Semejanza y Cíclicos

Ezra Guerrero Alvarez

27 de diciembre del 2022

1 Introducción

Dos herramientas cruciales para resolver problemas de geometría es reconocer cuando dos triángulos son semejantes (o inclusive congruentes) y cuando un cuadrilátero es cíclico. Al mejorar la habilidad de reconocer y usar semejanza y cíclicos, la geometría se vuelve más divertida.

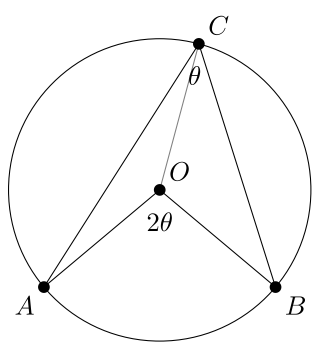
2 Cuadriláteros Cíclicos

2.1 Fundamentos

Comenzamos nuestra discusión de cuadriláteros cíclicos con un lema que sirve como el fundamento para todo lo que haremos.

Lema 1: Teorema del Ángulo Inscrito

Sean A, B, C puntos en un círculo con centro O. Entonces, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$.

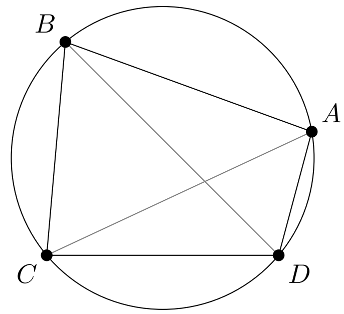


Demostración. Trazamos el segmento $\overline{\text{OC}}$. Recordemos que $OA = OB = OC$, por lo cual los triángulos $\triangle AOC$ y $\triangle BOC$ son isósceles. Por ende, $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ y $\angle OBC = \angle OCB = \beta$. Entonces, como los ángulos internos de un triángulo suman a $180°$, tenemos $\angle AOC = 180° - 2\alpha$ y $\angle BOC = 180° - 2\beta$. Sigue que

$$\angle AOB = 360° - (\angle AOC + \angle BOC) = 360° - (360° - 2\alpha - 2\beta) = 2(\alpha + \beta).$$

Como $\alpha + \beta = \angle ACB$, vemos que $\angle AOB = 2\angle ACB$, como deseábamos demostrar. ■

Ahora estamos listos para introducir los cuadriláteros cíclicos. Un cuadrilátero cíclico es, simplemente, un cuadrilátero cuyos cuatro vértices yacen en un solo círculo.



El cuadrilátero cíclico $ABCD$.

La gran utilidad e importancia de los cuadriláteros cíclicos nace de la siguiente propiedad:

Teorema 1: Ángulos en un Cíclico

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Entonces, los ángulos opuestos suman a $180°$ y los ángulos que tienden el mismo arco son iguales. Es decir,

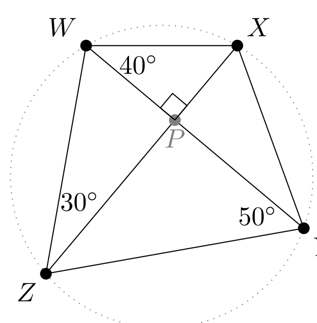
$$\angle ABC + \angle ADC = 180° \text{ y } \angle ACB = \angle ADB.$$

Ejercicio 1. Demuestra el teorema anterior usando el **Lema 1**.

Aún mejor, esta propiedad es un si y solo si. Si un cuadrilátero cumple que los ángulos opuestos suman a $180°$ o que los ángulos que tienden el mismo arco son iguales, ¡entonces podemos concluir que es cíclico! Con esto en mente, les presento mi ejemplo introductorio a los cíclicos favorito. Este ejemplo fue sacado del libro de geometría de Evan Chen:

Ejemplo 1

En el cuadrilátero $WXYZ$ con diagonales perpendiculares, tenemos $\angle WZX = 30°, \angle XWY = 40°$ y $\angle WYZ = 50°$. Calcule los ángulos $\angle WZY$ y $\angle WXY$.



Solución. Sea P la intersección de las diagonales. Como $\angle ZPY = 90°$, sigue que $\angle YZP = 90° - 50° = 40°$. Por ende, $\angle WZY = \angle WZX + \angle XZY = 30° + 40° = 70°$. Ahora, notemos que $\angle YZX = 40° = \angle YWX$. Usando el converso del **Teorema 1**, podemos concluir que $WXYZ$ es un cuadrilátero cíclico. Esto implica que los ángulos opuestos suman a $180°$, así que $\angle WXY = 180° - \angle WZY = 180° - 70° = 110°$. ■

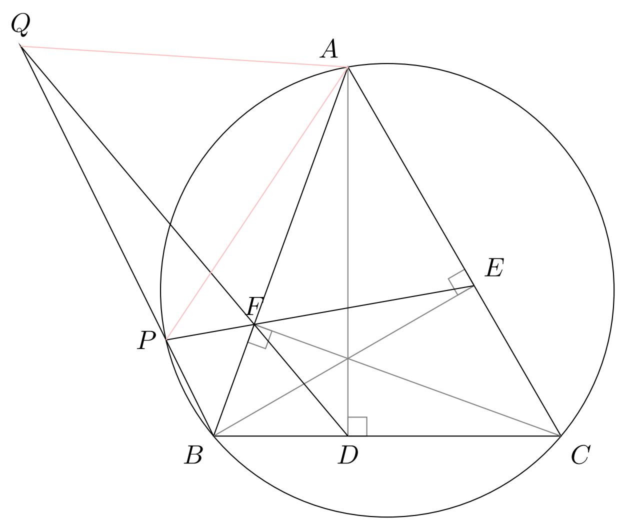
Es sumamente importante tener a los cíclicos en mente y recordar el **Teorema 1** siempre que se ataca un problema de geometría. Incontables problemas usan este teorema como paso intermedio.

2.2 Práctica

Una de las habilidades más importantes en la resolución de problemas de geometría euclideana es poder identificar cuales cuadriláteros son probablemente cíclicos. Una vez identificamos posibles sospechosos, podemos trabajar en demostrar que son cíclicos o verificar que en verdad no lo son.
Consideremos la configuración en el siguiente problema:

Ejemplo 2 (IMO Shortlist 2010 G1)

Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con D, E, F siendo los pies de altura sobre $\overline{\text{BC}}, \overline{\text{CA}}, \overline{\text{AB}}$ respectivamente. Uno de los puntos de intersección de la recta $\overline{\text{EF}}$ y el circuncírculo de $\triangle ABC$ es P. Las líneas $\overline{\text{BP}}$ y $\overline{\text{DF}}$ se intersectan en Q. Demuestra que $AP = AQ$.



Ejercicio 2. Encuentra al menos cuatro cuadriláteros cíclicos con los puntos nombrados en la configuración.
Ejercicio 3. Hay un cuadrilátero crucial para poder resolver este problema. Demuestra que $AFPQ$ es cíclico.

Una vez identificamos y demostramos que $AFPQ$ es cíclico, la solución del problema se vuelve más clara. Podemos demostrar que $\overline{\text{CF}}$ biseca el ángulo $\angle DFE$. Como $\overline{\text{AF}}$ es perpendicular a $\overline{\text{CF}}$, sigue que $\overline{\text{AF}}$ es la bisectriz *externa* del ánngulo $\angle DFE$. Equivalentemente, $\overline{\text{AF}}$ es la bisectriz externa del ángulo $\angle QFP$. Entonces, como $AFPQ$ es cíclico, vemos que A es el punto medio del arco mayor $\widehat{\text{PQ}}$, implicando $AP = AQ$, como queríamos. ■

Pregunta 1. ¿Como cambia la solución al problema si hubiéramos escogido la otra intersección de $\overline{\text{EF}}$ con el circuncírculo?

3 Triángulos Semejantes

3.1 Fundamentos

La mayoría estamos familiarizados con el concepto de dos triángulos siendo semejantes. Esto sucede cuando ambos triángulos tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Más concretamente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ son semejantes si y solo si $\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y$ y $\angle C = \angle Z$. Cuando dos triángulos son semejantes, escribimos $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$. Es crucial escribir los vértices de los triángulos en el orden correcto, pues esto nos dice exáctamente de que manera son semejantes los triángulos.

Teorema 1: Criterios de Semejanza

Las siguientes tres condiciones son equivalentes a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ siendo semejantes. Las letras en paréntesis es como usualmente abreviamos estos criterios.

(i) (AA) $\angle A = \angle X$ y $\angle B = \angle Y$.

(ii) (LAL) $\angle B = \angle Y$ y $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{XY}{YZ}$.

(iii) (LLL) $\dfrac{AB}{XY} = \dfrac{BC}{YZ} = \dfrac{CA}{ZX}$.

Un error muy común al lidiar con criterios de semejanza es suponer que el criterio "LLA" es cierto. ¡No lo es!

Ejercicio 4. Encuentra un ejemplo de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ tales que $\angle C = \angle Z$ y $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{XY}{YZ}$ pero $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ no son semejantes.

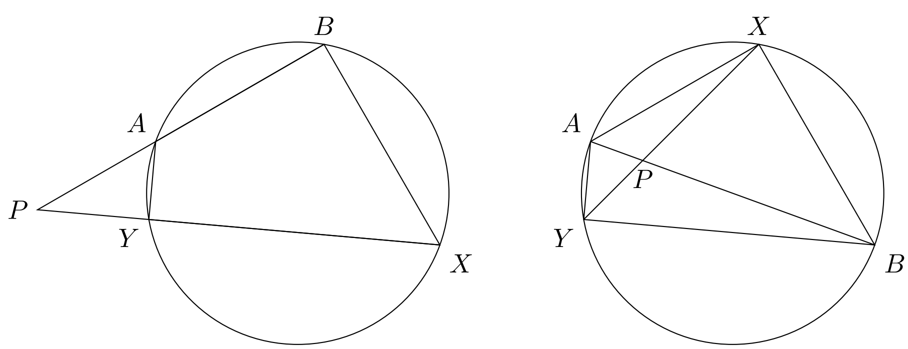
La gran utilidad de los triángulos semejantes es su habilidad de convertir relaciones de ángulos en relaciones de lados. Es así como se convierten en la forma más sencilla de "traducir" un problema de lados (resp. ángulos) a un problema de ángulos (resp. lados).

3.2 Potencia de un Punto

Una de las aplicaciones más útiles de semejanza es cuando lo conectamos con los cuadriláteros cíclicos previamente estudiados.

Teorema 2: Potencia de un Punto

Sean A, B, X, Y puntos en un círculo y P la intersección de las rectas $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{XY}}$. Se cumple que $PA \cdot PB = PX \cdot PY$.



Ejercicio 5. Demuestra que en ambos casos $\triangle PAY \sim \triangle PXB$.

Con esta semejanza a mano, extraemos la razón de lados:

$$\frac{PA}{PY} = \frac{PX}{PB},$$

la cual implica $PA \cdot PB = PX \cdot PY$ como queríamos.

Observemos lo que acabamos de hacer. Utilizamos los cíclicos para traducir una condición de yacer en un círculo a una condición de ángulos. Luego, usamos semejanza para traducir la condición de ángulos a una condición de lados. Finalmente con esta condición demostramos lo deseado. Esto ilustra el poder de las técnicas que estamos desarrollando.

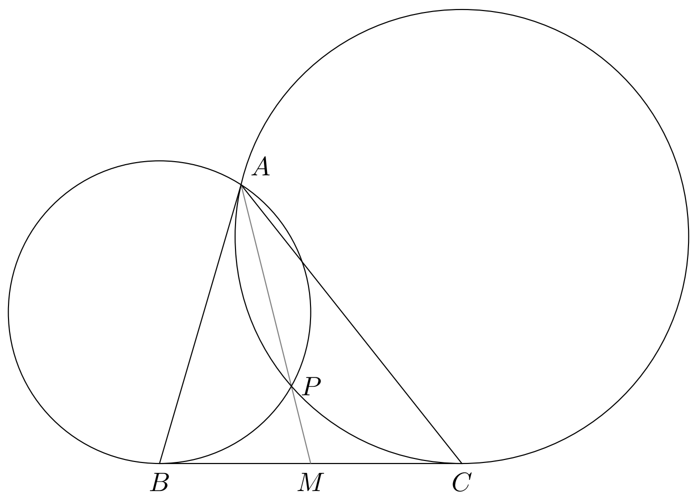
Una de las propiedades más útiles de potencia de un punto es su converso. Si tenemos puntos A, B, X, Y y P la intersección de las rectas $\overline{\text{AB}}, \overline{\text{XY}}$ y P está o en ambos segmentos $\overline{\text{AB}}, \overline{\text{XY}}$ o en ninguno, entonces $PA \cdot PB = PX \cdot PY$ implica que A, B, X, Y yacen todos en una misma circunferencia.

3.3 Práctica

Veamos un lema que servirá como ejemplo de como identificar la utilidad de potencia de un punto.

Ejemplo 3

Sea $\triangle ABC$ un triángulo y P un punto en su interior tal que $\overline{\text{BC}}$ es tangente a los circuncírculos de $\triangle APC$ y $\triangle APB$. Demuestra que $\overline{\text{AP}}$ biseca al lado $\overline{\text{BC}}$.



Como tenemos dos círculos y una línea que intersecta a los dos en los mismos puntos, potencia de un punto va a demostrar ser muy útil.

Solución. Sea M la intersección de $\overline{\text{AP}}$ con $\overline{\text{BC}}$. Por potencia de un punto desde M al círculo (ABP), vemos que $MP \cdot MA = MB^2$. Similarmente, $MP \cdot MA = MC^2$. En conclusión, $MB^2 = MC^2$, por lo cual $MB = MC$ y M es el punto medio de $\overline{\text{BC}}$ como deseábamos demostrar. ■

4 Conclusión

Con esta breve discusión sobre cíclicos, semejanza y potencia de un punto su arsenal para atacar problemas de geometría ha crecido. La próxima vez que intenten un problema de geometría, tengan estas técnicas en mente, pues alguna les puede ser útil.