Progetto Finale per Fisica Computazionale 1: calcolo del redshift nell'emissione di fotoni da una stella di neutroni

A lezione abbiamo visto le equazioni che descrivono la stabilitá di una stella compatta in equilibrio idrostatico, la loro versione relativistica era data da

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\epsilon(r)}{c^2} \;, \tag{1}$$

per la massa, mentre per la pressione abbiamo

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G\frac{m(r)\epsilon(r)}{r^2c^2}\left(1+\frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right)\left(1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} \;. \tag{2}$$

In realtá é presene una terza equazione differenziale che descrive il potenziale gravitazionale data da

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -\frac{1}{P(r)+\epsilon(r)}\frac{dP(r)}{dr} \;. \tag{3}$$

Questa equazione risulta disaccoppiate dalle altre due e quindi non é necessario risolverla per trovare la curva massa raggio della stella. Per massa e pressione usiamo le condizioni iniziali viste a lezione $m(0) = 0$ e $P(0) = P_0$. Per il potenziale gravitazionale invece, la soluzione all'esterno della stella é data da

$$\Phi_{ext}(r) = \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) \qquad r \geq R \;, \tag{4}$$

dove M é la massa totale della stella e R il suo raggio. La soluzione per $\Phi(r)$ deve soddisfare $\Phi(R) = \Phi_{ext}(R)$ per essere valida.

Il potenziale gravitazionale risulta utile per calcolare il redshift della radiazione emessa dalla stella. Se prendiamo una sorgente di fotoni localizzata nel punto r di uno spazio-tempo con la metrica usata per derivare le equazioni di stabilitá relativistaiche (metrica di Schwarzschild), la frequenza di emissione in tale punto nel sistema di riferimento proprio è data da

$$\nu_{em} = \frac{1}{d\tau_{em}} = e^{-\Phi(r)}\frac{1}{dt} \;. \tag{5}$$

Un osservatore sito al punto r' che riceve i fotoni ne misura la frequenza con il proprio orologio (nel suo sistema di riferimento proprio)

$$\nu_{ric} = \frac{1}{d\tau_{ric}} = e^{-\Phi(r')}\frac{1}{dt} \ . \tag{6}$$

Avremo quindi

$$\frac{\nu_{ric}}{\nu_{em}} = e^{\Phi(r)-\Phi(r')} \ . \tag{7}$$

Nel caso di un osservatore molto lontano dalla sorgente ($r' \to \infty$) avremo

$$\nu_{ric} = e^{\Phi(r)}\nu_{em} \ , \tag{8}$$

e quindi la frequenza osservata sará spostata verso il rosso (redshift).

Ricorda l'equazione di Planck per emissione da corpo nero a temperatura T

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \ , \tag{9}$$

dove $B(\nu, T)$ é la radianza (potenza emessa per unitá di angolo solido e area) nella direzione di propagazione della luce.

La potenza totale emessa in fotoni, per unitá di area, ad una certa distanza del centro della stella si puó trovare integrando la radianza, moltiplicata per $\cos(\theta)$ (questo viene dal fatto che dobbiamo prendere l'area di emissione sul piano perpendicolare alla direzione indicata da θ), sull'angolo solido e tutte le frequenze

$$P = \int_0^\infty d\nu \int d\Omega B(\nu, T)\cos(\theta) \ . \tag{10}$$

Per la radiazione di corpo nero si puó fare vedere (legge di Stefan-Boltzmann) che

$$P(T) = \frac{2\pi^5}{15c^2h^3}k_B^4 T^4 \ . \tag{11}$$

Per finire, un'equazione di stato ragionevolmente realistica per una stella di neutroni puó essere scritta come somma di due politropiche:

$$E(\rho) = a\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha} + b\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\beta} \tag{12}$$

dove ρ_0 é la densitá di saturazione ($\rho_0 = 0.16 fm^{-3}$) e i parametri sono

$$a = 13.4[MeV] \quad \alpha = 0.514 \quad b = 5.62[MeV] \quad \beta = 2.436 \ . \tag{13}$$

1. come prima cosa ricava le espressioni in forma adimensionale per le tre equazioni differenziali da risolvere (puoi usare le unitá introdotte a esercitazione) e trova la formula esplicita adimensionale per il potenziale all'esterno della stella

2. genera la curva massa raggio usando l'equazione di stato in Eq. (12) e confrontala con le curve ottenute nell'esercitazione per le equazioni di stato con $\Gamma = 5/3$ e $\Gamma = 2.54$

3. fai un grafico per il potenziale gravitazionale $\Phi(r)$ per queste tre equazioni di stato per un valore della pressione centrale corrispondente alla massa massima in ciascun caso.

4. usa le soluzioni trovate al punto precedente per mostrare la modifica della radianza $B(\nu, T)$ data dagli effetti relativistici (per ogni tipo di stella fai un grafico della radianza con e senza correzioni relativistiche, usa almeno 3 valori della distanza). Per questo punto puoi usare una temperatura di $k_B T = 1MeV$.

5. Calcola la potenza totale di emissione usando i risultati del punto precedente in funzione della distanza dal centro della stella. Per fare gli integrali usa sia il metodo dei trapezi che di Simpson prendendo come limite superiore per l'integrale delle frequenze $\nu_{max} = A k_B T$ for una qualche costante A. Verifica di aver preso A e il numero di punti di integrazione N grandi a sufficienza per tutti i casi (magari fai un grafico per far vedere che i risultati sono stabili)

6. [BOUNS] Considera la potenza totale emessa dalla superficie della stella, calcola la temperatura apparente T_{eff} della radiazione emessa in funzione della temperature effettiva per le stelle di massa massima per le tre equazioni di stato viste sopra. Puoi usare

$$k_B T_{eff} = \left(P(T) \frac{15 c^2 h^3}{2\pi^5} \right)^{1/4} . \qquad (14)$$

7. [BOUNS] Considera due temperature della stella $k_B T_A = 1MeV$ e $k_B T_B = 0.01MeV$ e fai un grafico della temperatura apparente T_{eff} per questi due casi in funzione della pressione centrale per le tre equazioni di stato.