1 Introduzione

Studiamo la stabilità delle stelle di neutroni in regime relativistico considerando 3 possibili equazioni di stato per la materia. Una volta risolte le equazioni è possibile ottenere l'espressione del potenziale gravitazione della stella e calcolare l'effetto sulla radiazione emessa dalla stella.

Viene calcolata la radianza per ogni stella a 3 distanze diverse e la potenza totale di emissione in funzione della distanza dalla stella. Viene quindi calcolata la temperatura apparente delle 3 stelle più massive in funzione di quella effettiva e poi viene studiata la temperatura apparente in funzione della pressione centrale della stella.

2 Stabilità

Le equazioni che descrivono la stabilità di una stella in funzione della massa (m) e della pressione (P) sono quelle di Tolman-Oppenheimer-Volkoff

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -G\frac{m(r)\epsilon(r)}{r^2c^2}\left(1+\frac{P(r)}{\epsilon(r)}\right)\left(+\frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right)\left(1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} \\ \frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\frac{\epsilon(r)}{c^2} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{P(r)+\epsilon(r)}\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} \end{cases} \tag{1}$$

Dove la terza equazione è l'equazione disaccoppiata e descrive il potenziale gravitazionale della stella. Usiamo 3 diverse densità di energia per la materia della stella (eq. 3 viene presa con due coppie di valori diversi di Γ e K):

$$\epsilon_1(n) = a\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\alpha} + b\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\beta} \tag{2}$$

$$\epsilon_{2/3}(n) = \mu c^2 n + Kc^2n^{\Gamma} \tag{3}$$

$$\text{con} \quad a = 13.4\mathrm{MeV\,fm}^{-3}, \quad \alpha = 0.514, \quad b = 5.62\mathrm{MeV\,fm}^{-3}, \quad \beta = 2.436, \quad n_0 = 0.16\mathrm{fm}^{-3} \tag{4}$$

dove n è la densità numerica, μ la massa di una singola particella e quindi $\rho = \mu n$ è la densità di massa.

Visto che la densità di energia è in funzione di ρ e le incognite del sistema 1 sono P e m possiamo scrivere la densità di energia in funzione di P e m partendo dalla relazione termodinamica

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P = (\alpha-1)a\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\alpha}(\beta-1)b\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\beta} & \text{per } \epsilon_1 \\ n = \left(\frac{P}{K(\Gamma-1)c^2}\right)^{1/\Gamma} & \text{per } \epsilon_{1/2} \end{cases} \tag{5}$$

Nel primo caso non è stato possibile invertire l'equazione per trovare n in funzione di P e m quindi utilizzeremo un metodo numerico per trovare n di volta in volta.

Facciamo le seguenti sostituzioni per rendere le variabili adimensionali e con valori più vicini a 0.

$$m = M_0\hat{m}, \quad r = R_0\hat{r}, \quad P = P_0\hat{P}, \quad \rho = \rho_0\hat{\rho}, \quad K = \hat{K}\frac{\mu^{\Gamma}}{\rho_0^{\Gamma-1}},$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{r}} = -\frac{(\hat{P}+\hat{\epsilon})(\hat{m}+\hat{r}^3\hat{P})}{\hat{r}^2-2\hat{m}\hat{r}} \\ \frac{\mathrm{d}\hat{m}}{\mathrm{d}\hat{r}} = \hat{r}^2\hat{\epsilon} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\hat{r}} = -\frac{1}{\hat{P}+\hat{\epsilon}}\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{r}} \end{cases} \tag{6}$$

Otteniamo il sistema 6 dove, grazie alle equazioni in 5, $\hat{m}$, $\hat{P}$ e $\hat{\epsilon}$ sono funzioni di $\hat{r}$. Come valori delle costanti sono stati usati

$$M_0 = 12.655756 M_\odot \quad R_0 = 20.06145 \mathrm{km} \quad \epsilon = P_0 = \rho_0 c^2 = 150.174 \frac{\mathrm{MeV}}{c^2 \mathrm{fm}} \tag{7}$$

Per il potenziale gravitazionale Φ si può inoltre trovare una soluzione analitica all'esterno della stella che possiamo mettere in forma adimensionale (eq. 8), dove $\hat{M}$ e $\hat{R}$ sono rispettivamente la massa totale e il raggio della stella in forma adimensionale.

$$\Phi_{\mathrm{ext}}(r) = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \implies \Phi_{\mathrm{ext}}(\hat{r}) = \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{2\hat{M}}{\hat{r}}\right) \qquad \hat{r} \geq \hat{R} \tag{8}$$