3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de los sistemas lineales e invariantes de tiempo discreto?

Un sistema discreto es BIBO si para cada entrada de $x[n]$ está acotada, de forma que si existe una $M < \infty$ que cumpla con que $|x[n]| > M$ para tona n, y cada salide $y[n]$ está igualmente acotada.

$$|x[n]| \leq M < \infty \tag{1}$$

La anterior ecuación nos indica que va a existir un valor M que va a acotar a todos los valores x[n] de la señal de entrada.

En cambio, un sistema de tiempo discreto LTI es BIBO estable si y solo si su secuencia de respuesta de impulso h [n] es absolutamente sumable, es decir,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{2}$$

Demostración:

Partimos de lo siguiente

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \tag{3}$$

Empecemos considrando a la salida de la señal como una función convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \tag{4}$$

Si aplicamos valor absoluto a ambos lados de la y usamos la deisgualdad de ters componentes en la suma obtenemos:

$$|y[n]| = |\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \tag{5}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]h[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_x|h[n-m]| \tag{6}$$

$$\leq M_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[n-m]| = M_x S \tag{7}$$

Si $S < \infty$ tenemos que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \tag{8}$$

Para demostrar la convergencia de S consideramos la entrada x[n] de la siguiente forma

$$x[n] = \begin{cases} \text{sgn(h[-n])}, & \text{si h[-n]} \neq 0 \\ K, & \text{si h[-n]} = 0 \end{cases}$$

Donde sgn(c)=1 si c¿0 y sgn(c)=-1 si c¡0 y —K— ≤ 0

Si usamos la entrada n=0 tenemos:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} sng(h[k])h[k] = S \leq B_y < \infty \tag{9}$$

Con lo que se demuestra que $|y[n]| \leq B_Y$ que implica que $S \leq \infty$