La Desigualdad del Reacomodo

Ezra Guerrero Alvarez

23 de junio de 2023

1. Introducción

La desigualdad del reacomodo es una desigualdad básica clave para comenzar a desarrollar intuición en desigualdades. En este folleto presento la desigualdad, su demostración y varios ejemplos de su uso.

2. La Desigualdad

Teorema 1: La Desigualdad del Reacomodo

Sean $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ números reales y $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ cualquier permutación de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Entonces,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n \geq a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n.$$

El caso de igualdad de la primera desigualdad es cuando $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y el caso de igualdad de la segunda es cuando $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

La demostración de esta desigualdad presenta una idea útil para varios problemas de desigualdades. Esta idea es hacer cambios pequeños en la configuración del problema y ver como cambia las cantidades relevantes del problema. Veámosla en acción:

Demostración. Consideremos dos permutaciones de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que difieren solo en intercambiar dos elementos. Sean estas permutaciones $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_s, \ldots, \alpha_n)$ y $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_n)$. Notemos que

$$(\alpha_1b_1 + \ldots + \alpha_nb_n) - (\alpha'_1b_1 + \ldots + \alpha'_nb_n) = (b_r - b_s)(\alpha_r - \alpha_s).$$

Como $r < s$, sabemos que $b_r - b_s \leq 0$. Por ende, intercambiar α_r y α_s incrementa la suma si $\alpha_r > \alpha_s$ y la decrece si $\alpha_r < \alpha_s$. Ya que esto es cierto para toda permutación y cualquier intercambio de elementos, podemos concluir que la suma máxima es cuando la permutación es $(a_1, \ldots, a_n)$ y la suma mínima es cuando la permutación es $(a_n, \ldots, a_1)$. Esto establece la desigualdad. ■

La desigualdad del reacomodo nos da una intuición muy importante: «lo que está amontonado es más grande que lo que está distribuído». Esta intuición es muy importante, pues nos ayuda a reconocer que herramientas pueden ser útiles en la resolución de desigualdades.

3. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de la desigualdad del reacomodo en uso:

Ejemplo 1 (IMO 1975 P1)

Considere dos colecciones de números $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ y una permutación $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Muestre que

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2.$$

Demostración. Notemos que la desigualdad es equivalente a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

Como $(z_1, \ldots, z_n)$ es una permutación de $(y_1, \ldots, y_n)$ tenemos que $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$, por lo que es suficiente demostrar que

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Esto es immediato por la desigualdad del reacomodo. ■

Ejemplo 2 (IMO 1964 P2)

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Muestre que

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Hay dos cosas importantes que sacar de la solución a este ejemplo. Primero, la condición de a, b, c siendo lados de un triángulo nos dice que, gracias a la desigualdad del triángulo, las expresiones $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ son todas positivas. Segundo, aplicamos un truco muy útil para desigualdades simétricas.

Demostración. Como nuestra desigualdad es simétrica en a, b, c es suficiente demostrar el caso $c \leq b \leq a$ (¿Porqué?). En este caso, demostramos que $a(b + c - a) \leq b(c + a - b) \leq c(a + b - c)$. En efecto, la primera desigualdad se justifica ya que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\begin{aligned} a(b + c - a) &\leq b(c + a - b) \\ ab + ac - a^2 &\leq bc + ab - b^2 \\ 0 &\leq bc - b^2 - ac + a^2 \\ 0 &\leq (a - b)(a + b - c). \end{aligned}$$

La segunda desigualdad se demuestra análogamente. La desigualdad del reacomodo nos dice entonces que

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq b \cdot a(b + c - a) + c \cdot b(c + a - b) + a \cdot c(a + b - c)$$

y

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq c \cdot a(b + c - a) + a \cdot b(c + a - b) + b \cdot c(a + b - c).$$

Sumando estas dos obtenemos $2(a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c)) \leq 6abc$, de donde sigue la desigualdad deseada. ■

4. Ejercicios

Termino el folleto con algunos ejercicios para aplicar la desigualdad del reacomodo.

Problema 1. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y sea $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ una permutación arbitraria de $(a_1, \ldots, a_n)$. Demuestre que $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + \ldots + a_n a_n'$.

Problema 3. Demuestre que para cualesquiera reales positivos a, b, c se tiene que

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Problema 4. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números positivos con $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Muestre que

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Problema 5. Sean a, b, c reales positivos. Muestre que

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$