# Geodesics in Schwarzschild Metric

Candidate: Federico De Paoli
Supervisor: Prof. Albino Perego

Bachelor degree in Physics,
University of Trento

September 18, 2024

# Introduzione

- Perché è necessaria la Relatività Generale
- Cos'è la metrica di Schwarzschild
- Studio delle geodetiche come strumento per capire la metrica
- Soluzioni numeriche alle equazioni del moto di una particella massiva

# Il moto di una particella libera

Possiamo descrivere il moto di una particella libera tramite il principio variazionale

### Principio di Minima Azione

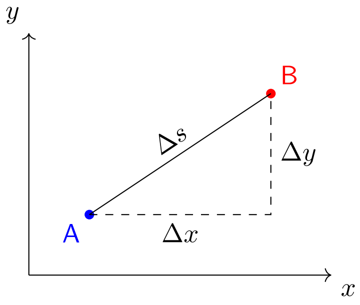
Una particella libera che si muove da $A$ a $B$ segue il percorso che minimizza la distanza tra i due punti.

Il problema si può quindi ricondurre a come si misura *correttamente* una **distanza**?

# Misurare le Distanze

Meccanica Newtoniana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

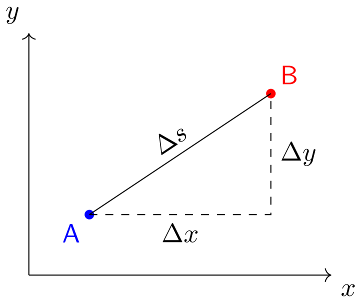



Rappresentazione 2D ($x$, $y$) di $\Delta s^2$.

# Misurare le Distanze

Meccanica Newtoniana

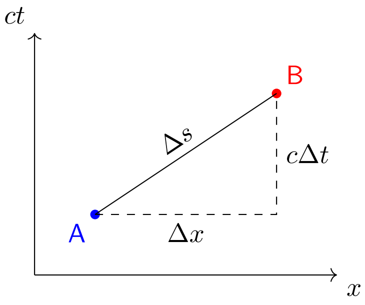
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$




Rappresentazione 2D ($x$, $y$) di $\Delta s^2$.

Relatività Ristretta

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$




Rappresentazione 2D ($x$, $ct$) di $\Delta s^2$.

# Riformulazione della Meccanica

È utile definire la metrica

$$\eta_{\nu\mu} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} t & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}s^2 = \eta_{\nu\mu}\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\mu$$

$\mathrm{d}s^2$ si chiama **elemento di linea**, ha le seguenti proprietà:

- è uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali
- determina la geometria dello spaziotempo

# Il Problema della Forza di Gravità

La forza di gravità tra due masse $m_1$ e $m_2$, posizionate in $r_1(t)$ e $r_2(t)$, **non è compatibile con la relatività ristretta**. Infatti

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|r_1(t) - r_2(t)|^2}$$

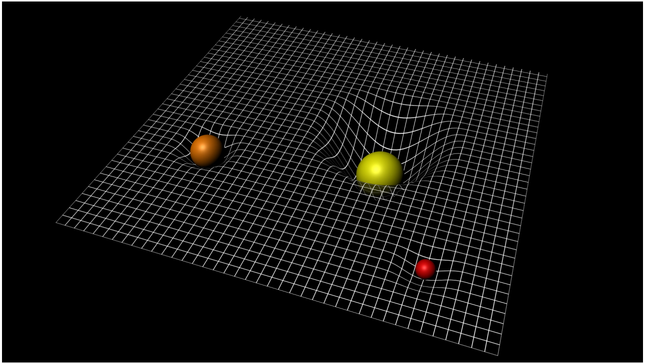
- Nella teoria di Newton dovrebbe essere istantanea
- $|r_1(t) - r_2(t)|$ dipende dal sistema di riferimento

# Una Nuova Teoria

### Relatività Generale

La massa di un oggetto non da origine alla forza di gravità, ma curva lo *spaziotempo* stesso.

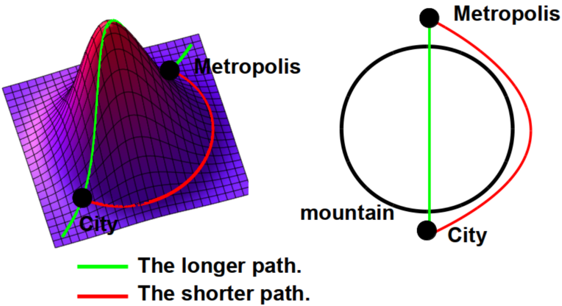
L'elemento di linea $\mathrm{d}s^2$ si dovrà calcolare in modo diverso.



*https://www.esa.int*

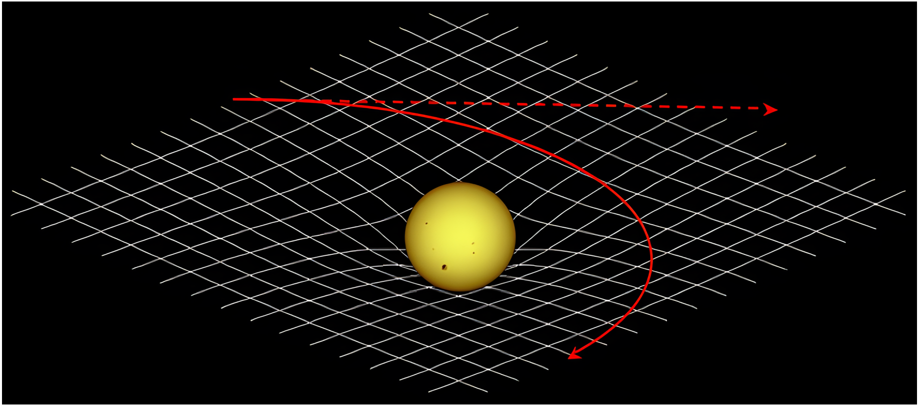
# Il Moto nello Spazio Curvo

La distanza più breve tra due punti in uno spazio curvo non è più una retta




*https://www.thephysicsmill.com*

# Geodetiche: le *Rette* dello Spazio Curvo

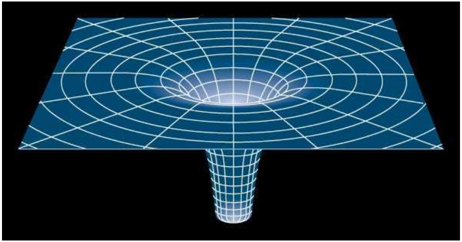


# La Metrica di Schwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Descrive uno spaziotempo stazionario e a simmetria sferica

- stella sferica
- buco nero



https://www.physicsforums.com/

# La Metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$g_{\nu\mu} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} t & r & \theta & \phi \end{array} \\ \begin{array}{c} t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{array} & \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

$r = 0$ singolarità fisica

$r = 2M$ singolarità di coordinate

$r \to \infty$ metrica di Minkowski

# La Metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

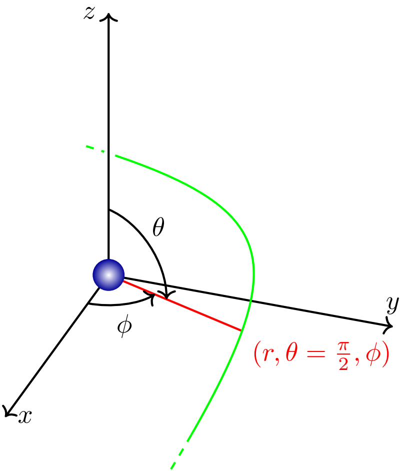
È indipendente da $t$ e $\phi \implies$ vettori di Killing associati

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad \eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

Possiamo trovare delle costanti del moto

$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$
$$l = \eta \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

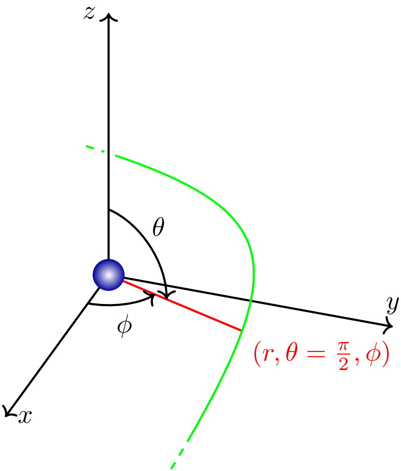
# L'Orbita Giace su un Piano




$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{l}{r^2}$$

# L'Orbita Giace su un Piano

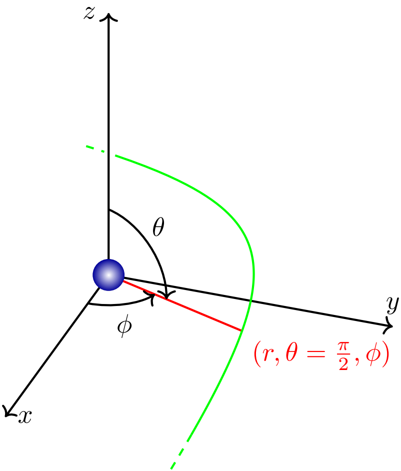



$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{l}{r^2}$$

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} \right)$$

# L'Orbita Giace su un Piano



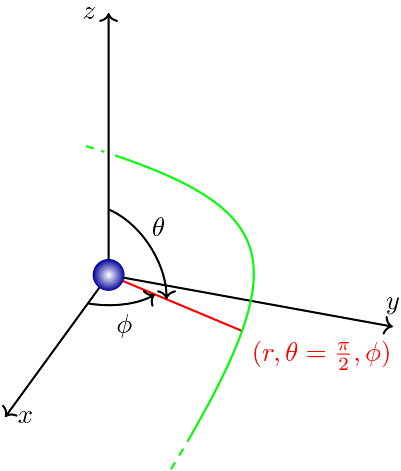

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{l}{r^2}$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$$

# L'Orbita Giace su un Piano




$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}}$$
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{l}{r^2}$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$$

# Equazione radiale

Possiamo ricondurci a un'espressione famigliare

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2r^2} - \frac{M}{r} - \frac{Ml^2}{r^3}}_{V_{\text{eff}}}$$

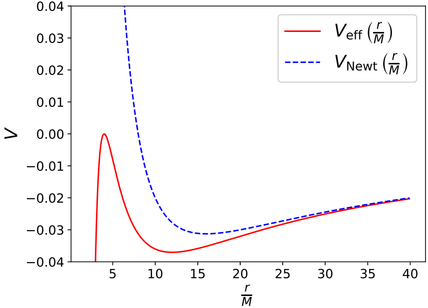
$$\mathcal{E} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

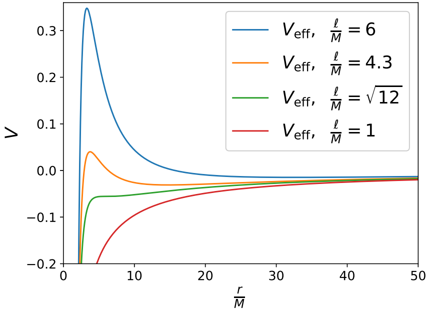
Ricordando che

$$V_{\text{New}} = \frac{l^2}{2r} - \frac{M}{r}$$

# Il Potenziale Efficacie $V_{\text{eff}}$

Per $l > \sqrt{12}M$ il potenziale efficace un minimo $(r_{\min})$ e un massimo $(r_{\max})$ locali

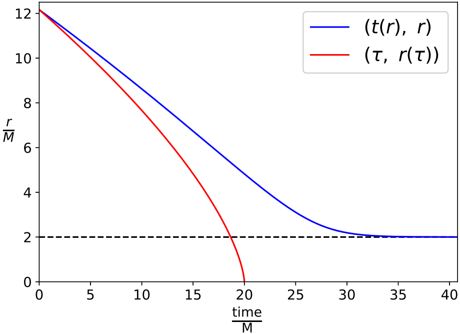



$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2r^2} - \frac{M}{r} - \frac{Ml^2}{r^3}$$

# Caduta Libera Radiale

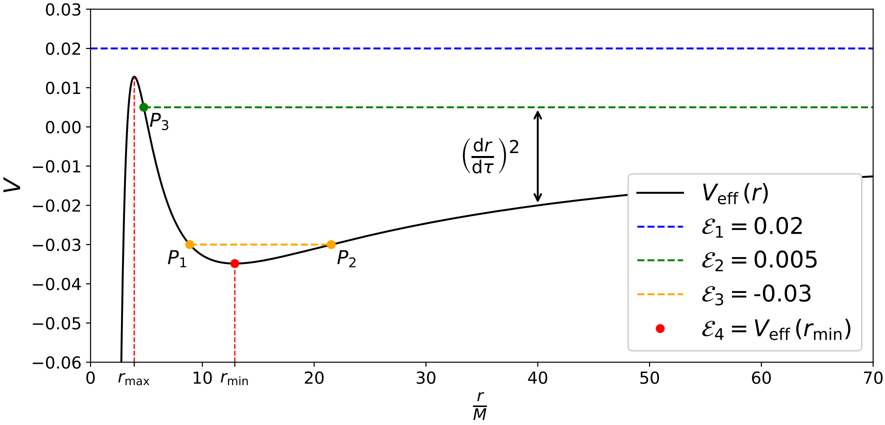
Consideriamo $l = 0$, $\mathcal{E} = 0$, c'è una soluzione analitica




$$r(\tau) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2M)^{1/3}(\tau_* - \tau)^{2/3}$$

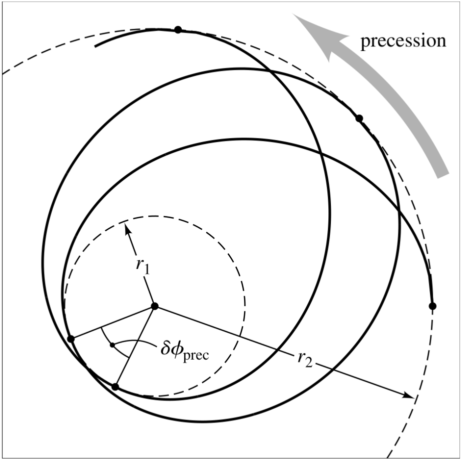
$$t(r) = t_* + 2M\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + \ln\left|\frac{(r/2M)^{1/2}+1}{(r/2M)^{1/2}-1}\right|\right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r, l)$$




Per $l > \sqrt{12}M$

# Orbite Stabili: Precessione




$$\delta\phi = \Delta\phi - 2\pi$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\ell}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm\sqrt{e^2 - \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

$$\Delta\phi = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{l}{r^2}\left[e^2 - \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{-1/2} \mathrm{d}r$$

# Raggi di luce

Le uniche differenze sono la normalizzazione della velocità

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

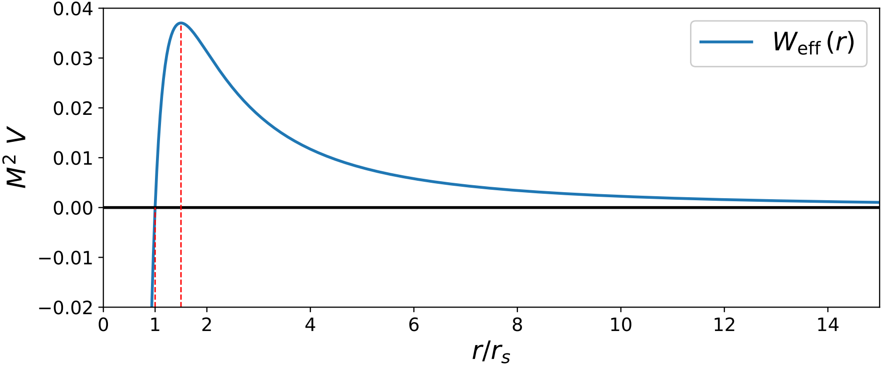
e l'utilizzo di un parametro $\lambda$ al posto di $\tau$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{e}{1 - \frac{2M}{r}} \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{l}{r^2}$$

$$\implies e^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \ell^2 \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}_{W_{\text{eff}}}$$

# Il Potenziale Efficacie $W_{\text{eff}}$

Ha solo un massimo $W_{\text{eff}}(r = 3M) = \frac{1}{27M^2}$

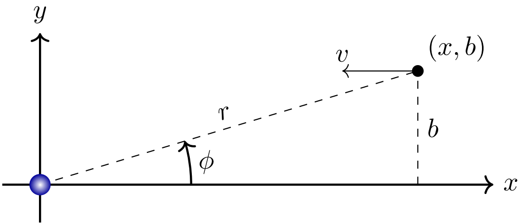



$$W_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

# Il Parametro d'Impatto

Grazie alla possibilità di ridefinire $\lambda \to l^2\lambda$ possiamo scrivere

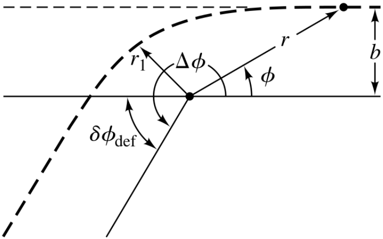
$$\frac{1}{b^2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + W_{\mathrm{eff}}(r) \qquad \text{dove} \quad b = \left|\frac{\ell}{e}\right|$$



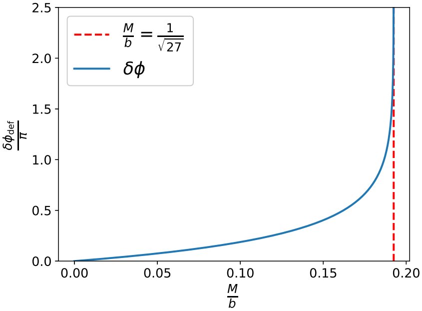

Se $x \gg b$ allora $b$ è il parametro d'impatto

# Deflessione della Luce

$$\delta\phi = 2\int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{-1/2} \mathrm{d}r$$



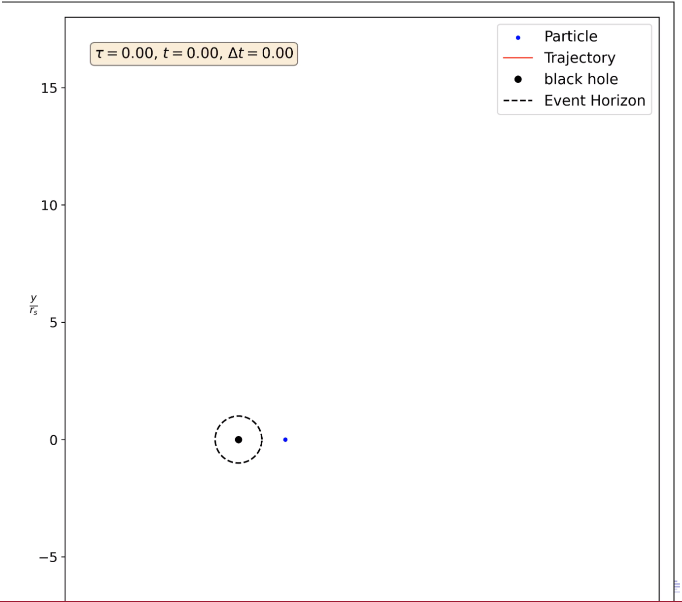

Da *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, Hartle*



# Titolo slide

argomenti capitolo 2

# Video on the computer



# Conclusions

conclusione