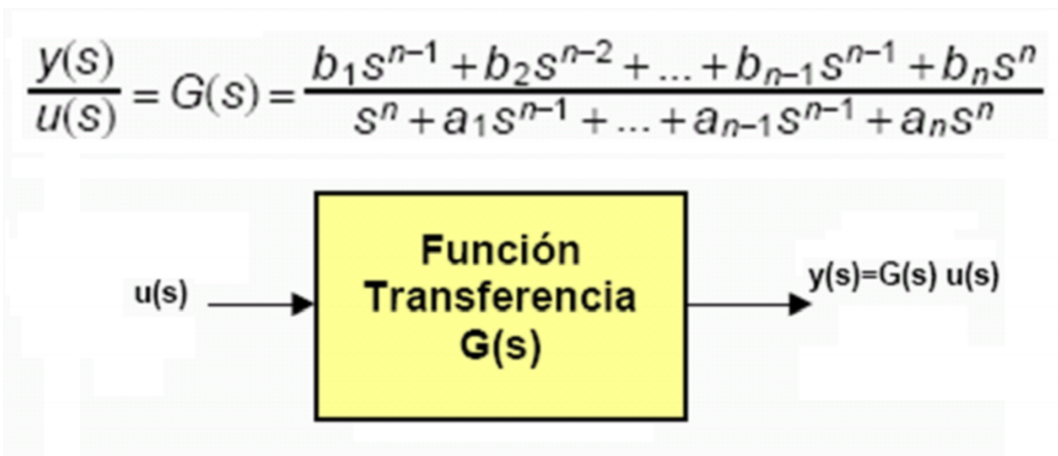
	Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales	Código:	MADO-76
		Versión	01
		Página:	27/97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de frebrero 2018

Facultad de ingeniería	**Area/Departamento:** **Laboratorio de control y robótica**

La impresion de este documento es una copia no controlada

Práctica N∘ 2
Función de transferencia y sistemas de primer orden



Apellidos y nombres	Alfaro Domínguez Rodrigo		
	Barrera Peña Víctor Miguel		
	Villeda Hernández Erick Ricardo		
Grpo:	4	Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto	Calificación
Brigada:	1		
Semestre:	2021-1	Fecha de ejecución: 20/10/2020	

Previo

1. ¿Qué es la transformada de Laplace?

Primero entendamos el concepto de transformación matemáticamente hablando. .En cálculo elemental aprendió que la derivación y la integración son transformadas; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración":

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{y} \qquad \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \tag{1}$$

Las dos anteriores operaciones son tomadas textualmente del texto porque es un excelente ejemplo para ponerte en contexto de las transformadas, además de explicar dos propiedades que heredan la la transformada de Laplace, que estan asociadas a que sea una transformada lineal.

Propiedades de linealidad Propiedad tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \tag{2}$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \tag{3}$$

La transformada de Laplace tiene la propiedad [2] [3] , entre otras propiedades más interesantes, pero estas son las principales.

Definición La transformada de Laplace es una formula para transformar una ecuación diferencial que contiene las diferenciales de una función indefinida, a partir de una ecuación t-espaciada hacia una ecuación s-espaciada que puede ser resuelta con mucha facilidad.
La transformada de Laplace de una función *f(t)* definida para todos los números positivos se define como:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

1.1. ¿Para qué se utiliza?

Esta transformada se usa para resolver:

1. Ecuaciones diferenciales de valor inicial (es necesario que tengan n valores iniciales para una ecuación diferencial de orden n).
2. Ecuaciones íntegro-diferenciales

Se utiliza en:

1. Servo sistemas.
2. Análisis de circuitos electrónicos.

1.2. ¿Cómo se construye la fórmula de Laplace?

La definición de Laplace puede parecer difícil, ya que no entendemos por que fue hecho de esta manera la ecuación, pero si nosotros entendemos el concepto de la transformada de Fourier, podremos entonces entender esto que yo entiendo como un concepto extendido de ella, ¿por qué digo que es una extensión? Fácil , tomamos la de Fourier agregamos un termino a la ecuación para que pueda resolver ecuaciones diferenciales que la de Fourier no puede, es decir extendemos su funcionalidad, pero aparte da pie al concepto de **núcleo** en la transformada, si cambiamos ese término podremos resolver otros problemas.

Ahora mostraré como se pasa de la ecuación de Fourier a la ecuación de Laplace.

- Kernel o núcleo es $e^{-\alpha \cdot t}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underset{e-\alpha t}{\underset{\downarrow}{\cdot}} e^{-j\omega t} dt \tag{4}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-(\alpha+j\omega)t}} dt \tag{5}$$

Realizamos un cambio de variable en la (5) , logrando que el cambio quede (6).

$$s = at + j\omega \tag{6}$$

$$\int_{0}^{\infty} K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} K(s,t) f(t) dt \tag{7}$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{8}$$

Una mejor explicación en el siguiente (vídeo).

1.3. Condiciones suficientes para la existencia

¿Por qué digo que son condiciones suficientes , más no necesarias?. Existen ecuaciones que convergen a un valor y por ello es posible resolverlas por medio de Laplace aunque en el sentido estricto de las 2 siguientes condiciones , no es necesario que se cumplan.

Condiciones :

1. Si f es una función continua por tramos en $[0, \infty)$.

   Veamos esta condición es algo peculiar , digamos que nosotros en una función podemos tener puntos no esta definido como se aprecia en la gráfica 1. Nosotros podemos mover b , a la altura de a, y con ello hacer que la curva sea continua, a estos pequeños puntos se le llaman discontinuidades re movibles.

2. de orden exponencial c.

   Esta en resumen de cuentas es que el incremento de la función sea menor a una exponencial C multiplicada por otros factores, es como lo que hacíamos en cálculo integral, cuando comparábamos 2 funciones, si una convergía y la otra crecía menos que la que converge, entonces la otra converge.

Si ambas condiciones se cumplen, entonces podemos afirmar que la transformada para la función existe.

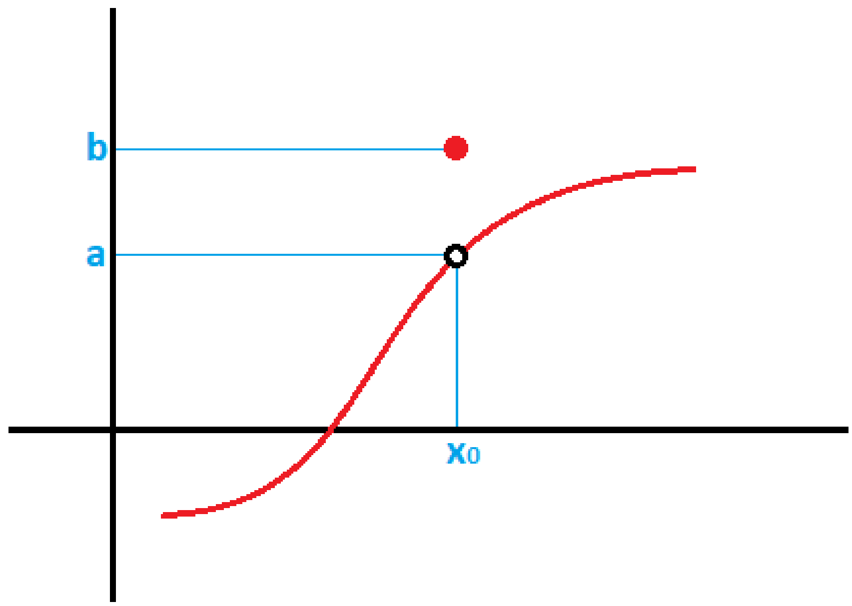


Figura 1: Gráfica con discontinuidad re movible

2. ¿Qué es la función de transferencia y cómo puede ser determinada?

La función de transferencia es una representación conveniente de un sistema dinámico de tiempo lineal invariable. Para sistemas de dimensiones finitas la función de transferencia es simplemente una función racional que representa a relación que hay entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta de estado cero) y la entrada del sistema. Esta función se puede obtener tanto por inspección como por una manipulación algebraica de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Su importancia es que permite analizar funciones de un orden muy alto, e incluso puede analizar funciones de dimensiones infinitas si son sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales. Cabe recalcar que para que dicha función tenga un significado, el sistema analizado debe de ser lineal, invariante en el tiempo y con condiciones iniciales nulas. La función de transferencia está representada por la siguiente ecuación:

$$H(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{X(s)} \tag{9}$$

Donde:

- $Y_s z(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta de estado cero $y_{sz}(t)$
- $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$
- $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$

Obtención de la función de transferencia

Sea la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N que describe al sistema la transformada de Laplace correspondiente resulta

$$\mathscr{L}\{\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}\} = \mathscr{L}\{\sum_{n=0}^{M} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}\} \tag{10}$$

Aplicando la propiedad de derivación a la ecuación anterior se obtiene

$$\sum_{n=0}^{M} a_n s^n Y(s) \ -\sum_{n=1}^{N} a_n\{\sum_{m=1}^{n} y^{m-1}(0^-)s^{s-m}\} \ = \sum_{n=0}^{M} b_n s^x X(s) - \sum_{n=1}^{M} b_n\{\sum_{m=1}^{M} x^{m-1}(0^-)s^{s-m}\} \tag{11}$$

Donde $y^{m-1}(0^-)$ y $x^{m-1}(0^-)$ son las (m-q)-ésimas derivadas de y(t) y x(t) evaluadas en $t=0^-$, respectivamente. Si despejamos a Y(s) obtenemos:

$$Y(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^x X(s) - \sum_{n=1}^{M} b_n\{\sum_{m=1}^{M} x^{m-1}(0^-)s^{s-m}\}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n\{\sum_{m=1}^{n} y^{m-1}(0^-)s^{s-m}\}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{12}$$

Como se ha mencionado, si el sistema en estudio está en reposo, las condiciones iniciales son nulas y por consiguiente la respuesta a la ecuación anterior es nula, de igual manera el término de la respuesta detestado cero relacionado con sus respectivas condiciones iniciales, reduciéndose a

$$Y_{zs}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^n X(s)}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{13}$$

La *función de transferencia* se define como la razón de la transformada de la salida a la transformada de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero. Así

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^n}{\sum_{n=0}^{M} a_n s^n} \tag{14}$$

Que igualmente se puede representar de la siguiente forma

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{K(s+q_0)(s+q_1)(s+q_M)}{s+p_0)(s+p_1)(s+p_M)} = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{15}$$

La expresión anterior es la representación general de un sistema que en el domino del tiempo ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N.

3. ¿Qué es un polo y qué es un cero? y ¿cómo pueden ser determinados?.

Dada a una función de transformación continua, en el dominio de Laplace, *H(s)*, o en el dominio discreto de Z, *H(z)*, un cero es cualquier valor de s o z para los cuales la función de transferencia es cero, un polo es cualquier valor de s o z para la cual la función de trasferencia es infinita.
En otras palabras el cero es el valor(es) para z en donde el numerador de la función de trasferencia es iguala cero. Y el polo es el valor(es) para z donde el denominador de la función de transferencia es igual a cero.

$$H(s) = \frac{Numerador = 0 \ CEROS}{Denominador = 0 \ POLOS}$$

Para poder determinar los ceros de en una función de transferencia, lo único que debemos de hacer es factorizar, o lo que es lo mismo, encontrar las raíces del polinomio del *numerador* igualado a 0.
De la misma manera vamos a encontrar los polos de una función de transferencia, solo que esta vez vamos a factorizar el polinomio del *denominador* igualado a 0. Las raíces obtenidas van a ser los ceros o polos según sea el caso.

Referencias

- Aström K., Murray R., (2004), Analysis and Design of Feedback Systems, Preprint, University of California.
- Baraniuk, R.(19 de diciembre de 2013). *Polos y Ceros.* Cnx. Recuperado el 2 de octubre de 2020 de https://cnx.org/contents/ydI5iGfF@2/Polos-y-Ceros

- Mata G., S´nachez V., Gómez J., (2017), Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, México D.F., Universidad Nacional Autónoma de México.
- Maria Alicia Piñeiro. (2020, 10 abril). Transformada de Laplace (parte 1). YouTube.

  https://www.youtube.com/watch?v=i1wRqo_2zgw
- S.A. (17 de abril de 2013). *Unidad III: Transformada de Laplace*. Itpn. Recuperado el 02 de octubre de 2020 de http://itpn.mx/recursosisc/4semestre-/ecuacioneslineales/Unidad-20III.pdf