:
 - transformada de Laplace que se emplea en el estudio de los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo.
 - la transformada z se utiliza en el análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.
- Permite realizar operaciones, “ver” propiedades y características de las señales y los sistemas discretos en una forma más simple que en el dominio del tiempo

Vamos a discretizar una señal pasando de la figura (a) a la (c) de la figura 1, y con ella haremos movimientos hasta llegar a (a) .

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]\delta(t - nT) \quad (1)$$

$$F_s(s) = \mathcal{L}\{f_s(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-nTs} \quad (2)$$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} \quad (3)$$

$$F(z) = \mathcal{L}\{f_s(t)\}|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}\{f[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n} \quad (4)$$

- Podemos decir que la transformada de Laplace unilateral es la ecuación 4.
- **Región de convergencia:**
 - Usualmente se abrevia como ROC.
 - Es conjunto de valores z que verifican la convergencia $F(z)$.

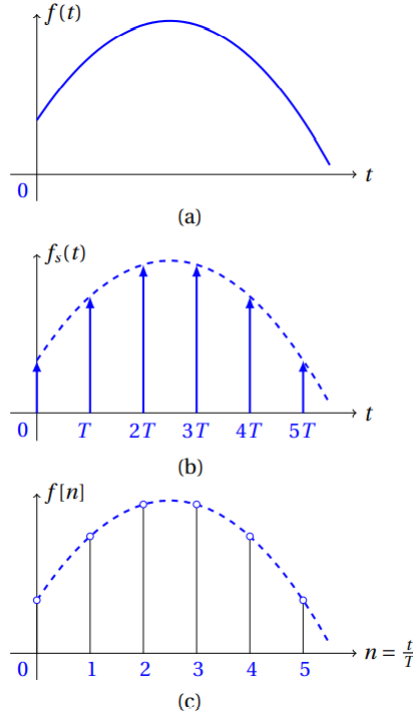


Figura 1: (a) Señal continua. (b) Señal muestreada. (c) Señal discreta.

1.2.2. Mapeo

- se puede considerar un mapeo del plano complejo s al plano complejo z visto en la ecuación 2.
- Dominio:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)}$$

Cuando se recorre el eje imaginario desde $-\infty$ a $+\infty$, el círculo unitario se delinea un número infinito de veces.

Se tiene que saber que recordar los mapeos de ecuaciones vistos en Matemáticas Avanzadas, son de alguna manera muy útiles. Uno de los casos más frecuentes es cuando $\sigma < 0$, $|z| = e^{\sigma T} < 1$ el semiplano izquierdo del plano s se mapea en el interior del círculo unitario del plano z . Se puede apreciar ello en la figura 2. Recuerda eso es para dar una idea pero existen múltiples configuraciones e intersecciones que se tienen que profundizar.

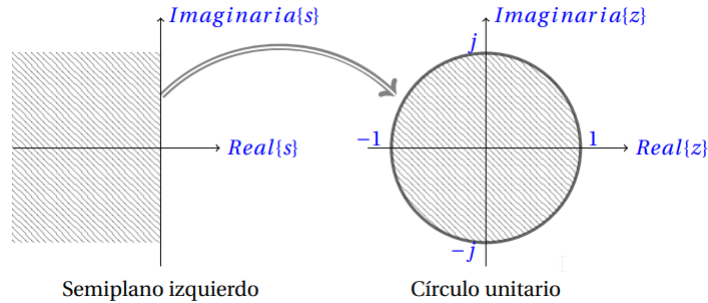


Figura 2: Mapeo del plano s al plano z , con $z = e^{sT}$.

1.3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de los sistemas lineales e invariantes de tiempo discreto?

Un sistema discreto es BIBO si para cada entrada de $x[n]$ está acotada, de forma que si existe una $M < \infty$ que cumpla con que $|x[n]| > M$ para tona n, y cada salida de $y[n]$ está igualmente acotada.

$$|x[n]| \leq M < \infty \quad (5)$$

La anterior ecuación nos indica que va a existir un valor M que va a acotar a todos los valores $x[n]$ de la señal de entrada.

En cambio, un sistema de tiempo discreto LTI es BIBO estable si y solo si su secuencia de respuesta de impulso $h[n]$ es absolutamente sumable, es decir,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (6)$$

Demostración:

Partimos de lo siguiente

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \quad (7)$$

Empecemos considerando a la salida de la señal como una función convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad (8)$$

Si aplicamos valor absoluto a ambos lados de la ecuación y usamos la desigualdad de tres componentes en la suma obtenemos:

$$|y[n]| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]h[n-m]| \quad (9)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]h[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_x |h[n-m]| \quad (10)$$

$$\leq M_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[n-m]| = M_x S \quad (11)$$

Si $S < \infty$ tenemos que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad (12)$$

Para demostrar la convergencia de S consideramos la entrada $x[n]$ de la siguiente forma

$$x[n] = \begin{cases} \text{sgn}(h[-n]), & \text{si } h[-n] \neq 0 \\ K, & \text{si } h[-n] = 0 \end{cases}$$

Donde $\text{sgn}(c)=1$ si $c > 0$ y $\text{sgn}(c)=-1$ si $c < 0$ y $|K| \leq 1$

Si usamos la entrada $n=0$ tenemos:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(h[k])h[k] = S \leq B_y < \infty \quad (13)$$

Con lo que se demuestra que $|y[n]| \leq B_Y$ que implica que $S \leq \infty$

1.4. ¿Qué diferencias existen entre los métodos de fracciones parciales para sistemas de tiempo continuo y sistemas de tiempo discreto?

Ambos métodos son usados para obtener la anti transformada de Laplace y Z respectivamente. En el caso de sistemas de tiempo discreto el método es mejor conocido como expansión de fracciones parciales, y difiere con el método de sistemas continuos en los siguientes aspectos:

1. Cada fracción va multiplicada por un factor z que facilita su anti transformación.
2. Se considera un primer coeficiente que no va acompañado de ningún factor calculado de la siguiente forma:

$$d_0 = \frac{b_m}{(-p_1)(-p_2) \cdots (-p_n)} \quad (14)$$

Donde m =número de ceros y n = número de polos.

El método de fracciones parciales para sistemas de tiempo discreto es idéntico al que se utiliza en la transformada de Laplace (tiempo continuo), y requiere que todos los términos de la expansión en fracciones parciales se puedan reconocer fácilmente en la tabla de pares de transformadas Z.

Si $X(z)$ tiene uno o más ceros en el origen ($z = 0$), entonces $X(z)/z$ ó $X(z)$ se expande en la suma de términos sencillos de primer o segundo orden mediante la expansión en fracciones parciales, y se emplea una tabla de transformadas Z para encontrar la función del tiempo correspondiente para cada uno de los términos expandidos.

Del mismo modo que en sistemas de tiempo continuo y teniendo en cuenta la fracción:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(Z + P_1)(Z + P_2)(Z + P_3) \cdots (Z + P_i)}$$

Donde $P_1, P_2, P_3 \dots P_i$ son las raíces del polinomio, estas raíces podrán ser: reales simples, reales múltiples, complejas simples, complejas múltiples.

1.5. ¿En qué dispositivo de la vida cotidiana se realizan conversiones de señales de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa?

Convertidor DAC (Digital a Analógica)

- La salida digital de una computadora puede convertirse en una señal de control analógica para ajustar la velocidad de un motor o para controlar alguna variable física.
- Las computadoras pueden ser programados para generar señales analógicas necesarias para analizar circuitos analógicos
- Para ser escuchado sonido de los altavoces utilizan DAC para convertir una señal digital, guardada en un CD o un reproductor mp3) en una señal a analógica. Esos DAC son usados por los lectores de CD, reproductores digitales de música y tarjetas de sonido.

Convertidor ACD (Analógica a Digital)

- Son usados en cualquier dispositivo que tenga sensores de temperatura.
- En los automóviles con sensores de proximidad.
- Dispositivos de almacenamiento y procesamiento de audio.

Referencias

- [1] Marco F. Duarte. 8.5 Casuality and Stability of Discrete-Time Linear Time-Invariant Systems. <https://cnx.org/contents/KilsjSQd@10.18:9kZ-CT3d@1/Causality-and-Stability-of-Discrete-Time-Linear-Time-Invariant-Systems>. Online; accessed 1 Noviembre 2020.
- [2] Gloria Mata Hernández, Víctor M Sánchez Esquivel, and Juan M Gómez González. Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, 2017.
- [3] Mitra K. Stability Condition of an LTI Discrete-Time System. [https://web.njit.edu/~akansu/Ch2\(3\)Handouts_3e.pdf](https://web.njit.edu/~akansu/Ch2(3)Handouts_3e.pdf), 2005. Online; accessed 1 Noviembre 2020.