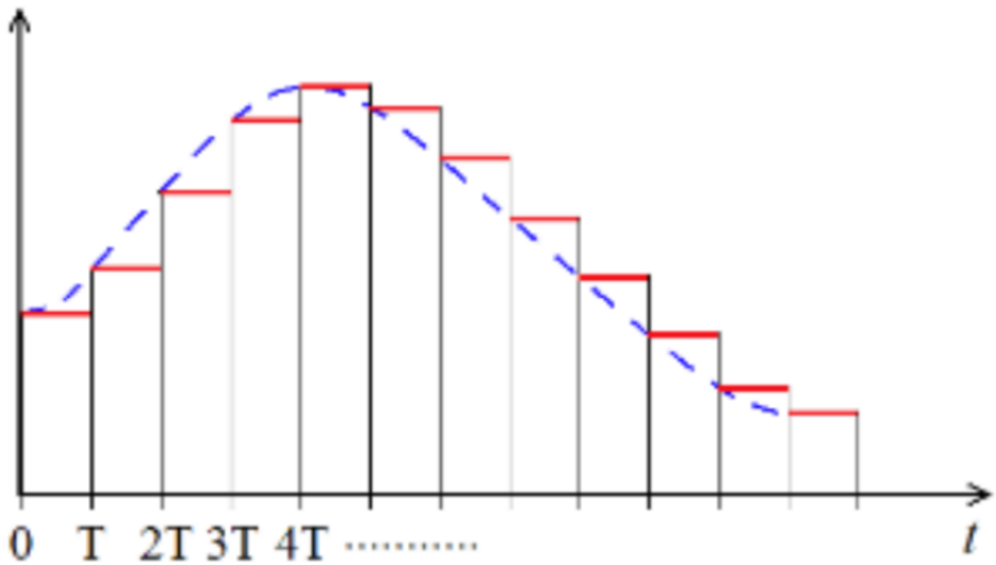
Práctica N∘3 Transformada Z y aplicaciones a sistemas de tiempo discreto



Apellidos y nombres	Alfaro Domínguez Rodrigo	
	Barrera Peña Víctor Miguel	
	Villeda Hernández Erick Ricardo	
Grpo:	4	Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto	Calificación
Brigada:	1		
Semestre:	2021-1	Fecha de ejecución: 22/09/2020– 29/09/2020	

Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. $A,5\ I$.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto.Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (**1p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0,7**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0,5p**.)	Mala organización. Impuntualidad. Confunsión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p**.)	
Desarrollo de actividades. $A,6\ M$.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**1p**.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**0,7p**.)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0,5p**.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p**.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. $A,1M$ $A,3M$ $A,7A$ $A,2I$ $A,4I$	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (**4p**.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p**.)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (**2p**.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p**.)	
Reporte de la práctica. $A,5I$	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (**3p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (**2p**.)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p**.)	

Objetivos

☞ Los alumnos y las alumnas conocerán algunas algunas de las señales básicas y las señales singulares y sus características fundamentales.

☞ Se establecerá la relación que existe entre señales físicas y su representación matemática mediante el uso de software y adquisición de señales.

Recursos

1. Software
   a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
   a) Computadora con 2GB RAM min.
   b) Celular para grabar sonidos.

Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno 127 V	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
		Apellidos y nombres:		

Fundamento teórico

Muestreo uniforme

El primer paso para convertir una señal continua $x(t)$ a una señal digital es discretizar la variable de tiempo, es decir, considerar muestras de $x(t)$ en instantes uniformes de tiempo $t = nT_s$, o,

$$x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$$

en donde n es un número entero y T_s es el periodo de muestreo. Para conceptualizar el método de muestreo, es posible pensarlo como la multiplicación de la señal $x(t)$ por un tren de pulsos de ancho fijo, una descripción teórica profunda puede ser consultada en [?], aquí nos limitaremos a explicar algunas cuestiones prácticas en el proceso de muestreo.

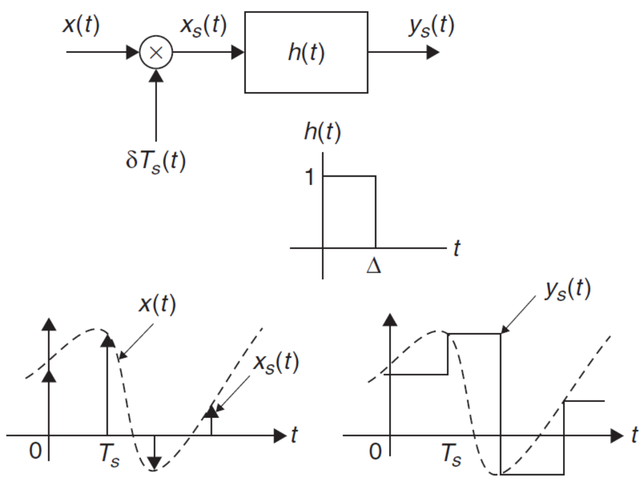


Figura 22. Muestro utilizando un sistema de muestreo y retención

Para procesar señales analógicas utilizando computadoras es necesario convertir señales analógicas a digitales y señales digitales a analógicas, estos procedimientos son realizado por medio de convertidores analógico-digital (CAD) y digital-analógico (CDA), respectivamente. Un convertidor analógico-digital, una vez que la señal es discretizada en tiempo, debe considerar el tiempo requerido para completar el proceso de digitalización. Un *sistema de muestreo y retención* toma muestras de la señal continua y las retiene hasta que el proceso de digitalización es completado y una nueva muestra puede ser adquirida. Un sistema de este tipo es mostrado en la Figura 22, el procedimiento consiste en multiplicar las señal a muestrear $x(t)$ por un tren de impulsos δ_{T_s} con periodo T_s para obtener otro tren de impulsos $x_s(t)$ cuya magnitud es el valor de la señal en los instantes de muestreo nT_s. Posteriormente, la señal $x_s(t)$ es introducida a un *retenedor de orden cero*, un sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso $h(t)$ es un pulso de ancho deseado $\Delta \leq T_s$. La salida $y_s(t)$ del sistema de muestreo y retención es una secuencia de pulsos trasladados $h(t) = u(t) - u(t - \Delta)$ y escalados por el valor $x(nT_s)$, es decir,

$$y_s(t) = \sum_n x(nT_s)h(t - nT_s).$$

Sistemas de tiempo discreto

A continuación se introducen los sistemas de tiempo discreto que de mayor importancia teórica para el curso, estos son los sistemas de tiempo discreto lineales, invariantes en el tiempo y causales, los cuales pueden ser representados por medio de ecuaciones en diferencias que relacionan la entrada y la salida el sistema.

Los sistemas de interés

De forma similar a los sistemas de tiempo continuo, un sistema de tiempo discreto puede ser conceptualizado como un procesador que transforma una señal de entrada de tiempo discreto $x[n]$ en una señal de salida de tiempo discreto $y[n]$, es decir,

$$y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}.$$

Al igual que en sistemas de tiempo continuo, estudiaremos sistemas de tiempo discreto $\mathcal{T}\left\{\cdot\right\}$ que tienen las siguientes propiedades:

- Linealidad
- Invarianza en el tiempo
- Estabilidad
- Causalidad

Para un sistema de tiempo discreto $\mathcal{T}$ se dice que es

- *Lineal*: Si para las entradas $x[n]$ y $v[n]$ y constantes a y b, el sistema satisface las siguientes condiciones
  - Escalamiento: $\mathcal{T}\left\{ax[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$,
  - Aditividad: $\mathcal{T}\left\{x[n] + v[n]\right\} = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + \mathcal{T}\left\{v[n]\right\}$, o equivalentemente si se cumple el principio de superposición,
  $$\mathcal{T}\left\{ax[n] + bv[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + b\mathcal{T}\left\{v[n]\right\}.$$
- *Invariante en el tiempo*: si para cualquier entrada $x[n]$ con la correspondiente salida $y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$, la salida correspondiente a la versión retrasada o adelantada de $x[n]$, $x[n \pm M]$, es $y[n \pm M] = \mathcal{T}\left\{x[n \pm M]\right\}$ para un entero M.

Los sistemas de tiempo discreto como ecuaciones en diferencias

De forma similar a como los sistemas de tiempo continuo pueden ser representados mediante ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto que nos interesan, cuyas señales de entrada es $x[n]$ y de salida $y[n]$, pueden ser representador como ecuaciones en diferencias que relacionan a $x[n]$ con $y[n]$, de acuerdo con la siguiente expresión

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0 \tag{13}$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$ y en donde el orden del sistema es $N-1$. Si la ecuación en diferencias anterior es lineal, con coeficientes constantes, condiciones iniciales nulas y la respuesta es cero para $n < 0$, entonces esta representa un sistema lineal e invariante en el tiempo. Para este tipo de sistemas, la salida $y[n]$ en el instante de tiempo n, depende de los valores previos de la salida $\{y[n-k], k = 1 \ldots N-1\}$, por lo que también se les conoce como sistemas recursivos, ya que la salida del sistema puede ser definida como una secuencia de valores numéricos dados por la siguiente expresión,

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$. Existen otras metodologías para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto n las cuales no serán presentadas, pero pueden ser consultadas en la literatura correspondiente.

Solución de ecuaciones en diferencia mediante la transformada Z y la función de transferencia

La transformada Z puede ser utilizada para resolver ecuaciones en diferencias de la forma (13), aplicando la transformada a ambos miembros de la ecuación y combinando las propiedades de desplazamiento en el tiempo y diferencia finita, se puede obtener una expresión para la la transformada Z de la salida del sistema de la siguiente forma

$$Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0(z)}{A(z)} \tag{14}$$

la cual tiene dos componentes, la primera depende de los efectos de la entrada del sistema y es la transformada Z de la respuesta forzada, mientras que la segunda componente es debida a las condiciones iniciales, por lo que se trata de la transformada Z de la respuesta libre. Por lo que descomponiendo la expresión en fracciones simples con antitransformadas comunes encontradas en el Tabla **??** es posible determinar la expresión para la respuesta total del sistema.

Si consideramos condiciones iniciales nulas, es decir, sustituyendo $I_0(z) = 0$ en (14), es posible determinar el cociente entre las transformadas Z de la señal de salida y de la señal de entrada, es decir,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

la cual es la función de transferencia del sistema, que en general es una función racional de polinomios en z. Otra posible definición de la función de transferencia es utilizando la suma convolución, la cual determina la salida del sistema $y[n]$ ante una señal de entada $x[n]$ arbitraria, es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

en donde $h[n]$ es la respuesta del sistema a una muestra unitaria. Aplicando la transformada Z a ambos miembros se obtiene

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

en donde

$$H(z) = \mathcal{Z}(h[n]) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}(y[n])}{\mathcal{Z}(x[n])}$$

por lo que la función de transferencia se puede interpretar también como la transformada Z de la respuesta de un sistema a la muestra unitaria $\delta[n]$.

La función de transferencia permite determinar la salida del sistema para cualquier entrada arbitraria, la respuesta forzada, por medio de la siguiente expresión,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

utilizando expansión en fracciones simples y antitransformando el resultado es posible determinar la respuesta forzada del sistema.

Otra propiedad de interés es la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto, la cual puede ser caracterizada por medio de la evaluación de las raíces del polinomio del denominador $A(z)$ de la función de transferencia, los cuales son los polos del sistema. Para que el sistema sea estable se requiere que los polos estén contenidos en el círculo unitario del plano complejo z, o bien, que la magnitud de los polos sea menor a la unidad.

De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias

Ahora se presentará un método para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales por medio de la solución de ecuaciones en diferencias. El procedimiento consiste en obtener una ecuación en diferencias asociada a la ecuación diferencial original aproximando la operación de derivación por medio de la operación de diferencias finitas, este método puede ser aplicado a sistemas de orden arbitrario, sin embargo en este caso nos limitaremos, sin pérdida de generalidad, a sistemas de segundo orden. Considere un sistema dinámico cuya relación entrada salida está dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

la definición de derivada está dada por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

en el límite esta operación tiende a la derivada, sin embargo, si consideramos que Δt no tiende a cero, sino a un valor pequeño T_s que denominaremos periodo de muestreo, entonces podemos aproximar la operación de derivada como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

y para la segunda derivada,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} &\approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s}\right] \\
&\approx \frac{\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y(t-T_s)}{\mathrm{d}t}\right]}{T_s} \\
&\approx \frac{\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s} - \frac{y(y-T_s)-y(t-2T_s)}{T_s}}{T_s} \\
&\approx \frac{y(t)-2y(t-T_s)+y(t-2T_s)}{T_s^2}
\end{aligned}
$$

sustituyendo las aproximaciones de las derivadas en la ecuación diferencial, y considerando que el tiempo es muestreado, es decir, $t = nT_s$, en donde n es el índice de muestreo y T_s el periodo de muestreo, entonces se tiene que

$$
\frac{y(nT_s)-2y(nT_s-T_s)+y(nT_s-2T_s)}{T_s^2} + a_1\frac{y(nT_s)-y(nT_s-T_s)}{T_s} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)
$$

utilizando manipulaciones algebraicas simples es posible reescribir la ecuación anterior como,

$$
\left(\frac{1}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}+a_0\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]
$$

o bien

$$
\left(\frac{1+a_1T_s+a_0T_s^2}{T_s^2}\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2+a_1T_s}{T_s^2}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]
$$

normalizando y omitiendo por simplicidad la dependencia con el tiempo de muestreo, entonces se obtiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$
y[n] - c_1 y[n-1] + c_2 y[n-2] = d_0 x[n]
$$

con coeficientes

$$
c_1 = \frac{2+a_1T_s}{1+a_1T_s+a_0T_s^2}, \quad c_2 = \frac{1}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} \quad d_0 = \frac{T_s^2}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} b_0, \tag{15}
$$

si se consideran condiciones iniciales nulas y se aplica la transformada Z a la ecuación anterior, se obtiene

$$
Y(z) - c_1 z^{-1} Y(z) + c_2 z^{-2} Y(z) = d_0 X(z)
$$

y finalmente la función de transferencia está dada por

$$
H(z) = \frac{d_0}{1 - c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}
$$

o bien

$$
H(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}
$$

De función de transferencia en tiempo continuo a función de transferencia en tiempo discreto

La transformada de Laplace de la derivada de una señal muestreada se puede representar como

$$\mathcal{Z}\left[f'(nT)\right] = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]$$

con función de transferencia

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f'(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d(z) = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{T_s z} \tag{16}$$

de esta forma se tiene una forma de representar la operación de derivada en el dominio de la transformada Z. Por lo tanto, una derivada de orden arbitrario, se puede representar como

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f^{(q)}(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d^q(z) = \left[\frac{z-1}{T_s z}\right]^q.$$

Ahora consideremos una ecuación diferencial de segundo orden que representa el comportamiento entrada salida de un sistema,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{17}$$

La ecuación diferencial después de muestreo, es decir, sustituyendo $t = nT_s$ resulta en

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(nT_s)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(nT_s)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación anterior y utilizando la derivada $H_d(z)$,

$$H_d^2(z)Y(z) + a_1 H_d(z) + a_0 Y(z) = b_0 X(z)$$

y la función de transferencia está dada por

$$H_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{H_d^2(z) + a_1 H_d(z) + a_0} \tag{18}$$

comparando la función de transferencia del sistema en tiempo continuo (17) con la versión de tiempo discreto (18) notamos que

$$H_c(z) = H(z)|_{s=H_d(z)}$$

lo cual se puede considerar como un mapeo desde la variable s a la variable z. Si sustituimos la expresión (16) en (18), tenemos que

$$
\begin{aligned}
H_c(z) &= \frac{b_0}{\left(\frac{z-1}{T_s z}\right)^2 + a_1\left(\frac{z-1}{T_s z}\right) + a_0} \\
&= \frac{b_0}{\frac{z^2-2z+1}{T_s^2 z^2} + a_1\frac{z-1}{T_s z} + a_0}
\end{aligned}
$$

realizando manipulaciones algebraicas se obtiene

$$
H_c(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}
$$

con los coeficientes definidos en (15). Conforme el tiempo de muestreo es más pequeño la aproximación a la respuesta del sistema en tiempo discreto es mejor. Los dos métodos vistos son basados en aproximaciones de derivadas con diferencias finitas, una en el dominio del tiempo y otra en el dominio de la transformada Z.

1. Previo

1.1. ¿Qué métodos se pueden utilizar para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto?

- Convolción discreta.
- Transformada discreta de Fourier
- Transformada discreta de Laplace
- Transformada Z

1.2. ¿Cuál es la relación entre las variables s y z? ¿Cómo se relaciona el plano complejo en s con el plano complejo en z?

1.2.1. Transformada Z

- Es una una nueva herramienta matemática que simplifica el análisis y la síntesis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.
- Análoga:
  - transformada de Laplace que se emplea en el estudio de los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo.
  - la transformada z se utiliza en el análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.
- Permite realizar operaciones, "ver" propiedades y características de las señales y los sistemas discretos en una forma más simple que en el dominio del tiempo

Vamos a discretizar una señal pasando de la figura (a) a la (c) de la figura 1, y con ella haremos movimientos hasta llegar a (a) .

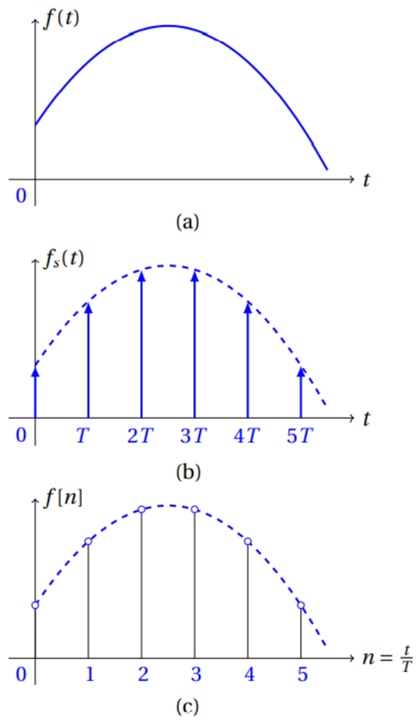


Figura 1: (a) Señal continua. (b) Señal muestreada. (c) Señal discreta.

$$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]\delta(t-nT) \tag{1}$$

$$F_s(s) = \mathscr{L}\left\{f_s(t)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]e^{-nTs} \tag{2}$$

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T} \tag{3}$$

$$F(z) = \mathscr{L}\left\{f_s(t)\right\}\big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{Z}\{f[nT]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[nT]z^{-n} \tag{4}$$

- Podemos decir que la transformada de Laplace unilateral es la ecuación 4.
- **Región de convergenica:**
  - Usualmente se abrevia como ROC.
  - Es conjunto de valores z que verifican la convergencia $F(z)$.

1.2.2. Mapeo

- se puede considerar un mapeo del plano complejo s al plano complejo z visto en la ecuación 2.
- Dominio:

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T}e^{j\omega T} = e^{\sigma T}e^{j(\omega T + 2\pi k)}$$

Cuando se recorre el eje imaginario desde $-\infty$ a $+\infty$, el círculo unitario se delinea un número infinito de veces.

Se tiene que saber que recordar los mapeos de ecuaciones vistos en Matemáticas Avanzadas, son de alguna manera muy útiles. Uno de los casos más frecuentes es es cuando $\sigma < 0$, $|z| = e^{\sigma T} < 1$ el semiplano izquierdo del plano s se mapea en el interior del círculo unitario del plano z. Se puede apreciar ello en la figura 2. Recuerda eso es para dar una idea pero existen múltiples configuraciones e intersecciones que se tienen que profundizar.

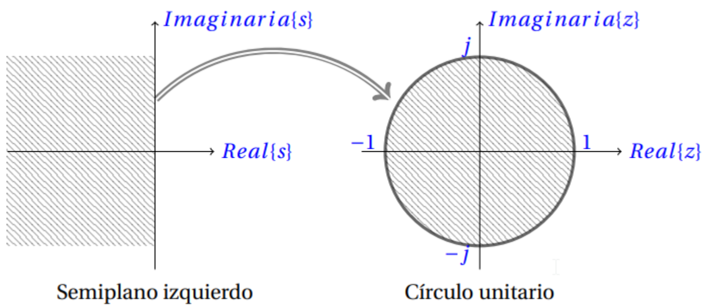


Figura 2: Mapeo del plano s al plano z, con $z = e^{sT}$.

1.3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de los sistemas lineales e invariantes de tiempo discreto?

Un sistema discreto es BIBO si para cada entrada de $x[n]$ está acotada, de forma que si existe una $M < \infty$ que cumpla con que $|x[n]| > M$ para tona n, y cada salida de $y[n]$ está igualmente acotada.

$$|x[n]| \leq M < \infty \tag{5}$$

La anterior ecuación nos indica que va a existir un valor M que va a acotar a todos los valores x[n] de la señal de entrada.

En cambio, un sistema de tiempo discreto LTI es BIBO estable si y solo si su secuencia de respuesta de impulso h [n] es absolutamente sumable, es decir,

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{6}$$

Demostración:

Partimos de lo siguiente

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \tag{7}$$

Empecemos considerando a la salida de la señal como una función convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \tag{8}$$

Si aplicamos valor absoluto a ambos lados de la ecuación y usamos la desigualdad de tres componentes en la suma obtenemos:

$$|y[n]| = |\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \tag{9}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]h[n-m]| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_x |h[n-m]| \tag{10}$$

$$\leq M_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[n-m]| = M_x S \tag{11}$$

Si $S < \infty$ tenemos que

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \tag{12}$$

Para demostrar la convergencia de S consideramos la entrada x[n] de la siguiente forma

$$x[n] = \begin{cases} \text{sgn(h[-n])}, & \text{si h[-n]} \neq 0 \\ K, & \text{si h[-n]} = 0 \end{cases}$$

Donde sgn(c)=1 si $c > 0$ y sgn(c)=-1 si $c < 0$ y $|K| \leq 1$

Si usamos la entrada n=0 tenemos:

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} sng(h[k])h[k] = S \leq B_y < \infty \tag{13}$$

Con lo que se demuestra que $|y[n]| \leq B_Y$ que implica que $S \leq \infty$

1.4. ¿Qué diferencias existen entre los métodos de fracciones parciales para sistemas de tiempo continuo y sistemas de tiempo discreto?

Ambos métodos son usados para obtener la anti transformada de Laplace y Z respectivamente. En el caso de sistemas de tiempo discreto el método es mejor conocido como expansión de fracciones parciales, y difiere con el método de sistemas continuos en los siguientes aspectos:
1. Cada fracción va multiplicada por un factor z que facilita su anti transformación.
2. Se considera un primer coeficiente que no va acompañado de ningún factor calculado de las siguiente forma:

$$d_0 = \frac{b_m}{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_n)} \tag{14}$$

Donde m=número de ceros y n= número de polos.
El método de fracciones parciales para sistemas de tiempo discreto es idéntico al que se utiliza en la transformada de Laplace (tiempo continuo), y requiere que todos los términos de la expansión en fracciones parciales se puedan reconocer fácilmente en la tabla de pares de transformadas Z.
Si X(z) tiene uno o más ceros en el origen (z = 0), entonces X(z)/z ó X(z) se expande en la suma de términos sencillos de primer o segundo orden mediante la expansión en fracciones parciales, y se emplea una tabla de transformadas Z para encontrar la función del tiempo correspondiente para cada uno de los términos expandidos.
Del mismo modo que en sistemas de tiempo continuo y teniendo en cuenta la fracción:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(Z+P_1)(Z+P_2)(Z+P_3)...(Z+P_i)}$$

Donde P1, P2, P3 ... Pi son las raíces del polinomio, estas raíces podrán ser: reales simples, reales múltiples, complejas simples, complejas múltiples.

1.5. ¿En qué dispositivo de la vida cotidiana se realizan conversiones de señales de tiempo continuo a tiempo discreto y viceversa?

Convertidor DAC (Digital a Análoga)

- La salida digital de una computadora puede convertirse en una señal de control analógica para ajustar la velocidad de un motor o para controlar alguna variable física.
- Las computadoras pueden ser programados para generar señales analógicas necesarias para analizar circuitos analógicos
- Para ser escuchado sonido de los altavoces utilizan DAC para convertir una señal digital, guardada en un CD o un reproductor mp3) en una señal a analógica. Esos DAC son usados por los lectores de CD, reproductores digitales de música y tarjetas de sonido.

Convertidor ACD (Análoga a Digital

- Son usados en cualquier dispositivo que tenga sensores de temperatura.
- En los automóviles con sensores de proximidad.
- Dispositivos de almacenamiento y procesamiento de audio.

Desarrollo de la práctica

Aproximación de sistemas de sistemas de tiempo continuo por sistemas de tiempo discreto

De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias y de función de transferencia en tiempo discreto a función de transferencia en tiempo continuo

Considere un circuito RLC como el mostrado en la Figura 23, cuyo comportamiento, considerando como entrada el voltaje $V_g(t)$ de la fuente y como salida el voltaje en el capacitor $V_c(t)$, está dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2V_c(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}V_c(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}V_c(t)=\frac{1}{LC}V_g(t), \quad V_c(0)=V_{c0} \quad \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t}(0)=V'_{c0}$$

considere que $\frac{R}{L}=1$ y $\frac{1}{LC}=5$.

- Resuelva la ecuación diferencial utilizando los métodos analíticos disponibles en el software especializado que esté utilizando, escriba la solución y grafíquela, muestre los resultados en el siguiente cuadro.

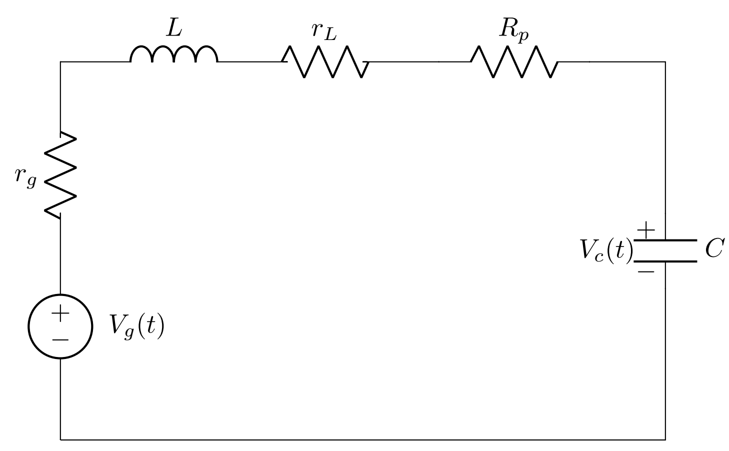


Figura 23. Circuito RL paralelo

Solución analítica del circuito:
Representación grafica:

- Considerando un periodo de muestreo de $T_s = 1$ y utilizando el método de discretización mediante diferencias finitas, encuentre la ecuación en diferencias asociada y resu´elvala utilizando el método de recurrencia. Compare los resultados gr´aficos de la versi´on de tiempo continuo y la de tiempo discreto para diferentes valores del periodo de muestreo (disminúyalo en un punto decimal hasta $T_s = 0,0001$).

Comparación entre solución de tiempo discreto y aproximación con diferencias finitas para diferentes valores del tiempo de muestreo

- Obtenga la función de transferencia del sistema de tiempo continuo.

- Utilizando $T_s = 1$:

A) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto de la ecuación en diferencias que resultó en el punto anterior.
B) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto a partir de la función de transferencia de tiempo continuo del sistema utilizando un diferenciador discreto, ¿cómo son las funciones de transferencia obtenidas en este punto y el anterior? ¿qué puede concluir?

- Grafique en una sola figura la respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo, y las dos aproximaciones de tiempo discreto.

Comparación de solución de tiempo contunuo y solución de tiempo discreto utilizando funciones de tranferencia

- Disminuya el tiempo de muestreo hasta obtener una aproximación adecuada de la respuesta del sistema y grafique la comparación. ¿Qu´e aproximación resultó mejor?

Comparacion de solución de tiempo continuo y solución de tiempo discreto utilizando funciones de tranferencia para diferentes valores de tiempo de muestreo

Control discreto de un sistema de tiempo continuo.

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo representado por la siguiente funci´on de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

- Determine la estabilidad del sistema.

- Utilizando el software especializado de su preferencia, determine la respuesta al escalón del sistema y describa como es su comportamiento.

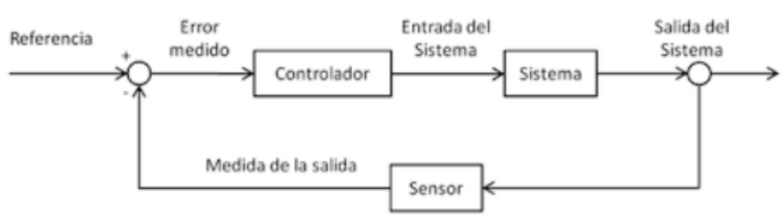


Figura 24. Control de lazo cerrado

Respuesta al escalón del sistema a controlar

- Cuando se desea cambiar el comportamiento de un sistema se debe implementar un controlador de lazo cerrado, el cual compara la se˜nal de salida del sistema con la se˜nal de referencia y con base en esta se˜nal de error calcula la entrada del sistema para que se obtenga el comportamiento deseado, de acuerdo con el diagrama de bloques mostrado en Figura 24. El modo m´as simple de control consiste en el control proporcional, el cual realimenta un término proporcional del error de salida, es decir,

$$u_c = K(r - y)$$

La conexión de la Figura 24 se denomina conexión en retroalimentación negativa, y es posible determinar la función de transferencia correspondiente mediante software especializado, para lo cual se deben definir previamente las funciones de transferencia del controlador, del sistema y del sensor. Considerando la función de transferencia del sistema, la del controlador como C(s) = K y la del sensor H(s) = 1, determine la función de transferencia de lazo cerrado Gc(s) correspondiente. ¿Cómo son los polos del sistema? ¿Qué puede decir de la estabilidad del mismo?

- A partir de las funciones de transferencia de lazo abierto y de lazo cerrado en tiempo continuo obtenga las versiones de tiempo discreto. Realice lo anterior utilizando los procedimientos presentados en la Introducción Teórica y el software especializado de su elección. Reporte sus resultados a continuación.

Respuesta al escalón del sistema con control

- Determine los polos de lazo abierto y de lazo cerrado de tiempo discreto y caracterice la estabilidad de cada uno de estos. Determine la respuesta al escalón de ambos sistemas utilizando software especializado. Escriba sus resultados a continuación y las gráficas obtenidas en los espacios correspondientes.

Respuesta al escalón del sistema en tiempo discreto
Respuesta al escalón del sistema de control en tiempo discreto

2. Preguntas de cierre

2.1. Explique brevemente la importancia de la conversión de señales de tiempo continuo a tiempo discreto

2.2. ¿Qué relación existe entre la transformadas de Laplace y Z?

2.3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de sistemas de tiempo continuo y tiempo discreto en el contexto de funciones de transferencia?

3. Observaciones y conclusiones

- **Alfaro Domínguez Rodrigo:**
- **Barrera Peña Víctor Miguel:**
- **Villeda Hernández Erick Ricardo:**

Referencias

[1] Marco F. Duarte. 8.5 Casuality and Stability of Discrete-Time Linear Time-Invariant Systems. https://cnx.org/contents/KilsjSQd@10.18:9kZ-CT3d@1/Causality-and-Stability-of-Discrete-Time-Linear-Time-Invariant-Systems. Online; accessed 1 Noviembre 2020.

[2] Gloria Mata Hernández, Víctor M Sánchez Esquivel, and Juan M Gómez González. Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, 2017.

[3] Mitra K. Stability Condition of an LTI Discrete-Time System. https://web.njit.edu/~akansu/Ch2(3)Handouts_3e.pdf, 2005. Online; accessed 1 Noviembre 2020.