

Geodesics in Schwarzschild Metric

Candidate: Federico De Paoli
Supervisor: Prof. Albino Perego

Bachelor degree in Physics,
University of Trento

September 18, 2024



Introduzione

- Cos'è la relatività generale e perché esiste
- Cos'è la metrica di Schwarzschild
- Studio delle geodetiche come strumento per capire la metrica
- Soluzioni numeriche alle equazioni del moto di una particella massiva

Il moto di una particella libera

Possiamo descrivere il moto di una particella libera tramite il principio variazionale

Principio di Minima Azione

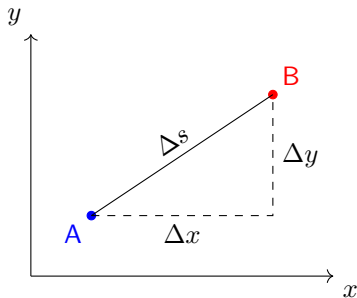
Una particella libera che si muove da A a B segue il percorso che minimizza la distanza tra i due punti.

Il problema si può quindi ricondurre a come si misura *correttamente* una **distanza**?

Misurare le Distanze

Meccanica Newtoniana

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

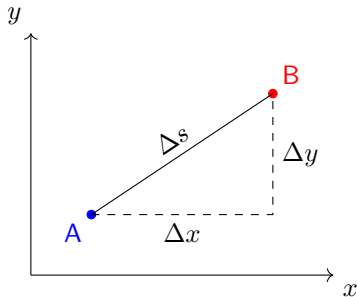


Rappresentazione 2D (x, y) di Δs^2 .

Misurare le Distanze

Meccanica Newtoniana

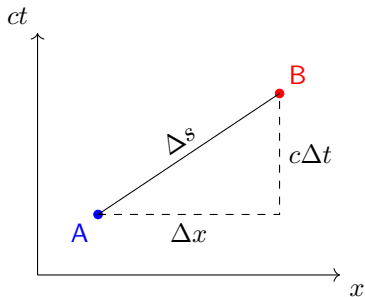
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Rappresentazione 2D (x, y) di Δs^2 .

Relatività Ristretta

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Rappresentazione 2D (x, ct) di Δs^2 .

Riformulazione della Meccanica

È utile definire la metrica

$$\eta_{\nu\mu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} t & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} t \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad ds^2 = \eta_{\nu\mu} dx^\nu dx^\mu$$

ds^2 si chiama **elemento di linea**, ha le seguenti proprietà:

- è uguale per tutti i sistemi di riferimento inerziali
- determina la geometria dello spaziotempo

Il Problema della Forza di Gravità

La forza di gravità tra due masse m_1 e m_2 , posizionate in $r_1(t)$ e $r_2(t)$, **non è compatibile con la relatività ristretta**. Infatti

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|r_1(t) - r_2(t)|^2}$$

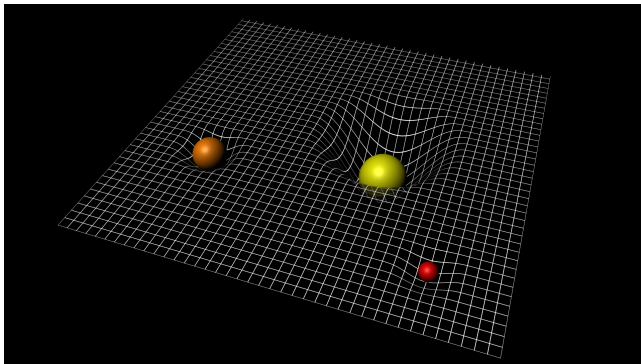
- Nella teoria di Newton dovrebbe essere istantanea
- $|r_1(t) - r_2(t)|$ dipende dal sistema di riferimento

Una Nuova Teoria

Relatività Generale

La massa di un oggetto non dà origine alla forza di gravità, ma curva lo *spaziotempo* stesso.

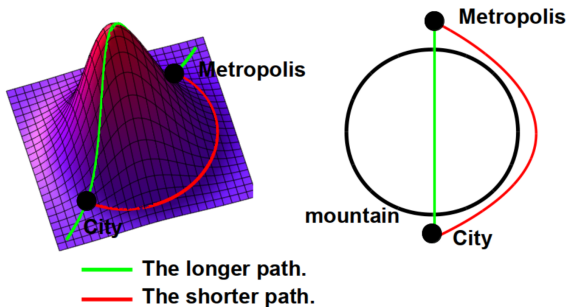
L'elemento di linea ds^2 si dovrà calcolare in modo diverso.



<https://www.esa.int>

Il Moto nello Spazio Curvo

La distanza più breve tra due punti in uno spazio curvo non è più una retta



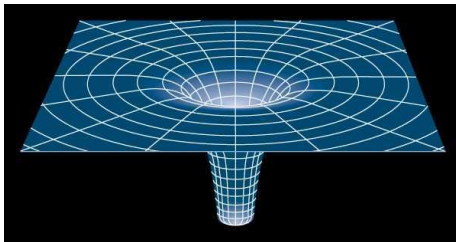
<https://www.thephysicsmill.com>

La Metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Descrive uno spaziotempo stazionario e a simmetria sferica

- stella sferica
- buco nero



<https://www.physicsforums.com/>

La Metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Singularità

- $r = 0$
- $r = r_s = 2M$

Per $r \rightarrow \infty$ si recupera la metrica di Minkowski

La Metrica di Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

È indipendente da t e $\phi \implies$ Killing vector associati

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad \eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

Possiamo trovare delle costanti del moto

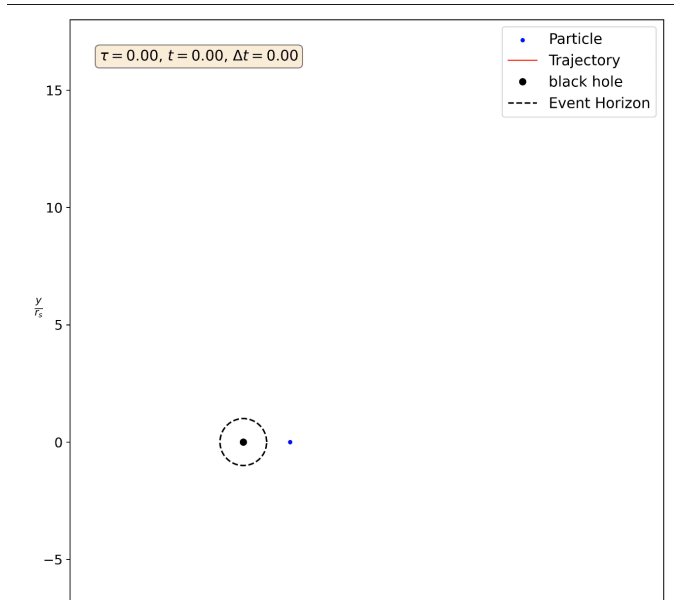
$$e = -\xi \cdot \mathbf{u} = \left(-\frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}$$

$$l = \eta_\mu u^\mu = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$$

Titolo slide

argomenti capitolo 2

Video on the computer



Conclusions

conclusione