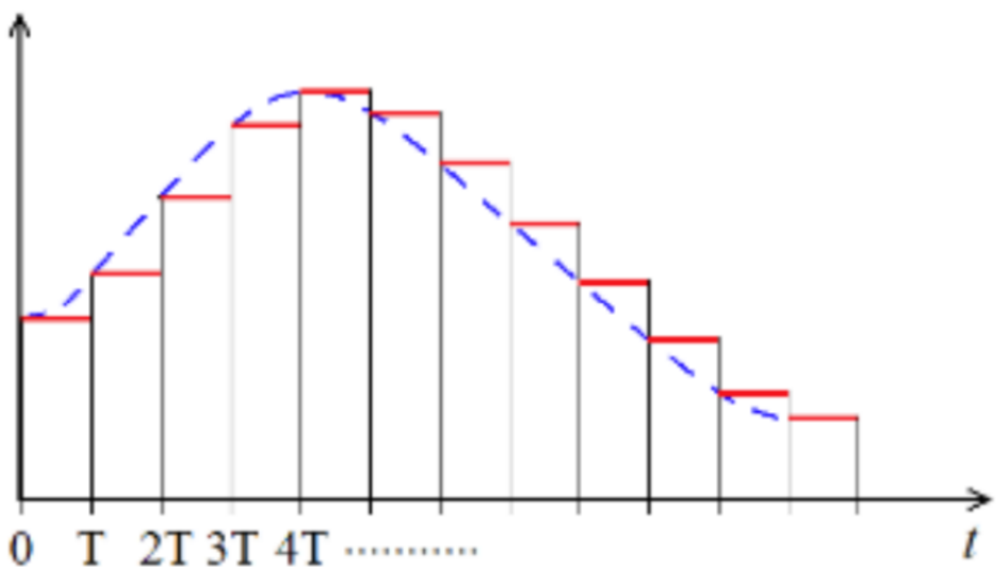
	Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales	Código:	MADO-76
		Versión	01
		Página:	40/97
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	28 de frebrero 2019

Facultad de ingeniería	**Area/Departamento: Laboratorio de control y robótica**

La impresion de este documento es una copia no controlada

Práctica N∘3 Transformada Z y aplicaciones a sistemas de tiempo discreto



Apellidos y nombres	Alfaro Domínguez Rodrigo
	Barrera Peña Víctor Miguel
	Villeda Hernández Erick Ricardo

Grpo:	4	Profesor: M.I Lauro Fernando Vazquez Alberto	Calificación
Brigada:	1		
Semestre:	2021-1	Fecha de ejecución: 22/09/2020– 29/09/2020	

Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización y conducta. $A,5\ I$.	Buena organización. Puntualidad. Actitud de respeto.Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica (**1p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0,7**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0,5p**.)	Mala organización. Impuntualidad. Confunsión en las actividades y responsabilidades. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p**.)	
Desarrollo de actividades. $A,6\ M$.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**1p**.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuado. (**0,7p**.)	Realiza el 80 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0,5p**.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p**.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje. $A,1M$ $A,3M$ $A,7A$ $A,2I$ $A,4I$	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian experiencias de la práctica con conceptos teóricos (**4p**.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p**.)	Asimilan escasamente los conocimientos prácticos. La asociación de la práctica con la teoría es escasa. (**2p**.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p**.)	
Reporte de la práctica. $A,5I$	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporta de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**)	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades son reportadas incompletas. (**3p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades son incompletas. (**2p**.)	No cumple con la estructura del reporte. No refleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p**.)	

Objetivos

☞ Los alumnos y las alumnas conocerán algunas algunas de las señales básicas y las señales singulares y sus características fundamentales.

☞ Se establecerá la relación que existe entre señales físicas y su representación matemática mediante el uso de software y adquisición de señales.

Recursos

1. Software
    a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
    a) Computadora con 2GB RAM min.
    b) Celular para grabar sonidos.

Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	**Riesgo asociado**	**Medidas de control**	**Verificación**
1^{ro}	Voltaje alterno	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	☐
		Apellidos y nombres:		

Fundamento teórico

Muestreo uniforme

El primer paso para convertir una señal continua $x(t)$ a una señal digital es discretizar la variable de tiempo, es decir, considerar muestras de $x(t)$ en instantes uniformes de tiempo $t = nT_s$, o,

$$x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$$

en donde n es un número entero y T_s es el periodo de muestreo. Para conceptualizar el método de muestreo, es posible pensarlo como la multiplicación de la señal $x(t)$ por un tren de pulsos de ancho fijo, una descripción teórica profunda puede ser consultada en [?], aquí nos limitaremos a explicar algunas cuestiones prácticas en el proceso de muestreo.

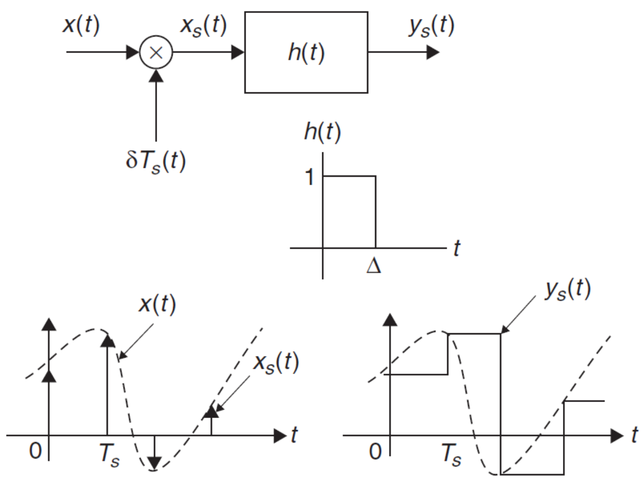


Figura 22. Muestro utilizando un sistema de muestreo y retención

Para procesar señales analógicas utilizando computadoras es necesario convertir señales analógicas a digitales y señales digitales a analógicas, estos procedimientos son realizado por medio de convertidores analógico-digital (CAD) y digital-analógico (CDA), respectivamente. Un convertidor analógico-digital, una vez que la señal es discretizada en tiempo, debe considerar el tiempo requerido para completar el proceso de digitalización. Un *sistema de muestreo y retención* toma muestras de la señal continua y las retiene hasta que el proceso de digitalización es completado y una nueva muestra puede ser adquirida. Un sistema de este tipo es mostrado en la Figura 22, el procedimiento consiste en multiplicar las señal a muestrear $x(t)$ por un tren de impulsos δ_{T_s} con periodo T_s para obtener otro tren de impulsos $x_s(t)$ cuya magnitud es el valor de la señal en los instantes de muestreo nT_s. Posteriormente, la señal $x_s(t)$ es introducida a un *retenedor de orden cero*, un sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso $h(t)$ es un pulso de ancho deseado $\Delta \leq T_s$. La salida $y_s(t)$ del sistema de muestreo y retención es una secuencia de pulsos trasladados $h(t) = u(t) - u(t - \Delta)$ y escalados por el valor $x(nT_s)$, es decir,

$$y_s(t) = \sum_n x(nT_s)h(t - nT_s).$$

Sistemas de tiempo discreto

A continuación se introducen los sistemas de tiempo discreto que de mayor importancia teórica para el curso, estos son los sistemas de tiempo discreto lineales, invariantes en el tiempo y causales, los cuales pueden ser representados por medio de ecuaciones en diferencias que relacionan la entrada y la salida el sistema.

Los sistemas de interés

De forma similar a los sistemas de tiempo continuo, un sistema de tiempo discreto puede ser conceptualizado como un procesador que transforma una señal de entrada de tiempo discreto $x[n]$ en una señal de salida de tiempo discreto $y[n]$, es decir,

$$y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}.$$

Al igual que en sistemas de tiempo continuo, estudiaremos sistemas de tiempo discreto $\mathcal{T}\left\{\cdot\right\}$ que tienen las siguientes propiedades:

- Linealidad
- Invarianza en el tiempo
- Estabilidad
- Causalidad

Para un sistema de tiempo discreto $\mathcal{T}$ se dice que es

- *Lineal*: Si para las entradas $x[n]$ y $v[n]$ y constantes a y b, el sistema satisface las siguientes condiciones
  - Escalamiento: $\mathcal{T}\left\{ax[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$,
  - Aditividad: $\mathcal{T}\left\{x[n]+v[n]\right\} = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + \mathcal{T}\left\{v[n]\right\}$, o equivalentemente si se cumple el principio de superposición,
  $$\mathcal{T}\left\{ax[n]+bv[n]\right\} = a\mathcal{T}\left\{x[n]\right\} + b\mathcal{T}\left\{v[n]\right\}.$$
- *Invariante en el tiempo*: si para cualquier entrada $x[n]$ con la correspondiente salida $y[n] = \mathcal{T}\left\{x[n]\right\}$, la salida correspondiente a la versión retrasada o adelantada de $x[n]$, $x[n \pm M]$, es $y[n \pm M] = \mathcal{T}\left\{x[n \pm M]\right\}$ para un entero M.

Los sistemas de tiempo discreto como ecuaciones en diferencias

De forma similar a como los sistemas de tiempo continuo pueden ser representados mediante ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto que nos interesan, cuyas señales de entrada es $x[n]$ y de salida $y[n]$, pueden ser representador como ecuaciones en diferencias que relacionan a $x[n]$ con $y[n]$, de acuerdo con la siguiente expresión

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0 \tag{13}$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$ y en donde el orden del sistema es $N-1$. Si la ecuación en diferencias anterior es lineal, con coeficientes constantes, condiciones iniciales nulas y la respuesta es cero para $n < 0$, entonces esta representa un sistema lineal e invariante en el tiempo. Para este tipo de sistemas, la salida $y[n]$ en el instante de tiempo n, depende de los valores previos de la salida $\{y[n-k], k = 1 \ldots N-1\}$, por lo que también se les conoce como sistemas recursivos, ya que la salida del sistema puede ser definida como una secuencia de valores numéricos dados por la siguiente expresión,

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0$$

con condiciones iniciales $y[-k]$, $k = 1, \ldots, N-1$. Existen otras metodologías para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto n las cuales no serán presentadas, pero pueden ser consultadas en la literatura correspondiente.

Solución de ecuaciones en diferencia mediante la transformada Z y la función de transferencia

La transformada Z puede ser utilizada para resolver ecuaciones en diferencias de la forma (13), aplicando la transformada a ambos miembros de la ecuación y combinando las propiedades de desplazamiento en el tiempo y diferencia finita, se puede obtener una expresión para la la transformada Z de la salida del sistema de la siguiente forma

$$Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0(z)}{A(z)} \tag{14}$$

la cual tiene dos componentes, la primera depende de los efectos de la entrada del sistema y es la transformada Z de la respuesta forzada, mientras que la segunda componente es debida a las condiciones iniciales, por lo que se trata de la transformada Z de la respuesta libre. Por lo que descomponiendo la expresión en fracciones simples con antitransformadas comunes encontradas en el Tabla **??** es posible determinar la expresión para la respuesta total del sistema.

Si consideramos condiciones iniciales nulas, es decir, sustituyendo $I_0(z) = 0$ en (14), es posible determinar el cociente entre las transformadas Z de la señal de salida y de la señal de entrada, es decir,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

la cual es la función de transferencia del sistema, que en general es una función racional de polinomios en z. Otra posible definición de la función de transferencia es utilizando la suma convolución, la cual determina la salida del sistema $y[n]$ ante una señal de entada $x[n]$ arbitraria, es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

en donde $h[n]$ es la respuesta del sistema a una muestra unitaria. Aplicando la transformada Z a ambos miembros se obtiene

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

en donde

$$H(z) = \mathcal{Z}(h[n]) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}(y[n])}{\mathcal{Z}(x[n])}$$

por lo que la función de transferencia se puede interpretar también como la transformada Z de la respuesta de un sistema a la muestra unitaria $\delta[n]$.

La función de transferencia permite determinar la salida del sistema para cualquier entrada arbitraria, la respuesta forzada, por medio de la siguiente expresión,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

utilizando expansión en fracciones simples y antitransformando el resultado es posible determinar la respuesta forzada del sistema.

Otra propiedad de interés es la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto, la cual puede ser caracterizada por medio de la evaluación de las raíces del polinomio del denominador $A(z)$ de la función de transferencia, los cuales son los polos del sistema. Para que el sistema sea estable se requiere que los polos estén contenidos en el círculo unitario del plano complejo z, o bien, que la magnitud de los polos sea menor a la unidad.

De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias

Ahora se presentará un método para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales por medio de la solución de ecuaciones en diferencias. El procedimiento consiste en obtener una ecuación en diferencias asociada a la ecuación diferencial original aproximando la operación de derivación por medio de la operación de diferencias finitas, este método puede ser aplicado a sistemas de orden arbitrario, sin embargo en este caso nos limitaremos, sin pérdida de generalidad, a sistemas de segundo orden. Considere un sistema dinámico cuya relación entrada salida está dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0y(t) = b_0x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

la definición de derivada está dada por

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t) - y(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

en el límite esta operación tiende a la derivada, sin embargo, si consideramos que Δt no tiende a cero, sino a un valor pequeño T_s que denominaremos periodo de muestreo, entonces podemos aproximar la operación de derivada como

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \approx \frac{y(t) - y(t-T_s)}{T_s}$$

y para la segunda derivada,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} &\approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s}\right] \\
&\approx \frac{\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y(t-T_s)}{\mathrm{d}t}\right]}{T_s} \\
&\approx \frac{\frac{y(t)-y(t-T_s)}{T_s} - \frac{y(y-T_s)-y(t-2T_s)}{T_s}}{T_s} \\
&\approx \frac{y(t)-2y(t-T_s)+y(t-2T_s)}{T_s^2}
\end{aligned}
$$

sustituyendo las aproximaciones de las derivadas en la ecuación diferencial, y considerando que el tiempo es muestreado, es decir, $t = nT_s$, en donde n es el índice de muestreo y T_s el periodo de muestreo, entonces se tiene que

$$\frac{y(nT_s)-2y(nT_s-T_s)+y(nT_s-2T_s)}{T_s^2} + a_1\frac{y(nT_s)-y(nT_s-T_s)}{T_s} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)$$

utilizando manipulaciones algebraicas simples es posible reescribir la ecuación anterior como,

$$\left(\frac{1}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}+a_0\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2}{T_s^2}+\frac{a_1}{T_s}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]$$

o bien

$$\left(\frac{1+a_1T_s+a_0T_s^2}{T_s^2}\right) y\left[(n)T_s\right] - \left(\frac{2+a_1T_s}{T_s^2}\right) y\left[(n-1)T_s\right] + \frac{1}{T_s^2} y\left[(n-2)T_s\right] = b_0 x[(n)T_s]$$

normalizando y omitiendo por simplicidad la dependencia con el tiempo de muestreo, entonces se obtiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$y[n] - c_1 y[n-1] + c_2 y[n-2] = d_0 x[n]$$

con coeficientes

$$c_1 = \frac{2+a_1T_s}{1+a_1T_s+a_0T_s^2}, \quad c_2 = \frac{1}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} \quad d_0 = \frac{T_s^2}{1+a_1T_s+a_0T_s^2} b_0, \tag{15}$$

si se consideran condiciones iniciales nulas y se aplica la transformada Z a la ecuación anterior, se obtiene

$$Y(z) - c_1 z^{-1} Y(z) + c_2 z^{-2} Y(z) = d_0 X(z)$$

y finalmente la función de transferencia está dada por

$$H(z) = \frac{d_0}{1 - c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}$$

o bien

$$H(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}$$

De función de transferencia en tiempo continuo a función de transferencia en tiempo discreto

La transformada de Laplace de la derivada de una señal muestreada se puede representar como

$$\mathcal{Z}\left[f'(nT)\right] = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]$$

con función de transferencia

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f'(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d(z) = \frac{1}{T_s}(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{T_s z} \tag{16}$$

de esta forma se tiene una forma de representar la operación de derivada en el dominio de la transformada Z. Por lo tanto, una derivada de orden arbitrario, se puede representar como

$$\frac{\mathcal{Z}\left[f^{(q)}(nT_s)\right]}{\mathcal{Z}\left[f(nT_s)\right]} = H_d^q(z) = \left[\frac{z-1}{T_s z}\right]^q.$$

Ahora consideremos una ecuación diferencial de segundo orden que representa el comportamiento entrada salida de un sistema,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{17}$$

La ecuación diferencial después de muestreo, es decir, sustituyendo $t = nT_s$ resulta en

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(nT_s)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}y(nT_s)}{\mathrm{d}t} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = y'(0)$$

aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación anterior y utilizando la derivada $H_d(z)$,

$$H_d^2(z)Y(z) + a_1 H_d(z) + a_0 Y(z) = b_0 X(z)$$

y la función de transferencia está dada por

$$H_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{H_d^2(z) + a_1 H_d(z) + a_0} \tag{18}$$

comparando la función de transferencia del sistema en tiempo continuo (17) con la versión de tiempo discreto (18) notamos que

$$H_c(z) = H(z)|_{s=H_d(z)}$$

lo cual se puede considerar como un mapeo desde la variable s a la variable z. Si sustituimos la expresión (16) en (18), tenemos que

$$H_c(z) = \frac{b_0}{\left(\frac{z-1}{T_s z}\right)^2 + a_1 \left(\frac{z-1}{T_s z}\right) + a_0}$$

$$= \frac{b_0}{\frac{z^2-2z+1}{T_s^2 z^2} + a_1 \frac{z-1}{T_s z} + a_0}$$

realizando manipulaciones algebraicas se obtiene

$$H_c(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}$$

con los coeficientes definidos en (15). Conforme el tiempo de muestreo es más pequeño la aproximación a la respuesta del sistema en tiempo discreto es mejor. Los dos métodos vistos son basados en aproximaciones de derivadas con diferencias finitas, una en el dominio del tiempo y otra en el dominio de la transformada Z.

Desarrollo de la práctica

Aproximación de sistemas de sistemas de tiempo continuo por sistemas de tiempo discreto

De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias y de función de transferencia en tiempo discreto a función de transferencia en tiempo continuo

Considere un circuito RLC como el mostrado en la Figura 23, cuyo comportamiento, considerando como entrada el voltaje $V_g(t)$ de la fuente y como salida el voltaje en el capacitor $V_c(t)$, está dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2V_c(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}V_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}V_c(t) = \frac{1}{LC}V_g(t), \quad V_c(0) = V_{c0} \quad \frac{\mathrm{d}V_c}{\mathrm{d}t}(0) = V'_{c0}$$

considere que $\frac{R}{L} = 1$ y $\frac{1}{LC} = 5$.

- Resuelva la ecuación diferencial utilizando los métodos analíticos disponibles en el software especializado que esté utilizando, escriba la solución y grafíquela, muestre los resultados en el siguiente cuadro.

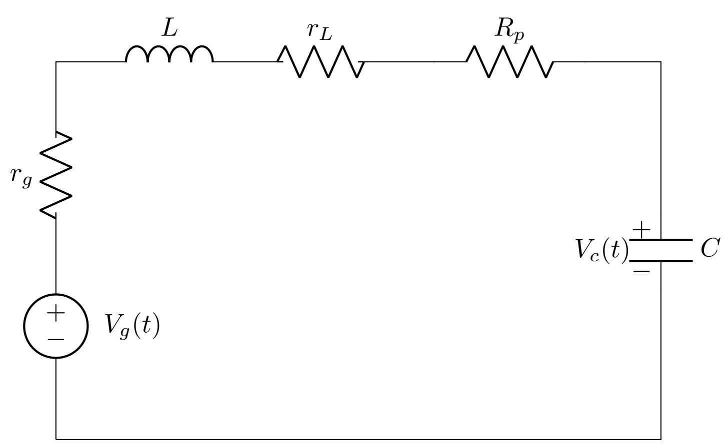


Figura 23. Circuito RL paralelo

Solución analítica del circuito:

Empezamos por la sustitución de los valores dados en el ejercicio, donde $\frac{R}{L} = 1$ y $\frac{1}{LC} = 5$. Con esto podemos reescribir nuestra ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + \frac{dV_c(t)}{dt} + 5V_g(t) = 5V_g(t) \tag{1}$$

Realizamos la sustitución de $V_c(t) = y(t)$ y $V_g(t) = x(t)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 5x(t) \tag{2}$$

Con dichos cambios ya podemos empezar a aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$\mathscr{L}\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 5y(t)\} = \mathscr{L}\{5x(t)\} \tag{3}$$

$$s^2Y(s) + sY(s) + 5Y(s) = 5X(s) \tag{4}$$

Factorizamos $Y(s)$ y $X(s)$

$$Y(s)(s^2 + s + 5) = 5X(s) \tag{5}$$

Si reacomodamos la expresión finalmente llegamos a la función de transferencia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{(s^2 + s + 5)} \tag{6}$$

Si consideramos la entrada un escalón, es decir que $X(s) = 1$ simplificamos la expresión a

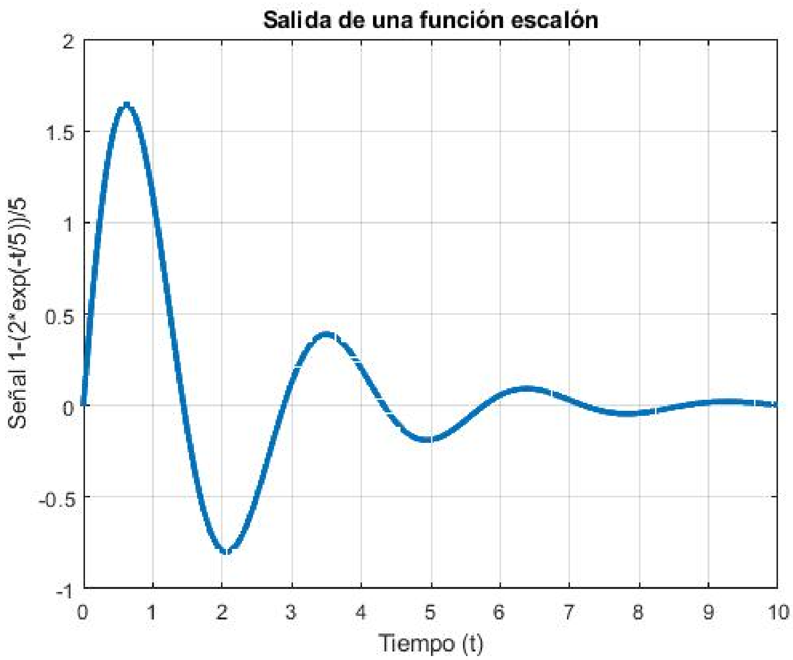
$$Y(s) = \frac{5}{(s^2 + s + 5)} \tag{7}$$

Una vez teniendo la transformada de Laplace podemos aplicar la antitransformada para llegar a la ecuación solución del sistema.

$$\mathscr{L}^-1\{Y(s)\} = \mathscr{L}^-1\{\frac{5}{(s^2 + s + 5)}\} \tag{8}$$

$$y(t) = \frac{10\sqrt(19)e^{\frac{-t}{2}}sin(\frac{\sqrt(19)t)}{2})}{19} \tag{9}$$

Representación grafica:



- Considerando un periodo de muestreo de $T_s = 1$ y utilizando el método de discretización mediante diferencias finitas, encuentre la ecuación en diferencias asociada y resuélvala utilizando el método de recurrencia. Compare los resultados gráficos de la versión de tiempo continuo y la de tiempo discreto para diferentes valores del periodo de muestreo (disminúyalo en un punto decimal hasta $T_s = 0,0001$).

Empezaremos por encontrar la ecuación en diferencias. Para esto tendremos que utilizar la definición que nos permite transformar de una ecuación diferencial a una en diferencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} \tag{10}$$

e igualmente usaremos la que nos permite pasar de una diferencial de segundo grado a su equivalente en diferencias:

$$\frac{d^2y}{dt^2)} = \frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s}{T_s^2} \tag{11}$$

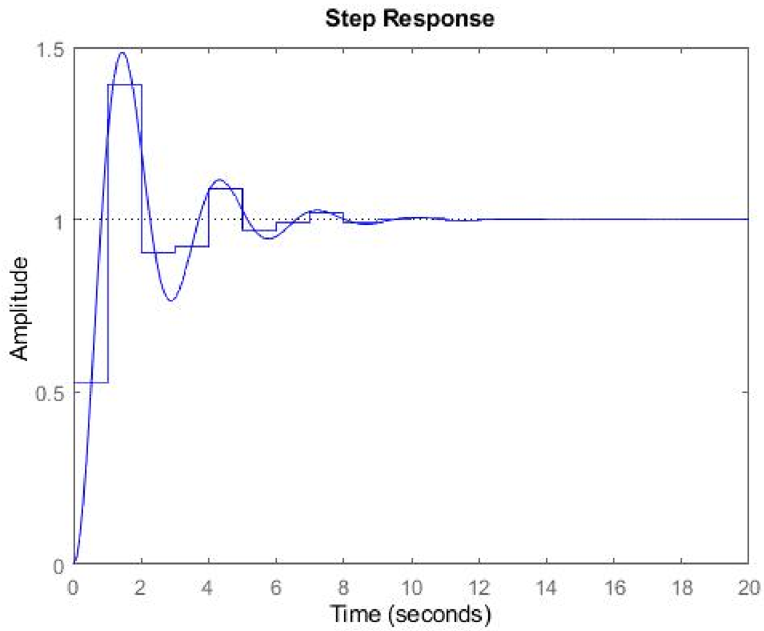
Tras sustituir ambas definiciones llegamos a:

$$\frac{V_c(t) - 2V_c(t - T_s) + V_c(t - 2T_s)}{T_s^2} + \frac{R}{L}\frac{V_c(t) - V_c(t - T_s)}{T_s} + \frac{1}{LC}V_c(t) = \frac{1}{LC}V_g(t) \tag{12}$$

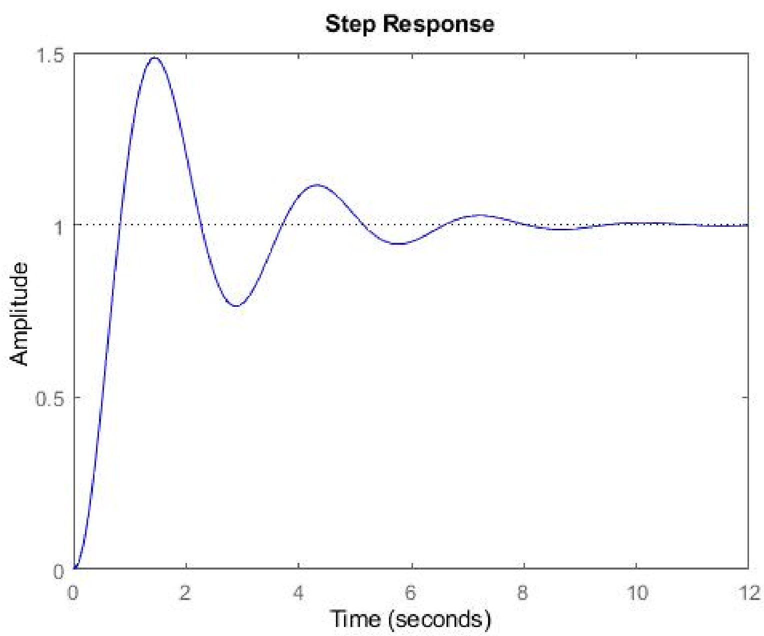
Aplicamos las equivalencias que nos dieron al inicio de la práctica $\frac{R}{L} = 5$, $\frac{1}{LC} = 5$, $V_c(t) = y(t)$ y $V_g(t) = x(t)$

$$\frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{T_s^2} + \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} + 5y(t) = 5x(t) \tag{13}$$

Salida con $T_s = 1$



Salida con $T_s = 0,0001$



Para la obtención de las gráficas anteriores se usaron los siguientes comandos de Matlab:

- Ts=1
- Hs=tf([5],[1 1 5])
- Hz=c2d(Hs,Ts,'foh')
- step(Hs,'-',Hz,'-')

Como podemos concluir de observar ambas gráficas, la importancia de T_s radica en que mientras más se acerque su valor a cero mejor será la aproximación de la solución de ecuaciones por diferencias a la solución de la ecuación en tiempo continuo. Esto mismo lo podemos ver al hacer $T_s = 0{,}0001$ parece que las gráficas se sobreponen, mientras que en $T_s = 1$ se ve claramente la diferencia entre ambas gráficas. Cabe aclarar que la gráfica obtenida mediante la solución de diferencias finitas nunca va a ser la misma que la de tiempo continuo sin importar cuanto se disminuya T_s

- Obtenga la función de transferencia del sistema de tiempo continuo.
- Utilizando $T_s = 1$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{(s^2 + s + 5)} \tag{14}$$

A) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto de la ecuación en diferencias que resultó en el punto anterior.
A partir de la ecuación obtenida en el ejercicio anterior

$$\frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{T_s^2} + \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} + 5y(t) = 5x(t) \tag{15}$$

Podemos llegar a que si $T_s = 1$ nuestra ecuación por diferencias es la siguiente:

$$\frac{0{,}5252z^2 + 1{,}231z + 0{,}3053}{z^2 + 0{,}6936x + 0{,}3679} \tag{16}$$

Dicha ecuación es obtenida en Matlab tras usar los siguientes comandos.

- Ts=1
- Hs=tf([5],[1 1 5])
- Hz=c2d(Hs,Ts,'foh')

B) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto a partir de la función de transferencia de tiempo continuo del sistema utilizando un diferenciador discreto, ¿cómo son las funciones de transferencia obtenidas en este punto y el anterior? ¿qué puede concluir?
Como ya habíamos mencionado antes, la función de transferencia en tiempo discreto utilizando un diferenciador discreto es la siguiente:

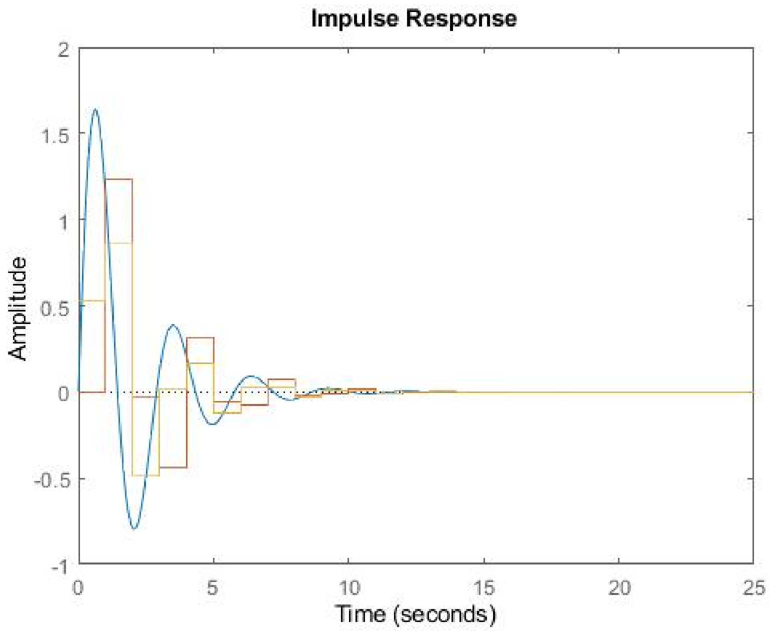
$$\frac{0{,}5252z^2 + 1{,}231z + 0{,}3053}{z^2 + 0{,}6936x + 0{,}3679} \tag{17}$$

La comparación entre la obtención de la función de transferencia con y sin diferenciador se ve en las gráficas de la siguiente pregunta. Lo que se puede observar es que mediante el uso del diferenciador, la ecuación y su gráfica se acercan más a la ecuación y gráfica de la respuesta en tiempo continuo, es decir, la presencia del diferenciador hace más exacta la aproximación en tiempo discreto.

- Grafique en una sola figura la respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo, y las dos aproximaciones de tiempo discreto.

Para esto se generaron dos gráficas: una sin diferenciador discreto y una con diferenciador discreto, siendo representadas por las curvas roja y amarilla respectivamente. Cabe mencionar que las curvas son la respuesta al impulso.

Salida con $T_s = 1$

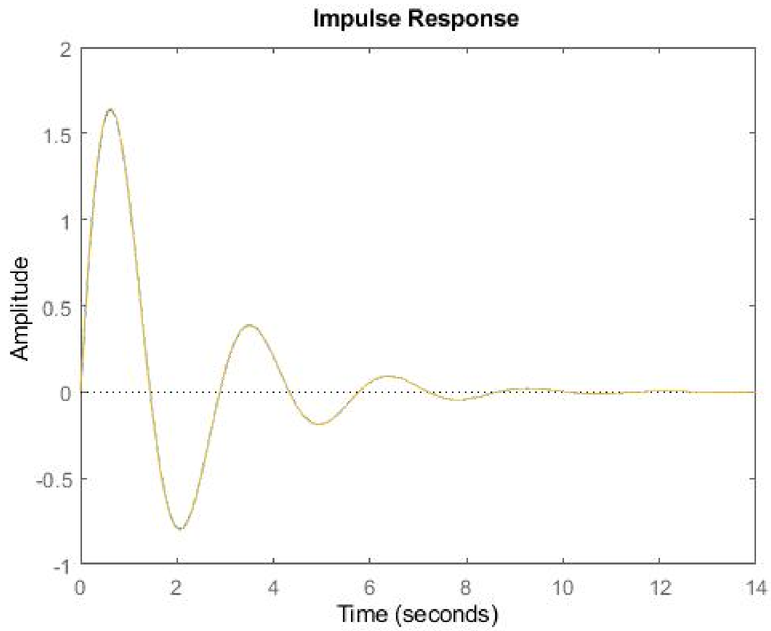


La obtención de la gráfica anterior se realizó con la siguiente serie de comandos

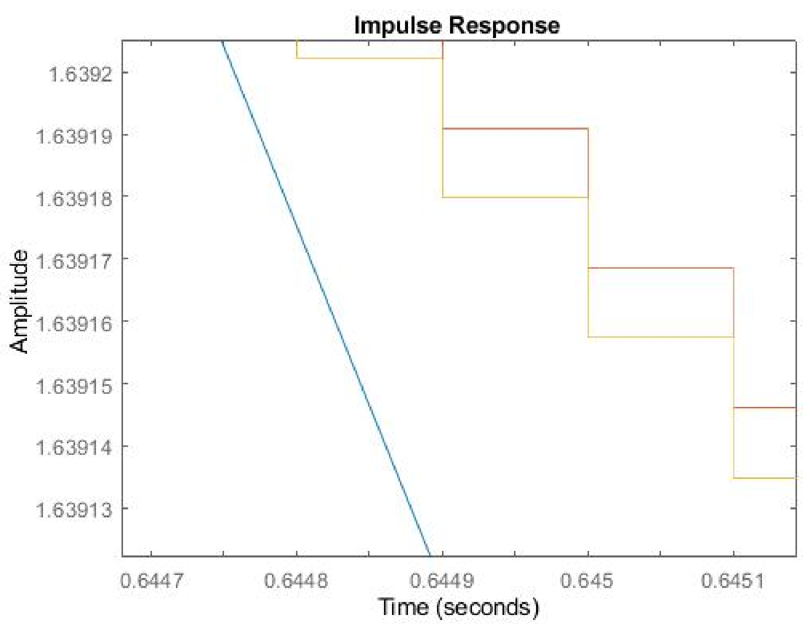
- Ts=1
- Hs=tf([5],[1 1 5])
- Hz=c2d(Hs,Ts)
- Hz2=c2d(Hs,Ts,'foh')
- impulse(Hs)
- hold on
- dimpulse(Hz,Ts)
- hold on
- dimpulse(Hz2,Ts)
- Disminuya el tiempo de muestreo hasta obtener una aproximación adecuada de la respuesta del sistema y grafique la comparación. ¿Qué aproximación resultó mejor?

Para obtener una aproximación adecuada se disminuyó el valor de T_s a 0.0001, generando la siguiente

Salida con $T_s = 0{,}0001$



Debido a la gran aproximación de ambas gráficas se requiere de un acercamiento para poder observar las diferencias entre la gráfica generada con diferenciador (amarilla) y la generada sin diferenciador (roja).



Gracias a este acercamiento podemos apreciar que la gráfica que se acerca más a la de tiempo continuo (azul) es la que utiliza un diferenciador (amarilla). Para esto utilizamos los comandos:

- Ts=0.0001
- Hs=tf([5],[1 1 5])
- Hz=c2d(Hs,Ts)
- Hz2=c2d(Hs,Ts,'foh')

- impulse(Hs)
- hold on
- dimpulse(Hz,Ts)
- hold on
- dimpulse(Hz2,Ts)

Comparación de solución de tiempo continuo y solución de tiempo discreto utilizando funciones de transferencia para diferentes valores de tiempo de muestreo

Control discreto de un sistema de tiempo continuo.

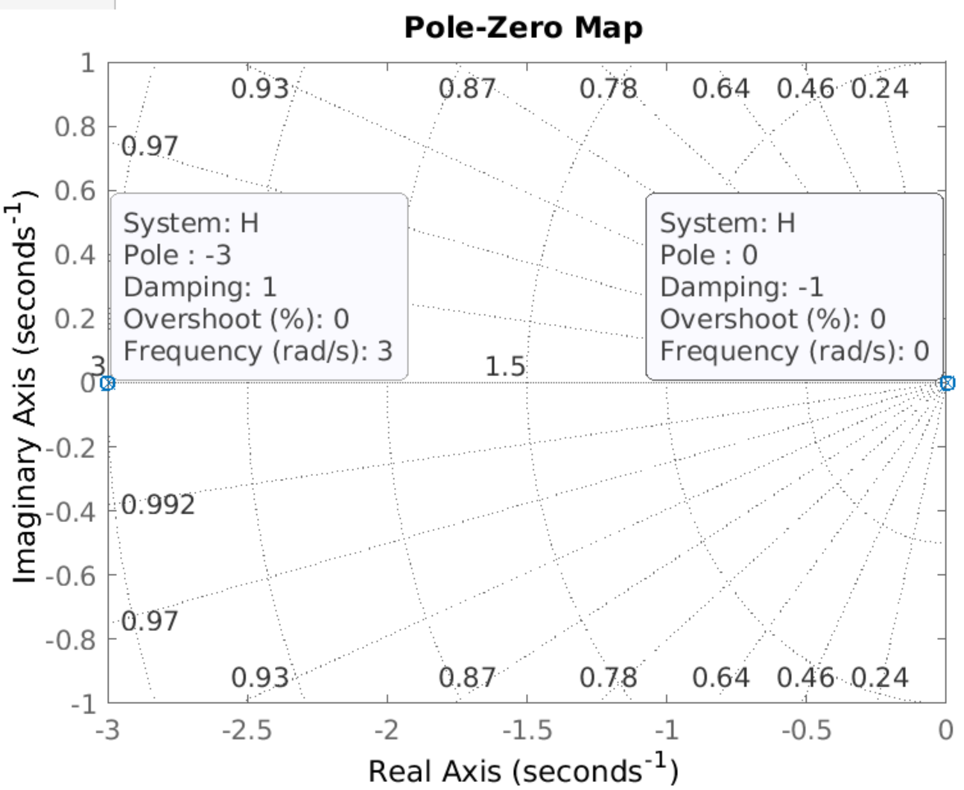
Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo representado por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

- Determine la estabilidad del sistema. Para poder determinar la estabilidad del sistema, vamos a ver con MATLAB en donde se encuentran sus Polos. Para ello vamos a escribir los siguientes comandos.

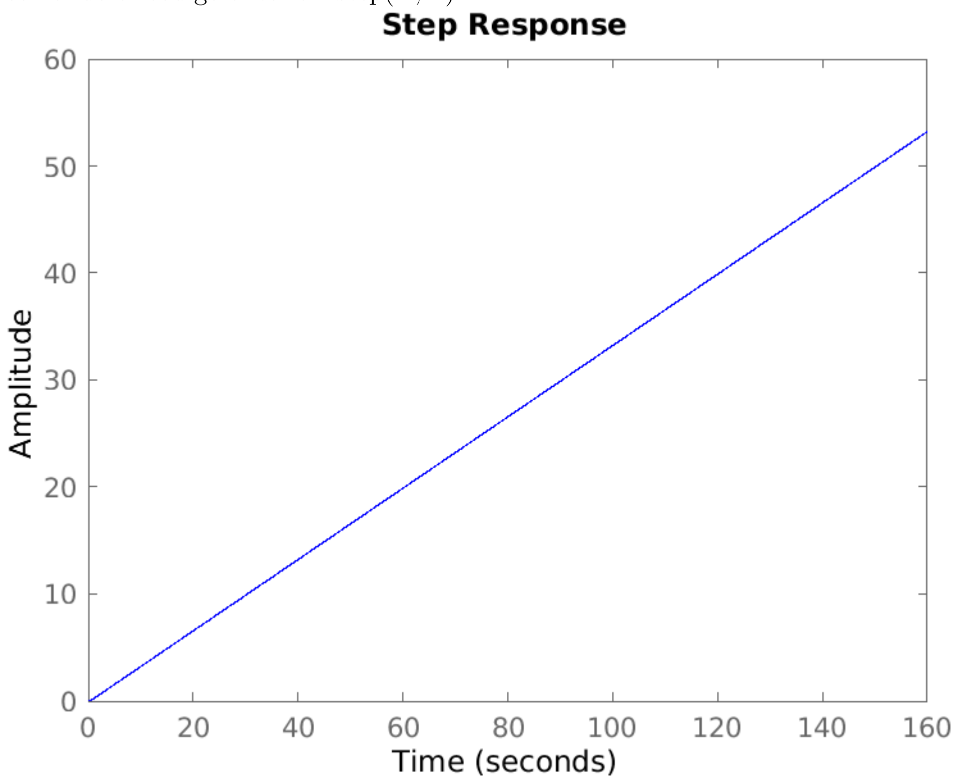
Practica3.m

```
H=tf([1],[1 3 0]);
sgrid;
pzmap(H);
grid on
```



Como se puede ver un polo está en s=-3, pero el otro polo está en s=0, por lo que no podemos decir si el sistema es estable o no. Ya que para que un sistema sea estable TODOS sus polos deben de estar en la parte izquierda del plano S. Por lo que primero veremos su respuesta al escalón para así poder determinar si el sistema es estable o no.

- Utilizando el software especializado de su preferencia, determine la respuesta al escalón del sistema y describa como es su comportamiento. Para determinar la respuesta al escalón del sistema vamos a agregar el siguiente comando al código anterior: step(H,'-')



Al analizar esta gráfica podemos ver que no tiene fin, en otras palabras, la gráfica no tiene límite, ya que solamente es creciente conforme va avanzando en el eje X positivo. Por lo que podemos concluir a la pregunta anterior que NO es estable el sistema.

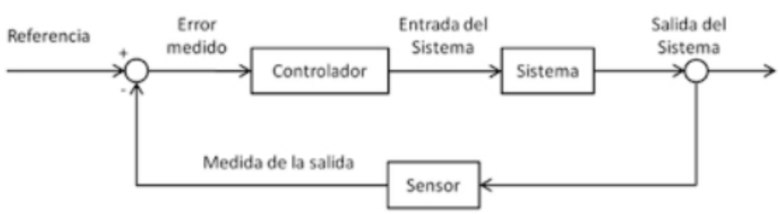


Figura 24. Control de lazo cerrado

Respuesta al escalón del sistema a controlar

- Cuando se desea cambiar el comportamiento de un sistema se debe implementar un controlador de lazo cerrado, el cual compara la se˜nal de salida del sistema con la se˜nal de referencia y con base en esta se˜nal de error calcula la entrada del sistema para que se obtenga el comportamiento deseado, de acuerdo con el diagrama de bloques mostrado en Figura 24. El modo más simple de control consiste en el control proporcional, el cual realimenta un término proporcional del error de salida, es decir,

$$u_c = K(r - y)$$

La conexión de la Figura 24 se denomina conexión en retroalimentación negativa, y es posible determinar la función de transferencia correspondiente mediante software especializado, para lo cual se deben definir previamente las funciones de transferencia del controlador, del sistema y del sensor. Considerando la función de transferencia del sistema, la del controlador como C(s) = K y la del sensor H(s) = 1, determine la función de transferencia de lazo cerrado Gc(s) correspondiente. ¿Cómo son los polos del sistema? ¿Qué puede decir de la estabilidad del mismo?

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

Donde: E(s) es el error medido, R(s) es la referencia y Y(s) es la salida.

$$H(s) = fracY(s)X(s)$$

$$Y(s) = H(s)KX(s)$$

Si E(s)=X(s):

$$Y(s) = H(s)KE(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+3)}KE(s)$$

$$Y(s) = \frac{KE(s)}{s(s+3)}$$

$$E(s) = \frac{Y(s)(s(s+3))}{k}$$

Si $E(s) = R(s) - Y(s)$

$$R(s) - Y(s) = \frac{Y(s)(s(s+3))}{k}$$

$$KR(s) - KY(s) = Y(s)(s(s+3))$$

$$KR(s) = Y(s)(s(s+3) + K)$$

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+3) + K}$$

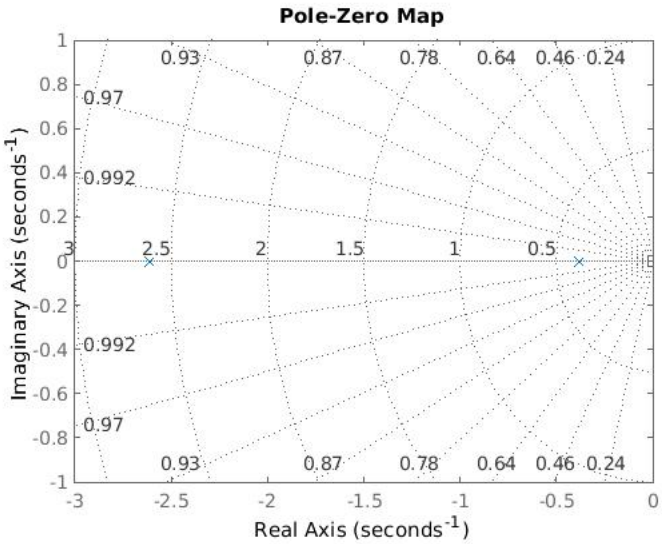
Función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s(s+3) + K)}$$

Si k=1:

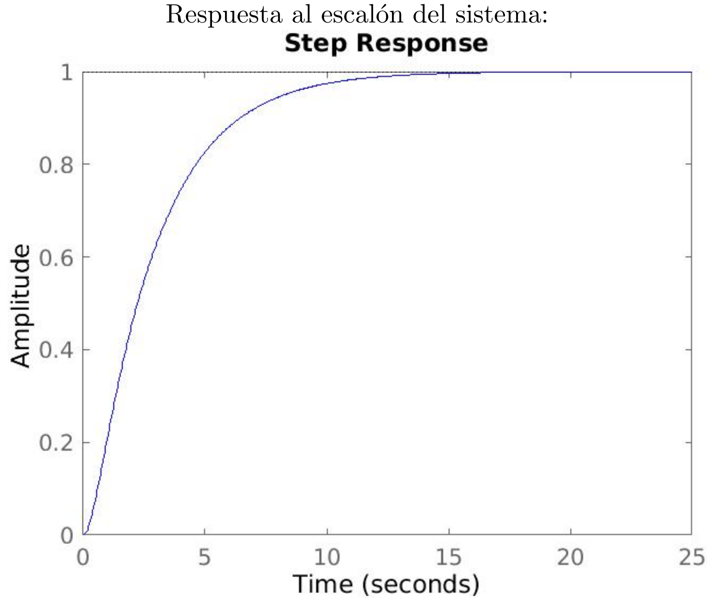
$$G(s) = \frac{1}{(s(s+3) + 1)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$



Polos: $P_1 = -2{,}618$ y $P_2 = -0{,}382$. Por lo tanto es estable el sistema.

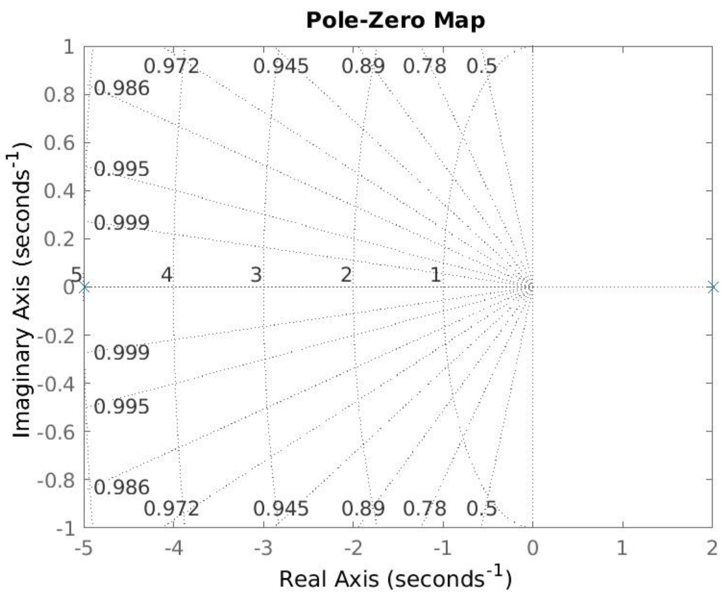
Respuesta al escalón del sistema:



Si k=-10:

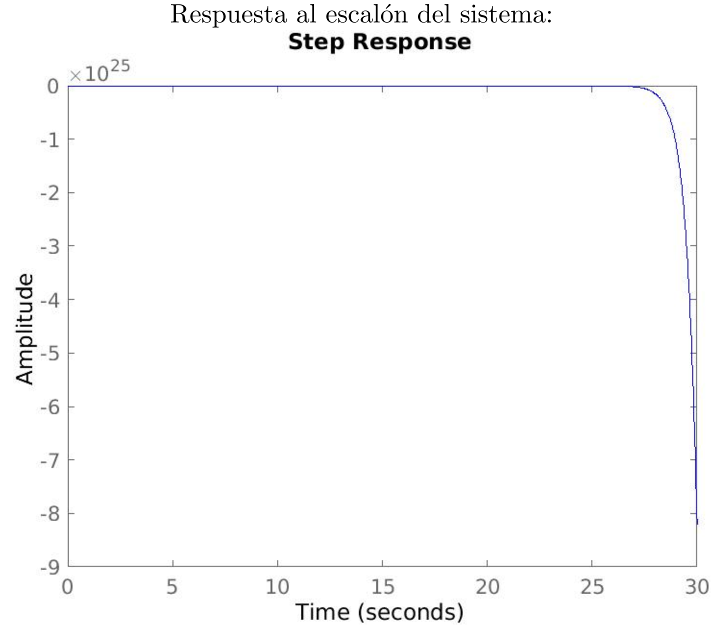
$$G(s) = \frac{-10}{(s(s+3)-10)}$$

$$G(s) = \frac{-10}{s^2+3s-10}$$



Polos: $P_1 = -5$ y $P_2 = 2$. Por lo tanto es inestable el sistema.

Respuesta al escalón del sistema:



¿Cómo son los polos del sistema? Dependiendo del valor de K los polos del sistema van a variar. Por lo que pueden volver estable o inestable al sistema.

¿Qué puede decir de la estabilidad del mismo? Lo que podemos ver con estos dos valores de K, es que, dependiendo de su valor, se modificará la entrada del sistema, volviéndose estable o inestable el sistema.

Escriba sus resultados a continuación y las gráficas obtenidas en los espacios correspondientes.

1. Preguntas de cierre

1.1. Explique brevemente la importancia de la conversión de señales de tiempo continuo a tiempo discreto

Al transformar una señal de tiempo continuo a tiempo discreto (muestrear una señal) lo que nos permite es tomar valores específicos para poder analizar dicha señal de entrada. Por otra parte, la discretización también nos sirve para transformar una señal de análoga a digital. La conversión de la señal análoga en señal digital se realiza, entre otras razones porque las señales digitales presentan grandes ventajas a la hora de ser transmitidas y/o procesadas, como por ejemplo mayor inmunidad al ruido o mayor facilidad de procesamiento.
En las aplicaciones tecnológicas el muestreo se toma en intervalos de tiempo iguales, proceso denominado "Muestreo periódico de la señal", lo que facilita procesos como el de la reconstrucción de una señal.

1.2. ¿Qué relación existe entre la transformadas de Laplace y Z?

Ambas transformadas son una herramienta de gran alcance formulada para solucionar una variedad amplia de problemas de valor inicial. La estrategia es transformar las ecuaciones diferenciales difíciles en los problemas simples del álgebra donde las soluciones pueden ser obtenidas fácilmente.
La diferencia que existe entre la transformada de Laplace y la transformada Z es que la transformada de laplace se emplea en el estudio de los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo y la transformada z se utiliza en el análisis de los sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo.

1.3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de sistemas de tiempo continuo y tiempo discreto en el contexto de funciones de transferencia?

En sistemas continuos la estabilidad se analiza en el denominador de la función de transferencia. La estabilidad va a depender de la posición de las raíces obtenidas al utilizar el método de fracciones parciales. En el caso de raíces positivas observamos lo siguiente:

$$H(s) = \frac{C_1}{s+p_1} + \frac{C_2}{s+p_2} + ... + \frac{C_N}{s+p_N} \tag{18}$$

A dicha transformada de Laplace le corresponde la siguiente antitransformada:

$$h(t) = C_1 e^{-p_1 t} + C_2 e^{-p_2 t} + ... + C_N e^{-p_N t} \tag{19}$$

Cada termino de la siguiente ecuación puede caer en uno de los siguientes tres casos:

- La raíz $s = -p_n$ es positiva, entonces el exponente es positivo y la exponencial tenderá al infinito con el tiempo.
- La raíz $s = -p_n$ es negativa, por lo que el exponente correspondiente es negativo y al exponencial tenderá a cero con el tiempo.
- La raíz $s = -p_n$ es cero con lo cual la exponencial evaluada será uno obteniendo un valor constante C_n

De la misma forma se puede analizar los casos en que las raíces de la transformada de Laplace sean complejas. En dichos casos la función de transferencia tendrá una forma similar a la siguiente:

$$H(s) = \frac{C_1}{s+p_1} + \frac{C_2^2 + C_3}{s^2 + \alpha s + \beta} + ... + \frac{C_N}{s+p_N} \tag{20}$$

En este caso el termino complejo es la segunda fracción de la ecuación. Si analizamos la antitransformada de laplace de dicho término podemos ver que puede tener una de las siguientes dos formas:

$$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} => e^{-\alpha t} seno(\omega t) \tag{21}$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} => e^{-\alpha t} cos(\omega t) \tag{22}$$

Debido a que las funciones seno y coseno oscilan entre los valores de 1 y -1 el comportamiento del término imaginario va a depender de $e^{-}\alpha t$. Con esto podemos llegar a una de las siguientes conclusiones:

- Si la parte real del par conjugado es positiva las exponenciales asociadas tenderán en el tiempo a infinito.
- Si la parte real del par conjugado es negativa las exponenciales asociadas tenderán en el tiempo a cero
- Si la parte real del par conjugado es cero las exponenciales adquieren un valor constante.

Por lo tanto, en ambos casos, podemos decir que la estabilidad de un sistema va a depender de la posición de la parte real de los polos contenidos en la función de transferencia. Si la parte real es negativa es estable, si es negativa es inestable y si es cero la respuesta será críticamente estable por lo que se necesitará de otro análisis para determinar su estabilidad.
En cuanto a un señal discreta esta será acotada si y sólo si cualquier entrada acotada produce una salida acotada, es decir si

$$|x[n]| < \infty \forall n \tag{23}$$

entonces

$$|y[n]| < \infty \forall n \tag{24}$$

Si se tiene un sistema lineal invariante en el tiempo su respuesta de estado cero está dada por:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]h[n-m] \tag{25}$$

Si realizamos el cambio de variable k=n-m cuando $m = -\infty$ y cuando m=n en k=0, entonces

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[k]x[n-m] \tag{26}$$

En caso de que la señal de entrada sea acotada tenemos lo siguiente

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[k]x[n-m]` \sum_{m=-\infty}^{n} |h[k]x[n-m]|`M \sum_{m=-\infty}^{n} |h[k]| \tag{27}$$

En caso de que la suma de la respuesta al impulso converja inferimos que

$$|y[n]| < \infty \tag{28}$$

que representa la condición necesaria para la estabilidad

Referencias

[1] Marco F. Duarte. 8.5 Casuality and Stability of Discrete-Time Linear Time-Invariant Systems. https://cnx.org/contents/KilsjSQd@10.18:9kZ-CT3d@1/Causality-and-Stability-of-Discrete-Time-Linear-Time-Invariant-Systems. Online; accessed 1 Noviembre 2020.

[2] Gloria Mata Hernández, Víctor M Sánchez Esquivel, and Juan M Gómez González. Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado, 2017.

[3] Mitra K. Stability Condition of an LTI Discrete-Time System. https://web.njit.edu/~akansu/Ch2(3)Handouts_3e.pdf, 2005. Online; accessed 1 Noviembre 2020.