Homotecia y el Círculo de los Nueve Puntos

Ezra Guerrero Alvarez

29 de diciembre del 2022

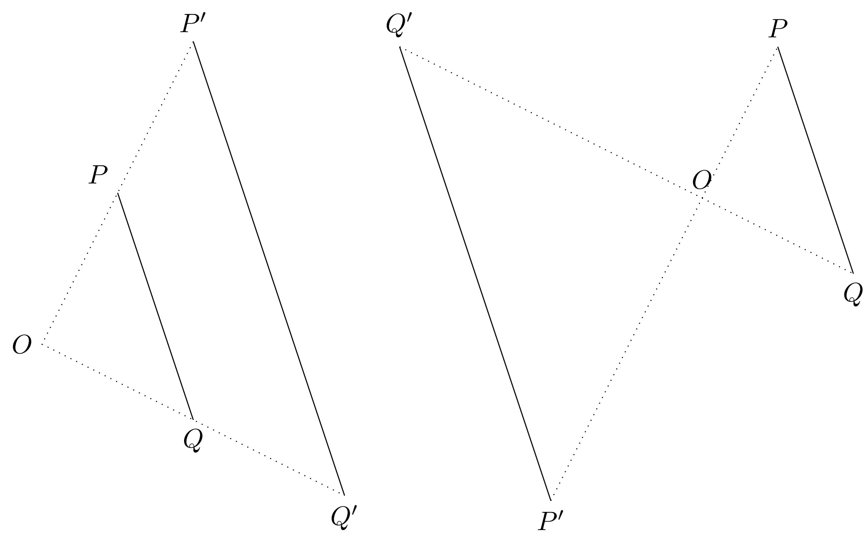
1 Introducción

De las herramientas más útiles en la resolución de problemas de geometría es tener transoformaciones en nuestro arsenal. Estas incluyen rotaciones, traslaciones y, una de mis favoritas, las homotecias.

2 Fundamentos

2.1 ¿Qué es una Homotecia?

Una homotecia, o dilatación, es una transformación del plano euclideano. Tiene un centro O y una razón o radio k. Envía cada punto P al punto P' en la recta $\overline{\mathrm{OP}}$ tal que $\dfrac{OP'}{OP} = k$, donde la razón es negativa si y solo si P y P' están en lados opuestos de O.



El segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$ y su imagen tras una homotecia con centro O y razón $k = 2$ y $k = -2$ respectivamente.

Ejercicio 1. Sea $\overline{\mathrm{PQ}}$ un segmento y O un punto no en la recta $\overline{\mathrm{PQ}}$. Demuestre que la imagen de $\overline{\mathrm{PQ}}$ bajo cualquier homotecia con centro O es un segmento paralelo a $\overline{\mathrm{PQ}}$.
Ejercicio 2. Demuestre que la imagen de un círculo bajo cualquier homotecia sigue siendo un círculo.

Las homotecias son sumamente útiles por la cantidad de triángulos semejantes que involucran. Cualquier solución con homotecia puede traducirse a una solución que usa solamente semejanzas, pero es evidente que las homotecias ayudan mucho en ambos reconocer el camino a la solución y simplificar el trabajo de redactarla.
El siguiente lema ayuda a reconocer cuando hay homotencias escondidas en la figura:

Lema 1: Paralelas Inducen Homotecia

Sean $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$ dos segmentos paralelos. Si P es la intersección de las rectas $\overline{\text{AC}}$ y $\overline{\text{BD}}$, entonces existe una homotecia con centro P que lleva A a C y B a D.

Ejercicio 3. Demuestra este lema.

3 Homotecias en un Triángulo

3.1 El Centroide

El centroide (o baricentro o gravicentro o centro de gravedad) de un triángulo es la intersección de las medianas. Debido a la gran cantidad de paralelas involucradas con los puntos medios, es muy fácil que aparezcan homotecias cuando el centroide está involucrado.

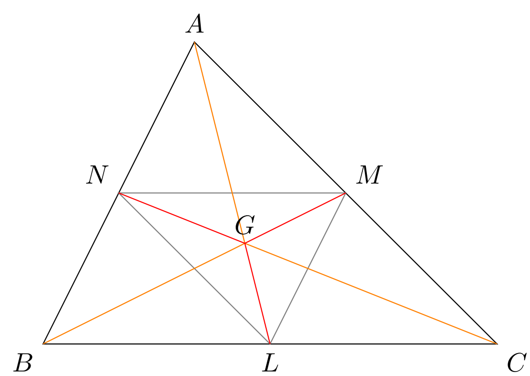
Teorema 1: El Centroide Existe

En un triángulo, sus tres medianas concurren en un punto G, el cual llamamos centroide.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo y L, M, N los puntos medios de los lados $\overline{\text{BC}}, \overline{\text{CA}}, \overline{\text{AB}}$ respectivamente. Sea G la intersección de $\overline{\text{BM}}$ y $\overline{\text{CN}}$. Recordemos que $\overline{\text{MN}} \parallel \overline{\text{BC}}$. Entonces, el **Lema 1** implica que existe una homotecia con centro G que lleva B a M y C a N. Ahora, esta homotecia debe llevar A a la intersección de la paralela a $\overline{\text{AB}}$ por M y la paralela a $\overline{\text{AC}}$ por N, es decir, L. Entonces, A, G, L son colineales y las tres medianas coinciden como deseábamos. ■

En esta anterior demostración encontramos que hay una homotecia con centro G que lleva el $\triangle ABC$ al $\triangle LMN$. Podemos observar que esta homotecia debe tener razón $-\frac{1}{2}$, lo cual nos permite concluir que

$$\frac{AG}{GL} = \frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = 2.$$



3.2 El Ortocentro del Triángulo Medial

El siguiente resultado es útil para nuestra discusión:

Lema 2: El Circuncentro es el Ortocentro del Triángulo Medial

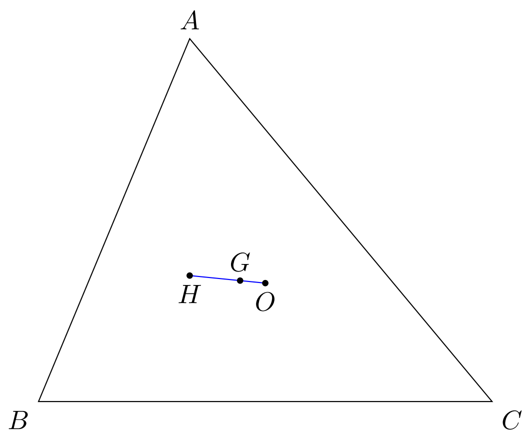
Sea $\triangle ABC$ un triángulo, O su circuncentro y $\triangle LMN$ su triángulo medial. Entonces, O es el ortocentro del $\triangle LMN$.

Ejercicio 4. Demuestra este lema.

Sabemos que hay una homotecia con centro G y razón $-\frac{1}{2}$ que lleva el triángulo $\triangle ABC$ al triángulo $\triangle LMN$. ¿Cuál es la imagen de H, el ortocentro de $\triangle ABC$? Debe ser el ortocentro de $\triangle LMN$, que por el **Lema 2** sabemos es O, el circuncentro de $\triangle ABC$. Concluimos que O, G, H son colineales, con G entre O y H y que

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}.$$

La recta que pasa por el circuncentro, ortocentro y centroide se le conoce como la recta de Euler.



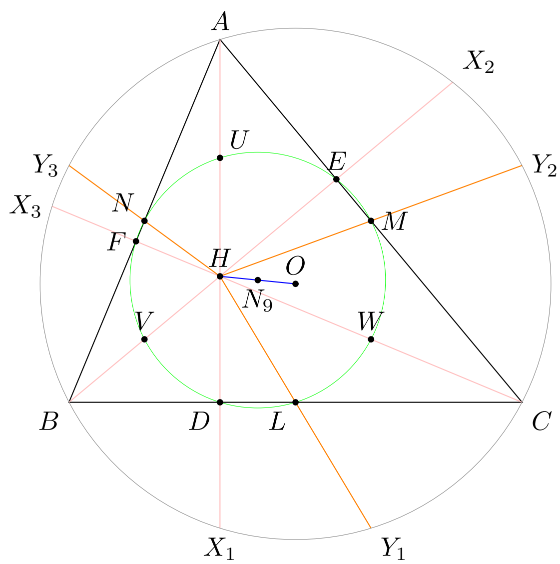
4 El Círculo de los Nueve Puntos

Recordemos el siguiente resultado involucrando el ortocentro y reflexiones:

Teorema 2: Reflexiones del Ortocentro

Sea $\triangle ABC$ un triángulo, H su ortocentro y L el punto medio del segmento $\overline{\text{BC}}$. Sea X la reflexión de H sobre el segmento $\overline{\text{BC}}$ y Y la reflexión de H sobre L. Entonces, X y Y están en el circuncírculo del $\triangle ABC$ y $\overline{\text{AY}}$ es un diámetro.

Si aplicamos este teorema en los tres lados del triángulo, obtenemos la siguiente figura:



Veamos que es lo que pasa cuando aplicamos una homotecia con centro H y razón $\frac{1}{2}$. Sean D, E, F los pies de altura desde A, B, C respectivamente y L, M, N los puntos medios de $\overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}, \overline{\mathrm{AB}}$ respectivamente. Finalmente, sean U, V, W los puntos medios de $\overline{\mathrm{AH}}, \overline{\mathrm{BH}}, \overline{\mathrm{CH}}$. Como $A, B, C, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ son concíclicos, sigue que sus imágenes son concíclicas también. Por ende, $D, E, F, L, M, N, U, V, W$ están todos en el mismo círculo. Este es el famoso Círculo de los Nueve Puntos. Su centro es el punto medio de $\overline{\mathrm{OH}}$. Además, por el **Teorema 2**, los segmentos $\overline{\mathrm{UL}}, \overline{\mathrm{VM}}, \overline{\mathrm{WN}}$ son diámetros del círculo de los nueve puntos.
¡El círculo de los nueve puntos es sorprendentemente útil! Nunca olviden que los puntos medios de los lados, los pies de altura, y los puntos medios de los segmentos $\overline{\mathrm{AH}}, \overline{\mathrm{BH}}, \overline{\mathrm{CH}}$ yacen todos en la misma circunferencia. Más de un problema es simplificado bastante cuando tienen esto en mente.

5 Conclusión

Las homotecias son una herramienta muy aplicable en problemas de geometría. Es muy útil para desarrollar intuición y simplifica el trabajo de redactar una solución masivamente. Además, muchos resultados y configuraciones conocidas son consecuencias de homotecias escondidas en la figura, reconocer estas puede ser un paso crucial en la resolución de un problema.