Coordenadas Cartesianas y Rectángulos

Ezra Guerrero Alvarez

28 de diciembre del 2022

1 Introducción

Algunos problemas de geometría que se miran frecuentemente en las OHM y los selectivos departamentales involucran rectángulos. Para este estilo de problemas y otros involucrando muchas perpendiculares, aplicar coordenadas cartesianas puede ser muy útil.

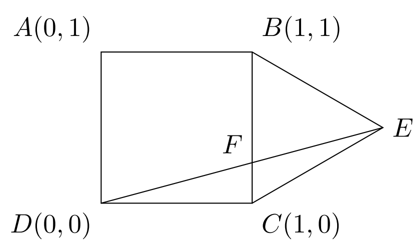
2 Fundamentos

La utilidad tras coordenadas cartesianas nace de colocar nuestra figura geométrica en el plano cartesiano. Una vez aquí, podemos usar nuestro conocimiento de coordenadas para obtener las coordenadas de cada punto en la figura. Luego, con esta información podremos intentar concluir lo que nos pide el problema. Miremos un ejemplo:

Ejemplo 1

Sea $ABCD$ un cuadrado y E un punto en su exterior tal que $\triangle BEC$ es equilátero. Los segmentos $\overline{\mathrm{BC}}$ y $\overline{\mathrm{DE}}$ se intersecan en F. Calcule $\dfrac{BF}{FC}$.

La mención de un cuadrado sugiere de por si el uso de coordenadas cartesianas. Colocaremos nuestra figura en el plano cartesiano, con D en el origen y C en el punto $(1,0)$ (notemos que podemos suponer sin perdida de generalidad que $CD = 1$, pues el tamaño de la figura no altera nada de la configuración). Al ser $ABCD$ cuadrado, obtenemos A y B immediatamente, $A = (0,1)$ y $B = (1,1)$.



Ahora, usando que $\triangle BEC$ es equilátero podemos encontrar las coordenadas de E. Su coordenada y será la mitad de las de B y C, así que es $\frac{1}{2}$. Por otro lado, la altura del triángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, así que su coordenada x es $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces,

$$E = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Ahora, intersectar líneas en coordenadas cartesianas es sencillo. Sacamos la ecuación de cada línea y resolvemos el sistema. $\overline{\mathrm{BC}}$ es la línea $x = 1$ y $\overline{\mathrm{DE}}$ es la línea $y = \frac{1}{2+\sqrt{3}}x$, así que su intersección es el punto $F = \left(1, \frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)$. Finalmente, $BF = 1 - \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ y $FC = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, así que $\dfrac{BF}{FC} = 1 + \sqrt{3}$. $\blacksquare$

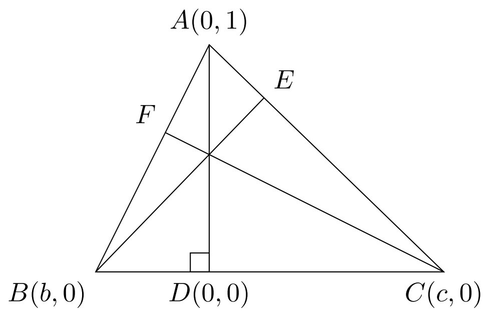
En el problema anterior, cabe notar que D no era nuestra única posible elección de origen. Pudimos haber usado cualquier vértice del cuadrado o inclusive el punto medio de $\overline{\mathrm{BC}}$ como origen y escogiendo bien los ejes x y y, el problema siempre hubiera podido ser resuelto.

Las coordenadas cortesianas pueden ser útiles aún si no hay un rectángulo involucrado. Demostremos la existencia del ortocentro con cartesianas.

Ejemplo 2 (El Ortocentro)

En un triángulo $\triangle ABC$, demuestre que las tres alturas se intersecan en un mismo punto H. A este punto le llamamos *ortocentro*.

Sean D, E, F los pies de altura desde A, B, C respectivamente. Colocaremos el origen en D, con el eje x coincidiendo con el lado $\overline{\mathrm{BC}}$ y el eje y coincidiendo con la altura $\overline{\mathrm{AD}}$. Ajustamos el plano tal que $A = (0, 1)$.



Como es imposible darle valor númerico a las coordenadas de B y C, dejamos que sean $(b, 0)$ y $(c, 0)$ respectivamente. Ahora, notemos que $\overline{\mathrm{BE}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$. Como la línea $\overline{\mathrm{AC}}$ tiene ecuación $y = -\frac{x}{c} + 1$, sigue que la línea $\overline{\mathrm{BE}}$ tiene pendiente c. Como pasa por B, $\overline{\mathrm{BE}}$ tiene ecuación $y = c(x-b)$. De manera similar concluimos que $\overline{\mathrm{CF}}$ tiene ecuación $y = b(x - c)$. Vemos que estas dos líneas se intersecan en el punto $H := (0, -bc)$. Ahora, como $\overline{\mathrm{AD}}$ es el eje y, concluimos que H está sobre la línea $\overline{\mathrm{AD}}$, por lo que $\overline{\mathrm{AD}}, \overline{\mathrm{BE}}, \overline{\mathrm{CF}}$ concurren en un punto como deseábamos demostrar. ■

3 Resultados Útiles

A continuación presento dos resultados útiles para hacer cálculos con coordenadas cartesianas.

Lema 1: Área de un polígono

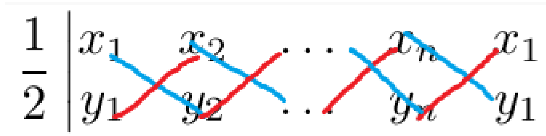
Sea $P_1P_2 \dots P_n$ un polígono convexo, donde el punto P_i tiene coordenadas (x_i, y_i). El área del polígono es dada por

$$[P_1P_2 \dots P_n] = \frac{1}{2} \left|(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + \dots + x_1y_n)\right|.$$

Pueden recordar la fórmula más facilmente de la siguiente manera:

$$[P_1P_2 \dots P_n] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_1 \end{vmatrix},$$

donde evalúan el término multiplicado por $\frac{1}{2}$ de la siguiente manera:



Multiplican los términos unidos por líneas, los azules positivos, los rojos negativos.

Demostraremos el resultado cuando $n = 3$, es decir, para un triángulo. Tomemos como base el lado $\overline{\mathrm{P_2P_3}}$. Su longitud es $\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$. Deseamos calcular la longitud h de la altura desde P_1 para calcular el área usando la fórmula $[P_1P_2P_3] = \frac{1}{2}P_2P_3 \cdot h$. Sabemos que $\overline{\mathrm{P_2P_3}}$ tiene ecuación

$$y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_2) + y_2,$$

por lo cual la altura desde P_1 tiene ecuación

$$y = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}(x - x_1) + y_1.$$

Resolviendo este sistema, si el pie de altura tiene coordenadas (x, y) encontramos que

$$\begin{aligned} x - x_1 &= (y_3 - y_2)\frac{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ y - y_1 &= (x_2 - x_3)\frac{(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Usando esto, encontramos que

$$\begin{aligned} [P_1P_2P_3] &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \frac{|(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)|}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}|(y_3 - y_2)(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)| \\ &= \frac{1}{2}|x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|, \end{aligned}$$

tal como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 1. Usando el resultado para un triángulo, demuestra el lema para todo polígono.

Lema 2: Distancia a una Línea

Sea ℓ la línea con ecuación $Ax + By + C = 0$. La distancia del punto $P = (x_1, y_1)$ a ℓ está dada por

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ejercicio 2. Demuestra este resultado.

Ejercicio 3. Usa el **Lema 2** para encontrar la longitud de la altura de un triángulo. ¿Ven como esta fórmula simplifica masivamente el cálculo de la demostración del **Lema 1**?

4 Conclusión

Cabe notar que las coordenadas cartesianas no son factibles para todo problema. Usualmente pueden ser utilizadas si el problema involucra rectángulos o bastantes ángulos rectos, pero incluso para estos problemas puede resultar muy complicado. Generalmente, esta técnica analítica puede ser útil para varios problemas, pero no dependan de ella para todo problema. Dependan más en su intuición geométrica y experiencia con problemas similares, pues usualmente todos estos problemas tendrán una solución sintética.