Anexo (teoría)

Definición 1 (Experimentos aleatorios). Un experimento con diferentes resultados, incluso si es repetido en la misma manera, se llama un experimento aleatorio.

Definición 2 (Espacio muestra). El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio, se llama el espacio muestra del experimento.
Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
S &= \mathbb{R}+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} && (51)\\
S &= \{x \in N | 10 < x < 20\} && (52)\\
S &= \{low, medium, light\} && (53)\\
S &= \{yes. not\} && (54)
\end{aligned}
$$

Definición 3 (Espacio muestra discreto). Un espacio muestra es discreto si y sólo si, es contable.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
S &= \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}\\
S &= \{\text{ low, medium,light }\}\\
S &= \{yes, \text{ not }\}\\
S &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : 2y + 1 = x\}\\
S &= \{0, 1\}^{\star}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Definición 4 (Espacio muestra continuo). Un espacio muestra S es continuo si y sólo si, existe una biyección $f : S \mapsto \mathbb{R}$.

Ejemplos:

$$
\begin{aligned}
S &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}\\
S &= \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{+}\\
S &= \left\{x | x = |S' \ |, S' \subseteq \mathbb{N}\right\}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Definición 5 (Evento). Un evento S, es decir, $E \subseteq S$.

- La unión de dos eventos E_1, E_2 se define $E_1 \cup E_2 = \{x | x \in E_1 or x \in E_2\}$.
- La intersección de dos eventos E_1, E_2, se define $E_1 \cap E_2 = \{x | x \in E_1 \text{and } x \in\}$.
- El complemento de un evento E en el espacio muestral S se define $E = \{x \in S | x \in E\}$.

Ejemplos: Considere el espacio muestra $S = yy, yn, ny, nn$. Los siguientes son eventos S.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{yy, yn, ny\}\\
E_2 &= \{nn\}\\
E_3 &= \emptyset\\
E_4 &= S\\
E_5 &= \{yn, ny, nn\}
\end{aligned}
\tag{57}
$$

$$E_1 \cup E_2 = S \qquad E_1 \cap E_5 = \{yn, ny\} E_1^c \quad E_1 \cup E_2 = S, \quad E_1 \cap E_5 = \{y \tag{58}$$

Mas ejemplos. Considere $S = \mathbb{R}^{+}, E_1 = \{x \mid 1 \leq x < 10\} \text{ y } E_2 = \{x \mid 3 < x < 118\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
E_1 \cup E_2 &= \{x \mid 1 \leq x < 118\}\\
E_1 \cap E_2 &= \{x \mid 3 < x < 10\}\\
E_1^c &= \{x \mid x \geq 10\}\\
E_1^c \cap E_2 &= \{x \mid 10 \leq x < 118\}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Algunas propiedades de los eventos.

Dos eventos A y B se dicen mutuamente exclusivos si y sólo si, su intersección de vacía, es decir, $A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} (E^c)^c &= E \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} (E^c)^c &= E \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \tag{61}$$

Definición 6 (Probabilidad). En un espacio muestra discreto, la probabilidad de un evento E, escrito P(E), es igual a la suma de las probabilidades de sus resultados en E.

Ejemplo.

Un experimento aleatorio puede resultar en a, b, c, d con probabilidades $0.1, 0.3, 0.5$ y 0.1, respectivamente. Considere el evento A como $\{a, b\}, B = \{b, c, d\}$ y $C = d$. Entonces,

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4 \\ &P(B) = 0.3 + 0.5 + 0.1 = 0.9 \\ &P(C) = 0.1 \end{aligned} \tag{62}$$

También, $P(A^c) = 0.6, P(B^c) = 0.1, P(C^c) = 0.9$. Más aún, debido a $A \cap B = \{b\}$, entonces $P(A \cap B) = 0.3$. Debido a $A \cup B = \{a, b, c, d\}, P(A \cup B) = 0.1 + 0.3 + 0.5 + 0.1 = 1$. Y debido a $A \cap C = \emptyset$, entonces $P(A \cap C) = 0$.

Definición 7 (Axiomas de la probabilidad). Considere los eventos E, E_1 y E del espacio muestra S de un experimento aleatorio.

- $P(S) = 1$
- $0 \leq P(E) \leq 1$
- Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Algunas propiedades.

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(E^c) = 1 - P(E) \quad \text{Si } E_1 \subseteq E_2, \text{ entonces } P(E_1) \leq P(E_2) \tag{63}$$

Ejercicios

Problema 1

Suponga que las placas de los vehículos están compuestas inicialmente por tres dígitos (0−9), seguidas de tres letras (A−Z). Calcule la probabilidad de una determinada placa.

Problema 2

Un mensaje puede seguir diferentes rutas a través de una red de servidores. En el primer paso, el mensaje puede llegar a cinco servidores, a partir de cada uno de estos servidores, el mensaje puede llegar a cinco servidores m´as, desde los cuales puede acceder a otros cuatro servidores.

- Calcule la cantidad de rutas.
- Si todas las rutas son igualmente probables, calcule la probabilidad de que el mensaje llegue a alguno de los cuatro servidores del tercer bloque.

Demuestre lo siguiente

$$P(\emptyset) = 0 \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
S^c &= \emptyset && \text{Definimos el conjunto} \quad (65)\\
P(S \cup S^c) &= P(S) + P(S^c) - P(S \cap S^c) && \text{Usamos la prpiedad} \quad (66)\\
P(S \cup S^c) &= 1 + P(S^c) - 0 && \text{Sustituimos} \quad (67)\\
P(S \cup S^c) &= 1 && \text{Decladamos una propieda} \quad (68)\\
1 - 1 &= P(S^c) && \text{Sustituimos lo anterios} \quad (69)\\
0 &= P(S^c) && (70)\\
P(S^c) &= 0 && (71)\\
\therefore P(\emptyset) &= 0 && (72)
\end{aligned}$$

$$P(E^c) = 1 - P(E) \tag{73}$$

$$\text{Para cualquier evento } A, P(A) + P\left(A'\right) = 1, \text{ a partir de la cual } P(A) = 1 - P\left(A'\right). \tag{74}$$

Comprobación En el axioma 3 , sea $k = 2, A_1 = A$ y $A_2 = A'$. Como por definición de $A', A \cup A' = \mathcal{S}$ en tanto A y A' sean eventos disjuntos, $1 = P(\mathcal{S}) = P\left(A \cup A'\right) = P(A) + P\left(A'\right)$

$$\text{Si } E_1 \subseteq E_2 \text{ entonces } P(E_1) \leq P(E_2) \tag{75}$$

- Si tienen los mismos elementos, entonces la probabilidad de obtener un evento E_1, E_2, es la misma, pero y si E_2 Tiene un elemento más que E_2 su probabilidad aumenta, esto se puede demostrar por ordinales de conjuntos.

$$\frac{\#E_1}{Total} \leq \frac{\#E_2}{Total} \tag{76}$$

E_1, E_2 es el número de elementos a favor.

Mas ejemplos

Problema 1

Una mezcla química es preparada correctamente por el 25% de los técnicos de un laboratorio, 70% de los técnicos la preparan con un error mínimo, y 5% con un error mayor.

- Si un técnico es elegido aleatoriamente, ¿Cuál es la probabilidad de que prepare la mezcla sin error alguno?

$$P(E) = 25\% \tag{77}$$

- Calcule la probabilidad de que el técnico la prepare con cualquier tipo de error.

$$P(E) = 70\% + 5\% = 75\% \tag{78}$$

Problema 2

Considere las emisiones de tres fabricas clasificadas por su calidad. De la primera fábrica 22 muestras de emisiones cumplen con el mínimo, y 8 no lo hacen; 25 cumplen con el mínimo y 5 no, en el caso de la segunda fábrica; en cuanto a la tercera, 30 cumplen y 10 no. Considere A denota el evento de las muestras de emisiones de la primera fábrica, y B como el evento de una muestra cumple con el mínimo. Calcule las siguientes probabilidades.

$$P(A) \quad P(B) \quad P\left(A^c\right) \quad P(A \cap B) \quad P(A \cup B) \quad P\left(A^c \cup B\right) \tag{79}$$

Solución:

$$P(A) = \frac{22+8}{100} = 0.3 \tag{80}$$

$$P(B) = \frac{22+25+30}{100} \tag{81}$$

$$P\left(A^c\right) = \frac{70}{100} \tag{82}$$

$$P(A \cap B) = \frac{22}{100} \tag{83}$$

$$P(A \cup B) = \frac{22+25+30}{100} \tag{84}$$

$$P\left(A^c \cup B\right) = \frac{70+8}{100} \tag{85}$$

Definición 8 (regla de la adición).

$$P(A \cup B) = P(A) + (B) - P(A)ls \tag{86}$$

Definición (Regla de la adición).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{87}$$

Ejemplo

Considere la tabla abajo con el historial de producción de 949 semiconductores. Suponga que un semiconductor es elegido aleatoriamente. Considere M denota el evento de que el semiconductor contiene niveles altos de contaminación. C es el evento cuando el semiconductor se encuentra en el centro de una herramienta de pulverización.

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) = \frac{1}{940}(358 + 626 - 112) = \frac{872}{940} \tag{88}$$

Ejemplo: En el mismo contexto del ejemplo anterior, considere E_1 el evento de que un semiconductor contiene 4 o más partículas contaminantes, $E2$ es el evento de que un semiconductor se encuentra en la orilla de la herramienta.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \tag{89}$$

Ejercicios

Si P(A) = 0.3, P(B) = 0.2, y P(A ∩ B) = 0.1, determine las siguientes probabilidades:

$$\begin{array}{lll} P\left(A^c\right) & P(A \cup B) & P\left(A^c \cap B\right) \\ P\left(A \cap B^c\right) & P\left((A \cup B)^c\right) & P\left(A^c \cup B\right) \end{array} \tag{90}$$

Definición 9 (Probabilidad condicional) . La probabilidad condicional de un evento B dado otro evento A, escrita $P(B|A)$, se define

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{91}$$

pág 8

- Calcule la probabilidad de que el inspector detecte un objeto defectuso.
- Si un objeto es clasificado libre de defectos, determine la probabilidad de que efectivamente lo esté.

Definición 13 (Clasificación Bayesiana). Considere el espacio muestra compuesto por los siguientes vectores:

El modelo de clasificación Bayesiana se define como sigue:

$$\hat{y} = \max\left\{P\left(y_i\right)P\left(x_1 \mid y_i\right)P\left(x_2 \mid y_i\right)\ldots P\left(x_n \mid y_i\right) \mid i = 1, \ldots, m\right\} \tag{92}$$

Ejemplo

Considere la siguiente base de datos

Género	Calificación
Terror	1
Acción	3
Drama	2
Drama	2
Acción	2
Terror	3
Teror	3
Drama	1
Acción	2

- Calcule la probabilidad de que el inspector detecte un objeto defecuso

La calificación de una película de acción se puede predecir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &P(1)P(\text{ Acción } \mid 1) = 2/9 * 0 = 0 \\ &P(2)P(\text{ Acción } \mid 2) = 4/9 * 1/2 = 2/9 \\ &P(3)P(\text{ Acción } \mid 3) = 1/3 * 1/3 = 1/9 \end{aligned} \tag{93}$$

por lo tanto, la calificación de una película de acción será 2.

pág 9

Ejemplo. Considere la siguiente base de datos.

#	Usuario	Género	Calificación
1	F	Terror	1
2	M	Acción	3
3	F	Drama	2
4	M	Drama	2
5	F	Acción	2
6	M	Terror	3
7	F	Terror	3
8	M	Drama	1
9	F	Acción	2

Calcule la calificación que le pondría un usuario M a una película de Drama.

$$\begin{aligned} & P(1) P(\mathrm{M} \mid 1) P(\text { Drama } \mid 1)=2 / 9 * 1 / 2 * 1 / 2=1 / 18 \\ & P(2) P(\mathrm{M} \mid 2) P(\text { Drama } \mid 2)=4 / 9 * 1 / 4 * 1 / 2=1 / 18 \\ & P(3) P(\mathrm{M} \mid 3) P(\text { Drama } \mid 3)=1 / 3 * 2 / 3 * 0=0 \end{aligned} \tag{94}$$

Ejercicios

Considere la siguiente base de datos.

#	Productora	Usuario	Género	Calificación
1	Universal	F	Terror	1
2	Universal	M	Acción	3
3	Warner	F	Drama	2
4	Disney	M	Drama	2
5	Warner	F	Acción	2
6	Disney	M	Terror	3
7	Universal	F	Terror	3
8	Disney	M	Drama	1
9	Warney	F	Acción	2
10	Warner	M	Acción	1
11	Disney	F	Drama	2
12	Universal	F	Terror	3
13	Warner	F	Terror	3
14	Disney	M	Acción	2
15	Universal	M	Drama	1

Calcule la calificación que otorgará un usuario F a una película de Acción producida Warner.

$$\begin{aligned} &P(1) \cdot P(F|1) \cdot P(A|1) \cdot P(W|1) \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{960} = 0.0041\overline{6} \end{aligned} \tag{95}$$

$$\begin{aligned} &P(2) \cdot P(F|2) \cdot P(A|2) \cdot P(W|2) \\ &= \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{216}{3240} = 0.0666\overline{6} \end{aligned} \tag{96}$$

$$\begin{aligned} &P(3) \cdot P(F|3) \cdot P(A|3) \cdot P(W|3) \\ &= \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{1,875} = 0.0026\overline{6} \end{aligned} \tag{97}$$

pag 10

Ejercicio

- Considere la siguiente base de datos.

#	Director	Productora	Usuario	Género	Calificación
1	Hnos. Coen	Universal	F	Terror	1
2	Del tor	Universal	M	Acción	3
3	Bañuel	Warner	F	Drama	2
4	Bañuel	Disney	M	Drama	2
5	Hnos. Coen	Warner	F	Acción	2
6	Del toro	Disney	M	Terror	3
7	Del toro	Universal	F	Terror	3
8	Hnos. Coen	Disney	M	Drama	1
9	Bañuel	Warner	F	Acción	2
10	Del toro	Warner	M	Acción	1
11	Bañuel	Disney	F	Drama	2
12	Hnos. Coen	Universal	F	Terror	3
13	Hnos. Coen	Warner	F	Terror	3
14	Del Toro	Disney	M	Acción	2
15	Bañuel	Universal	M	Drama	1
16	Bañuel	Warner	M	Acción	1
17	Del Toro	Warner	F	Acción	2
18	Bañuel	Disney	M	Drama	3
19	Hnos. Coen	Universal	M	Terror	1
20	Hnos. Coen	Warner	F	Terror	1
21	Del Toro	Disney	F	Acción	2
22	Bañuel	Uiversal	M	Drama	3

Calcule la calificación que otorgará un usuario M a una película de Terror, producida y dirigida por Bañuel.

- Implemente un algoritmo para el modelo de clasificación Bayesiana.

$$\begin{aligned} & P(1) \cdot P(M|1) \cdot P(Terror|1) \cdot P(Universal|1) \cdot P(Bañuel|1) \\ & = \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{45}{3773} = 0.0119268 \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} & P(2) \cdot P(M|2) \cdot P(Terror|2) \cdot P(Universal|2) \cdot P(Bañuel|2) \\ & = \frac{8}{22} \cdot \frac{2}{7} \cdot 0 \cdots = 0 \end{aligned} \tag{99}$$

$$\begin{aligned} & P(3) \cdot P(M|3) \cdot P(Terror|3) \cdot P(Universal|3) \cdot P(Bañuel|3) \\ & = \frac{7}{22} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{896}{52,822} = 0.0169626 \end{aligned} \tag{100}$$