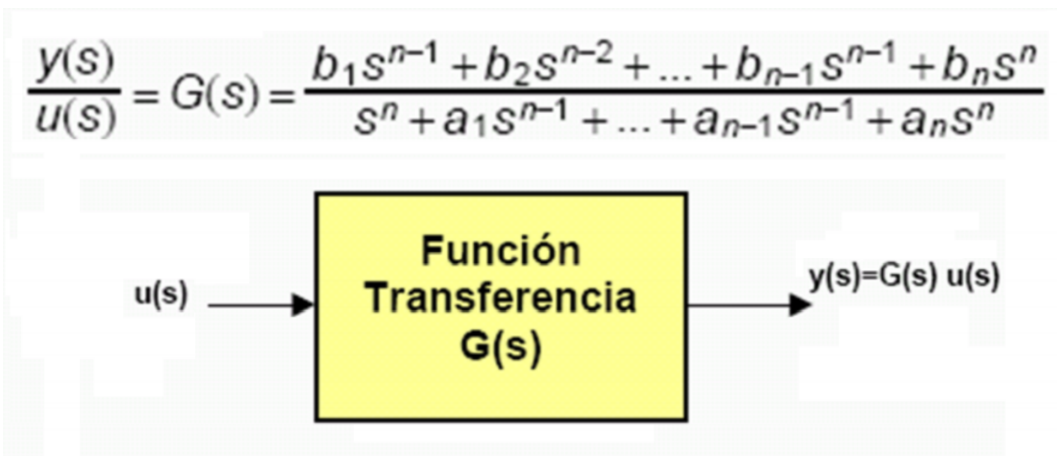
	Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales	Código:	MADO-76
		Versión	01
		Página:	27/97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de frebrero 2018

Facultad de ingeniería	**Area/Departamento:** **Laboratorio de control y robótica**

La impresion de este documento es una copia no controlada

Práctica N∘ 2
Función de transferencia y sistemas de primer orden



Apellidos y nombres	Alfaro Domínguez Rodrigo		
	Barrera Peña Víctor Miguel		
	Villeda Hernández Erick Ricardo		
Grpo:	4	Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto	Calificación
Brigada:	1		
Semestre:	2021-1	Fecha de ejecución: 20/10/2020	

Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. *A,5 I*.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto.Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (**1p.**)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0,7.**)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0,5p.**)	Mala organización. Impuntualidad. Confunsión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p.**)	
Desarrollo de actividades. *A,6 M*.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**1p.**)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**0,7p.**)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0,5p.**)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p.**)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. *A,1M A,3M A,7A A,2I A,4I*	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (**4p.**)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p.**)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (**2p.**)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p.**)	
Reporte de la práctica. *A,5I*	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (**3p.**)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (**2p.**)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p.**)	

Objetivos

☞ El alumno estudiará el concepto de función de transferencia.

☞ El alumno caracterizará la respuesta de sistemas de primer orden a las entradas impulso y escalón.

Recursos

1. Software
   a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
   a) Computadora con 2GB RAM min.

Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno 127 V	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
		Apellidos y nombres:		

Fundamento teórico

Función de Transferencia

Uno de los métodos más comunes y útiles para representar a un sistema lineal e invariante en el tiempo, el cual es modelado por medio de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, es a través de su función de transferencia. El concepto de función de transferencia surge de la integral de convolución como herramienta para caracterizar la salida de un sistema causada por cualquier señal de entrada arbitraria mediante el conocimiento de la respuesta al impulso del sistema, esto es,

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \quad t > 0, \tag{11}$$

y la transformada unilateral de Laplace de señales; ésta transformada, además de ser lineal, tiene la siguiente propiedad,

$$\mathcal{L}\left\{x_1(t) * x_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{x_1(t)\right\}\mathcal{L}\left\{x_2(t)\right\} = X_1(s)X_2(s), \tag{12}$$

en donde el símbolo $*$ denota la operación de convolución entre las señales de tiempo continuo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $\mathcal{L}\left\{(\cdot)\right\}$ denota la transformada de Laplace de $(\cdot)$ y $X_1(s)$ y $X_2(s)$ son las respectivas transformadas de $x_1(t)$ y

$x_2(t)$. La propiedad anterior, nos indica que la transformada de Laplace de la convolución de dos señales es igual al producto de las transformadas de Laplace correspondientes. Aplicando la propiedad (11) a (12) obtenemos la siguiente expresión,

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

en donde $Y(s)$, $H(s)$ y $X(s)$ son las transformadas de Laplace de la señal de salida de estado cero, de la respuesta al impulso y de la entrada del sistema, respectivamente. El cociente entre las transformadas de Laplace de la señal de salida y la señal de entrada, se conoce como la función de transferencia del sistema,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s).$$

La función de transferencia es fácil de determinar una vez que el sistema ha sido descrito mediante una ecuación diferencial; se debe mencionar que se trabaja con sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en ingles). La función de transferencia no es exclusiva de este tipo de sistemas sino que también puede ser extendida a sistemas con múltiples entradas y salidas. Considere un ejemplo un sistema de tercer orden en el que la ecuación diferencial que describe su comportamiento con $x(t)$ como una entrada y $y(t)$ como salida es,

$$a_0 dddoty(t) + a_1\ddot{y}(t) + a_2\dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_0\ddot{x}(t) + b_1\dot{x}(t) + b_2 x(t)$$

Para encontrar la función de transferencia, como primer punto se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (considerando condiciones iniciales nulas)

$$a_0 s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 sY(s) + a_3 Y(s) = b_0 s^2 X(s) + b_1 sX(s) + b_2 X(s)$$

La función de transferencia se define como la relación entre la salida y la entrada, esto es,

$$(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)Y(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + b_2)X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

El polinomio que se obtiene en el denominador de la función de transferencia recibe el nombre de polinomio característico, el cual determina el comportamiento del sistema (rápido, lento, oscilatorio, sub-amortiguado, etc). Generalmente el coeficiente a_0 de la función de transferencia es igualado a 1.

Para el caso general de una ecuación diferencial de orden n con m derivadas en la entrada (los superíndices en paréntesis indican el orden de la derivada):

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + ... + b_{m-1}\dot{x}(t) + b_m x(t)$$
$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + ... + a_{n-1} sY(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + ... + b_{m-1} sX(s) + b_m X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1}s + a_n}$$

Esto puede ser escrito como

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(m-i)}$$

tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$Y(s)\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i} = X(x)\sum_{i=0}^{m} b_i s^{m-i}$$

y calculando el cociente entre las transformadas de la salida y la entrada, se tiene lo siguiente,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{m-i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^{n-i}} = \frac{\mathcal{L}(salida)}{\mathcal{L}(entrada)}$$

La función de transferencia es una representación de estado cero del sistema, solamente si las condiciones iniciales son cero.

Patrón de polos y ceros

Un sistema es regularmente definido en términos de los polos y los ceros de su función de transferencia. Como se mencionó anteriormente un sistema puede ser descrito a través de su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Reescribiendo $H(s)$ en su forma estándar tal que el término de orden superior del numerador y el denominador son unitarios.

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0}\frac{s^2 + \frac{b_1}{b_0}s + \frac{b_2}{b_0}}{s^3 + \frac{a_1}{a_0}s^2 + \frac{a_2}{a_0}s + \frac{a_3}{a_0}}$$

El término constante (b_0/a_0) multiplica la relación de los polinomios los cuales pueden ser factorizados

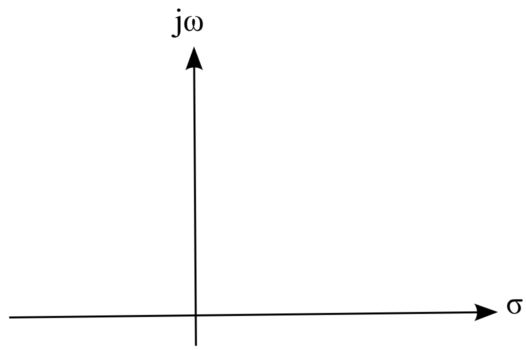
$$H(s) = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

Donde $k = b_0/a_0$, el cual es conocido como término constante. Los términos z_i son los ceros de la función de transferencia, si $s \to z_i$ el numerador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia también es cero. Los términos p_i son los polos de la función de transferencia; si $s \to p_i$ el denominador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia tiende a infinito.

En el caso general de una función de transferencia con un numerador de orden m y un denominador de orden n, puede ser representada como:

$$H(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

El patrón de polos y ceros de la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLI) es una gráfica en el plano complejo s donde los ceros se describen con el símbolo 'o'y los polos con el símbolo 'x'.



Un sistema con función de transferencia $H(s)$ es estable si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo.

Respuesta a una entrada escalón

Una de las entradas más utilizadas con fines de prueba, es el escalón unitario que se define como:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}$$

Se puede encontrar fácilmente la respuesta de un sistema debido a una entrada escalón si se conoce la función de transferencia del sistema,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

la salida con condiciones nulas (por lo tanto se habla de la repuesta en estado cero) es simplemente determinada por

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

por lo que la respuesta al escalón queda determinada por

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

Inmediatamente se puede determinar dos características de la respuesta al escalón, los valores inicial y final, entonces:

Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to 0^+} y_\gamma(t) = \lim_{s\to\infty} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to\infty} H(s)$$

Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} y_\gamma(t) = \lim_{s\to 0} sY_\gamma(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}H(s) = \lim_{s\to 0} H(s)$$

El resultado puede ser escrito como:

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty)$$

$$y_\gamma(\infty) = H(0)$$

Si se considera un sistema de primer orden genérico cuya función de transferencia está dada por,

$$H(s) = \frac{bs + c}{s + a}$$

donde a, b y c son números reales arbitrarios, se debe mencionar que b o c (no ambos) pueden ser cero. Para obtener la respuesta al escalón unitario, la función de transferencia $H(s)$ es multiplicada por $1/s$

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s}\frac{bs + c}{s + a}$$

Utilizando el teorema del valor final e inicial, se puede determinar

$$y_\gamma(0^+) = H(\infty) = b$$

$$y_\gamma(\infty) = H(0) = \frac{c}{a}$$

$$\tau = \frac{1}{a}$$

La expresión que determina la respuesta al escalón unitaria está dada por:

$$
\begin{aligned}
y_\gamma(t) &= y_\gamma(\infty) + (y_\gamma(0^+) - y_\gamma(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \\
&= H(0) + (H(\infty) - H(0))e^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}
$$

Respuesta a un impulso

Si la función de transferencia de un sistema está denotada por $H(s)$, la respuesta al impulso de un sistema está dada por $h(t)$; donde $h(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $H(s)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

También se debe mencionar que la respuesta al impulso puede ser obtenida a través de la derivada de la respuesta a un escalón

$$y_\delta(t) = h(t) = \frac{d}{dt} y_\gamma(t)$$

1. Cuestionario Previo

1.1. ¿Qué es la transformada de Laplace?

Primero entendamos el concepto de transformación matemáticamente hablando. " En cálculo elemental se aprendió que la derivación y la integración son transformadas; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración":

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \text{y} \qquad \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c \tag{1}$$

Las dos anteriores operaciones son tomadas textualmente del texto porque es un excelente ejemplo para ponerte en contexto de las transformadas, además de explicar dos propiedades que heredan la la transformada de Laplace, que estan asociadas a que sea una transformada lineal.

Propiedades de linealidad Propiedad tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para α y β constantes

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \tag{2}$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \tag{3}$$

La transformada de Laplace tiene la propiedad [2] [3] , entre otras propiedades más interesantes, pero estas son las principales.

Definición La transformada de Laplace es una formula para transformar una ecuación diferencial que contiene las diferenciales de una función indefinida, a partir de una ecuación t-espaciada hacia una ecuación s-espaciada que puede ser resuelta con mucha facilidad.
La transformada de Laplace de una función *f(t)* definida para todos los números positivos se define como:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \mathscr{L}\{f(t)\}$$

1.1.1. ¿Para qué se utiliza?

Esta transformada se usa para resolver:

1. Ecuaciones diferenciales de valor inicial (es necesario que tengan n valores iniciales para una ecuación diferencial de orden n).

2. Ecuaciones íntegro-diferenciales

Se utiliza en:

1. Servo sistemas.

2. Análisis de circuitos electrónicos.

1.1.2. ¿Cómo se construye la fórmula de Laplace?

La definición de Laplace puede parecer difícil, ya que no entendemos por que fue hecho de esta manera la ecuación, pero si nosotros entendemos el concepto de la transformada de Fourier, podremos entonces entender esto que yo entiendo como un concepto extendido de ella, ¿por qué digo que es una extensión? Fácil , tomamos la de Fourier agregamos un término a la ecuación para que pueda resolver ecuaciones diferenciales que la de Fourier no puede, es decir extendemos su funcionalidad, pero aparte da pie al concepto de **núcleo** en la transformada, si cambiamos ese término podremos resolver otros problemas.

Ahora mostraré como se pasa de la ecuación de Fourier a la ecuación de Laplace.

- Kernel o núcleo es $e^{-\alpha \cdot t}$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underset{\substack{\downarrow \\ e-\alpha t}}{\cdot} e^{-j\omega t} dt \tag{4}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{e^{-\alpha t} \cdot e^{-j\omega t}}_{e^{-(\alpha + j\omega)t}} dt \tag{5}$$

Realizamos un cambio de variable en la (5) , logrando que el cambio quede (6).

$$s = at + j\omega \tag{6}$$

$$\int_{0}^{\infty} K(s,t) f(t) dt = \lim_{b \to \infty} \int_{0}^{b} K(s,t) f(t) dt \tag{7}$$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{8}$$

Una mejor explicación en el siguiente (vídeo).

1.1.3. Condiciones suficientes para la existencia

¿Por qué digo que son condiciones suficientes , más no necesarias?. Existen ecuaciones que convergen a un valor y por ello es posible resolverlas por medio de Laplace aunque en el sentido estricto de las 2 siguientes condiciones , no es necesario que se cumplan.

Condiciones :

1. Si f es una función continua por tramos en $[0, \infty)$.

   Veamos esta condición es algo peculiar , digamos que nosotros en una función podemos tener puntos no esta definido como se aprecia en la gráfica 1. Nosotros podemos mover b , a la altura de a, y con ello hacer que la curva sea continua, a estos pequeños puntos se le llaman discontinuidades removibles.

2. de orden exponencial c.

   Esta en resumen de cuentas es que el incremento de la función sea menor a una exponencial C multiplicada por otros factores, es como lo que hacíamos en cálculo integral, cuando comparábamos 2 funciones, si una convergía y la otra crecía menos que la que converge, entonces la otra converge.

Si ambas condiciones se cumplen, entonces podemos afirmar que la transformada para la función existe.

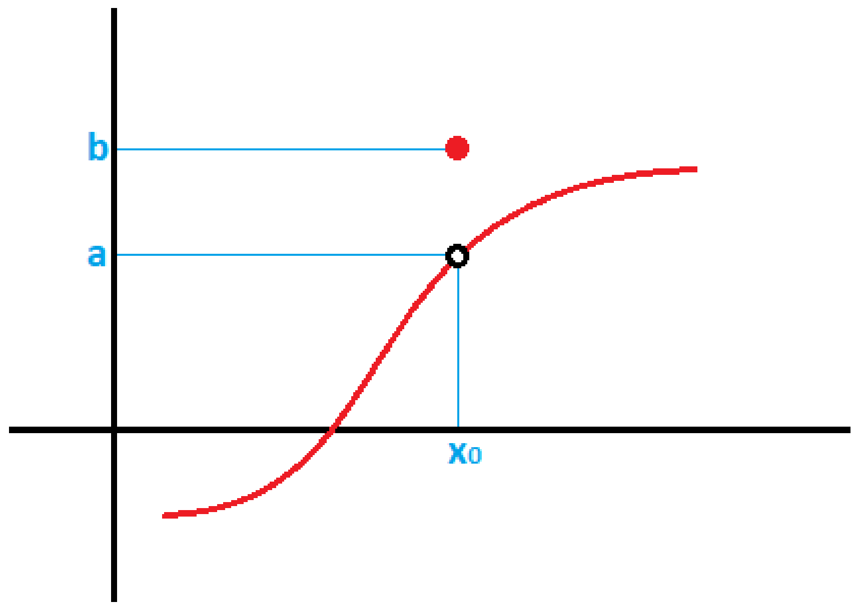


Figura 1: Gráfica con discontinuidad re movible

1.2. ¿Qué es la función de transferencia y cómo puede ser determinada?

La función de transferencia es una representación conveniente de un sistema dinámico de tiempo lineal invariable. Para sistemas de dimensiones finitas la función de transferencia es simplemente una función racional que representa a relación que hay entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta de estado cero) y la entrada del sistema. Esta función se puede obtener tanto por inspección como por una manipulación algebraica de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. Su importancia es que permite analizar funciones de un orden muy alto, e incluso puede analizar funciones de dimensiones infinitas si son sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales parciales. Cabe recalcar que para que dicha función tenga un significado, el sistema analizado debe de ser lineal, invariante en el tiempo y con condiciones iniciales nulas. La función de transferencia está representada por la siguiente ecuación:

$$H(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{X(s)} \tag{9}$$

Donde:

- $Y_s z(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta de estado cero $y_{sz}(t)$
- $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$
- $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$

Obtención de la función de transferencia

Sea la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N que describe al sistema la transformada de Laplace correspondiente resulta

$$\mathscr{L}\{\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}\} = \mathscr{L}\{\sum_{n=0}^{M} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}\} \tag{10}$$

Aplicando la propiedad de derivación a la ecuación anterior se obtiene

$$\sum_{n=0}^{M} a_n s^n Y(s) \ - \sum_{n=1}^{N} a_n \{ \sum_{m=1}^{n} y^{m-1}(0^-) s^{s-m} \} \ = \sum_{n=0}^{M} b_n s^x X(s) - \sum_{n=1}^{M} b_n \{ \sum_{m=1}^{M} x^{m-1}(0^-) s^{s-m} \} \tag{11}$$

Donde $y^{m-1}(0^-)$ y $x^{m-1}(0^-)$ son las (m-q)-ésimas derivadas de y(t) y x(t) evaluadas en $t = 0^-$, respectivamente. Si despejamos a Y(s) obtenemos:

$$Y(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^x X(s) - \sum_{n=1}^{M} b_n \{ \sum_{m=1}^{M} x^{m-1}(0^-) s^{s-m} \}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} + \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n \{ \sum_{m=1}^{n} y^{m-1}(0^-) s^{s-m} \}}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{12}$$

Como se ha mencionado, si el sistema en estudio está en reposo, las condiciones iniciales son nulas y por consiguiente la respuesta a la ecuación anterior es nula, de igual manera el término de la respuesta detestado cero relacionado con sus respectivas condiciones iniciales, reduciéndose a

$$Y_{zs}(s) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^n X(s)}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n} \tag{13}$$

La *función de transferencia* se define como la razón de la transformada de la salida a la transformada de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero. Así

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n s^n}{\sum_{n=0}^{M} a_n s^n} \tag{14}$$

Que igualmente se puede representar de la siguiente forma

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{K(s+q_0)(s+q_1)(s+q_M)}{s+p_0)(s+p_1)(s+p_M)} = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{15}$$

La expresión anterior es la representación general de un sistema que en el domino del tiempo ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de orden N.

1.3. ¿Qué es un polo y qué es un cero? y ¿cómo pueden ser determinados?.

Dada a una función de transformación continua, en el dominio de Laplace, *H(s)*, o en el dominio discreto de Z, *H(z)*, un cero es cualquier valor de s o z para los cuales la función de transferencia es cero, un polo es cualquier valor de s o z para la cual la función de trasferencia es infinita.
En otras palabras el cero es el valor(es) para z en donde el numerador de la función de trasferencia es iguala cero. Y el polo es el valor(es) para z donde el denominador de la función de transferencia es igual a cero.

$$H(s) = \frac{Numerador = 0 \ CEROS}{Denominador = 0 \ POLOS}$$

Para poder determinar los ceros de en una función de transferencia, lo único que debemos de hacer es factorizar, o lo que es lo mismo, encontrar las raíces del polinomio del *numerador* igualado a 0.
De la misma manera vamos a encontrar los polos de una función de transferencia, solo que esta vez vamos a factorizar el polinomio del *denominador* igualado a 0. Las raíces obtenidas van a ser los ceros o polos según sea el caso.

Desarrollo de la actividad

1. Encontrar la representación mediante el patrón de polos y ceros, así como el término constante del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12}$$

2. Con ayuda de un equipo de computo y un software especializado, obtenga la representación gráfica de los polos y de los ceros de la función de transferencia anteriormente mencionada. ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema?.

3. De la Figura 20 obtenga la ecuación diferencial que represente la dinámica del sistema.

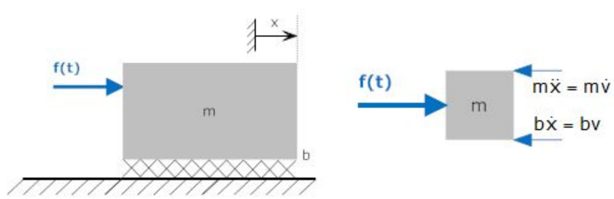


Figura 20. Acción de una fuerza sobre una masa.

4. Obtenga la función de transferencia del sistema y determine la expresión matemática de la respuesta al impulso unitario (considere condiciones iniciales nulas).

5. Bosqueje la respuesta al impulso cuando la magnitud de este es dos, considere $m = b = 1$.

6. Considere un sistema cuya función de transferencia es representada como:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Utilice el método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa de Laplace y corrobore sus resultados con ayuda de un software especializado.

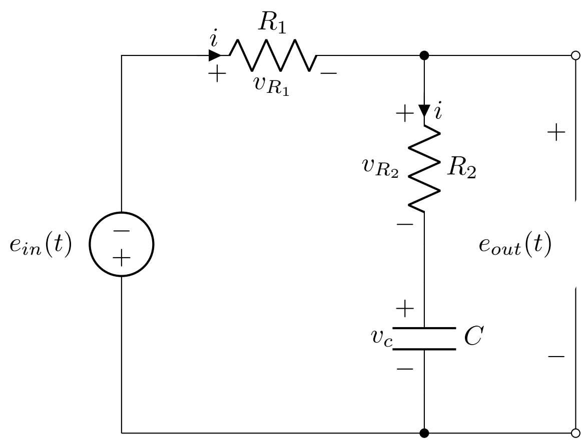


Figura 21. Circuito RL paralelo

7. Considere el circuito mostrado en la Figura 21. Si la entrada de voltaje, $e_{in}(t)$ es un escalón, encuentre la salida $e_{out}(t)$. Considere $R_1 = 2\,[\Omega]$, $R_2 = 3\,[\Omega]$ y $C = 1$ [F].

   Como primer punto encuentre la función de transferencia. Considere que el circuito es un divisor de voltaje con dos impedancias, es decir:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

   donde

$$Z_1 = R_1$$
$$Z_2 = Z_{R2} + Z_c$$

   por lo tanto,

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}}$$

8. Encuentre la expresión matemática que determina la respuesta a una entrada escalón y bosqueje sus resultados con ayuda de un software especializado.

9. De una forma alternativa, considerando el teorema del valor final y el teorema del valor inicial (sin la transformada inversa de Laplace) determine la respuesta al escalón. ¿Qué puede decir con respecto a lo realizado en la actividad 8?.

2. Solución desarrollo

2.1. Actividad 1

Encontrar la representación mediante el patrón de polos y ceros, así como el término constante del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12} \tag{16}$$

Término constante

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12} \tag{17}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{6 * \frac{6s^2}{6} + \frac{18s}{6} + \frac{12}{6}}{2 * \frac{2s^3}{2} + \frac{10s^2}{2} + \frac{16s}{2} + \frac{12}{2}} \tag{18}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{6 * (s^2 + 3s + 2)}{2 * (s^3 + 5s^2 + 8s + 6)} \tag{19}$$

$$\Rightarrow H(s) = 3 * \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} \tag{20}$$

$$\Rightarrow TerminoConstante = 3 \tag{21}$$

Raíces

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} \tag{22}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+3)(s^2 + 2s + 2)} \tag{23}$$

$$\Rightarrow c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = -3, c_4 = 1 + i, c_5 = 1 - i \tag{24}$$

Debido a que los polos son las raíces del denominador y los ceros las raíces del numerador llegamos a que

$$Ceros : c_1 = -2, c_2 = -1 \tag{25}$$

$$Polos : c_3 = -3, c_4 = 1 + i, c_5 = 1 - i \tag{26}$$

2.2. Actividad 2

Con ayuda de un equipo de computo y un software especializado, obtenga la representación gráfica de los polos y de los ceros de la función de transferencia anteriormente mencionada. ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema?

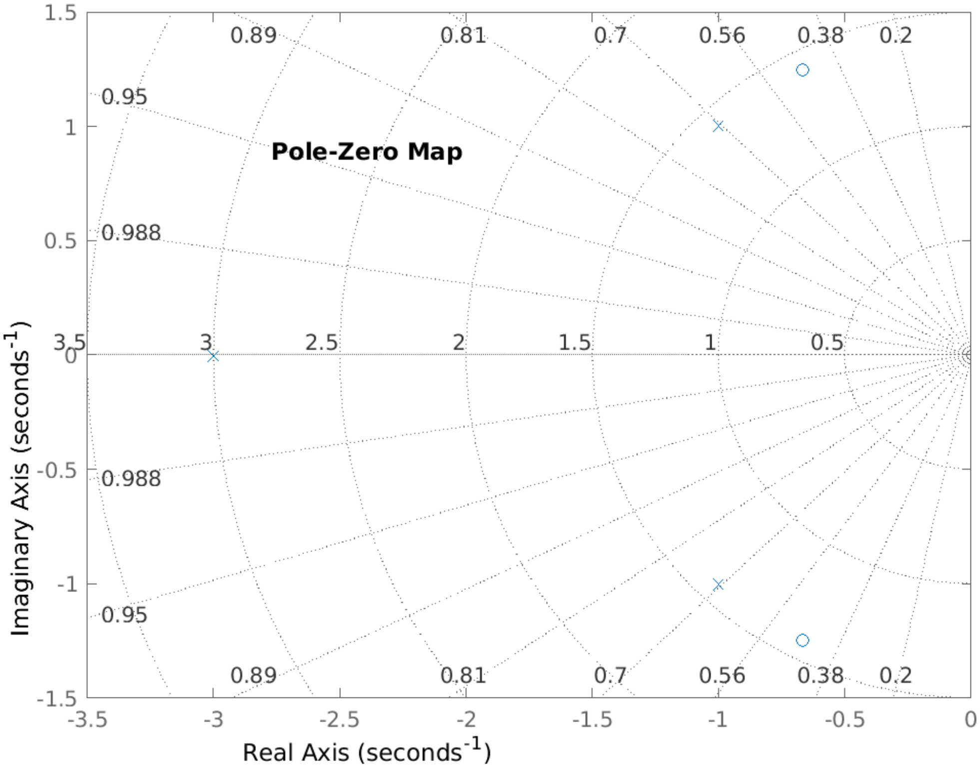


Figura 2: Gráfica de Polos y Ceros.

Es posible apreciar que todos los polos están en el semiplano izquierdo y por ello en esta práctica podemos decir que es un sistema estable. El código para lograr graficarlo se encuentra a continuación.

```
num=[6 18 12]
den=[2 10 16 12]
H =tf([6 8 12],[2 10 16 12]);
sgrid
pzmap(H)
grid on
```

2.3. Actividad 3

De la Figura 20 obtenga la ecuación diferencial que represente la dinámica del sistema.

$$f(t) = x(t) \Longrightarrow Entrada.$$

$$x = y(t) \Longrightarrow Salida.$$

$$m : masa.$$

$$b : fricción.$$

$$f(t) - m\ddot{x} - b\ddot{x} = 0$$

$$f(t) = m\ddot{x} + b\dot{x}$$

$$\therefore x(t) = m\ddot{y} + b\dot{y}$$

2.4. Actividad 4

Obtenga la función de transferencia del sistema y determine la expresión matemática de la respuesta impulso unitario (considere condiciones iniciales nulas):

$$S = \frac{1}{ms^2 + bs} = \frac{1}{s(ms+b) = \frac{A}{s} + \frac{B}{ms+b}} \tag{27}$$

$$\Rightarrow 1 = A(ms+b) + Bs \tag{28}$$

Si s = 0

$$\Rightarrow 1 = A(m*0+b) + B*0 \tag{29}$$

$$\Rightarrow 1 = A(b) \tag{30}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{b} \tag{31}$$

Si s=$\frac{-b}{m}$

$$\Rightarrow 1 = A(m*\frac{-b}{m}+b) + B(\frac{-b}{m}) \tag{32}$$

$$\Rightarrow 1 = A(-b+b) + B(\frac{-b}{m}) \tag{33}$$

$$\Rightarrow 1 = A(0) + B(\frac{-b}{m}) \tag{34}$$

$$\Rightarrow 1 = B(\frac{-b}{m}) \tag{35}$$

$$\Rightarrow B = \frac{m}{-b} \tag{36}$$

Por lo tanto, tras sustituir A y B obtenemos

$$S = \frac{1}{s(b)} - \frac{-m}{b(ms+b)} = \frac{1}{b}\frac{1}{s} - \frac{m}{mb}\frac{1}{s+\frac{b}{m}} \tag{37}$$

Si aplicamos función de Laplace inversa a este resultado obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{b}u(t) - \frac{1}{b}e^{-\frac{b}{m}*t} \tag{38}$$

2.5. Actividad 5

Bosqueje la respuesta al impulso cuando la magnitud de este es dos, considere $m = b = 1$**.**
Primero tenemos que obtener la ecuación que vamos a graficar.

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs} \tag{39}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^2 + s} \tag{40}$$

$$\frac{2}{s^2 + s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \tag{41}$$

$$\frac{2}{s \cdot (s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \tag{42}$$

$$A = 2 \qquad\qquad\qquad B = -2 \tag{43}$$

$$y(s) = \frac{2}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s+1} \tag{44}$$

$$y(t) = 2 \cdot u(t) - 2 \cdot e^{-t} \tag{45}$$

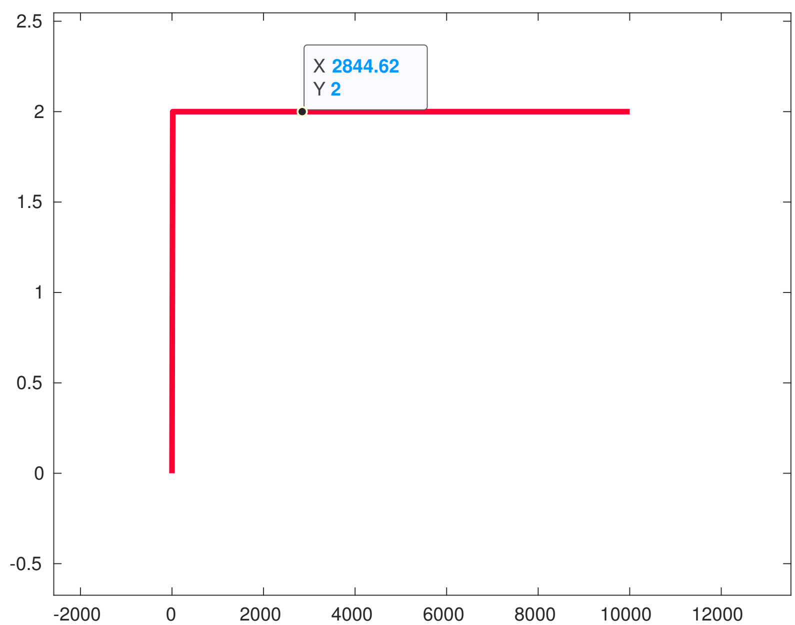


Figura 3: Gráfica impulso con magnitud 2.

El código para lograr la gráfica es el siguiente, vemos que el impulso o pasa de 2.

```
t=0:0.001:10000;
plot(t,2-2*exp(-t))
%Tambien cambia el color y la anchura, eso no se incluye.
```

2.6. Actividad 6

6. Considere un sistema cuya función de transferencia es representada como:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Utilice el método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa de Laplace y corrobore sus resultados con ayuda de un software especializado.

$$\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \Longrightarrow (1)$$

Multiplicamos la expresión (1) por s(s+2).

$$(\frac{s+1}{s(s+2)}) * s(s+2) = (\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}) * s(s+2)$$

$$s+1 = A*(s+2) + B*(s) \Longrightarrow (2)$$

Para poder encontrar los valores de A y B primeramente vamos a sustituir de la expresión (2) los valores de s por 0, y vamos a resolver.

s=0:

$$s+1 = A*(s+2) + B*(s)$$

$$0+1 = A*(0+2) + B*(0)$$

$$1 = A*2$$

$$\frac{1}{2} = A$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}$$

Para poder encontrar el valor de B, vamos a sustituir el valor de s, igualmente de la expresión (2) por -1, y vamos a resolver.

s=-1:

$$s+1 = A*(s+2) + B*(s)$$

$$-1+1 = A*(-1+2) + B*(-1)$$

$$0 = A*(1) - B$$

$$0 = A - B$$

$$A = B$$

$$\therefore B = \frac{1}{2}$$

Sustituimos los valores de A y B en la expresión (1).

$$\frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

$$\therefore y(t) = \frac{1}{2}\mathscr{U}(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

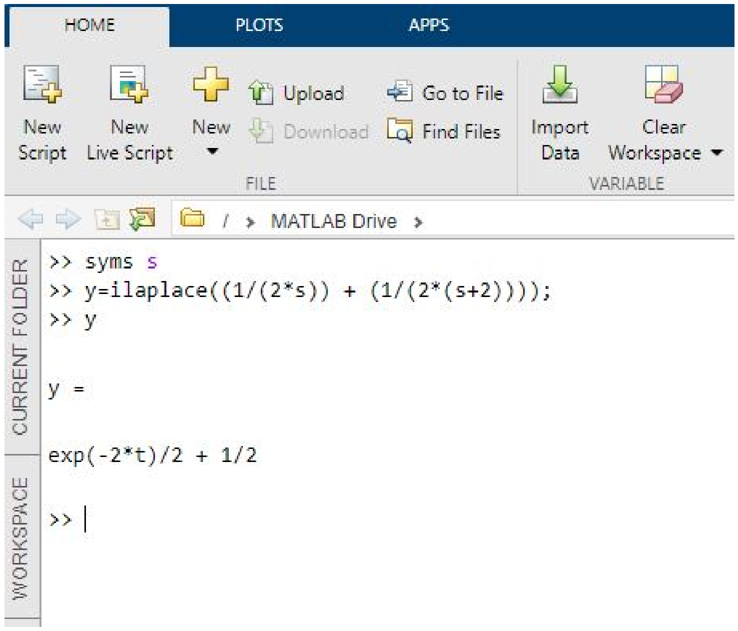


Figura 4: Captura de pantalla código.

2.7. Actividad 7

Considere el circuito mostrado en la Figura 21. Si la entrada de voltaje,$e_in(t)$ es un escalón, encuentre la salida $e_out(t)$. Considere R1= 2 [Ω],R2= 3 [Ω] y C= 1 [F].

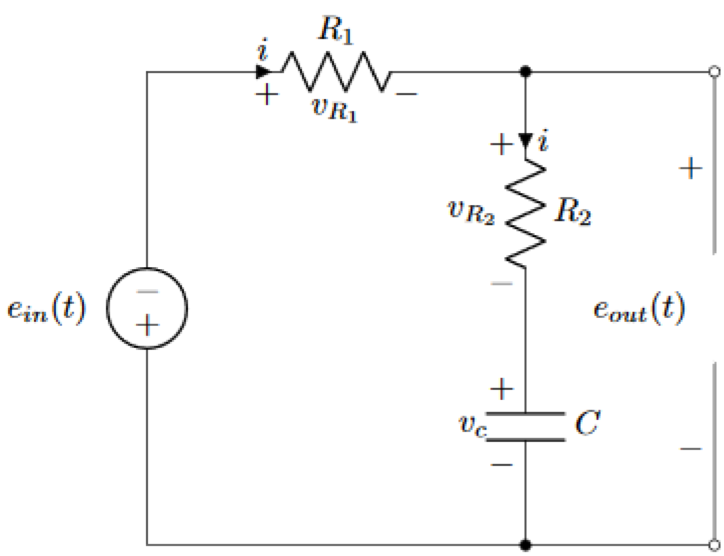


Figura 21. Circuito RL paralelo

Como primer punto encuentre la función de transferencia. Considere que el circuito es un divisor de voltaje con dos impedancias, es decir:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{46}$$

donde

$$Z_1 = R_1 \tag{47}$$

$$Z_2 = R_2 \tag{48}$$

por lo tanto,

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} \tag{49}$$

Sustituyendo

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2 + \frac{1}{s}}{5 + \frac{1}{s}} \tag{50}$$

2.8. Actividad 8

Encuentre la expresión matemática que determina la respuesta a una entrada escalón y bosqueje sus resultados con ayuda de un software especializado.

Entrada = u(t), $Lu(t) = \frac{1}{s}$, $x(s) = \frac{1}{s}$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} \tag{51}$$

Sustituyendo a x(s) en la ecuación anterior obtenemos:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} \tag{52}$$

Despejando a Y(s) llegamos a:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} \tag{53}$$

Sustituyendo los valores de las resistencias obtenemos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{3 + \frac{1}{sC}}{5 + \frac{1}{sC}} \tag{54}$$

Simplificando el sistema llegamos a

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{3s+1}{5s+1} = \frac{3s+1}{s(5s+1)} \tag{55}$$

Si lo pasamos a notación de ecuaciones parciales llegamos a:

$$\frac{3s+1}{s(5s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{5s+1} \tag{56}$$

$$3s + 1 = A(5s+1) + B(s) \tag{57}$$

Si s = 0 obtenemos

$$0s + 1 = A(0s+1) + B(0) \Rightarrow A = 1 \tag{58}$$

Si $s = -\frac{1}{5}$ obtenemos

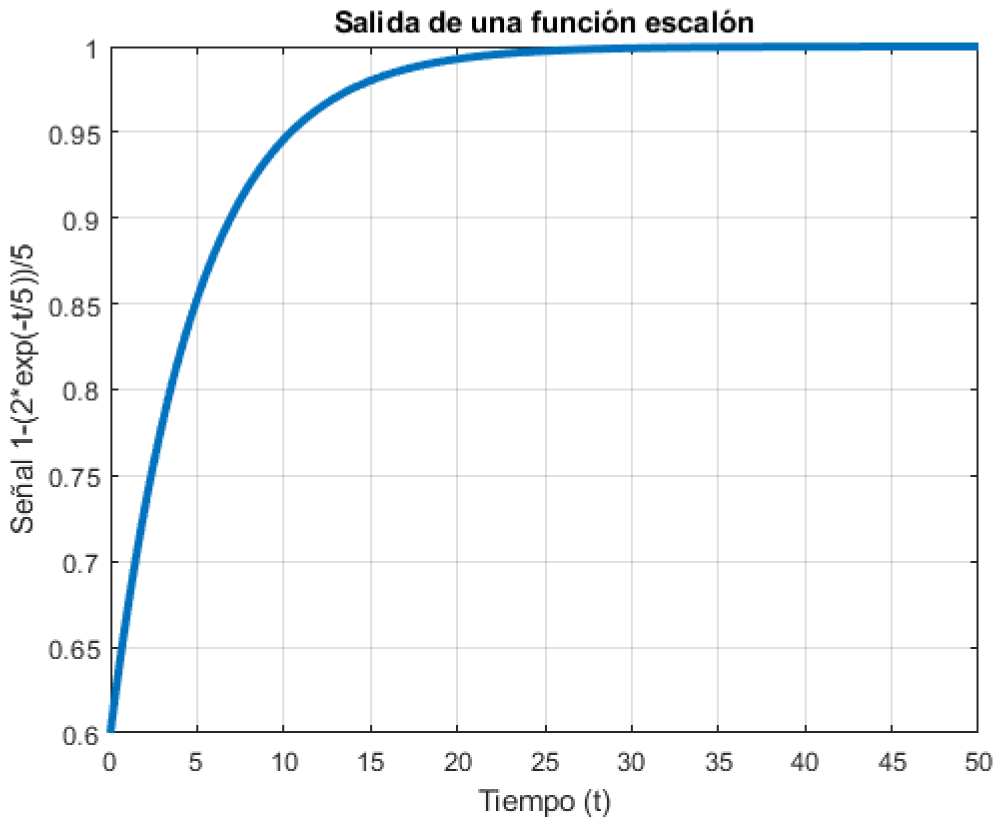
$$\frac{-1}{5}s + 1 = A(\frac{-1}{5}s + 1) + B(\frac{-1}{5}) \Rightarrow B = -2 \tag{59}$$

Por lo tanto llegamos a la siguiente expresión

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{5s+1} \tag{60}$$

Por último, si aplicamos transformada de Laplace inversa llegamos a que la señal de salida es:

$$y(t) = u(t) - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t} \tag{61}$$



2.9. Actividad 9

9. De una forma alternativa, considerando el teorema del valor final y el teorema del valor inicial (sin la transformada inversa de Laplace) determine la respuesta al escalón. ¿Qué puede decir con respecto a lo realizado en la actividad 8?.

$$y(s) = \frac{3s+1}{s(5s+1)}$$

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s+1}{s(5s+1)}$$

$$\lim_{s\to 0} y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s+1}{s(5s+1)}$$

Para poder utilizar el teorema del valor inicial y del valor final, debemos hacer que nuestra expresión tenga la siguiente estructura:

$$H(s) = \frac{1}{s}\frac{bs+c}{(s+a)}$$

Para ello vamos a dividir tanto el numerador como denominador entre 5, y vamos a reacomodar.

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}\frac{3s+1}{s(5s+1)}$$

$$= \frac{\frac{3s+1}{5}}{s\frac{5s+1}{5}}$$

$$= \frac{1}{s}\frac{\frac{3}{5}s+\frac{1}{5}}{s+\frac{1}{5}}$$

$$a = \frac{1}{5}; b = \frac{3}{5}; c = \frac{1}{5}$$

Una vez que tenemos nuestra expresión con la estructura de H(s), vamos a ver que por definición tenemos lo siguiente:

$$H(\infty) = b$$

$$H(0) = \frac{c}{a}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{s\to\infty} y(s) = H(\infty) = b = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\lim_{s\to 0} y(s) = H(0) = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{5*1}{5*1} = 1$$

A través del teorema del valor inicial y el valor final, podemos llegar a los mismos valores (inicial y final), y esto se puede comprobar con la gráfica obtenida en el inciso 8), ya que muestra los mismos valores.

3. Observaciones y conclusiones

- **Alfaro Domínguez Rodrigo:** Se logró el estudio y entendimiento de la función de transferencia gracias a su obtención mediante la transformada de Laplace. De igual forma se pudo caracterizar de forma correcta las respuestas a las ondas impulso y escalón de sistemas distintos.
- **Barrera Peña Víctor Miguel:** Se logró obtener las funciones de transferencias de funciones presentadas, a la vez que se logró caracterizar las mismas mediante ecuaciones y diagramas de polos y ceros. Por lo anterior dicho podemos decir que se logró cumplir el objetivo planteado al inicio y con ello cumplir la práctica en todo lo requerido.
- **Villeda Hernández Erick Ricardo:** En esta práctica se logró conocer la función de transferencia, cómo es que se utiliza y algunas características de dicha función mediante algunos ejemplos. Por otra parte también analizamos la respuesta de algunos sistemas de primer orden a la entrada escalón unitario.

Referencias

- Aström K., Murray R., (2004), Analysis and Design of Feedback Systems, Preprint, University of California.
- Baraniuk, R.(19 de diciembre de 2013). *Polos y Ceros*. Cnx. Recuperado el 2 de octubre de 2020 de

  https://cnx.org/contents/ydI5iGfF@2/Polos-y-Ceros
- Mata G., Sánchez V., Gómez J., (2017), Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, México D.F., Universidad Nacional Autónoma de México.
- Maria Alicia Piñeiro. (2020, 10 abril). Transformada de Laplace (parte 1). YouTube.

  https://www.youtube.com/watch?v=i1wRqo_2zgw
- S.A. (17 de abril de 2013). *Unidad III: Transformada de Laplace*. Itpn. Recuperado el 02 de octubre de 2020 de http://itpn.mx/recursosisc/4semestre-/ecuacioneslineales/Unidad-20III.pdf