Problemas de Desigualdades 1

Ezra Guerrero Alvarez

4 de agosto de 2023

1 Problemas

Los siguientes problemas se pueden resolver con creatividad y la aplicación de desigualdades como MA-MG y Cauchy-Schwarz. No necesariamente están en orden de dificultad. Los problemas fueron recolectados de The Art of Problem Solving, el siguiente folleto: Cauchy-Schwarz Inequality y de mi memoria.

1. (Lema de Titu) Sean $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$ dos secuencias de reales positivos. Demuestre que

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + \ldots + y_n}.$$

2. Sean a, b, c reales positivos. Demuestre que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

3. Sean a, b reales mayores a 1. Muestre que

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8.$$

4. Sean a, b reales positivos. Demuestre que

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

5. Sean a, b, c reales positivos. Demuestre que

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c).$$

6. (USAMO 1978/1) Dado que a, b, c, d, e son números reales tales que $a + b + c + d + e = 8$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$, determine el valor máximo posible de e.

7. (México 2011/3) Sea n un entero positivo. Encuentre todas las secuencias de números reales $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$a_{k+1} = a_k^2 + a_k - 1$$

para todo $k = 1, \ldots, n$ (suponemos que $a_{n+1} = a_1$).

8. (Desigualdad de Nesbitt) Sean a, b, c reales positivos. Demuestre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

9. (IMO 1995/2) Sean a, b, c reales positivos tales que $abc = 1$. Muestre que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

10. (Belorusia 1999) Sean a, b, c reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Muestre que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

11. Encuentre todas las 10$-$tuplas de reales $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ tales que

$$(1-x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_9 - x_{10})^2 + x_{10}^2 = \frac{1}{11}.$$

12. Sean x, y, z reales positivos. Demuestre que

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4.$$

13. Dado que $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$, demuestre que

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$