Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. $A,5\ I$.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto.Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (**1p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0,7**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0,5p**.)	Mala organización. Impuntualidad. Confunsión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p**.)	
Desarrollo de actividades. $A,6\ M$.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**1p**.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**0,7p**.)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0,5p**.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p**.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. $A,1M$ $A,3M$ $A,7A$ $A,2I$ $A,4I$	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (**4p**.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p**.)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (**2p**.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p**.)	
Reporte de la práctica. $A,5I$	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (**3p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (**2p**.)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p**.)	

Objetivos

- Los alumnos y las alumnas conocerán algunas algunas de las señales básicas y las señales singulares y sus características fundamentales.
- Se establecerá la relación que existe entre señales físicas y su representación matemática mediante el uso de software y adquisición de señales.

Recursos

1. Software
   a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
   a) Computadora con 2GB RAM min.
   b) Celular para grabar sonidos.

Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno 127 V	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
		Apellidos y nombres:		

Fundamento teórico

Muestreo uniforme

El primer paso para convertir una señal continua $x(t)$ a una señal digital es discretizar la variable de tiempo, es decir, considerar muestras de $x(t)$ en instantes uniformes de tiempo $t = nT_s$, o,

$$x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$$

en donde n es un número entero y T_s es el periodo de muestreo. Para conceptualizar el método de muestreo, es posible pensarlo como la multiplicación de la señal $x(t)$ por un tren de pulsos de ancho fijo, una descripción teórica profunda puede ser consultada en [?], aquí nos limitaremos a explicar algunas cuestiones prácticas en el proceso de muestreo.

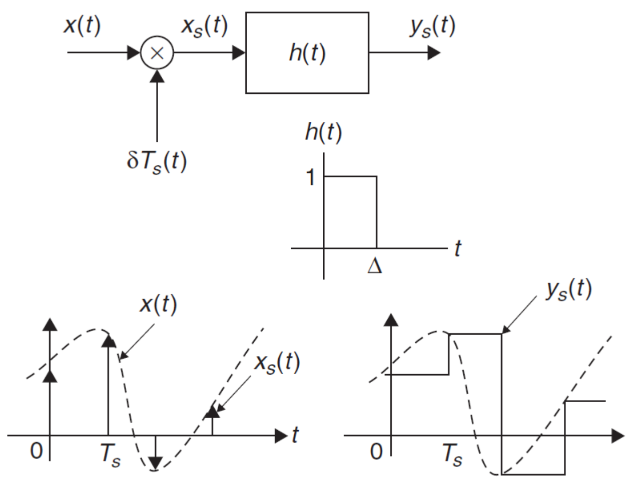

Figura 22. Muestro utilizando un sistema de muestreo y retención

Para procesar señales analógicas utilizando computadoras es necesario convertir señales analógicas a digitales y señales digitales a analógicas, estos procedimientos son realizado por medio de convertidores analógico-digital (CAD) y digital-analógico (CDA), respectivamente. Un convertidor analógico-digital, una vez que la señal es discretizada en tiempo, debe considerar el tiempo requerido para completar el proceso de digitalización. Un *sistema de muestreo y retención* toma muestras de la señal continua y las retiene hasta que el proceso de digitalización es completado y una nueva muestra puede ser adquirida. Un sistema de este tipo es mostrado en la Figura 22, el procedimiento consiste en multiplicar las señal a muestrear $x(t)$ por un tren de impulsos δ_{T_s} con periodo T_s para obtener otro tren de impulsos $x_s(t)$ cuya magnitud es el valor de la señal en los instantes de muestreo nT_s. Posteriormente, la señal $x_s(t)$ es introducida a un *retenedor de orden cero*, un sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso $h(t)$ es un pulso de ancho deseado $\Delta \leq T_s$. La salida $y_s(t)$ del sistema de muestreo y retención es una secuencia de pulsos trasladados $h(t) = u(t) - u(t - \Delta)$ y escalados por el valor $x(nT_s)$, es decir,

$$y_s(t) = \sum_n x(nT_s)h(t - nT_s).$$

Sistemas de tiempo discreto

A continuación se introducen los sistemas de tiempo discreto que de mayor importancia teórica para el curso, estos son los sistemas de tiempo discreto lineales, invariantes en el tiempo y causales, los cuales pueden ser representados por medio de ecuaciones en diferencias que relacionan la entrada y la salida el sistema.

Los sistemas de interés

De forma similar a los sistemas de tiempo continuo, un sistema de tiempo discreto puede ser conceptualizado como un procesador que transforma una señal de entrada de tiempo discreto $x[n]$ en una señal de salida de tiempo discreto $y[n]$, es decir,

$$y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}.$$

Al igual que en sistemas de tiempo continuo, estudiaremos sistemas de tiempo discreto $\mathcal{T}\left\{\cdot\right\}$ que tienen las siguientes propiedades:

- Linealidad
- Invarianza en el tiempo
- Estabilidad
- Causalidad

Para un sistema de tiempo discreto $\mathcal{T}$ se dice que es

- *Lineal*: Si para las entradas $x[n]$ y $v[n]$ y constantes a y b, el sistema satisface las siguientes condiciones
  - Escalamiento: $\mathcal{T}\left\{ax[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$,
  - Aditividad: $\mathcal{T}\left\{x[n] + v[n]\right\} = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + \mathcal{T}\left\{v[n]\right\}$, o equivalentemente si se cumple el principio de superposición,
  $$\mathcal{T}\left\{ax[n] + bv[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + b\mathcal{T}\left\{v[n]\right\}.$$
- *Invariante en el tiempo*: si para cualquier entrada $x[n]$ con la correspondiente salida $y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$, la salida correspondiente a la versión retrasada o adelantada de $x[n]$, $x[n \pm M]$, es $y[n \pm M] = \mathcal{T}\left\{x[n \pm M]\right\}$ para un entero M.

Los sistemas de tiempo discreto como ecuaciones en diferencias

De forma similar a como los sistemas de tiempo continuo pueden ser representados mediante ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto que nos interesan, cuyas señales de entrada es $x[n]$ y de salida $y[n]$, pueden ser representador como ecuaciones en diferencias que relacionan a $x[n]$ con $y[n]$, de acuerdo con la siguiente expresión

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0 \tag{13}$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$ y en donde el orden del sistema es $N-1$. Si la ecuación en diferencias anterior es lineal, con coeficientes constantes, condiciones iniciales nulas y la respuesta es cero para $n < 0$, entonces esta representa un sistema lineal e invariante en el tiempo. Para este tipo de sistemas, la salida $y[n]$ en el instante de tiempo n, depende de los valores previos de la salida $\{y[n-k], k = 1 \ldots N-1\}$, por lo que también se les conoce como sistemas recursivos, ya que la salida del sistema puede ser definida como una secuencia de valores numéricos dados por la siguiente expresión,

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$. Existen otras metodologías para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto n las cuales no serán presentadas, pero pueden ser consultadas en la literatura correspondiente.

Solución de ecuaciones en diferencia mediante la transformada Z y la función de transferencia

La transformada Z puede ser utilizada para resolver ecuaciones en diferencias de la forma (13), aplicando la transformada a ambos miembros de la ecuación y combinando las propiedades de desplazamiento en el tiempo y diferencia finita, se puede obtener una expresión para la la transformada Z de la salida del sistema de la siguiente forma

$$Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0(z)}{A(z)} \tag{14}$$

la cual tiene dos componentes, la primera depende de los efectos de la entrada del sistema y es la transformada Z de la respuesta forzada, mientras que la segunda componente es debida a las condiciones iniciales, por lo que se trata de la transformada Z de la respuesta libre. Por lo que descomponiendo la expresión en fracciones simples con antitransformadas comunes encontradas en el Tabla **??** es posible determinar la expresión para la respuesta total del sistema.

Si consideramos condiciones iniciales nulas, es decir, sustituyendo $I_0(z) = 0$ en (14), es posible determinar el cociente entre las transformadas Z de la señal de salida y de la señal de entrada, es decir,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

la cual es la función de transferencia del sistema, que en general es una función racional de polinomios en z. Otra posible definición de la función de transferencia es utilizando la suma convolución, la cual determina la salida del sistema $y[n]$ ante una señal de entada $x[n]$ arbitraria, es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

en donde $h[n]$ es la respuesta del sistema a una muestra unitaria. Aplicando la transformada Z a ambos miembros se obtiene

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

en donde

$$H(z) = \mathcal{Z}(h[n]) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}(y[n])}{\mathcal{Z}(x[n])}$$

por lo que la función de transferencia se puede interpretar también como la transformada Z de la respuesta de un sistema a la muestra unitaria $\delta[n]$.

La función de transferencia permite determinar la salida del sistema para cualquier entrada arbitraria, la respuesta forzada, por medio de la siguiente expresión,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

utilizando expansión en fracciones simples y antitransformando el resultado es posible determinar la respuesta forzada del sistema.

Otra propiedad de interés es la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto, la cual puede ser caracterizada por medio de la evaluación de las raíces del polinomio del denominador $A(z)$ de la función de transferencia, los cuales son los polos del sistema. Para que el sistema sea estable se requiere que los polos estén contenidos en el círculo unitario del plano complejo z, o bien, que la magnitud de los polos sea menor a la unidad.

De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias

Ahora se presentará un método para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales por medio de la solución de ecuaciones en diferencias. El procedimiento consiste en obtener una ecuación en diferencias asociada a la ecuación diferencial original aproximando la operación de derivación por medio de la operación de diferencias finitas, este método puede ser aplicado a sistemas de orden arbitrario, sin embargo en este caso nos limitaremos, sin pérdida de generalidad, a sistemas de segundo orden. Considere un sistema dinámico cuya relación entrada salida está dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

la definición de derivada está dada por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

en el límite esta operación tiende a la derivada, sin embargo, si consideramos que Δt no tiende a cero, sino a un valor pequeño T_s que denominaremos periodo de muestreo, entonces podemos aproximar la operación de derivada como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

y para la segunda derivada,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} &\approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s}\right] \\
&\approx \frac{\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y(t-T_s)}{\mathrm{d}t}\right]}{T_s} \\
&\approx \frac{\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s} - \frac{y(y-T_s)-y(t-2T_s)}{T_s}}{T_s} \\
&\approx \frac{y(t)-2y(t-T_s)+y(t-2T_s)}{T_s^2}
\end{aligned}
$$

sustituyendo las aproximaciones de las derivadas en la ecuación diferencial, y considerando que el tiempo es muestreado, es decir, $t = nT_s$, en donde n es el índice de muestreo y T_s el periodo de muestreo, entonces se tiene que

$$
\frac{y(nT_s)-2y(nT_s-T_s)+y(nT_s-2T_s)}{T_s^2} + a_1\frac{y(nT_s)-y(nT_s-T_s)}{T_s} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)
$$

utilizando manipulaciones algebraicas simples es posible reescribir la ecuación anterior como,

$$
\left(\frac{1}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}+a_0\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]
$$

o bien

$$
\left(\frac{1+a_1T_s+a_0T_s^2}{T_s^2}\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2+a_1T_s}{T_s^2}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]
$$

normalizando y omitiendo por simplicidad la dependencia con el tiempo de muestreo, entonces se obtiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$
y[n] - c_1 y[n-1] + c_2 y[n-2] = d_0 x[n]
$$

con coeficientes

$$
c_1 = \frac{2+a_1T_s}{1+a_1T_s+a_0T_s^2}, \quad c_2 = \frac{1}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} \quad d_0 = \frac{T_s^2}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} b_0, \tag{15}
$$

si se consideran condiciones iniciales nulas y se aplica la transformada Z a la ecuación anterior, se obtiene

$$
Y(z) - c_1 z^{-1} Y(z) + c_2 z^{-2} Y(z) = d_0 X(z)
$$

y finalmente la función de transferencia está dada por

$$
H(z) = \frac{d_0}{1 - c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}
$$

o bien

$$
H(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}
$$

De función de transferencia en tiempo continuo a función de transferencia en tiempo discreto

La transformada de Laplace de la derivada de una señal muestreada se puede representar como

$$\mathcal{Z}\left[f'(nT)\right] = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]$$

con función de transferencia

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f'(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d(z) = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{T_s z} \tag{16}$$

de esta forma se tiene una forma de representar la operación de derivada en el dominio de la transformada Z. Por lo tanto, una derivada de orden arbitrario, se puede representar como

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f^{(q)}(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d^q(z) = \left[\frac{z-1}{T_s z}\right]^q.$$

Ahora consideremos una ecuación diferencial de segundo orden que representa el comportamiento entrada salida de un sistema,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{17}$$

La ecuación diferencial después de muestreo, es decir, sustituyendo $t = nT_s$ resulta en

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(nT_s)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(nT_s)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación anterior y utilizando la derivada $H_d(z)$,

$$H_d^2(z)Y(z) + a_1 H_d(z) + a_0 Y(z) = b_0 X(z)$$

y la función de transferencia está dada por

$$H_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{H_d^2(z) + a_1 H_d(z) + a_0} \tag{18}$$

comparando la función de transferencia del sistema en tiempo continuo (17) con la versión de tiempo discreto (18) notamos que

$$H_c(z) = H(z)|_{s=H_d(z)}$$

lo cual se puede considerar como un mapeo desde la variable s a la variable z. Si sustituimos la expresión (16) en (18), tenemos que

$$H_c(z) = \frac{b_0}{\left(\frac{z-1}{T_s z}\right)^2 + a_1\left(\frac{z-1}{T_s z}\right) + a_0}$$

$$= \frac{b_0}{\frac{z^2-2z+1}{T_s^2 z^2} + a_1\frac{z-1}{T_s z} + a_0}$$

realizando manipulaciones algebraicas se obtiene

$$H_c(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}$$

con los coeficientes definidos en (15). Conforme el tiempo de muestreo es más pequeño la aproximación a la respuesta del sistema en tiempo discreto es mejor. Los dos métodos vistos son basados en aproximaciones de derivadas con diferencias finitas, una en el dominio del tiempo y otra en el dominio de la transformada Z.