Transformaciones en Geometría

Ezra Guerrero Alvarez

29 de junio de 2023

1 Introducción

Una técnica muy útil y divertida en la resolución de problemas de geometría es utilizar varias transformaciones geométricas. Ya sea una rotación, traslación, homotecia, semejanza en espiral o alguna otra transformación del plano euclideano, considerar dichas transformaciones y su efecto en la configuración que trabajamos puede resultar ser muy útil.

Para los propósitos de este folleto, denotaremos el plano euclideano en el que viven nuestras figuras por $\mathbb{E}^2$. Una transformación es una función $T : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$. Todas las transformaciones que usaremos en este folleto son biyecciones.

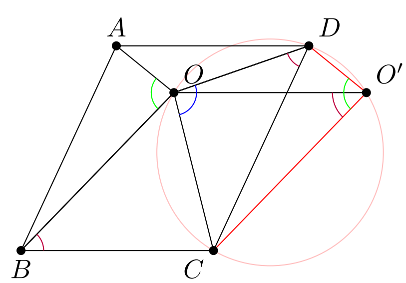
2 Isometrías

Una isometría es una transformación que preserva distancias y ángulos. Por ello, si I es una isometría y $\mathcal{F}$ es cualquier figura, sabemos que $I(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$. Varias de las transformaciones más comunes son isometrías: traslaciones, rotaciones y reflecciones. Hay dos tipos de isometrías: las que preservan orientación y las que reversan orientación. Las traslaciones y rotaciones siempre preservan orientación. Una reflección por un punto es una rotación de 180° por ese punto, así que también preserva orientación. Sin embargo, una reflección por una línea es un ejemplo de una isometría que reversa la orientación.
La utilidad de las isometrías surge de la cantidad de propiedades que conservan. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1 (Traslación)

El punto O está situado dentro del paralelogramo $ABCD$ tal que $\angle AOB + \angle COD = 180°$. Demuestre que $\angle OBC = \angle ODC$.

Los paralelogramos pueden ser una buena señal de una traslación oculta en el problema. En este caso, aprovechamos el paralelogramo y la condición $\angle AOB + \angle COD = 180°$ para generar un cuadrilátero cíclico que resuelve el problema.



Demostración. Consideremos la traslación T que lleva $A \mapsto D$ y $B \mapsto C$. Sabemos que tal traslación existe pues $ABCD$ es un paralelogramo. Sea $O' = T(O)$. Esto nos dice que $ADO'O$ y $BCO'O$ son paralelogramos. Además, como una traslación es una isometría, sabemos que los ángulos $\angle AOB$ y $T(\angle AOB)$ van a tener la misma medida. Pero $T(\angle AOB) = \angle DO'C$, así que tenemos $\angle AOB = \angle DO'C$. Ahora, notemos que $\angle DO'C + \angle COD = \angle AOB + \angle COD = 180°$, por lo que $OCO'D$ es un cuadrilátero cíclico. Entonces, obtenemos que $\angle OBC = \angle OO'C = \angle ODC$ tal como deseábamos demostrar. ■

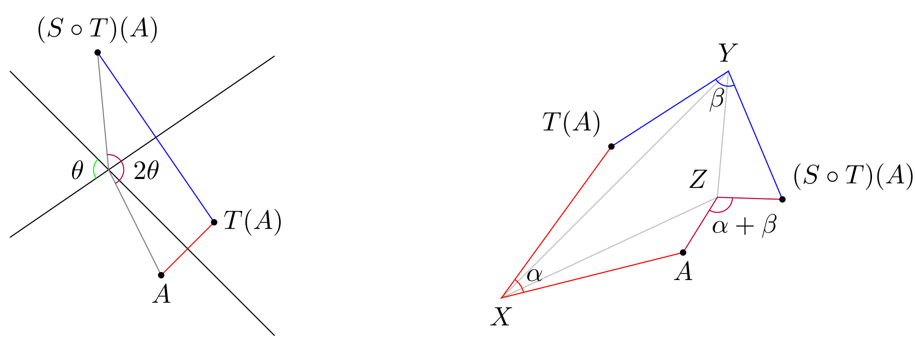
Ahora, introducimos la idea de componer transformaciones. Dados dos transformaciones S, T, la transformación $S \circ T$ es la transformación que obtenemos al hacer T y luego S. Enfoquémonos en componer isometrías.

Teorema 1: Composición de Isometrías

Los siguientes hechos de componer isometrías son muy útiles:

- Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos líneas no paralelas y sea θ el ángulo entre ellas. Si S es una reflección por ℓ_1 y T es una reflección por ℓ_2, entonces $S \circ T$ es una rotaciónd de 2θ por el punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_2.
- Si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, reflejar por una y luego por la otra produce una traslación.
- Sean X, Y dos puntos distintos en el plano. Si S es una rotación de α por X y T es una rotación de β por Y, tal que $\alpha + \beta \neq 360° \cdot k$, entonces $S \circ T$ es una rotación de $\alpha + \beta$.
- Si $\alpha + \beta = 360° \cdot k$ entonces rotar por X y luego por Y produce una traslación.

La siguiente imagen ilustra los puntos 1 y 3:



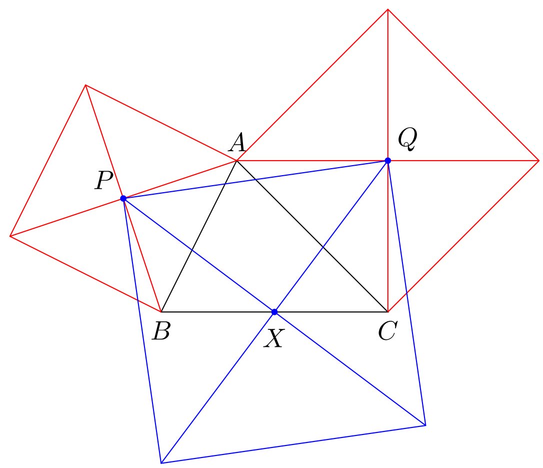
El punto Z es el centro de la rotación que resulta de componer las rotaciones por X y por Y. Es el punto de intersección de la rotación de $\overline{\mathrm{XY}}$ por X por un ángulo de $-\alpha/2$ y la rotación de $\overline{\mathrm{XY}}$ por Y por un ángulo de $\beta/2$. Notemos que la rotación por X refleja Z por la línea $\overline{\mathrm{XY}}$ y la rotación por Y lo regresa a su posición original. Por ende, $(S \circ T)(Z) = Z$. Como el único punto fijo de una rotación es su centro, esto ilustra porque Z es el centro de la composición.
Con respecto a la orientación, estas composiciones tienen sentido. Si tenemos dos reflecciones, cada una revierte la orientación, por lo que es lógico que su composición sea una isometría que preserva orientación. Asimismo, componer dos isometrías que preservan orientación debería resultar en otra isometría que preserva orientación y este es en efecto el caso.

Veamos un ejemplo que ilustra estas ideas:

Ejemplo 2 (Rotación)

Se construyen cuadrados con centros P, Q, R sobre los lados del triángulo ABC en el exterior del triángulo. Luego, se construyen cuadrados con centros X, Y, Z sobre los lados del triángulo PQR en el interior del triángulo. Demuestre que X, Y, Z son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.

Notemos que es suficiente demostrar el resultado para un lado del triángulo, pues los otros tres serán demostrados de manera completamente análoga. En base a la siguiente figura, demostramos que X es el punto medio del lado $\overline{\mathrm{BC}}$.



Demostración. Sea R_1 la rotación de $90°$ por P que lleva $B \mapsto A$ y sea R_2 la rotación de $90°$ por Q que lleva $A \mapsto C$. Dichas rotaciones existen pues $PA = PB$ y $QA = QC$ con $\angle BPA = \angle AQC = 90°$. Sea $S = R_2 \circ R_1$. Por un lado, S es una rotación de $90° + 90° = 180°$ que lleva $B \mapsto C$. Por ende, S es la rotación de $180°$ por el punto medio de $\overline{\mathrm{BC}}$. Por otro lado, si rotamos la línea $\overline{\mathrm{PQ}}$ $-90°/2 = -45°$ por P obtenemos la línea $\overline{\mathrm{PX}}$ y si la rotamos $90°/2 = 45°$ por Q obtenemos la línea $\overline{\mathrm{QX}}$. Esto nos indica que X es el centro de la rotación $R_2 \circ R_1$. Como el centro de una rotación es único, sigue que X es el punto medio del segmento $\overline{\mathrm{BC}}$ como buscábamos demostrar. ■

3 Homotecia

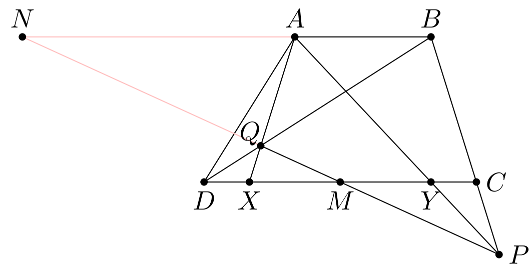
Nuestro primer ejemplo de una transformación que no es una isometría son las homotecias o dilataciones. Dado un centro de homotecia O y una razón k, la imagen de un punto P es el punto P' en la línea $\overline{\mathrm{OP}}$ tal que $\dfrac{OP'}{OP} = k$.

Tengo un folleto dedicado a la homotecia y una de sus aplicaciones más importantes. Pueden accederlo presionando el siguiente enlace: Homotecia y el Círculo de los Nueve Puntos

Ejemplo 3 (Homotecia)

Sea $ABCD$ un trapecio con $\overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{CD}}, AB < CD$, sea P un punto en el rayo $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en el exterior del segmento $\overline{\mathrm{BC}}$ y sea M el punto medio de $\overline{\mathrm{CD}}$. La línea $\overline{\mathrm{PM}}$ intereca $\overline{\mathrm{BD}}$ en Q y las líneas $\overline{\mathrm{AQ}}$ y $\overline{\mathrm{AP}}$ intersecan el lado $\overline{\mathrm{CD}}$ en X y Y respectivamente. Demuestre que M es el punto medio de $\overline{\mathrm{XY}}$.

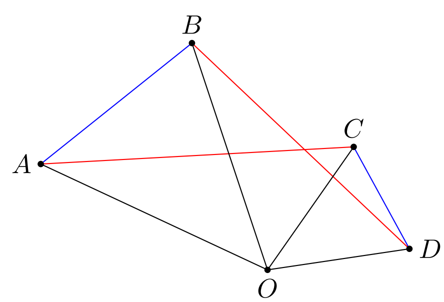
La propiedad clave que usaremos para este problema es que la composición de dos homotecias es una homotecia. Además, notamos que las homotecias tienen exactamente un punto fijo: su centro.



Demostración. Como $\overline{\mathrm{DX}} \parallel BA$ y Q es la intersección de $\overline{\mathrm{DB}}$ y $\overline{\mathrm{XA}}$, sigue que hay una homotecia con centro Q que lleva $\overline{\mathrm{DX}} \mapsto \overline{\mathrm{BA}}$. De la misma manera vemos que hay una homotecia con centro P que lleva $\overline{\mathrm{BA}} \mapsto \overline{\mathrm{CY}}$. Consideremos la composición de estas dos homotecias. Primero, vemos que D va a C y X va a Y. Sea N la intersección de $\overline{\mathrm{PQ}}$ y $\overline{\mathrm{AB}}$. Como M está en la línea $\overline{\mathrm{DX}}$, N está en la línea $\overline{\mathrm{AB}}$ y M, Q, N son colineales, observamos que la imagen de M bajo la homotecia con centro Q es N. Luego, observamos que la imagen de N bajo la homotecia con centro P es M. Por ello, la composición tiene a M como punto fijo. Como la composición de dos homotecias es una homotecia, sigue que M es el centro de la homotecia. Ya que $D \mapsto C$, sabemos que la razón es -1, por lo que la imagen de X siendo Y nos indica que $MX = MY$ y M es el punto medio de $\overline{\mathrm{XY}}$ como buscábamos demostrar. ■

4 Semejanza en Espiral

La última transformación que veremos en este folleto es la semejanza en espiral o rotomotecia. Esta es la composición de una rotación y una homotecia con el mismo centro. Lo más útil de estas transformaciones son los triángulos semejantes que produce. Por ejemplo, si O es el centro de una semejanza en espiral que lleva $\overline{\mathrm{AB}} \mapsto \overline{\mathrm{CD}}$, podemos demostrar que $\triangle AOB \sim \triangle COD$ y $\triangle AOC \sim \triangle BOD$.

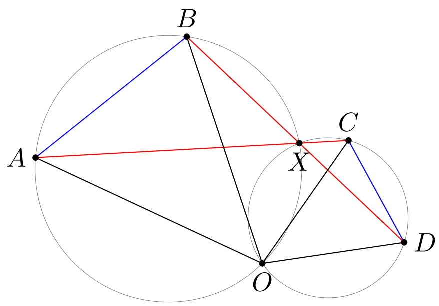


Notemos que la segunda semejanza nos indica que O también es el centro de una semejanza en espiral que lleva $\overline{\mathrm{AC}} \mapsto \overline{\mathrm{BD}}$. Ahora, veamos un teorema muy útil para identificar semejanzas en espiral y encontrar sus centros.

Teorema 2: Centros de Semejanzas en Espiral

Sean $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{CD}}$ dos segmentos y sea X la intersección de $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BD}}$. Si los circuncírculos de ABX y CDX se intersecan de nuevo en O, entonces O es el centro de la semejanza en espiral que lleva $\overline{\mathrm{AB}} \mapsto \overline{\mathrm{CD}}$.

Demostración. Es suficiente demostrar que $\triangle AOB \sim \triangle COD$. Veamos por los cíclicos que $\angle OAB = 180^\circ - \angle OXB = \angle OXD = \angle OCD$. De manera similar concluimos que $\angle OBA = \angle ODC$. Con eso demostramos la semejanza de triángulos y por ende la semejanza en espiral. ■

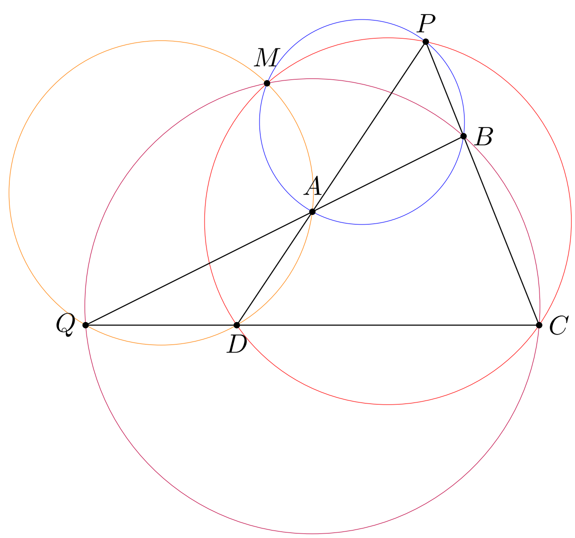


Con nuestro conocimiento de semejanza en espiral ahora podemos demostrar un teorema fundamental de los cuadriláteros completos:

Teorema 3: El Teorema de Míquel

Sea $ABCD$ un cuadrilátero con ningún par de lados paralelos. Sea P la intersección de $\overline{\text{AD}}$ con $\overline{\text{BC}}$ y sea Q la intersección de $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$. Entonces, los circuncírculos de PAB, PCD, QDA y QBC concurren en un punto M, llamado el *punto de Míquel* del cuadrilátero completo $ABCD$.

Resulta que el punto de Míquel es el centro de varias semejanzas en espiral, lo cual usamos para demostrar el teorema.



Demostración. Sea M la segunda intersección de los circuncírculos de PAB y PCD. Por el Teorema 2, sabemos que M es el centro de la semejanza en espiral que lleva $\overline{\text{AB}} \mapsto \overline{\text{DC}}$. Entonces, M también es el centro de la semejanza en espiral que lleva $\overline{\text{AD}} \mapsto \overline{\text{BC}}$. Usando el Teorema 2 otra vez, vemos que esto implica que M yace en los circuncírculos de QDA y QBC. Esto demuestra el resultado. ■

5 Ejercicios

Problema 1 (IMO 1997 P2). En el triángulo ABC, el ángulo A es el más pequeño. Sea U un punto en el arco menor $\widehat{BC}$. Las mediatrices de $\overline{\mathrm{AB}}$ y $\overline{\mathrm{AC}}$ intersecan el segmento $\overline{\mathrm{AU}}$ en V y W, respectivamente. Las rectas $\overline{\mathrm{BV}}$ y $\overline{\mathrm{CW}}$ se intersectan en T. Demuestre que $AU = TB + TC$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ninguno de sus ángulos internos igual a $60°$. Encuentre todos los pares de puntos (E, F) tales que $AE = BE, BF = CF$ y el triángulo DEF es equilátero.

Problema 3 (BAMO 2013 P3). Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Considere los circuncentros de los triángulos ABH, BCH y CAH. Demuestre que son los vértices de un triángulo congruente al triángulo ABC.

Problema 4 (IMO Shortlist 2006 G3). Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{y} \quad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Las diagonales $\overline{\mathrm{BD}}$ y $\overline{\mathrm{CE}}$ se intersecan en P. Demuestra que la línea $\overline{\mathrm{AP}}$ biseca al lado $\overline{\mathrm{CD}}$.