

## CZYNNE TŁUMIENIE NIELINIOWYCH DRGAŃ AEROELASTYCZNYCH METODAMI STEROWANIA ODPORNEGO

FRANCISZEK DUL

*Politechnika Warszawska, Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa*  
*e-mail: fdul@meil.pw.edu.pl*

W pracy przedstawiono analizę możliwości aktywnego tłumienia nieliniowych drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką z luzem oraz z histerezą w układzie sterowania przy użyciu metody sterowania odporne  $H_\infty$  oraz metody LQG. Wykazano za pomocą analizy symulacyjnej, że drgania nieliniowe lotki, mające charakter cykli granicznych, mogą być efektywnie tłumione za pomocą obu tych metod, jednakże w przypadku nieliniowości typu histerezy są one mniej skuteczne, co objawia się niemożnością całkowitego wytłumienia drgań. Zbadano także wpływ niepełnych pomiarów stanu układu na efektywność tłumienia drgań, wykazując, że skuteczność obu metod zależy w zasadniczy sposób od liczby mierzonych współrzędnych stanu oraz rodzaju pomiarów (przemieszczeń lub prędkości). Stwierdzono, że metoda  $H_\infty$  tłumia drgania bardzo skutecznie w przypadku pełnych pomiarów, jednak metoda LQG jest skuteczniejsza, gdy pomiary obejmują pojedyncze składowe wektora stanu. Pokazano także, że metoda  $H_\infty$  umożliwia oszacowanie wpływu zmian wartości parametrów modelu na jej odporność, co pozwala na prognozowanie skuteczności aktywnego tłumienia drgań przy zmieniających się wartościach parametrów układu w trakcie eksploatacji samolotu.

### 1. Wstęp

Drgania aeroelastyczne konstrukcji lotniczych są bardzo niebezpiecznymi zjawiskami, gdyż często prowadzą do katastrofy statku powietrznego [1]. Dotyczy to zwłaszcza klasycznego flatteru giętno-skrętnego skrzydeł i lotek, który w przeszłości był przyczyną licznych katastrof [2]. Flutter klasyczny powierzchni nośnych i sterów cechują sprzężenie aerodynamiczne postaci drgań i gwałtowny przebieg cechujący się rosnącą wykładniczo amplitudą drgań konstrukcji, co prowadzi zazwyczaj do zniszczenia skrzydła lub steru. Flutter klasyczny jest jednak dość dobrze poznany i dlatego nie stanowi obecnie takiego zagrożenia, jakim był w przeszłości, o czym świadczy niewielka liczba katastrof tego rodzaju, które wydarzyły się w ciągu ostatnich dwudziestu lat. Wynika to stąd, że istniejące modele liniowe pozwalają na dość wiarygodne określanie jego prędkości krytycznej, a co za tym idzie, tak określone prędkości krytyczne muszą, zgodnie z przepisami CS-25 i CS-23 [3,4], z marginesami co najmniej 15% (wielkie samoloty) lub 20% (małe samoloty) leżeć poza zakresem prędkości dopuszczalnych samolotu.

Zupełnie inaczej jest z innymi rodzajami drgań aeroelastycznych, zwłaszcza drganiami powierzchni sterowych, najczęściej lotek [5]. Drgania takie, związane zwykle z luzami lub histerezami w układzie sterowania, mają najczęściej charakter nieliniowy i pojawiają się przy prędkościach znacznie niższych od prędkości krytycznych flatterów i, co gorsza, niższych niż dopuszczalne prędkości eksploatacyjne samolotu. Przykładem takiej sytuacji była katastrofa samolotu F-117 w roku 1997 spowodowana drganiami lotek przy prędkości  $\sim 750$  km/h, znacznie niższej od prędkości krytycznej flatteru równej  $\sim 1100$  km/h. Nie należy się więc spodziewać, że prędkości krytyczne takich drgań będą wyższe niż dopuszczalne prędkości eksploatacyjne.

Nieliniowe drgania sterów pojawiały się od czasu do czasu: w latach 90. XX w. odnotowano np. drgania steru wysokości w samolotach Airbus, co spowodowało ożywioną dyskusję pomiędzy producentem a FAA [6]. Również wspomniana wcześniej katastrofa F-117 spowodowana była nieliniowymi drganiami lotki. W pracy [5] Dowell stwierdził, iż „przypadki wystąpienia flutteru w postaci drgań LCO spowodowane luzami w sterach nie były opisane w literaturze ogólnodostępnej, ale mówiono o nich w środowisku inżynierów lotniczych, prawdopodobnie zostały też opisane w niejawnych raportach wewnętrznych firm lotniczych oraz instytucji rządowych” (tłum. F.D.). Zaistniała więc potrzeba wyjaśnienia mechanizmów fizycznych takich drgań, co skutkowało powstaniem szeregu prac poświęconych tym zagadnieniom [7]-[15]. W ostatnim okresie znaczną uwagę poświęcono także zagadnieniom niepewności w nieliniowych układach aeroelastycznych [16]-[18].

Drgania nieliniowe mają zazwyczaj postać cykli granicznych LCO (ang. *Limit Cycle Oscillations*), charakteryzujących się ograniczoną amplitudą i dlatego nie muszą powodować katastrofalnych skutków. Panuje nawet pogląd [5], że nieliniowe drgania LCO wręcz zapobiegają wystąpieniu liniowych drgań flutterowych o wykładniczo rosnącej amplitudzie. Tym niemniej drgania takie są niepożądane, gdyż przyczyniają się do zmęczenia konstrukcji, rozregulowywania układów sterowania, zwiększania w nich luzów i dlatego należy im zapobiegać. Można to osiągnąć metodami biernymi (konstrukcyjnymi i eksploatacyjnymi) lub czynnymi, poprzez aktywne tłumienie drgań przy użyciu systemu sterowania automatycznego uzupełnionego układem pomiaru drgań konstrukcji. Należy zaznaczyć, że czynne tłumienie drgań nie musi doprowadzić do całkowitego ich wytłumienia, chodzi przede wszystkim o niedopuszczenie do nieograniczonego wzrostu amplitudy takich drgań (jak to ma miejsce w przypadku flutteru) oraz o znaczne ograniczenie amplitudy cyklu granicznego w przypadku drgań nieliniowych.

Aktywne tłumienie drgań konstrukcji lotniczych ma długą, ponad czterdziestoletnią, historię [5]. Wprawdzie już w roku 1973 z powodzeniem zastosowano je do tłumienia klasycznego flutteru giętno-skrętnego skrzydeł w samolocie B-52 [19], ale w rezultacie uzyskano tylko niewielkie zwiększenie prędkości krytycznej flutteru, o ok. 18 km/h, tj. o 1.6% (mniej niż dwa procenty!). Przez następnych trzydzieści lat nie podejmowano praktycznych prób aktywnego tłumienia flutteru. Idea aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych odżyła dopiero w ostatniej dekadzie w kontekście tłumienia drgań nieliniowych. Odnotowano znaczący postęp w tej dziedzinie, zarówno teoretyczny jak i eksperymentalny [20]-[24].

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza możliwości aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką przy użyciu odpornej metody sterowania  $H_\infty$  oraz klasycznej metody LQG. Skrzydło opływane nieściśliwym strumieniem powietrza modelowane jest za pomocą klasycznego modelu półsztywnego [1] z uwzględnieniem luzu i histerezy w układzie sterowania lotką. Badany będzie wpływ niekompletnych pomiarów wektora stanu układu na efektywność sterowania, a także wpływ zmiany wybranego parametru modelu na odporność metody  $H_\infty$ .

W pierwszej części pracy zostaną omówione: nieliniowy model skrzydła z lotką wraz z przyjętym modelem aerodynamiki i model nieliniowy drgań w formie używanej w teorii sterowania oraz jego wersja zlinearyzowana. Następnie omówione zostanie aktywne tłumienie drgań aeroelastycznych oraz wykorzystane do tego celu metody sterowania LQG oraz  $H_\infty$  [25]. W dalszej części pracy zdefiniowane zostaną zagadnienia wpływu niepełnych pomiarów wektora stanu na skuteczność i odporność sterowania oraz reprezentacji niewiedzy o modelu w oparciu o jego reprezentację sfaktoryzowaną w kontekście powolnych zmian parametrów w trakcie eksploatacji samolotu.

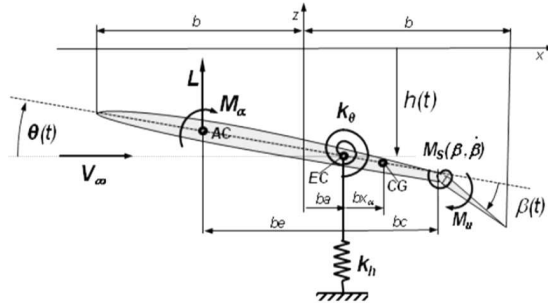
W drugiej części pracy przedstawione zostaną wyniki badań symulacyjnych obejmujące analizę skuteczności czynnego tłumienia drgań skrzydła z lotką z dwoma rodzajami nieliniowości: luzem i histerezą za pomocą sterowania  $H_\infty$ , porównanie z metodą LQG, zbadanie wpływu niepełnych pomiarów wektora stanu na odporność sterowania oraz zbadanie wpływu zmiany wybranego parametru modelu na odporność metody  $H_\infty$ .

## 2. Model aeroelastyczny skrzydła z lotką nieliniową

Do analizy czynnego tłumienia drgań aeroelastycznych lotek przyjęto klasyczny półsztywny model skrzydła z lotką o nieliniowych charakterystykach sprężystych (rys. 1) [1], [2] i z aerodynamiką nieściśliwą. Założono, że skrzydło i lotka mogą wykonywać małe drgania, przy których kąty natarcia skrzydła i lotki leżą w zakresie liniowym siły nośnej, zatem obciążenia aerodynamiczne mogą być opisane modelem liniowym quasi-stacjonarnym [1], [2]. Model aeroelastyczny drgań lotki ma postać:

$$(M_S - M_A(V_\infty))\ddot{q} + (D_S - D_A(V_\infty))\dot{q} + (K_S - K_A(V_\infty))q + f_S(q, \dot{q}) = f_u(u) \quad (2.1)$$

gdzie wektor  $q(t) = [h(t), \alpha(t), \beta(t)]^T$  opisuje ugięcie i skręcenie skrzydła oraz wychylenie lotki;  $M_S$ ,  $D_S$ ,  $K_S$  są macierzami, odpowiednio, bezwładności, tłumienia i sztywności skrzydła;  $M_A(V_\infty)$ ,  $D_A(V_\infty)$ ,  $K_A(V_\infty)$  są macierzami bezwładności, tłumienia i sztywności aerodynamicznej zależnymi od prędkości opływu  $V_\infty$ ;  $f_S(q, \dot{q}) = [0, 0, M_H(\beta, \dot{\beta})]^T$  jest wektorem nieliniowego momentu sprężystego w lotce, w którym  $M_H(\beta, \dot{\beta})$  jest nieliniowym momentem sprężystości lotki o charakterze histerezy;  $f_u(u) = [0, 0, M_u(u)]^T$  jest wektorem wymuszeń, w którym  $M_u(u)$  jest momentem sterującym przyłożonym do lotki zależnym od sterowania  $u$  wypracowanego przez układ sterowania automatycznego.



Rys. 1. Model aeroelastyczny półsztywny skrzydła z lotką nieliniową

W niniejszej pracy analizowane będą oddzielnie dwa rodzaje nieliniowości w układzie sterowania lotką: luz oraz histereza. Luz lotki  $\delta$  (rys. 2a) powoduje, że zadane sterowanie  $u$  wywołuje nieliniowy moment sterujący  $M_u(u; \delta)$  zdefiniowany jako:

$$M_u(u; \delta) = \begin{cases} 0 & |u| \leq \delta \\ c_{mu}(u - \text{sgn}(u)\delta) & |u| > \delta \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie  $c_{mu}$  jest współczynnikiem momentu sterowania lotką.

Drugim rodzajem nieliniowości występującym w układzie sterowania lotką jest histereza (rys. 2b), która może być opisana modelem:

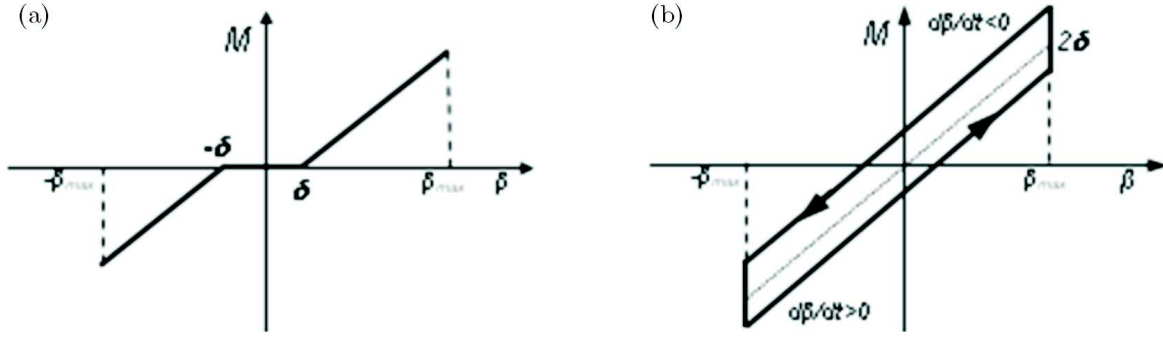
$$M_H(\beta, \dot{\beta}) = \max(-M_{max}, \min(k(\beta - \text{sgn}(\dot{\beta})\delta), M_{max})) \quad (2.3)$$

gdzie  $M_{max}$  jest wartością graniczną momentu sprężystego lotki, a  $\delta$  – parametrem określającym „grubość” histerezy. Jest to bardzo silna nieliniowość, jej zasadniczą cechą jest ograniczona możliwość linearyzacji.

Model aeroelastyczny skrzydła z lotką (2.1)-(2.3) może być zapisany w postaci standardowej jako układ równań różniczkowych rzędu pierwszego:

$$\dot{x} = f(x, u) = [\dot{q}, -M^{-1}(D\dot{q} + Kq + f_S(\beta, \dot{\beta}) - f_u(u))]^T \quad (2.4)$$

gdzie  $x(t) = [q(t), \dot{q}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$  jest wektorem stanu modelu standardowego o wymiarze  $n = 6$ ;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  jest wektorem sterowania o wymiarze  $m = 1$ ; zaś  $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest nieliniowym operatorem dynamiki obiektu.



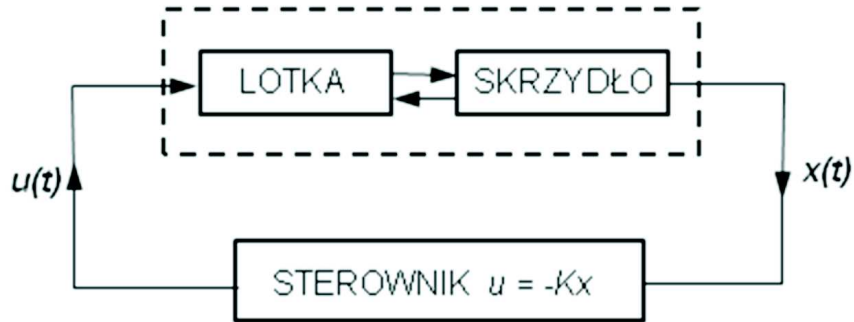
Rys. 2. Nieliniowości lotki: luz statyczny (a) i histereza (b)

### 3. Aktywne tłumienie drgań aeroelastycznych jako zagadnienie sterowania

Koncepcja aktywnego tłumienia drgań polega na użyciu systemu sterowania automatycznego w pętli sprzężenia zwrotnego ze sterownikiem  $K$  (rys. 3), którego zadaniem jest maksymalne wytłumienie drgań aeroelastycznych poprzez asymptotyczne sprowadzenie stanu układu w okolice zera,  $x(t) \rightarrow 0$ . W rozważanym zadaniu tłumienia nieliniowych drgań aeroelastycznych lotek, w którym chodzi przede wszystkim o niedopuszczenie do nieograniczonego wzrostu amplitudy takich drgań oraz o możliwie małą amplitudę cyklu granicznego, postuluje się warunek słabszy, „techniczny”, zakładający jedynie maksymalne ograniczenie amplitudy drgań:

$$\forall t > t_C : \|x(t)\| \leq \Theta \quad (3.1)$$

gdzie  $\Theta$  jest możliwie najmniejszą, technicznie akceptowalną wartością amplitud drgań.



Rys. 3. Model tłumienia drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką

Model dynamiczny rozpatrywanego układu aeroelastycznego (2.4), po uzupełnieniu modelami obserwacji i sterowania, może być przedstawiony w ogólnej postaci nieliniowej używanej w teorii sterowania [25]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u; \Delta) + w_x \\ y &= c(x; \Delta) + w_y \\ u &= k(y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq n$ , jest wektorem obserwacji,  $c(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  jest nieliniowym operatorem obserwacji,  $k(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest nieliniowym operatorem sprzężenia zwrotnego (sterownikiem),  $w_x(t) \in \mathbb{R}^n$  i  $w_y(t) \in \mathbb{R}^p$  są zaburzeniami zewnętrznymi dynamiki i pomiarów, zaś wektor  $\Delta$  opisuje zaburzenia wewnętrzne („niewiedzę”) dotyczące nieznanymi własności modelu fizycznego.

Metody sterowania optymalnego zdefiniowane są dla układów liniowych, mogą one być jednak rozszerzone na szeroką klasę układów nieliniowych [25]. Wymaga to linearyzacji modelu (3.2) w sąsiedztwie aktualnego stanu układu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x; \Delta)x + B(x; \Delta)u + w_x \\ y &= C(x; \Delta)x + w_y \\ u &= -K(x)y\end{aligned}\tag{3.3}$$

gdzie macierze: dynamiki  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sterowania  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , pomiarów  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  oraz macierz wzmocnienia (sterownik)  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  są jacobianami nieliniowych operatorów  $f$ ,  $c$  i  $k$ :

$$A(x) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \quad B(x) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \quad C(x) = \frac{\partial c(x)}{\partial x} \quad K(x) = -\frac{\partial k(y)}{\partial y}\tag{3.4}$$

Powyższe rozszerzenie zakresu stosowalności liniowych metod sterowania jest akceptowalne technicznie, mimo iż nie istnieje ściśle matematyczne uzasadnienie takiego postępowania. Takie podejście jest jednak szeroko stosowane w praktyce [25]. Model w postaci (3.2) posłuży do aktywnego tłumienia nieliniowych drgań aeroelastycznych lotki.

Sterownik  $K$  może być klasycznym regulatorem lub może być zbudowany w oparciu o metody sterowania optymalnego lub odpornego [26]-[28]. Sterownik optymalny powinien zapewnić minimalizację wektora błędu  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  zdefiniowanego równaniem błędu regulowanego jako:

$$z = C_1 x + D_{12} u\tag{3.5}$$

gdzie  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $D_{12} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  są macierzami błędu stanu i sterowania, poprzez minimalizację normy  $H_\infty$ :

$$\|G(s)\|_\infty := \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(t)\|_2 = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}\tag{3.6}$$

lub wskaźnika jakości

$$J = \|z^T z\|_2^2 = \|(x^T C_1^T C_1 x + 2x^T C_1^T D_{12} u + u^T D_{12}^T D_{12} u)\|_2^2\tag{3.7}$$

Przypadkiem szczególnym (3.4) jest wskaźnik jakości używany w metodach LQR i LQG, określający błąd stanu i koszt sterowania:

$$J(x, u) = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt\tag{3.8}$$

gdzie  $Q = C_1^T C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i  $R = D_{12}^T D_{12} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  są macierzami wagowymi. Sterowniki  $K$  minimalizujące kryteria jakości (3.6)-(3.8) mają postać:

$$K = R^{-1} B^T P\tag{3.9}$$

gdzie  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$  jest macierzą będącą rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego:

$$0 = A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q\tag{3.10}$$

#### 4. Zagadnienie niepełnych pomiarów stanu

Podstawową metodą sterowania optymalnego jest metoda LQR. Jej zaletami są: duża skuteczność i odporność wynikające z dużego zapasu wzmocnienia i fazy [26], [29] oraz łatwość dostrojenia macierzy wagowych  $Q$  i  $R$ . Wadą metody LQR jest konieczność pomiaru pełnego wektora stanu, tzn.  $y \equiv x$ ,  $C = I$ . Jest to trudne do zrealizowania w praktyce, gdyż np. w rozważanym zagadnieniu aktywnego tłumienia drgań jedynie pomiary wychylenia oraz prędkości kątowej lotki są stosunkowo proste, gdyż często są wykonywane dla celów automatycznego sterowania samolotem. Pomiary odkształceń konstrukcji są dużo trudniejsze, a czasami nawet niemożliwe do wykonania z powodów technicznych. Stosunkowo łatwo można mierzyć przyspieszenia związane z odkształceniami konstrukcji skrzydła, gdyż stosowane do tego celu akcelerometry są bardzo wygodnymi przyrządami pomiarowymi. Trochę bardziej kłopotliwe są pomiary prędkości kątowych związanych z odkształceniami skrzydła, gdyż wymaga to użycia mierników żyroskopowych. Najtrudniej jednak zmierzyć prędkości liniowe i przemieszczenia konstrukcji skrzydła, gdyż wymaga to zainstalowania na nim dodatkowego układu pomiarowego, np. tensometrycznego. Przemieszczenia i prędkości można wprawdzie uzyskać poprzez scałkowanie przyspieszeń, ale są one wtedy obciążone dużymi błędami, które znacznie pogarszają skuteczność sterowania.

Ograniczona możliwość pomiaru pełnego wektora stanu w zasadzie uniemożliwia zastosowanie metody LQR do aktywnego tłumienia drgań. Rozwiązaniem jest użycie metod LQG lub  $H_\infty$ , w których pomiary stanu mogą być niekompletne, tzn. liczbą wielkości mierzonych jest mniejsza niż wymiar wektora stanu:

$$p = \dim(y) \leq n \quad (4.1)$$

W przypadku, gdy pomiary są niekompletne, w obu metodach, LQG i  $H_\infty$ , do określenia sterownika  $K$  używa się estymaty  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  nie w pełni mierzonego wektora stanu  $x(t)$ :

$$u = -K\hat{x} \quad (4.2)$$

Wektor  $\hat{x}$  wyznacza się za pomocą obserwatora liniowego (np. filtru Kalmana) w postaci [26]-[29]:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \quad (4.3)$$

gdzie  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  jest macierzą iniekcji pomiarów.

W mniejszej pracy zostanie pokazane, że nie tylko liczba pomiarów  $p$ , ale również ich rodzaj (pomiary przemieszczeń lub prędkości) mają zasadniczy wpływ na skuteczność aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych lotek. Dotyczy to zarówno metody LQG, jak i  $H_\infty$ .

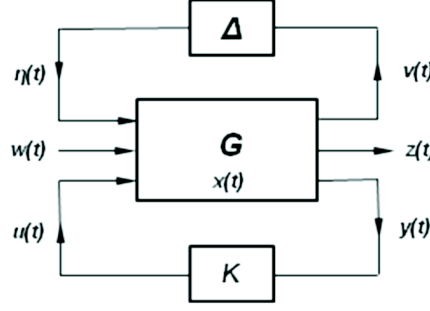
#### 5. Zagadnienie niewiedzy dotyczącej modelu

Metody LQG i  $H_\infty$  umożliwiają uwzględnienie zaburzeń, takich jak np. zaburzenia prędkości związane z turbulencją przepływu  $w_x(t)$  lub błędy pomiarów  $w_y(t)$ . Są to zaburzenia zewnętrzne  $w(t) = [w_x(t)w_y(t)]^T$ , niezależne od modelu (rys. 4). W niniejszej pracy zaburzenia zewnętrzne nie są uwzględniane.

Metoda  $H_\infty$  stwarza jeszcze większe możliwości, gdyż pozwala uwzględniać zaburzenia wewnętrzne  $\Delta$ , które mogą być interpretowane jako niewiedza dotycząca modelu [26], [29]. Niewiedza ta może dotyczyć nie modelowanej dynamiki obiektu (np. przy wyższych częstotliwościach) lub, przy określonej strukturze modelu, nieokreśloności lub zmienności parametrów modelu.

Niewiedza o modelu  $\Delta$  dotycząca nieokreśloności lub zmienności jego parametrów może być interpretowana jako uwzględnianie zmian parametrów mogących powodować destabilizację sterownika. Ta możliwość zostanie wykorzystana w niniejszej pracy do oszacowania wpływu zmian parametrów na skuteczność i efektywność aktywnego tłumienia drgań lotek.





Rys. 4. Reprezentacja modelu tłumienia drgań aeroelastycznych w teorii sterowania

Niewiedza  $\Delta$  będzie więc określona jako zaburzenia modelu wynikające ze zmieniających się w czasie parametrów modelu:

$$\Delta(t) = \Delta(\Delta m(t), \Delta I(t), \Delta k_h(t), \Delta b, \Delta e, \Delta x_c(t), \dots, \Delta c_{mu}(t)) \quad (5.1)$$

Zakłada się przy tym, że zmiany te, związane z eksploatacją samolotu, są bardzo powolne:

$$\frac{1}{\Delta(t)} \frac{d\Delta(t)}{dt} \sim 10^{-8} \div 10^{-9} [\%/s] \quad (\sim 10\%/rok) \quad (5.2)$$

zatem nie wpływają na dynamikę układu, a jedynie modyfikują model „statycznie”. Takie zmiany modelu, mimo że bardzo wolne, mogą jednak mieć duży wpływ na odporność sterowania wyznaczonego metodą  $H_\infty$ . Wpływ ten może być analizowany na gruncie teorii sterowania  $H_\infty$  przy użyciu podejścia wykorzystującego faktoryzację macierzy transmitancji układu [26], [29].

Reprezentacja transmitancji modelu aeroelastycznego w przestrzeni stanu ma postać [29]:

$$G_\Delta = \left[ \begin{array}{c|c} A(\Delta) & B(\Delta) \\ \hline C(\Delta) & 0 \end{array} \right] \quad (5.3)$$

W celu ilościowego ujęcia niewiedzy o modelu  $\Delta$  transmitancję (5.3) należy przedstawić w tzw. postaci sfaktoryzowanej lewej (*left coprime factorization*):

$$G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1} (N + \Delta_N) \quad (5.4)$$

w której  $M$  i  $N$  są czynnikami transmitancji  $G$  układu, zaś  $\Delta_M$ ,  $\Delta_N$  są transmitancjami zaburzeń (niewiedzy o modelu). Jeżeli zaburzenia te są ograniczone w normie  $H_\infty$ :

$$\|[\Delta_M \quad \Delta_N]\|_\infty < \varepsilon_{max} \quad (5.5)$$

gdzie  $\varepsilon_{max} > 0$  jest zapasem odporności metody  $H_\infty$  i wynosi:

$$\varepsilon_{max} = \sqrt{1 - \|[N \quad M]\|_H^2} = \frac{1}{\gamma_{min}} \quad (5.6)$$

to sterowany układ będzie odporny, jeżeli sterownik  $K_\infty$  będzie stabilny i spełni warunek:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I + GK_\infty)^{-1} M^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon_{max}} \quad (5.7)$$

Norma  $H_\infty$  zdefiniowana jest w dziedzinach częstotliwości i czasu jako [25], [29]:

$$\|G(s)\|_\infty := \max_{\omega} \overline{\sigma}(G(j\omega)) \quad \|G(s)\|_\infty := \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(t)\|_2 = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (5.8)$$

i można ją również wyrazić poprzez macierze  $A$ ,  $B$  i  $C$  definiujące model fizyczny [29]:

$$\|G(s)\|_\infty = \|G(A, B, C)\|_\infty \quad (5.9)$$

Pozwala to powiązać ilościowo zapas odporności metody  $H_\infty$  z niewiedzą o modelu  $\Delta$ , gdyż:

$$\|G(s)\|_\infty = \gamma_{min} = \frac{1}{\varepsilon_{max}} \quad (5.10)$$

Dla danych wartości parametrów modelu norma  $H_\infty$  pozwala wyznaczyć zapas odporności metody

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_{max}(m, I, k_h, k_\alpha, b, e, x_c, \dots, c_{mu}) \quad (5.11)$$

Metoda sterowania odpornego  $H_\infty$  daje więc możliwość oszacowania wpływu zmian parametrów modelu na stabilność układu, a co za tym idzie w rozważanym zadaniu, na możliwość tłumienia drgań aeroelastycznych układu.

Powyższe cechy obu metod, LQG i  $H_\infty$ , wykorzystanie niepełnych pomiarów do syntezy sterowania oraz uwzględnienie niewiedzy dotyczącej modelu  $H_\infty$ , umożliwiają użycie ich do aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych.

## 6. Metody LQG i $H_\infty$

Sterowniki  $K$  w metodach LQG i  $H_\infty$  są określone następująco [26].

### ➤ Sterownik LQG

Kryteria jakości:

$$\min_{u \in U_{dop}} E \left\{ \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \quad \min E \{ (\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^T \} \quad (6.1)$$

Charakterystyki zaburzeń zewnętrznych modelu  $w(t)$  i pomiarów  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} E\{w_y(t)w_y^T(\tau)\} &= V\delta(t - \tau) & E\{w_x(t)w_x^T(\tau)\} &= W\delta(t - \tau) \\ E\{w_x(t)w_y^T(\tau)\} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sterownik metody LQG ma postać:

$$K_{LQG} = \left[ \begin{array}{c|c} A - BR^{-1}B^T X - YC^T V^{-1}C & YC^T V^{-1} \\ \hline -R^{-1}B^T X & 0 \end{array} \right] \quad (6.3)$$

w którym macierze  $X$  i  $Y$  są rozwiązaniami równań Riccatiego:

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q &= 0 \\ Y A^T + AY - YC^T V^{-1}CY + W &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Obserwator w metodzie LQG ma postać:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu + YC^T V^{-1}(C\hat{x} - y) \quad (6.5)$$



### ➤ Sterownik suboptymalny $H_\infty$

Kryterium jakości [26], [28]:

$$\min_{u \in U_{dop}} \int_0^\infty (z^T z - \gamma w^T w) dt \quad \gamma \geq 0 \quad (6.6)$$

Sterownik metody  $H_\infty$  ma postać:

$$K_\infty = \left[ \begin{array}{c|c} A - BB^T X + \gamma^2((1 - \gamma^2)I + XZ)^{-T} ZC^T C & \gamma^2((1 - \gamma^2)I + XZ)^{-T} ZC^T C \\ \hline B^T X & 0 \end{array} \right] \quad (6.7)$$

w której macierze  $X$  i  $Z$  są rozwiązaniami równań Riccatiego:

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XBB^T X + C^T C &= 0 \\ ZA^T + AZ - ZC^T CZ + BB^T &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

zaś parametr suboptymalności metody  $\gamma$  musi spełniać warunek:

$$\gamma > \gamma_{min} = \sqrt{1 + \rho(XZ)} \quad (6.9)$$

gdzie  $\rho$  jest promieniem spektralnym macierzy. Obserwator w metodzie  $H_\infty$  ma postać:

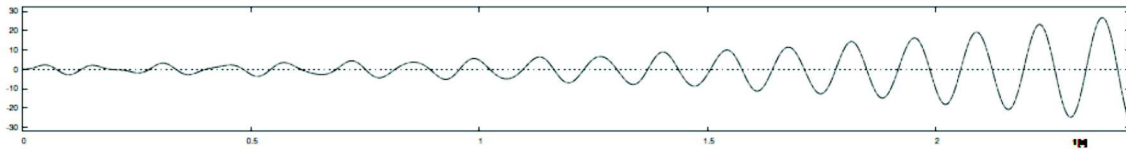
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu + Z((1 - \gamma^2)I + XZ)(C\hat{x} - y) \quad (6.10)$$

Sterowniki metod LQG i  $H_\infty$  określone zależnościami (6.1)-(6.10) zostaną użyte do aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych lotki.

## 7. Analiza symulacyjna tłumienia drgań aeroelastycznych lotki

Opracowany model posłużył do analizy symulacyjnej drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką o charakterystykach nieliniowych. Ze względu na nieliniowości modelu zastosowano podejście symulacyjne [2]. Analiza obejmuje:

- badanie skuteczności czynnego tłumienia drgań lotki za pomocą metody  $H_\infty$ ,
- porównanie skuteczności metody  $H_\infty$  z metodą LQG,
- zbadanie wpływu niepełnych pomiarów wektora stanu na odporność sterowania,
- badanie wpływu zmiany wybranego parametru modelu na odporność metody  $H_\infty$ .



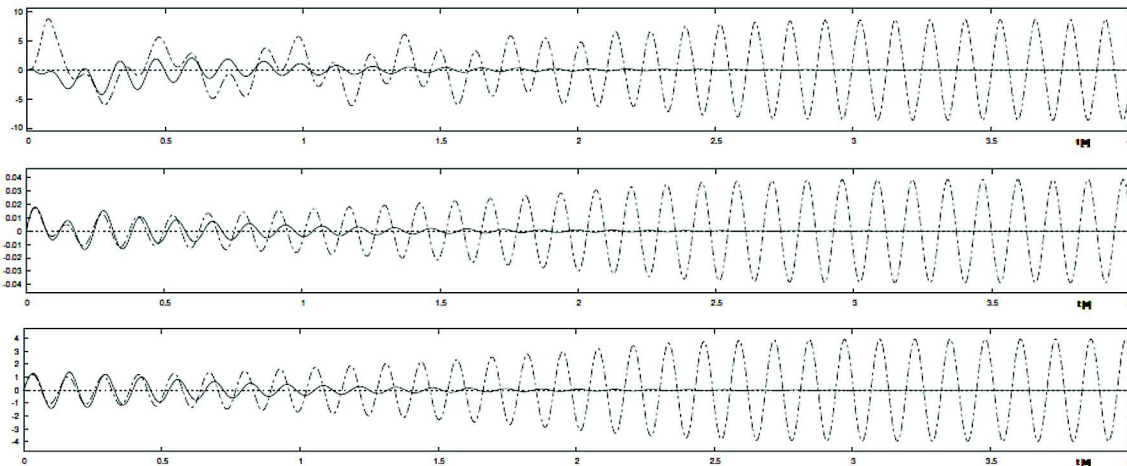
Rys. 5. Flutter klasyczny giętno-skrętno-lotkowy, drgania nadkrytyczne lotki  $\beta(t)$

Na wstępie przeprowadzono symulację flutteru giętno-skrętno-lotkowego bez uwzględnienia nieliniowości lotki i bez tłumienia aktywnego. Uzyskano typowe drgania o rosnącej wykładniczo amplitudzie (rys. 5). Prędkość krytyczna flutteru  $V_{kr} = 65,90$  m/s jest niższa o ok. 10% od prędkości krytycznej flutteru giętno-skrętnego skrzydła,  $V_{kr} = 71,57$  m/s, co jest zgodne z modelem klasycznym [1].

### 7.1. Drgania lotki z luzem

Badanie skuteczności czynnego tłumienia drgań lotki z luzem przeprowadzono dla przypadków: (1) pełnych pomiarów wektora stanu,  $n_y = 6$ , pomiarów trzech współrzędnych  $n_y = 3$ ; (2) prędkości  $\dot{h}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$  oraz (3) położenia  $h(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$ , a także pomiaru pojedynczych zmiennych  $n_y = 1$ ; (4) ugięcia skrzydła  $h(t)$  oraz (5) kąta wychylenia lotki  $\beta(t)$ . Porównano skuteczność tłumienia drgań za pomocą obu metod,  $H_\infty$  i LQG.

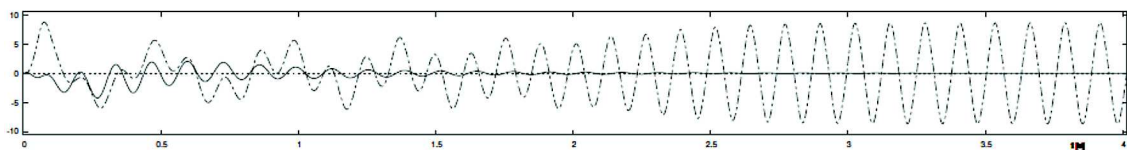
#### 7.1.1. Pełne pomiary wszystkich zmiennych stanu, $n_y = n_x = 6$



Rys. 6. Drgania  $\beta(t)$ ,  $h(t)$ ,  $\theta(t)$  wywołane luzem lotki, pełne pomiary,  $n_y = 6$  (- - - LQG, —  $H_\infty$ )

Metoda  $H_\infty$  tłumí drgania bardzo skutecznie, co wynika z zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,44$  (za dobry zapas odporności uważa się  $\varepsilon = 0,25$  [29]) Metoda LQG nie jest w stanie stłumić drgań, pojawiają się cykle graniczne o znacznej amplitudzie, ale jednak nie dochodzi do dalszego narastania drgań i flutter giętno-skrętno-lotkowy jest zablokowany.

#### 7.1.2. Pomiar niepełny prędkości wychylenia lotki, ugięcia i skręcenia skrzydła $\dot{h}(t)$ , $\dot{\theta}(t)$ , $\dot{\beta}(t)$ , $n_y = 3$

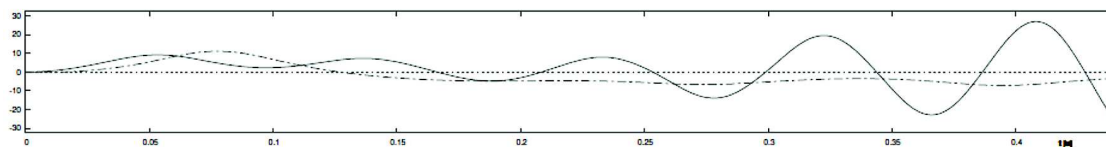


Rys. 7. Drgania  $\beta(t)$  wywołane luzem lotki, pomiar niepełny  $\dot{h}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$ ,  $n_y = 3$  (- - - LQG, —  $H_\infty$ )

Metoda  $H_\infty$  tłumí drgania bardzo skutecznie, co wynika z dużego zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,42$ . Metoda LQG nie jest w stanie stłumić drgań, pojawiają się cykle graniczne o znacznej amplitudzie, ale nie dochodzi do dalszego narastania drgań i nie rozwija się flutter giętno-skrętno-lotkowy.

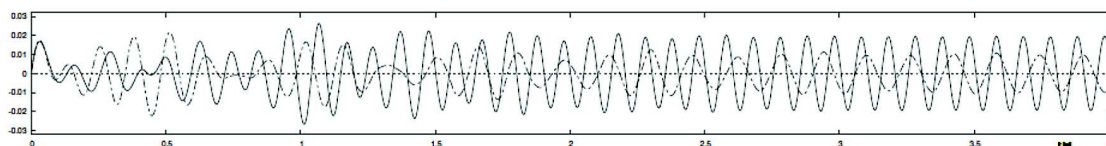
#### 7.1.3. Pomiar niepełny wychylenia lotki, ugięcia i skręcenia skrzydła: $\beta(t)$ , $h(t)$ , $\theta(t)$ , $n_y = 3$

Zarówno metoda LQG, jak i  $H_\infty$  nie są w stanie stłumić drgań, przy czym  $H_\infty$  jest nie-skuteczna mimo wystarczającego zapasu odporności  $\varepsilon = 0,291$ . Wynika to najprawdopodobniej z nieliniowości układu. Drgania narastają szybko, po 0,4s wychylenie lotki osiąga wartość graniczną. Sterowanie LQG jest dużo skuteczniejsze, ale i ono nie jest w stanie stłumić narastających drgań układu.



Rys. 8. Drgania  $\beta(t)$  wywołane luzem lotki, pomiar niepełny  $\beta(t)$ ,  $h(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $n_y = 3$  (- - - LQG, —  $H_\infty$ )

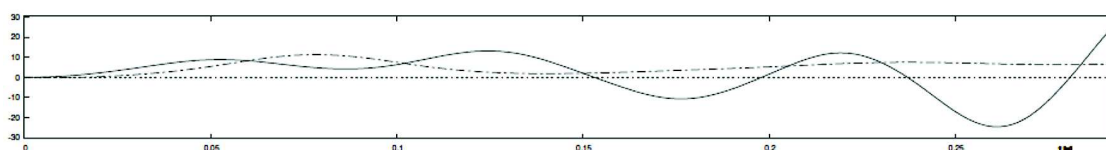
#### 7.1.4. Pomiar niepełny ugięcia skrzydła $h(t)$ , $n_y = 1$



Rys. 9. Drgania  $h(t)$  wywołane luzem lotki, pomiar niepełny  $h(t)$ ,  $n_y = 1$  (- - - LQG, —  $H_\infty$ )

Zarówno metoda LQG, jak i  $H_\infty$  nie są w stanie stłumić drgań, przy czym  $H_\infty$  jest nie skuteczna z powodu bardzo małego zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,016$ . Sterowanie LQG jest trochę skuteczniejsze, ale i ono nie jest w stanie całkowicie stłumić drgań układu. W obu metodach pojawiają się cykle graniczne o znacznej amplitudzie, ale nie dochodzi do dalszego narastania drgań i flutter giętno-skrętno-lotkowy jest zablokowany.

#### 7.1.5. Pomiar niepełny wychylenia lotki $\beta(t)$ , $n_y = 1$



Rys. 10. Drgania  $\beta(t)$  wywołane luzem lotki, pomiar niepełny  $\beta(t)$ ,  $n_y = 1$  (- - - LQG, —  $H_\infty$ )

Zarówno metoda LQG, jak i  $H_\infty$  nie są w stanie stłumić drgań, przy czym  $H_\infty$  jest nieskuteczna z powodu bardzo małego zapasu odporności  $\varepsilon = 0,0394$ . Drgania narastają szybko, po 0,4s wychylenie lotki osiąga wartość graniczną. Sterowanie LQG jest dużo skuteczniejsze, ale i ono nie jest w stanie stłumić narastających drgań układu.

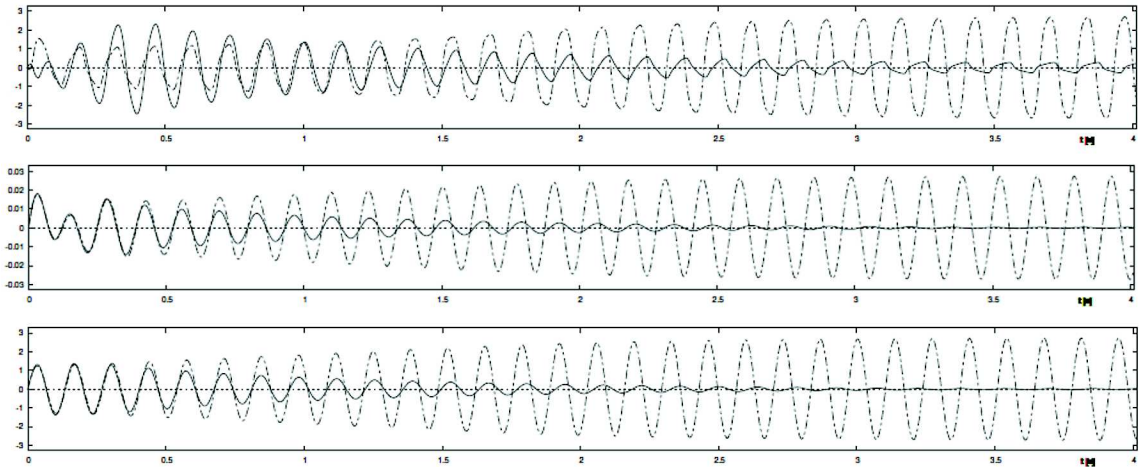
Jest widoczne, że w przypadku tłumienia drgań wywołanych luzem lotki metoda  $H_\infty$  sprawdza się nadzwyczaj dobrze, potrafi stłumić drgania niemal całkowicie. Zależy to jednak w zasadniczy sposób od liczby mierzonych zmiennych stanu. Metoda LQG zachowuje się znacznie gorzej, chociaż także potrafi zapobiec drganiom rozbieżnym. Przy pomiarach pojedynczych zmiennych stanu (zwłaszcza przemieszczeń) obie metody nie radzą sobie zbyt dobrze z tłumieniem drgań, chociaż, co jest trochę zaskakujące, metoda LQG radzi sobie wtedy trochę lepiej.

Zasadnicze znaczenie dla aktywnego tłumienia drgań ma także rodzaj mierzonych zmiennych stanu. Pomiary prędkości zapewniają dość dużą skuteczność tłumienia drgań, podczas gdy pomiary przemieszczeń nie zapewniają ich pełnego wytłumienia.

## 7.2. Drgania lotki z nieliniowością histerezową

Badanie skuteczności czynnego tłumienia drgań lotki z nieliniowością typu histerezy przeprowadzono dla przypadków: (1) pełnych pomiarów wektora stanu,  $n_y = 6$  oraz pomiaru pojedynczych zmiennych  $n_y = 1$ : (2) ugięcia skrzydła  $h(t)$  oraz (3) kąta wychylenia lotki  $\beta(t)$ .

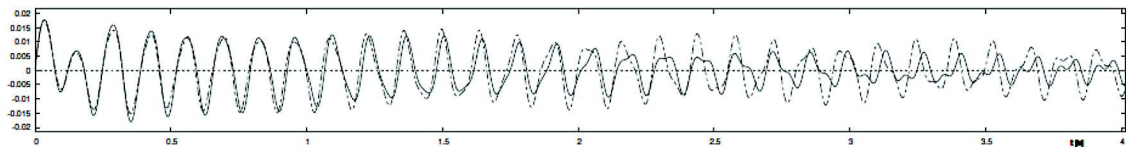
### 7.2.1. Pełne pomiary wszystkich zmiennych stanu, $n_y = n_x = 6$



Rys. 11. Drgania  $\beta(t)$ ,  $h(t)$ ,  $\theta(t)$  wywołane histerezą lotki, pełne pomiary,  $n_y = 6$  (--- LQG, —  $H_\infty$ )

Metoda  $H_\infty$  tłumi drgania bardzo skutecznie, co wynika z dużego zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,34$ . Metoda LQG nie jest w stanie stłumić drgań, pojawiają się cykle graniczne o znacznej amplitudzie, ale jednak nie dochodzi do dalszego narastania drgań i nie rozwija się flutter giętno-skrętno-lotkowy.

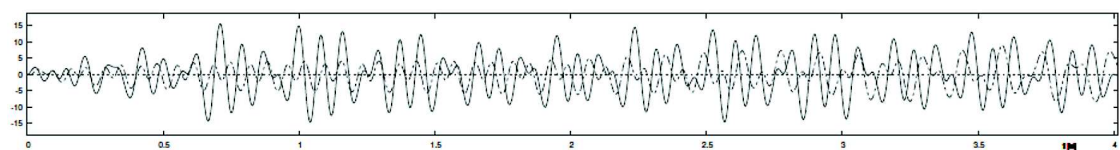
### 7.2.2. Pomiar niepełny ugięcia skrzydła $h(t)$ , $n_y = 1$



Rys. 12. Drgania  $h(t)$  wywołane histerezą lotki, pomiar niepełny  $h(t)$ ,  $n_y = 1$  (--- LQG, —  $H_\infty$ )

Podobnie jak w przypadku drgań lotki z luzem, obie metody, LQG i  $H_\infty$ , nie są w stanie całkowicie stłumić drgań, przy czym  $H_\infty$  jest mało skuteczna z powodu bardzo małego zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,016$ . Sterowanie LQG jest trochę skuteczniejsze, ale i ono nie jest w stanie całkowicie stłumić drgań układu. Pojawiają się nieregularności w przebiegach drgań, co związane jest z przeskokami na charakterystyce histerezy. W obu metodach pojawiają się cykle graniczne o umiarkowanej amplitudzie, cechujące się nieregularnością, ale można stwierdzić iż kryterium ograniczonej amplitudy drgań (3.1) jest spełnione, zatem nie dochodzi do dalszego narastania drgań i nie rozwija się flutter giętno-skrętno-lotkowy.

### 7.2.3. Pomiar niepełny wychylenia lotki $\beta(t)$ , $n_y = 1$



Rys. 13. Drgania  $\beta(t)$  wywołane histerezą lotki, pomiar niepełny  $\beta(t)$ ,  $n_y = 1$  (--- LQG, —  $H_\infty$ )

Obie metody, LQG i  $H_\infty$ , nie są w stanie całkowicie stłumić drgań, przy czym  $H_\infty$  jest mało skuteczna z powodu bardzo małego zapasu odporności,  $\varepsilon = 0,04$ . Sterowanie LQG jest trochę skuteczniejsze, ale i ono nie jest w stanie całkowicie stłumić drgań układu. Pojawiają się nieregularności w przebiegach drgań, co związane jest z przeskokami na charakterystyce histerezy. W obu metodach pojawiają się cykle graniczne o umiarkowanej amplitudzie, cechujące się nieregularnością, ale nie dochodzi do dalszego narastania drgań i flutter giętno-skrętno-lotkowy jest zablokowany.

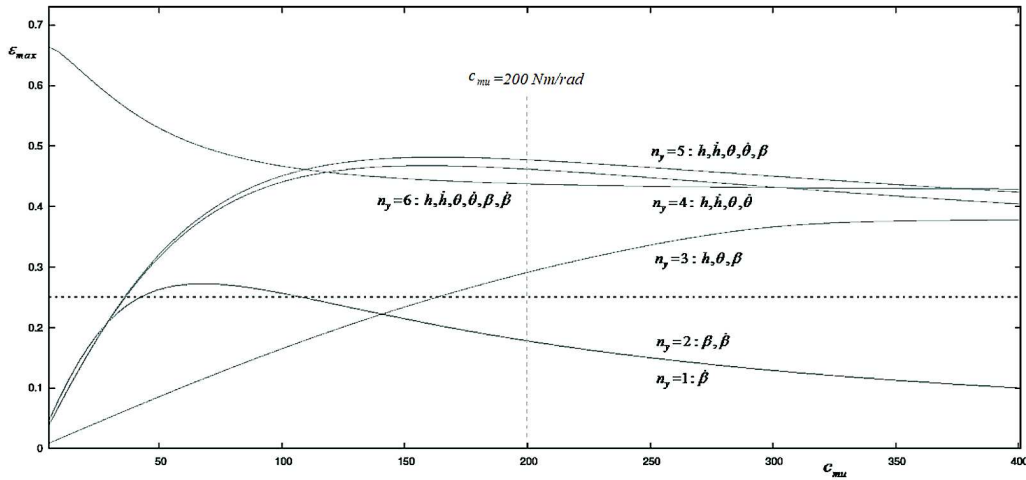
Jak widać, obie metody nie radzą sobie zbyt dobrze przy tak marnych pomiarach, chociaż nie poddają się, próbując z dużym powodzeniem ograniczyć amplitudę drgań.

Z powyższych przykładów wynika istotny wniosek, iż nieliniowe drgania aeroelastyczne spowodowane histerezą w układzie sterowania lotką nie mogą być w pełni wytłumione za pomocą metod LQG i  $H_\infty$ . Chociaż amplituda drgań resztkowych jest umiarkowana, to drgania takie są niepożądane, gdyż wpływają niekorzystnie na konstrukcję skrzydła lub układ sterowania lotką.

### 7.3. Wpływ zmiany parametru modelu na odporność metody $H_\infty$

Dla przypadku drgań lotki z luzem zbadano wpływ zmian wartości wybranego parametru modelu, współczynnika momentu sterowania lotką  $c_{mu}$ , na odporność  $\varepsilon_{max}$  metody  $H_\infty$ . Założono przy tym, że zmiany te są bardzo wolne, rzędu 10%/rok, co odpowiada zmianom mogącym powstać w trakcie eksploatacji samolotu. Wyznaczono zapas odporności metody  $H_\infty$  w funkcji zmian parametru  $c_{mu}$ , przy pełnych i niepełnych pomiarach stanu oraz dla różnych rodzajów mierzonych zmiennych: przemieszczeń i prędkości. Nominalna wartość parametru jest równa  $c_{mu} = 200 \text{ Nm/rad}$ .

Na rys. 14 przedstawiono zależność zapasu odporności metody  $H_\infty$  od wartości parametru  $c_{mu}$  dla liczb mierzonych zmiennych stanu,  $n_y = 1, \dots, 6$ .



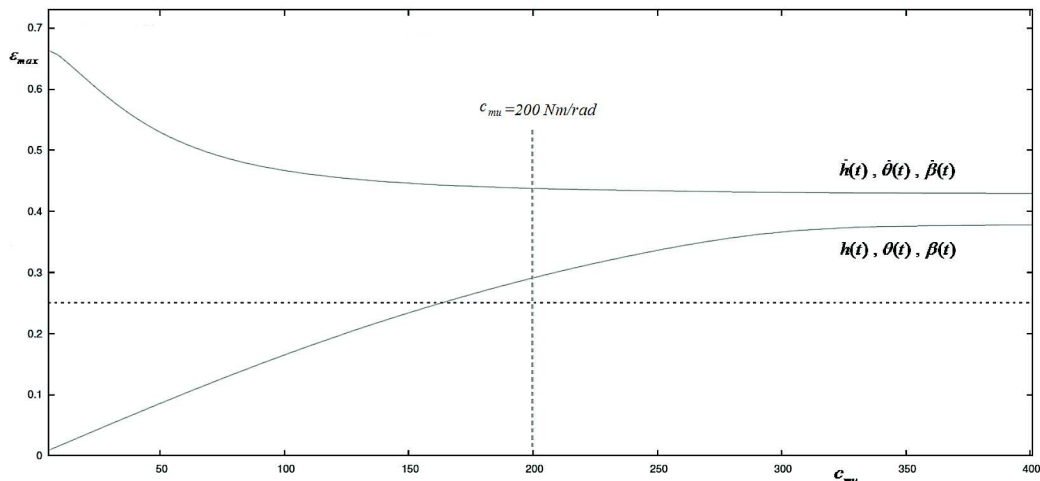
Rys. 14. Wpływ zmian parametru  $c_{mu}$  na odporność  $\varepsilon_{max}$  w zależności od liczby mierzonych zmiennych stanu

W sąsiedztwie wartości nominalnej parametru zmiany odporności  $\varepsilon_{max}$  są umiarkowane, zwłaszcza przy pełnych lub prawie pełnych pomiarach, dla  $n_y > 3$ . Odporność  $\varepsilon_{max} > 0,5$  metody  $H_\infty$  jest wówczas bardzo wysoka, a wrażliwość odporności na zmiany parametru jest mała,  $\partial \varepsilon_{max} / \partial c_{mu} \simeq 0,01$ . Oznacza to, że sterownik  $K_\infty$  wykorzystujący tak dobre pomiary nie będzie zbyt wrażliwy na zmianę parametru w trakcie eksploatacji.

W przypadku, gdy pomiary są niepełne,  $n_y < 3$ , odporność jest dużo mniejsza,  $\varepsilon_{max} \simeq 0,2 \div 0,3$ , a co gorsza, wrażliwość odporności na zmiany parametru jest duża,  $\partial \varepsilon_{max} / \partial c_{mu} \simeq 0,25$ . Przy takich niepełnych pomiarach istnieje więc ryzyko, że sterownik straci skuteczność tłumienia drgań, jeżeli wartość parametru będzie maleć w trakcie eksploatacji.



Na rys. 15 przedstawiono zależność zapasu odporności  $\varepsilon_{max}$  od rodzaju mierzonych zmiennych stanu: przemieszczeń  $h(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\beta(t)$  i prędkości  $\dot{h}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\beta}(t)$ . Jest widoczne, że pomiary prędkości zapewniają bardzo dużą odporność,  $\varepsilon_{max} > 0,4$ . Pomiary przemieszczeń zapewniają dużą odporność tylko dla wartości parametru  $c_{mu}$  większej od nominalnej, zaś maleje ona szybko ze spadkiem wartości parametru  $c_{mu}$  poniżej wartości nominalnej.



Rys. 15. Wpływ zmian parametru  $c_{mu}$  na odporność  $\varepsilon_{max}$  w zależności od rodzaju mierzonych zmiennych stanu: przemieszczeń lub prędkości

Jest widoczne, że zmiany wartości wybranego parametru, współczynnika momentu sterowania lotką  $c_{mu}$ , mają wpływ na odporność metody  $H_{\infty}$  zastosowanej do aktywnego tłumienia drgań nieliniowych lotki z luzem. Wpływ ten nie jest bardzo znaczący dla wartości parametru bliskich wartości nominalnej, ale może być bardzo duży przy większych jego zmianach, zwłaszcza gdy maleje on silnie oraz gdy liczba pomiarów jest mała lub gdy mierzone są przemieszczenia, a nie prędkości.

Przedstawione wyniki pozwalają stwierdzić, że metoda  $H_{\infty}$ , oprócz tłumienia drgań nieliniowych lotki, umożliwia także prognozowanie skuteczności tego tłumienia przy zmieniających się wartościach parametrów układu w trakcie eksploatacji samolotu.

## 8. Wnioski

Przeprowadzone symulacje drgań aeroelastycznych układu skrzydła z lotką z luzem lub histerezą w układzie sterowania pokazały, że drgania takie mogą być z dużym powodzeniem tłumione metodami sterowania LQG i sterowania odpornego  $H_{\infty}$ . Drgania lotki wywołane luzem mogą być całkowicie wytłumione metodą  $H_{\infty}$ , podczas gdy metoda LQG pozwala wytłumić je tylko częściowo, pojawia się cykl graniczny o umiarkowanej amplitudzie. Drgania lotki z silną nieliniowością histerezową są przez obie metody tłumione mniej skutecznie. Obserwuje się wprawdzie istotne zmniejszenie amplitudy cyklu granicznego takich drgań, ale nie następuje całkowite ich wytłumienie. Z drugiej jednak strony obie metody zapobiegają przekształceniu się drgań nieliniowych o ograniczonej amplitudzie w rozbieżny flutter giętno-skrętno-lotkowy, co można uznać za przejaw ich wysokiej przydatności, gdyż dając pilotowi bezcenny czas na właściwą reakcję, są one w stanie zapobiec katastrofie samolotu.

Skuteczność tłumienia obu rodzajów drgań lotki zależy w zasadniczy sposób od możliwości pomiaru wektora stanu, a także od rodzaju pomiarów: przemieszczeń lub prędkości. Metoda  $H_{\infty}$  jest bardzo skuteczna w przypadku pełnych pomiarów, jednakże jej skuteczność maleje wyraźnie, gdy pomiary są niepełne. Metoda LQG, mniej skuteczna przy pełnych pomiarach,



radzi sobie lepiej niż metoda  $H_\infty$ , gdy pomiary obejmują pojedyncze składowe wektora stanu. Pomiary prędkości skutkują większą efektywnością tłumienia drgań lotki przez obie metody niż pomiary przemieszczeń.

Pokazano także, iż w ramach metody  $H_\infty$  można ująć ilościowo wpływ zmiany parametrów modelu na jej odporność, co pozwala na prognozowanie skuteczności aktywnego tłumienia drgań przy zmieniających się wartościach parametrów układu w trakcie eksploatacji samolotu.

## Bibliografia

1. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Cambridge, Mass.
2. DUL F.A., 2014, Czynne tłumienie drgań aeroelastycznych skrzydeł metodami sterowania optymalnego, [W:] *Mechanika w Lotnictwie, ML-XVI 2014*, K. Sibilski (Red.), ZG PTMTS, Warszawa, 264-278
3. EASA, 2012, *Certification Specifications for Normal, Utility, Aerobatic, and Commuter Category Aeroplanes CS-23. CS 23.629 (c) Flutter*, Amendment 3, 20 July 2012
4. EASA, 2016, *Certification Specifications and Acceptable Means of Compliance for Large Aeroplanes CS-25. CS 25.629 (b)*, Amendment 18, 22 June 2016
5. DOWEL E., 2015, *A Modern Course in Aeroelasticity*, 5th Ed., Springer, New York
6. CROFT J., 2001, Airbus elevator flutter: annoying or dangerous?, *Aviation Week and Space Technology*, **155**, 9 (Aug. 27), p. 41
7. KIM S.H., LEE I., 1996, Aeroelastic analysis of a flexible airfoil with a free-play non-linearity, *Journal of Sound and Vibration*, **193**, 823-846
8. TANG D., DOWELL E.H., VIRGIN L.N., 1998, Limit cycle behavior of an airfoil with a control surface, *Journal of Fluids and Structures*, **12**, 7, 839-858
9. FRAMPTON K.D., CLARK R.L., 2000, Experiments on control of limit cycle oscillations in a typical section, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **23**, 5, 956-960
10. LIU L., WONG Y.S., LEE B.H.K., 2002, Non-linear aeroelastic analysis using the point transformation method, Part 1: Freeplay model, *Journal of Sound and Vibration*, **253**, 2, 447-469
11. LIU L., DOWELL E.H., 2005, Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface, *AIAA Journal*, **43**, 4, 802-815
12. TANG D., DOWELL E.H., 2010, Aeroelastic airfoil with freeplay at angle of attack with gust excitation, *AIAA Journal*, **48**, 2, 427-442
13. DAOCHUN LI, SHIJUN GUO, JINWU XIANG, 2010, Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities, *Journal of Sound and Vibration*, **329**, 22, 4756-4771
14. XIANG JINWU, YAN YONGJU, LI DAOCHUN, 2014, Recent advance in nonlinear aeroelastic analysis and control of the aircraft, *Chinese Journal of Aeronautics*, **27**, 1, 12-22
15. KHOLODAR D.B., 2016, Aircraft control surface and store freeplay-induced vibrations in aeroelastic stability envelope, *Journal of Aircraft*, **53**, 5, 1538-1548
16. PETTIT C.L., BERAN P.S., 2003, Effects of parametric uncertainty on airfoil limit cycle oscillation, *AIAA Journal of Aircraft*, **40**, 5, 1004-1006
17. PETTIT C.L., 2004, Uncertainty quantification in aeroelasticity: recent results and research challenges, *AIAA Journal of Aircraft*, **41**, 5, 1217-1229
18. LEE K.W., SINGH S.N., 2007, Global robust control of an aeroelastic system using output feedback, *AIAA J. Guidance Control Dynamics*, **30**, 1, 271-275

19. ROGER K.L., HODGES G.E., FELT L., 1975, Active flutter suppression-a flight test demonstration, *AIAA Journal of Aircraft*, **12**, 6, 551-556
20. BLOCK J.J., STRGANAC T.W., 1998, Applied active control for a nonlinear aeroelastic structure, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**, 6, 838-845
21. KO J., STRGANAC T.W., KURDILA A.J., 1998, Stability and control of a structurally nonlinear aeroelastic system, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**, 5, 718-725
22. CLARK R.L., FRAMPTON K.D., DOWELL E.H., 2000, Control of a three degree of freedom airfoil with limit cycle behavior, *AIAA Journal of Aircraft*, **37**, 3, 533-536
23. FRAMPTON K.D., CLARK R.L., 2000, Experiments on control of limit cycle oscillations in a typical section, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **23**, 5, 956-960
24. BIALY B.J., PASILIAO C.L., DINH H.T., DIXON W.E., 2014, Tracking control of limit cycle oscillations in an aero-elastic system, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **136**, 6, 064505-(1-5)
25. CIMEN T., 2012, Survey of state-dependent riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis, *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **35**, 4, 1025-1047
26. ZHOU K., DOYLE J.C., 1999, *Essentials of Robust Control*, 1st Ed., Prentice Hall, New Jersey
27. LEWIS F.L., DRAGUNA L.V., SYRMOS, V.L., 2012, *Optimal Control*, J. Wiley, New Jersey
28. LAVRETSKY E., WISE A.K., 2013, *Robust and Adaptive Control with Aerospace Applications*, Springer, London
29. SKOGESTAD S., POSTLEWHITE I., 2005, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, J. Wiley, Chichester, West Sussex

### Active suppression of nonlinear aeroelastic vibrations by robust control methods

In this work the analysis of active suppression of nonlinear aeroelastic vibrations of the wing and aileron with freeplay and hysteresis in their control system by means of the robust control  $H_\infty$  method and optimal LQG method are presented. Using the time-marching approach, it has been shown that nonlinear limit cycle oscillation type vibrations of the aileron caused by freeplay and hysteresis can be effectively damped by both  $H_\infty$  and LQG methods, although in the case of hysteresis nonlinearity they are less efficient which is manifested in their inability to suppress vibrations entirely. Also, the impact of incomplete measurements on the efficiency of vibration damping has been analyzed which shows that the effectiveness of both  $H_\infty$  and LQG method in damping of nonlinear vibrations of the aileron depends essentially on the number and types (displacements or velocities) of measured state variables. It has been found that the  $H_\infty$  method is able to damp the vibrations very efficiently if the measurements are complete (all state variables are measured), but the LQG method is more effective if only some individual state variables are measured.

It has been also shown that the method  $H_\infty$  gives the possibility of evaluation of the influence of the model parameter variations on its robustness that enables one to predict the changing of effectiveness of the  $H_\infty$ -based active suppression system with changing of values of the parameters during the exploitation of the airplane.