

CZYNNE TŁUMIENIE DRGAŃ AEROELASTYCZNYCH SKRZYDEŁ METODAMI STEROWANIA OPTYMALNEGO

FRANCISZEK DUL

Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, Politechnika Warszawska
e-mail: fdul@meil.pw.edu.pl

W pracy została przedstawiona analiza możliwości aktywnego tłumienia nieliniowych drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką z luzem w układzie sterowania za pomocą układu sterowania automatycznego wykorzystującego metody optymalizacji. Przyjęto model skrzydła o nieliniowych charakterystykach sprężystych konstrukcji i układu sterowania lotką. Założono, że skrzydło opływane jest nieściśliwym turbulentnym strumieniem powietrza. Układ aktywnego tłumienia drgań oparto na metodzie liniowo-kwadratowej sterowania optymalnego (*LQR*) rozszerzonej na zagadnienia nieliniowe. Przeprowadzona analiza symulacyjna aktywnego tłumienia drgań wykazała, że jego skuteczność zależy od charakteru nieliniowości występujących w układzie aeroelastycznym. Pokazano, że drgania flutterowe skrzydła z lotką bez luzów w układzie sterowania, jak również drgania skrzydła z nieliniowościami statycznymi charakterystyk sprężystych mające charakter cykli granicznych mogą być z powodzeniem tłumione za pomocą sterowania *LQR*, nawet przy stosunkowo silnej turbulencji przepływu. Jednakże w przypadku nieliniowości typu histerezy występujących w konstrukcji skrzydła lub w układzie sterowania lotką metoda *LQR* nie jest już tak skuteczna, co objawia się niemożnością całkowitego wytłumienia drgań. Wynika stąd, że czynne tłumienie drgań układów aeroelastycznych z takimi nieliniowościami wymaga użycia ogólniejszych metod sterowania nieliniowego.

1. Wstęp

Flutter klasyczny, znany od stu lat (1914)[1], jest jednym z najniebezpieczniejszych zjawisk aeroelastycznych. Jest on jednak dość dobrze poznany i dlatego nie stanowi obecnie takiego zagrożenia jakim był w przeszłości, o czym świadczy niewielka liczba katastrof tego rodzaju które wydarzyły się w ciągu ostatnich dwudziestu lat w lotnictwie „dużym” cywilnym i wojskowym¹. Jednakże lotnictwo jest w dalszym ciągu nękane innymi rodzajami drgań, które nie są klasycznymi drganiami flutterowymi, na przykład rezonansami pod- i nadharmonicznymi, rezonansami wewnętrznymi, drganiami z podwojeniem okresu, a przede wszystkim dość niebezpiecznymi drganiami lotek posiadających luzu w układzie sterowania. Drgania tego rodzaju mają często charakter nieliniowy co związane jest z nieliniowościami występującymi we wszystkich elementach

¹ W małym lotnictwie katastrofy flutterowe zdarzają się, niestety, nadal dość często.

układu aeroelastycznego: w sprężystej konstrukcji, w układach sterowania i w obciążeniach aerodynamicznych. Drgania nieliniowe mają najczęściej postać cykli granicznych (*Limit Cycle Oscillations* – *LCO*). Takie drgania, charakteryzujące się ograniczoną amplitudą, nie muszą powodować katastrofalnych skutków – czasem wręcz im zapobiegają – jednak na pewno nie są pożądane i należy im przeciwdziałać. Można to osiągnąć poprzez aktywne ich tłumienie „w zarodku”, wykorzystując system automatycznego sterowania samolotem uzupełniony układem pomiaru drgań konstrukcji.

Przedmiotem niniejszej pracy jest analiza aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką i przedstawienie związanych z tym problemów. Skrzydło modelowane jest za pomocą klasycznego modelu półsztywnego [1], uzupełnionego nieliniowymi charakterystykami sprężystości giętnych i skrętnych typu wielomianowego i histerezy. Przyjęto też, że w konstrukcji lotki i w jej układzie sterowania mogą występować luzy. Analiza dotyczy tłumienia nieliniowych drgań konstrukcji w których amplitudy drgań skrzydła i wychyleń lotki są małe. Nieliniowości aerodynamiczne, takie jak oderwania przepływu czy zjawiska falowe nie będą rozważane, zatem opływ skrzydła może być opisany liniowym quasi-stacjonarnym modelem aerodynamicznym [1], uzupełnionym modelem turbulencji w celu zbadania odporności układu aktywnego tłumienia drgań. Ze względu na nieliniowość modelu do analizy zadania wykorzystano podejście symulacyjne [2].

W pierwszej części pracy pokazano, że opracowany model opisuje poprawnie zarówno klasyczne liniowe drgania flatterowe giętno-skrętno-lotkowe, jak i drgania nieliniowe mające charakter cykli granicznych których źródłem są zarówno nieliniowości konstrukcyjne, jak i luzy lotki. Pokazano też odmienny wpływ różnych nieliniowości układu skrzydło-lotka na przebieg drgań aeroelastycznych, w szczególności stabilizujący wpływ nieliniowości sztywnościowych i destabilizujący wpływ histerezy, w szczególności – luzów lotki.

W drugiej części pracy do modelu skrzydła z lotką dołączono model czynnego tłumienia drgań aeroelastycznych. Użyto do tego celu klasycznej metody sterowania optymalnego liniowo-kwadratowego (LQR) w wersji uogólnionej dla zadań nieliniowych [4]. Odporność metody LQR sprawdzono wprowadzając turbulentne zaburzenia przepływu o znacznej intensywności. Następnie zbadano skuteczność tłumienia aktywnego drgań aeroelastycznych, zarówno liniowych, jak i nieliniowych. Starano się przy tym sprawdzić, czy przy pomocy sterowania LQR możliwe jest skuteczne tłumienie wszystkich rodzajów drgań aeroelastycznych występujących w analizowanym układzie. Wyniki są nieco zaskakujące, gdyż okazało się, że chociaż większość drgań aeroelastycznych, zarówno liniowych jak i nieliniowych, może być z powodzeniem tłumiona, to niektóre inne: histerezy oraz związane z luzami lotki, mogą być wytłumione tylko do pewnego (niskiego) poziomu. Warto nadmienić, że – według wiedzy autora – w literaturze przedmiotu nie ma wzmianek o nieskuteczności aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych.

2. Model aeroelastyczny skrzydła z lotką

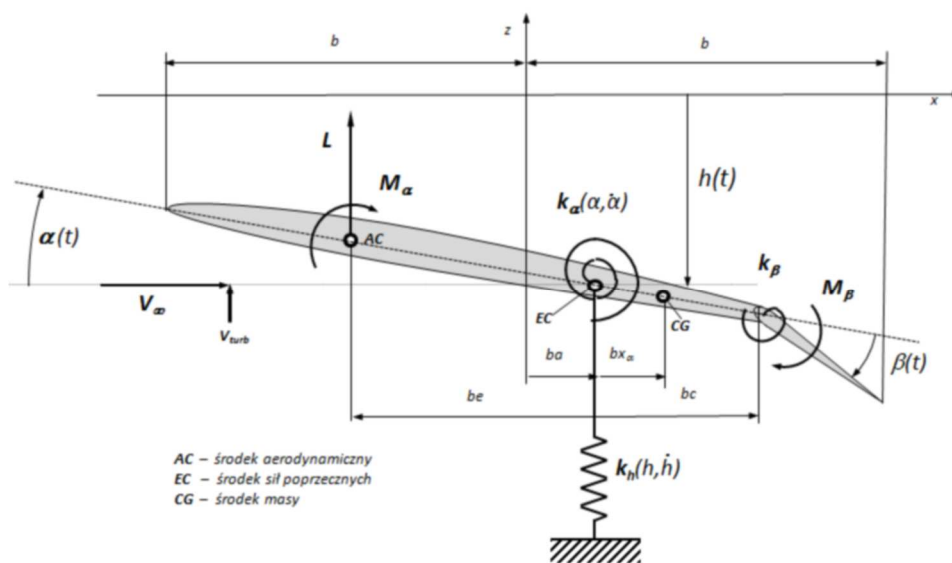
Do analizy układu czynnego tłumienia flatteru przyjęto klasyczny półsztywny model skrzydła o nieliniowych charakterystykach sprężystych z lotką (Rys.2.1) [1,2,3],

$$M_s \ddot{q} + D_s \dot{q} + K_s q + f_s(q, \dot{q}) = f_A(q, \dot{q}, \ddot{q}) + f_u(u), \quad (2.1)$$

gdzie wektor $q(t) = [h(t), \alpha(t), \beta(t)]^T$ opisuje ugięcie i skręcenie skrzydła oraz wychylenie lotki, M_s, D_s, K_s są macierzami, odpowiednio, bezwładności, tłumienia i sztywności skrzydła,

$$M_s = \begin{bmatrix} m & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & I_\beta + cS_\beta \\ S_\beta & I_\beta + cS_\beta & I_\beta \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} D_h & & \\ & D_\alpha & \\ & & D_\beta \end{bmatrix}, \quad K_s = \begin{bmatrix} k_h & & \\ & k_\alpha & \\ & & k_\beta \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$m, S_\alpha, I_\alpha, I_\beta, S_\beta$ definiują własności masowe skrzydła i lotki: masę, momenty statyczne i momenty bezwładności, zaś c jest bezwymiarową odległością osi obrotu lotki od środka sił poprzecznych, D_h, D_α, D_β opisują tłumienia konstrukcyjne w skrzydle i lotce, k_h, k_α, k_β opisują sztywności konstrukcyjne skrzydła i sztywność układu sterowania lotką, $f_s(q, \dot{q}) = [k_{nh}(h, \dot{h}), k_{n\alpha}(\alpha, \dot{\alpha}), 0]^T$ jest wektorem uogólnionych nieliniowych sił sprężystych, $f_A(q, \dot{q}, \ddot{q}) = [L, M_\alpha, M_\beta]^T$ jest wektorem obciążeń aerodynamicznych w którym L, M_α, M_β są siłą nośną, momentem aerodynamicznym skrzydła i momentem aerodynamicznym lotki, $f_u(u) = [0, 0, M_u(u)]^T$ jest wektorem uogólnionych sił sterujących w którym $M_u(u)$ jest momentem sterującym przyłożonym do lotki i zależnym od wektora sterowania u wypracowanego przez układ sterowania automatycznego.



Rys.2.1. Model aeroelastyczny półsztywny skrzydła z lotką

Nieliniowości konstrukcyjne $k_{nh}(h, \dot{h}), k_{n\alpha}(\alpha, \dot{\alpha})$ mogą mieć różną naturę. Jeżeli są one gładkie i statyczne (nie zależą od historii ruchu skrzydła), to ich linearyzacja w sąsiedztwie punktu równowagi, który odpowiada skrzydłu nieodkształconemu, jest możliwa i całkowicie uzasadniona teoretycznie [3,4,5]. Nieliniowości takiego rodzaju mogą opisywać charakterystyki sprężyste giętne lub skrętne skrzydła w postaci wielomianów (Rys.2.2.a) [3]:

$$k_{nh}(h) = k_{h3} h^3, \quad k_{n\alpha}(\alpha) = k_{\alpha2} \alpha^2 + k_{\alpha3} \alpha^3 + k_{\alpha4} \alpha^4 + k_{\alpha5} \alpha^5 \quad (2.3)$$

Modele wielomianowe (2.3) z zadowalającym przybliżeniem mogą opisywać zachowanie się konstrukcji skrzydeł kompozytowych i można je traktować jako modele zredukowane modeli pełnych, formułowanych w postaci dyskretnej przy użyciu techniki MES.

Innym rodzajem nieliniowości konstrukcyjnej jest histereza, która może być opisana modelem (Rys.2.2.b)

$$F(x, \dot{x}) = \max(-F_{\max}, \min(k(x - \text{sign}(\dot{x})\sigma), F_{\max})) \quad (2.4)$$

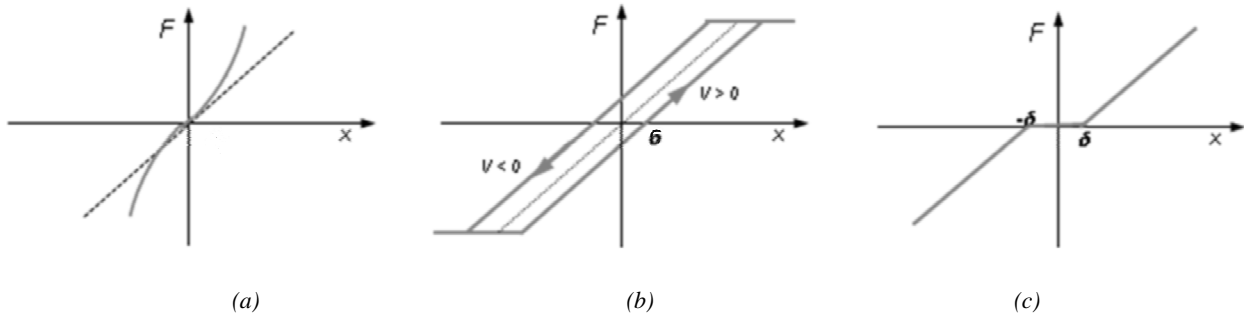
gdzie F_{\max} jest wartością graniczną siły sprężystej a σ – parametrem określającym „grubość” histerezy. Nieliniowość typu histerezy występuje dość często w układach mechanicznych, a jej

zasadniczą cechą jest ograniczona możliwość linearyzacji.

Ważnym rodzajem nieliniowości w zagadnieniach lotniczych jest luz występujący w układach sterujących powierzchni sterowych, zwłaszcza lotek (Rys.2.2.c). Dla danej wartości luzu δ zadane sterowanie u wywołuje moment sterujący $M_u(u; \delta)$ zdefiniowany jako

$$M_u(u; \delta) = \begin{cases} 0 & |u| \leq \delta \\ M(u - \text{sign}(u)\delta) & |u| > \delta \end{cases} \quad (2.5)$$

Nieliniowość (2.5) ma charakter statyczny, ale jest również trudno linearyzowalna. Najczęściej aproksymuje się ją sinusoidalną funkcją opisującą [6].



Rys. 2.2. Nieliniowości konstrukcyjne skrzydła: (a) wielomianowa statyczna Duffinga, (b) histereza dynamiczna, (c) luz statyczny

W niniejszej pracy przyjęto model aerodynamiki w którym zakłada się, że skrzydło opływane jest nieściśliwym strumieniem powietrza. Ponieważ założono, że skrzydło i lotka mogą wykonywać małe drgania przy których kąty natarcia skrzydła i lotki odpowiadają zakresowi liniowemu siły nośnej i momentów aerodynamicznych (nie występuje więc oderwanie przepływu na skrzydle lub lotce), to obciążenia aerodynamiczne mogą być opisane modelem liniowym [1,2,3]

$$f_A(q, \dot{q}, \ddot{q}) = M_A(V)\ddot{q} + D_A(V, C(k))\dot{q} + K_A(V, C(k))q, \quad (2.6)$$

gdzie: $M_A(V)$, $D_A(V, C(k))$, $K_A(V, C(k))$ są macierzami aerodynamicznymi bezwładności, tłumienia i sztywności, $C(k)$ jest funkcją Theodorsena, zaś $k = \omega b / V$ jest częstością zredukowaną (liczbą Strouhala). W pracy przyjęto, że opływ jest quasi-stacjonarny, dla którego $C(k) = 1$. Założenie quasi-stacjonarności przepływu stanowi znaczne uproszczenie modelu aeroelastycznego, ale nie zmienia istotnie wniosków dotyczących małych drgań konstrukcji sprężystej nieliniowej.

W celu pokazania wpływu zaburzeń przepływu na możliwość aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych oraz zbadania odporności metody sterowania LQR w rozważanych przypadkach, model przepływu uzupełniono modelem turbulencji postaci

$$V = V_\infty + v_{turb}(t; c_{turb}), \quad (2.7)$$

gdzie V_∞ jest prędkością przepływu niezaburzonego, $v_{turb}(t; c_{turb})$ jest prędkością zaburzeń turbulentnych, zaś c_{turb} jest parametrem opisującym intensywność turbulencji.

Model aeroelastyczny skrzydła z lotką (2.1)-(2.7) może być zapisany w postaci quasi-liniowej, zwanej *modelem parametryzowanym stanem* (State Dependent Coefficient Parametrization) [4]

$$(M_s - M_A(V))\ddot{q} + (D_s(q, \dot{q}) - D_A(V))\dot{q} + (K_s(q, \dot{q}) - K_A(V))q = b_u(u). \quad (2.8)$$

Dla celów symulacji i sterowania drganiami model (2.8) przedstawiony jest w postaci standardowej jako układ równań różniczkowych rzędu pierwszego

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.9)$$

gdzie $x = [q, \dot{q}]^T \in R^n$, $n=6$, jest wektorem stanu modelu standardowego, $u \in R^m$, $m=1$, jest wektorem sterowania, zaś $f(x, u) \in R^n$ jest wektorem nieliniowym prawych stron modelu postaci

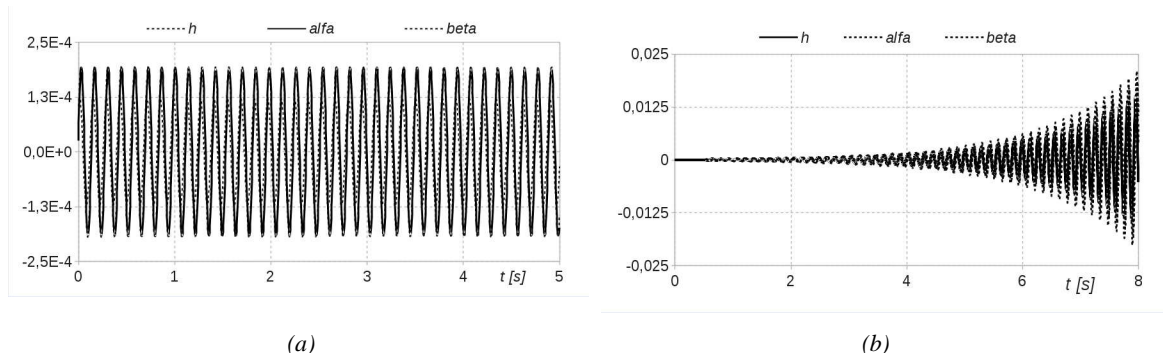
$$f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(D(q, \dot{q})\dot{q} + K(q, \dot{q})q - f_u(u)) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Model (2.9)-(2.10) zostanie wykorzystany do symulacji drgań aeroelastycznych układu skrzydła z lotką, a po uzupełnieniu modelem sterowania *LQR* – do badania aktywnego tłumienia takich drgań.

3. Analiza symulacyjna drgań aeroelastycznych skrzydła

Opracowany model posłużył do analizy symulacyjnej różnych rodzajów drgań skrzydła i lotki. Ze względu na nieliniowość modelu do analizy aeroelastycznej skrzydła oraz badania możliwości aktywnego tłumienia wykorzystano podejście symulacyjne [7,2].

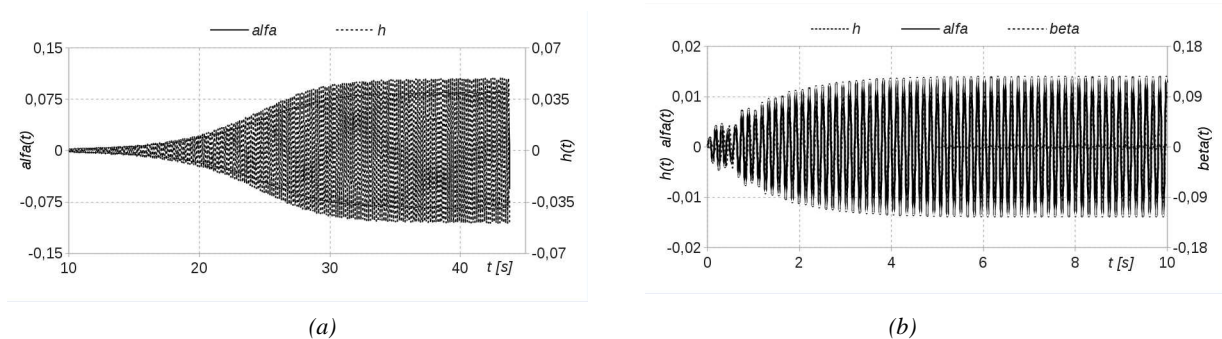
Na początek przeprowadzono symulację klasycznych rodzajów flutteru bez uwzględnienia efektów nieliniowych: flutteru giętno-skrętnego skrzydła oraz flutteru giętno-skrętno-lotkowego. Uzyskano typowe wyniki obrazujące sprzężone drgania skrzydła i lotki w rezultacie których pojawiał się flutter o rosnącej wykładniczo amplitudzie drgań. Dla przyjętych parametrów konstrukcyjnych skrzydła prędkość krytyczna flutteru wynosiła $V_{kr} = 65.90$ m/s i była niższa o ok. 10% od prędkości krytycznej flutteru giętno-skrętnego skrzydła, $V_{kr} = 71.57$ m/s, co jest zgodne z modelem klasycznym [1]. Drgania krytyczne giętne, skrętne i drgania lotki miały częstotliwości $\omega_{kr} = 44.98$ rad/s i były przesunięte w fazie o $\varphi_{\alpha-h} = 49.7^\circ$ i $\varphi_{\beta-h} = 32.1^\circ$ (Rys.3.1).



Rys. 3.1. Flutter klasyczny giętno-skrętno-lotkowy: (a) drgania na granicy stateczności $V_{kr} = 65.90$ m/s, (b) drgania nadkrytyczne, $V = 72.0$ m/s.

W następnych krokach przeprowadzono symulacje drgań skrzydła z lotką z dwoma rodzajami nieliniowości konstrukcyjnych skrzydła: statyczną postaci wielomianowej (2.3) oraz histerezową (2.4). W obu przypadkach zaobserwowano drgania skrzydła i lotki mające charakter cykli granicznych (Rys.3.2.a,b). Pojawienie się drgań związane było z przekroczeniem określonej prędkości krytycznej przepływu. W przypadku nieliniowości wielomianowej była ona równa prędkości krytycznej flutteru, zaś w przypadku nieliniowości histerezowej prędkość krytyczna była niższa niż prędkość krytyczna liniowego flutteru giętno-skrętno-lotkowego. Cechą charakterystyczną drgań związanych ze statyczną wielomianową nieliniowością sztywności skrzydła jest to, że są one gładkie i prawie harmoniczne. Drgania skrzydła z nieliniowością typu histerezy są mniej regularne i zależą od charakterystyki histerezy.

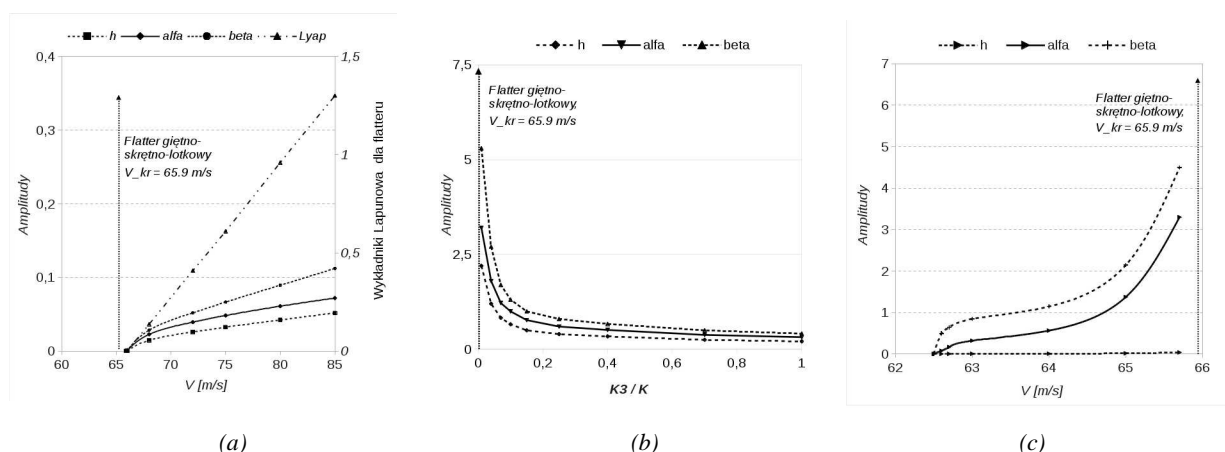
Wspólną cechą drgań nieliniowych związanych ze sprężystością skrzydła jest to, że ich amplitudy są ograniczone i rosną mniej więcej liniowo ze wzrostem prędkości opływu, czym różnią się zasadniczo od drgań we flutterze klasycznym, w którym po przekroczeniu prędkości krytycznej szybkość narastania amplitudy drgań w czasie rośnie ze wzrostem prędkości opływu, co obrazują wykładniki Lapunowa (Rys.3.3.a).



Rys. 3.2 Drgania aeroelastyczne nieliniowe: (a) wielomianowe, $V_{LCO} = 65.90 \text{ m/s} < V_{kr} = 68.50 \text{ m/s}$
(b) histerezowe LCO, $V_{LCO} = 55.23 \text{ m/s} < V_{kr} = 61.88 \text{ m/s}$.

Amplitudy drgań cykli granicznych są ograniczone nawet po znacznym przekroczeniu prędkości krytycznej flutteru klasycznego. Można więc stwierdzić, że nieliniowości charakterystyk sprężystych zapobiegają wystąpieniu flutteru klasycznego, co pozwala w miarę bezpiecznie wzbudzać drgania skrzydeł. Stopień nieliniowości sprężystej wpływa na amplitudę drgań w cyklu granicznym. Na Rys. 3.3.b przedstawiono amplitudy cykli granicznych w funkcji stosunku współczynników nieliniowych i liniowych sztywności skrzydła, k_{h3}/k_h i $k_{\alpha 3}/k_{\alpha}$. Jest widoczne, że wraz ze wzrostem udziału składnika nieliniowego amplituda cyklu granicznego maleje, zaś malejący udział nieliniowości powoduje ewolucję drgań skrzydła w kierunku flutteru liniowego.

Drgania nieliniowe związane z luzem sztywnościowym lotki również mają ograniczoną amplitudę, ale ich charakter jest całkiem inny. Prędkość krytyczna tych drgań jest mniejsza niż prędkość krytyczna flutteru giętno-skrętno-lotkowego, zaś amplitudy drgań LCO rosną szybko gdy prędkość opływu zbliża się do prędkości krytycznej flutteru (Rys.3.3.c).

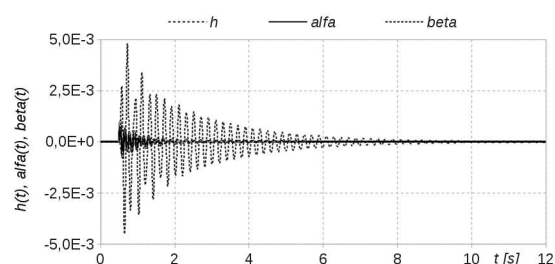


Rys. 3.3 Drgania LCO skrzydła: (a) amplitudy drgań LCO z nieliniowością statyczną oraz wykładniki Lapunowa drgań flutterowych w zakresie nadkrytycznym, (b) zależności amplitud drgań LCO skrzydła od poziomu nieliniowości statycznej, $V = 70 \text{ m/s} > V_{kr} = 65.9 \text{ m/s}$, (c) Amplitudy LCO skrzydła z lotką z luzem sztywnościowym $\delta = 0.2$, $V_{kr_LCO} = 62.5 \text{ m/s} < V_{kr} = 65.9 \text{ m/s}$.

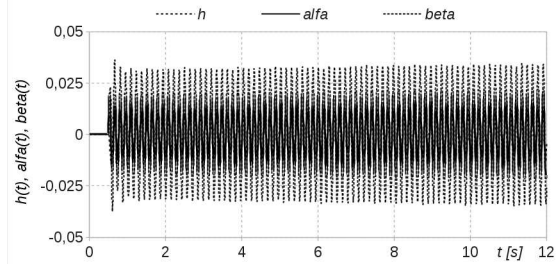
Należy zauważyć, że, w przeciwieństwie do drgań związanych z nieliniowością sprężystą skrzydła, nieliniowość związana z luzem w lotce nie zapobiega wystąpieniu flutteru klasycznego.

Zbadano także wpływ wielkości luzu w lotce na amplitudy drgań i okazało się, że w zakresie sensownym technicznie, t.j. dla $\delta < 0.2$, rosną one umiarkowanie ze wzrostem luzu. Jakościowy obraz drgań przedstawiony na Rys.3.3.c nie ulegał przy tym istotnej zmianie.

Wzbudzenie drgań nieliniowych, w przeciwieństwie do flutteru liniowego, wymaga odpowiedniego poziomu zaburzenia [2]. Na Rys. 3.4.a,b przedstawiono wzbudzenie drgań skrzydła z nieliniowością związaną z luzem w lotce. Zaburzeniem jest prędkość kątowna skręcania skrzydła.



(a)



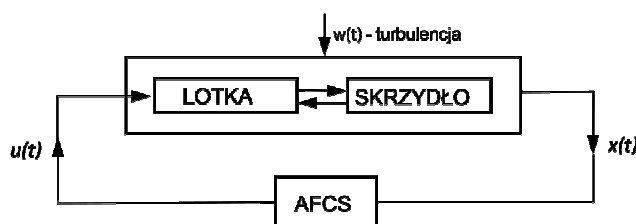
(b)

Rys. 3.4 Drgania skrzydła z lotką z luzem sztywnościowym $\delta = 0.1$, wzbudzone impulsem skrętnym
(a) 0.081 rad/s, (b) 1.0 rad/s. $V = 65.0 < V_{kr} = 65.9 \text{ m/s}$.

Przeprowadzone symulacje wykazały adekwatność przyjętego modelu do symulacji różnych rodzajów drgań nieliniowych skrzydła z lotką i stanowiły krok wstępny do etapu drugiego – analizy możliwości czynnego tłumienia takich drgań.

4. Nieliniowe sterowanie LQR

Aktywne tłumienie drgań konstrukcji lotniczych ma długą historię [7]. Niniejsza praca dotyczy aktywnego tłumienia drgań flutterowych oraz drgań nieliniowych mających charakter cykli granicznych. Idea aktywnego tłumienia drgań polega na użyciu systemu sterowania automatycznego (AFCS) w pętli sprzężenia zwrotnego (Rys.4.1).



Rys. 4.1 Model aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych skrzydła z lotką

Ruch (drżenia sprężyste) skrzydła lub lotki $x(t)$ stanowią wejście do pętli sprzężenia zwrotnego określające sterowanie ruchem lotki,

$$u = u(x), \quad (4.1)$$

zapewniające możliwie szybkie tłumienie drgań, tj. $|x(t)| < \varepsilon$, $t > t_k$, t_k – możliwie mały.

Powyższa metoda tłumienia drgań wymaga uzupełnienia systemu sterowania automatycznego układem pomiarowym pozwalającym mierzyć drżenia skrzydła i lotki $x(t)$.

Sterowanie optymalne LQR stosuje się do wyznaczenia sterowania (4.1) dla układów

dynamicznych liniowych. W naturalny sposób może ono być jednak rozszerzone na szeroką klasę układów nieliniowych [4]. Rozszerzenie to polega na parametryzacji nieliniowej zadania wektorem stanu układu $x(t)$. Wymaga to przyjęcia założenia, że model nieliniowy obiektu może być przedstawiony w postaci afinicznej

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (4.2)$$

gdzie $x(t) \in R^n$ jest wektorem stanu układu, $u(t) \in R^m$ jest sterowaniem, zaś macierze $A \in R^{n \times n}$ i $B \in R^{n \times m}$ opisują, odpowiednio, dynamikę układu sterowanego oraz dynamikę sterowania. Postać modelu (4.2) jest uzasadniona tym, że w realnych układach aeroelastycznych (i innych lotniczych) sterowanie występuje w modelu liniowo [4]. Sterowanie nieliniowe *LQR* polega na wyznaczeniu takiej macierzy wzmocnienia $K \in R^{m \times n}$ pętli liniowego sprzężenia zwrotnego

$$u = K(x)x, \quad (4.3)$$

która zapewni minimalizację funkcjonału kwadratowego odchyłek stanu i kosztu sterowania

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (4.4)$$

gdzie $Q \in R^{n \times n}$ i $R \in R^{m \times m}$ są diagonalnymi macierzami wagowymi metody *LQR*. Macierz wzmocnienia K minimalizująca funkcjonal (4.4) ma postać

$$K(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x), \quad (4.5)$$

gdzie $P \in R^{n \times n}$, $P = P^T > 0$ jest macierzą będącą rozwiązaniem stacjonarnego macierzowego równania Riccatiego

$$0 = A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x), \quad (4.6)$$

Metoda *LQR* wymaga określenia macierzy wagowych dla stanu i sterowania we wskaźniku jakości (4.4). W niniejszej pracy przyjęto diagonalne macierze wagowe:

$$Q = C^T C = \text{diag}[q_i], \quad q_i = 1.0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$R = \text{diag}[r_i], \quad r_i = 1.0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.8)$$

Tak uogólniona metoda *LQR* nosi nazwę *SDRE* (*State Dependent Riccati Equation*) – sterowanie oparte na zależnym od stanu równaniu Riccatiego [4]. Dobór macierzy Q i R dla rozważanego zadania nie jest krytyczny.

Zależność macierzy wzmocnienia $K(x)$ od stanu wymaga jej aktualizacji w każdym kroku symulacji. Nie stanowi to jednak problemu w przypadku układów o niewielkich wymiarach, $n \sim 10$.

Układ sterowania wykorzystujący metodę *SDRE* został użyty do budowy aktywnego systemu tłumienia drgań skrzydeł i lotek, zarówno liniowych, typu flatteru klasycznego giętno-skrętnego, jak i innych drgań aeroelastycznych, również silnie nieliniowych. Zostanie pokazane, że takie rozszerzenie zakresu stosowalności liniowej metody *LQR* jest możliwe i uzasadnione technicznie mimo, że nie istnieje ściśle matematyczne uzasadnienie takiego postępowania. Wiadomo jednak, że takie podejście jest szeroko stosowane w praktyce [4].

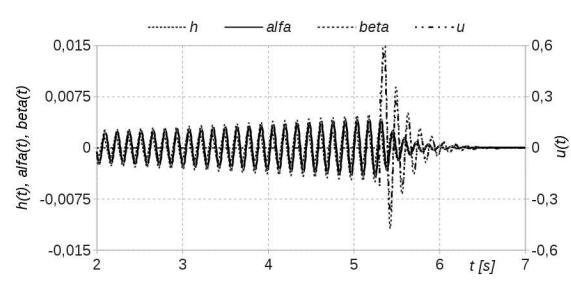
5. Tłumienie aktywne drgań aeroelastycznych

Na początek metodę *SDRE* zastosowano do aktywnego tłumienia klasycznego liniowego flatteru giętno-skrętno-lotkowego skrzydła opisanego modelem (2.1)-(2.8), bez nieliniowości konstrukcyjnych. Model jest liniowy dla wychyleń lotki mniejszych od wychyleń granicznych β_{max} ,

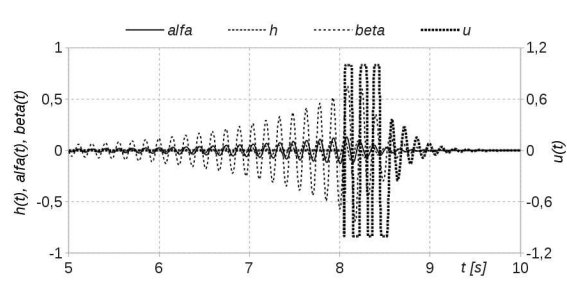
$$\beta_{\min} \leq \beta(t) \leq \beta_{\max} \quad (5.1)$$

Nieliniowość tego rodzaju ma charakter nasycenia (saturacji) i nie wpływa znacząco na możliwość aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych, gdyż przy małych amplitudach drgań lotki ograniczenie (5.1) nie jest aktywne.

Przeprowadzone symulacje pokazały, że dla prędkości lotu mniejszych od prędkości krytycznej flutteru, $V < V_{kr}$, wyznaczone sterowania bardzo skutecznie tłumią drgania skrzydła i lotki. Czas tłumienia drgań jest równy kilku okresom drgań skrzydła. Wychylenia lotki nie przekraczają zazwyczaj wartości granicznych β_{\max} . Przy prędkościach lotu większych od prędkości krytycznej flutteru, $V > V_{kr}$, tłumienie drgań także jest skuteczne (Rys.5.1.a). Nawet gdy sterowanie wyznaczone metodą *SDRE* przekracza wartości graniczne wychylenia lotki, to drgania są tłumione, choć czas tłumienia znacznie się wydłuża dochodząc do kilkunastu okresów drgań (Rys.5.1.b). Dla prędkości lotu przekraczających znacznie prędkość krytyczną flutteru układ nie jest w stanie stłumić drgań, co związane jest z ograniczeniem wychylenia lotki. Można stwierdzić, że nawet w przypadku pojawienia się w układzie drgającym nieliniowości saturacyjnej związanej z ograniczeniem kąta wychylenia lotki tłumienie drgań wykorzystujące metodę *SDRE* jest całkiem skuteczne. Wynika to z własności metody *LQR*, zapewniającej duże marginesy wzmocnienia $k \in [0.5, \infty)$ i fazy 60° [8] które są wystarczające do aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych. Nie zaobserwowano też destabilizującego wpływu nieliniowości saturacyjnej lotki na stateczność układu w zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego. Stwierdzono także, iż skuteczność tłumienia drgań w bardzo niewielkim stopniu zależy od doboru macierzy wagowych Q i R metody *SDRE*. Nawet znaczne zmiany wartości ich elementów nie powodowały istotnego zmniejszenia skuteczności tłumienia drgań. Należy zauważyć, że w innych zadaniach sterowania wybór tych macierzy jest czasami dość krytyczny [9].



(a)



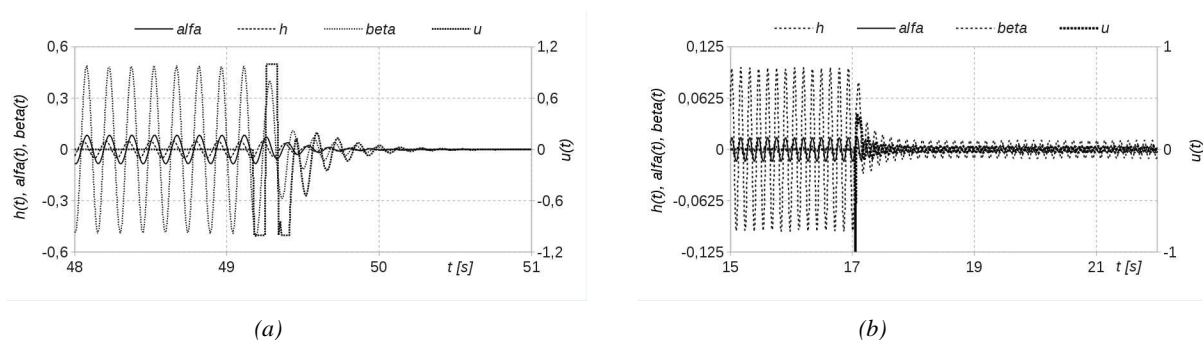
(b)

Rys. 5.1. Tłumienie drgań flutterowych nadkrytycznych, $V = 72.0 \text{ m/s} > V_{kr} = 65.90 \text{ m/s}$,
(a) liniowych (b) z nieliniowym nasyceniem sterowania.

Skrzydła z nieliniowościami konstrukcyjnymi typu wielomianowego (2.3) po przekroczeniu prędkości krytycznych zależnych od stopnia nieliniowości wykonują drgania mające charakter cykli granicznych o ograniczonych amplitudach, zależnych od prędkości lotu (Rys.5.2.a). Włączenie aktywnego tłumienia *SDRE* powoduje całkowite wytłumienie takich drgań. Czasy tłumienia są również krótkie. Nasycenie sterowania także nie wpływa znacząco na tłumienie drgań.

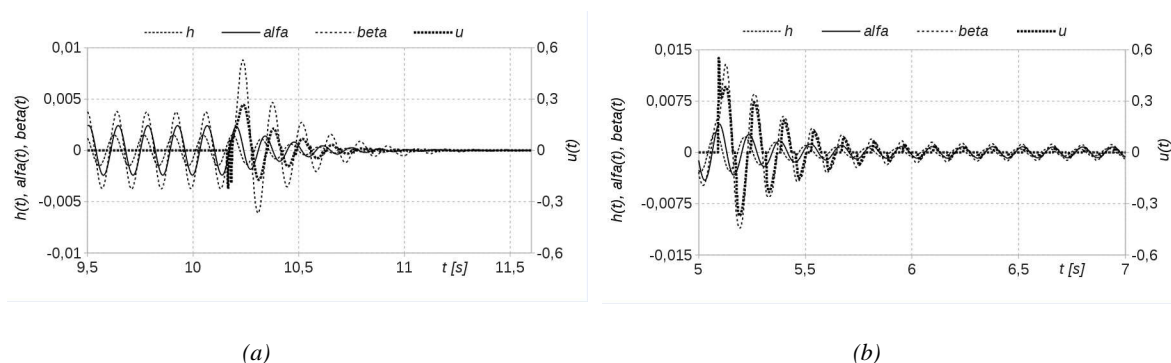
Nieliniowości konstrukcyjne histerezy są znacznie silniejsze, gdyż nie można dokonać linearyzacji modelu skrzydła w otoczeniu punktu równowagi. Skrzydła z takimi nieliniowościami również wykonują drgania o charakterze cykli granicznych po przekroczeniu prędkości krytycznych zależnych od stopnia nieliniowości, a amplitudy takich drgań zależą od prędkości lotu. Okazuje się jednak, że tłumienie drgań za pomocą metody *SDRE* nie jest w tym przypadku całkowicie skuteczne, gdyż włączenie układu tłumienia powoduje jedynie zmniejszenie amplitudy drgań cyklu

granicznego, lecz nie całkowite ich wytłumienie (Rys.5.2.b). Amplituda drgań resztkowych zależy przy tym od wielkości parametru histerezy σ .



Rys. 5.2 Drgania nieliniowe: (a) z nieliniowością wielomianową, (b) z nieliniowością histerezą.

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku nieliniowości związanej z luzem w układzie sterowania lotki (Rys.5.3). Drgania lotki z luzem mają także charakter cyklu granicznego o ograniczonej amplitudzie z charakterystycznym wypłaszczeniem przebiegów sterowania (Rys.5.3.b). Należy zauważyć, że nieliniowość związana z luzem jest wprowadzona statycznie, podobnie jak nieliniowość saturacyjna związana z ograniczeniem zakresu wychyleń lotki, lecz jej wpływ na drgania lotki jest zupełnie inny. Nieliniowość saturacyjna powoduje jedynie zmniejszenie skuteczności tłumienia drgań, lecz są one tłumione całkowicie.



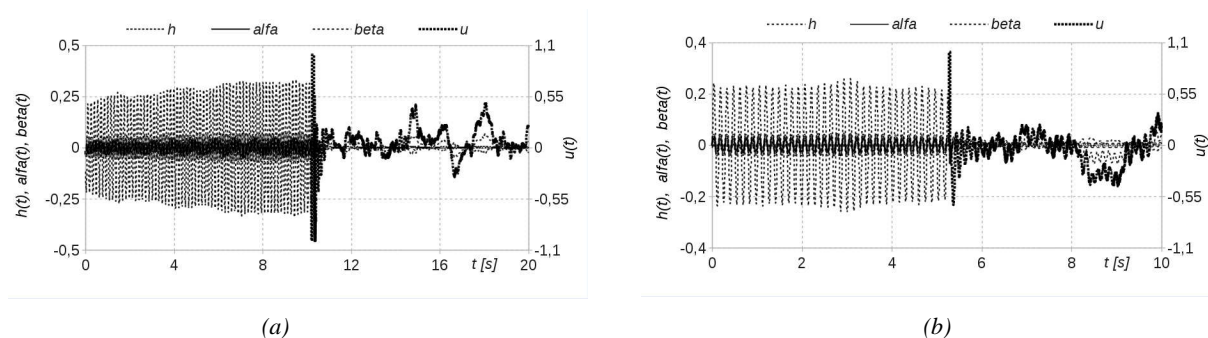
Rys. 5.3. Tłumienie drgań lotki z luzami: (a) sztywnościowym $\sigma=0.2$, (b) w układzie sterowania lotką $\delta=0.2$.

Włączenie tłumienia drgań powoduje znaczne zmniejszenie amplitudy drgań lotki, ale podobnie jak to miało miejsce w przypadku nieliniowości histerezą, nie następuje całkowite ich wytłumienie. Oznacza to, że metoda *SDRE* jest w tym przypadku również nie do końca skuteczna (Rys.5.3.b). Amplituda drgań resztkowych zależy od wielkości luzu w przybliżeniu liniowo dla $\delta < 0.2$.

Z powyższych przykładów wynika istotny wniosek, że nieliniowe drgania aeroelastyczne spowodowane histerezą lub luzem w układzie sterowania lotką nie mogą być skutecznie tłumione za pomocą metody *SDRE*. Chociaż amplituda drgań resztkowych jest na ogół niewielka, to drgania takie są wysoce niepożądane, gdyż wpływają niekorzystnie na konstrukcję skrzydła lub układ sterowania lotką. Wydaje się zatem, że do czynnego tłumienia takich drgań należy użyć metod innych niż *SDRE* czy nawet metody H_∞ .

W celu określenia odporności metody *SDRE* zbadano wpływ turbulentnych zaburzeń przepływu o różnej intensywności na skuteczność tłumienia rozpatrywanych drgań aeroelastycznych. Okazało się, że metoda *SDRE* jest odporna na takie zaburzenia, gdyż nawet bardzo znaczne wahania prędkości przepływu V , jak i podmuchy pionowe o prędkościach osiągających 10 m/s nie niwelowały efektu tłumienia. Amplitudy drgań skrzydła i lotki były znacznie mniejsze niż w

przypadku, gdy układ tłumiący był wyłączony. Miało to miejsce dla wszystkich rozpatrywanych rodzajów drgań, zarówno liniowych, jak i nieliniowych, również wtedy, gdy prędkość lotu wyraźnie przekraczała prędkość krytyczną flutteru (Rys. 5.4). Świadczy to z jednej strony o całkiem dobrej odporności metody *SDRE*, a z drugiej o tym, że jest ona dobrze dostosowana do aktywnego tłumienia drgań aeroelastycznych, co znajduje potwierdzenie w literaturze [4]. Warto nadmienić że w innych zastosowaniach metoda *SDRE* nie jest tak efektywna, co odzwierciedla się szerokim wykorzystywaniem odpornych metod H_∞ [5,8].



Rys. 5.4. Tłumienie drgań (a) flutterowych liniowych i (b) konstrukcyjnych histerezy w obecności silnych zaburzeń turbulentnych, $v_{turb} \sim 10 \text{ m/s}$.

6. Wnioski

Przeprowadzone symulacje różnych drgań aeroelastycznych układu skrzydła z lotką charakteryzującego się różnymi nieliniowościami konstrukcyjnymi, w tym luzem w układzie sterowania lotką pokazały, że prawie niezależnie od charakteru nieliniowości mają one charakter cykli granicznych o ograniczonych amplitudach, czym odróżniają się od klasycznych liniowych drgań flutterowych. Tłumienie aktywne drgań aeroelastycznych, zarówno liniowych jak i nieliniowych, może być z powodzeniem przeprowadzone przy użyciu nieliniowej wersji klasycznego sterowania optymalnego *LQR*. Okazuje się przy tym, że skuteczność tłumienia drgań, zarówno liniowych jak i nieliniowych statycznych jest bardzo wysoka, nawet w przypadku znacznej turbulencji przepływu. Wydaje się, że marginesy zapasów wzmocnienia i fazy cechujące metodę *LQR* są zupełnie wystarczające w przypadku zagadnień aeroelastycznych rozpatrywanego typu. Jednakże w przypadku nieliniowości silnych, w rodzaju histerezy lub luzu w układzie sterowania lotką skuteczność aktywnego tłumienia drgań jest niewystarczająca. Obserwuje się wprawdzie istotne zmniejszenie amplitudy cyklu granicznego takich drgań, ale nie następuje całkowite ich wytłumienie. Aktywne tłumienie drgań układów aeroelastycznych z nieliniowościami takiego typu wymaga więc użycia nieliniowych metod sterowania optymalnego, nie bazujących na koncepcji *LQR* czy H_∞ , lecz na metodach wykorzystujących koncepcje Lapunowa lub Bellmana [10].

Bibliografia

1. BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L., 1955, „Aeroelasticity”, Addison-Wesley, Cambridge, Mass.
2. DUL F.A., 1992, „METODY SYMULACYJNE BADANIA STATECZNOŚCI AEROELASTYCZNEJ”, V OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA „MECHANIKA W LOTNICTWIE”, 161-180.
3. ZHANG K., WANG Z., BEHAL A., MARZOCCA P., 2013, “Novel Nonlinear Control

- | | |
|-----|--|
| | Design for a Two-Dimensional Airfoil Under Unsteady Flow”, AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics, 36 , 6, 1681-1694. |
| 4. | CIMEN T., 2012, „Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis”, <i>Journal of Guidance, Control and Dynamics</i> , 35 , 4, 1025-1047. |
| 5. | GRIMBLE M.J., 2006, „Robust Industrial Control Systems”, J. Wiley, Chichester, West Sussex. |
| 6. | DANOWSKY B., THOMPSON P.M., 2013, „Nonlinear Analysis of Aeroservoelastic Models with Free Play using Describing Functions”, <i>Journal of Aircraft</i> , 50 , 2, 329-336. |
| 7. | DOWEL E., ET. ALL., 2004, „A Modern Course in Aeroelasticity”, Kluwer Acad. Publ., Dodrecht. |
| 8. | SKOGESTAD S., POSTLEWHITE I., 2005, „Multivariable Feedback Control”, J. Wiley, Chichester, West Sussex. |
| 9. | LEWIS F.L., DRAGUNA L.V., SYRMOS, V.L., 2012, „Optimal Control”, J. Wiley, New Jersey. |
| 10. | CHELLABOINA, V. AND HADDAD W.M., 2008, „Nonlinear Dynamical Systems and Control”, Princeton Univ. Press, New Jersey. |

Active suppression of nonlinear vibrations of wing by the methods of optimal control

Abstract

In this work the analysis of the nonlinear aeroelastic vibrations of the wing with freeplay in aileron control system and analysis of active suppression of such vibrations by means of control system based on optimal control method are presented. One assumed the model of a wing with nonlinear elastic characteristics that described its coupled bending-torsional vibrations. The flow is assumed incompressible and turbulent and the linear quasi-steady model is used for determining the aerodynamic loading. The system of active suppression of vibrations is based on linear-quadratic method of optimal control (LQR). Due to the nonlinearity of the resulting aeroelastic model the time-marching approach was used for analysis.

It has been shown that the proposed model describes well the nonlinear limit cycle oscillations of the wing that appear when velocity of flow exceeds some critical value. The time-marching analysis of active suppression of vibrations has been carried out which showed that effectiveness of the active damping depends on the character of the nonlinearity of the aeroelastic system. Vibrations of nonlinear wing with aileron without freeplay were damped successfully by control system based on linear LQR method, even in the case of relatively high turbulence of an airflow. It has also been shown, however, that in case of freeplay in the aileron control system the linear LQR based suppression system was not sufficiently effective, because it was not able to damp the vibrations entirely. The conclusion is that the active suppression of aeroelastic systems having strong nonlinearities – such as freeplays – should be handled with more general nonlinear methods of control.