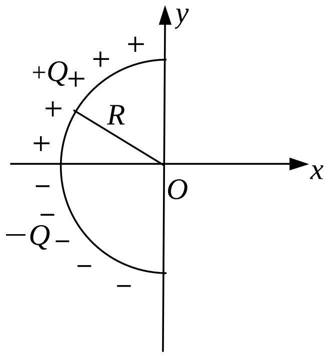
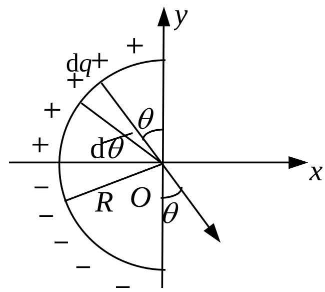
第十章 静电场

1. 一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$，沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。



解：在 θ 处取微小电荷： $dQ=\lambda dl=2Q d\theta/\pi$



它在 O 处产生场强：

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

按 θ 角变化，将 dE 分解成二个分量：

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\cos\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

对各分量分别积分，积分时考虑到一半是负电荷

$$E_x = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]$$

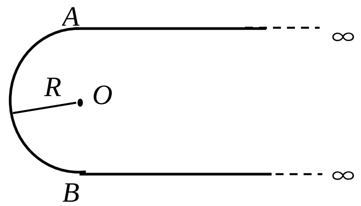
$$=0$$

$$E_y = \frac{-Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = -\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

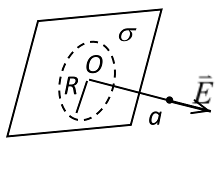
所以：

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = \frac{-Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

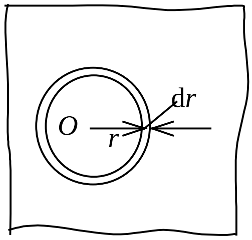
*2. 电荷线密度为 λ 的“无限长”均匀带电细线，弯成图示形状。若半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径为 R，试求圆心 O 点的场强。



3. 如图所示，一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面，在距离平面 A 处的一点的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的(AO 连线垂直于平面)。试求该圆半径的大小。



解：电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面在任意点的场强大小为 $E=\sigma/(2\varepsilon_0)$



以图中 O 点为圆心，取半径为 $r\rightarrow r+\mathrm{d}r$ 的环形面积，其电量为：

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

它在距离平面为 A 的一点处产生的场强：

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma a r dr}{2\varepsilon_0\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}$$

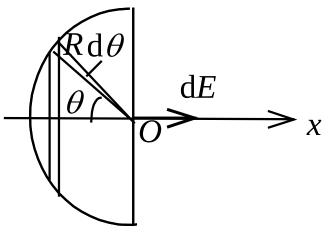
则半径为 R 的圆面积内的电荷在该点的场强为：

$$E=\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\,\mathrm{d}\,r}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

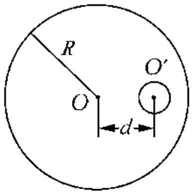
由题意,令 $E=\sigma/(4\varepsilon_0)$，得到

$$R=\sqrt{3}a$$

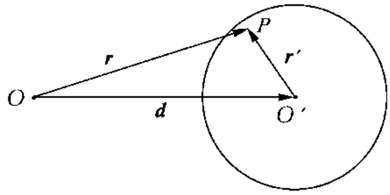
*4. 一半径为 R 的半球面，均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心 O 处的电场强度。



5. 半径为R的均匀带电球体内的电荷体密度为ρ,若在球内挖去一块半径为$r<R$的小球体，如图所示．试求：两球心O与O'点的场强，并证明小球空腔内的电场是均匀的．



(a)



(b)

解: 将此带电体看作带正电ρ的均匀球与带电$-\rho$的均匀小球的组合，
如图(a)所示：
(1) $+\rho$球在O点产生电场$\vec{E}_{10}=0$，

$-\rho$球在O点产生电场$\vec{E}_{20}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$

∴ O点电场$\vec{E}_0=\frac{r^3\rho}{3\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$；

(2) $+\rho$在O'产生电场$\vec{E}_{10'}=\frac{\frac{4}{3}\pi d^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$

$-\rho$球在O'产生电场$\vec{E}_{20'}=0$

∴ O' 点电场 $\vec{E}_{0'}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$

(3) 设空腔任一点P相对O'的位矢为$\vec{r'}$，相对O点位矢为$\vec{r}$ (如图(b))

则 $\vec{E}_{PO}=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$，$\vec{E}_{PO'}=-\frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0}$,

∴ $\vec{E}_P=\vec{E}_{PO}+\vec{E}_{PO'}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}=\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}$

∴腔内场强是均匀的.

6. 半径为 R_1 和 $R_2(R_2>R_1)$的两无限长同轴圆柱面，单位长度上分别带有电量 λ 和-λ, 试求:(1) $r<R_1$；(2) $R_1<r<R_2$；(3) $r>R_2$ 处各点的场强.
解: 高斯定理

$$\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

取同轴圆柱形高斯面，侧面积$S=2\pi rl$，则

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E2\pi rl$$

(1) $r<R_1$：$\sum q=0, E=0$

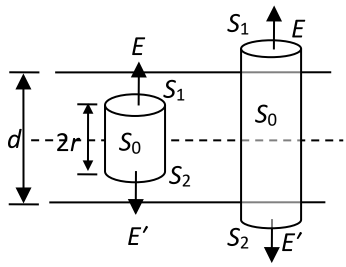
(2) $R_1 < r < R_2$：$\sum q = l\lambda$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\text{沿径向向外}$$

(3) $r > R_2$：$\sum q = 0$

$$\therefore E = 0$$

7. 一厚度为 d 的均匀带电无限大平板，电荷体密度为 ρ，求板内外各点的场强。
解：**方法一**：高斯定理法。



(1) 板内点：由于平板具有面对称性，因此产生的场强的方向与平板垂直且对称于中心面：$E=E'$。
在板内取一底面积为 S，高为 $2R$ 的圆柱面作为高斯面，场强与上下两表面的法线方向平等而与侧面垂直，通过高斯面的电通量为

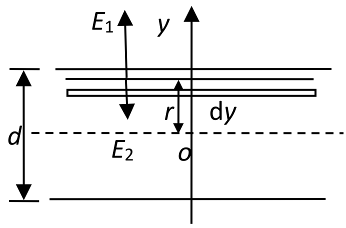
$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_0} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$= ES + E`S + 0 = 2ES\ ,$$

高斯面内的体积为　　$V=2r$S，包含的电量为 $Q=\rho V=2\rho r$S，
根据高斯定理　　$\Phi_e=Q/\varepsilon_0$，
可得场强为　$E=\rho r/\varepsilon_0$，$(0\le r\le d/2)$，①

(2) 板外点：穿过平板作一底面积为 S，高为 $2r$ 的圆柱形高斯面，通过高斯面的电通量仍为$\Phi_e=2ES$，高斯面在板内的体积为 $V=Sd$，包含的电量为 $Q=\rho V=\rho Sd$，根据高斯定理$\Phi_e=q/\varepsilon_0$，
可得场强为　$E=\rho d/2\varepsilon_0$，$(r \ge d/2)$，②

方法二：场强叠加法。



(1) 由于平板的可视很多薄板叠而成的，以 r 为界，下面平板产生的场强方向向上，上面平板产生的场强方向向下。在下面板中取一薄层 dy，面电荷密度为 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}y$，产生的场强为 $\mathrm{d}E_1=\mathrm{d}\sigma/2\varepsilon_0$，积分得

$$E_1=\int_{-d/2}^{r}\frac{\rho\mathrm{d}y}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r+\frac{d}{2})\text{，③}$$

同理，上面板产生的场强为

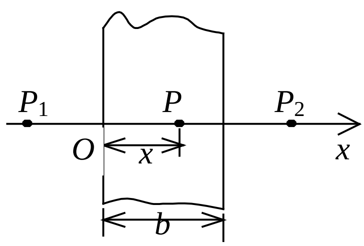
$$E_2=\int_{r}^{d/2}\frac{\rho\mathrm{d}y}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\frac{d}{2}-r)\text{，④}$$

r 处的总场强为 $E=E_1-E_2=\rho r/\varepsilon_0$。

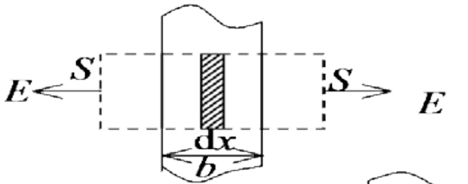
(2) 在公式③和④中，令 $r=\mathrm{d}/2$，得 $E_2=0$、$E=E_1=\rho\mathrm{d}/2\varepsilon_0$，$E$ 就是平板表面的场强。

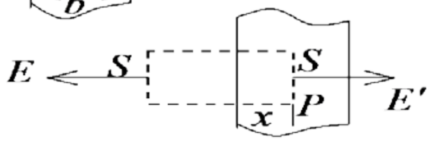
平板外的场强是无数个无限薄的带电平板产生的电场叠加的结果，是均强电场，方向与平板垂直，大小等于平板表面的场强。

8. 如图所示，一厚为 B 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为：$\rho=kx$ $(0\le x\le B)$，式中 k 为一正的常量。求：(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；(2) 平板内任一点 P 处的电场强度；(3) 场强为零的点在何处？



解：(1) 由对称分析知，平板外两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且背离平面．设场强大小为 E





作一柱形高斯面垂直于平面．其底面大小为 S，如图所示。按高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q/\varepsilon_0$$

即：

$$2SE = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b \rho S\,\mathrm{d}\,x = \frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^b x\,\mathrm{d}\,x = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$E=kb^2/(4\varepsilon_0)$ (板外两侧)

(2) 过 P 点垂直平板作一柱形高斯面，底面为 S．设该处场强为 E'，如图所示．按高斯定理有：

$$(E'+E)S = \frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^x x dx = \frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$$E' = \frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right) \qquad (0\le x\le b)$$

(3) $E'=0$，必须是

$$x^2 - \frac{b^2}{2} = 0$$

可得

$$x = b/\sqrt{2}$$

9. 用高斯定理重新求解教材中的【例 10.20】: 电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r（$r<R$）处的电势为 $U=\dfrac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$。

证明：球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，电荷的体密度为 $\rho=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$。

球内外的电场强度大小为 $E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$，（$r\le R$）；

$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，（$r\ge R$）。

取无穷远处的电势为零，则 r 处的电势为

$$U=\int_r^\infty \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\int_r^R E\mathrm{d}r+\int_R^\infty E\mathrm{d}r$$

$$=\int_r^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r\mathrm{d}r+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2\bigg|_r^R+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_R^\infty$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2-r^2)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}。$$

10. 一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度分布为: $\rho=\dfrac{qr}{\pi R^4}$ ($r\le R$) (Q 为一正的常量)，$\rho=0\quad(r>R)$。试求：

(1) 带电球体的总电荷；

(2) 球内、外各点的电场强度；

(3) 球内、外各点的电势。　　　注：第(3)问在讲完电势后做！

解：(1) 在球内取半径为 r、厚为 dr 的薄球壳，该壳内所包含的电荷为：

$$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V=qr\,4\pi r^2\mathrm{d}r/(\pi R^4)=4qr^3\mathrm{d}r/R^4$$

则球体所带的总电荷为：

$$Q=\int_V \rho \,\mathrm{d}V=\left(4q/R^4\right)\int_0^r r^3\,\mathrm{d}\,r=q$$

(2) 在球内作一半径为 r_1 的高斯球面，按高斯定理有：

$$4\pi r_1^2 E_1=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{r_1}\frac{qr}{\pi R^4}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}\,r=\frac{qr_1^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

得：

$$E_1=\frac{qr_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}$$ ($R1\le R$)， $\vec{E}_1$ 方向沿半径向外

在球体外作半径为 r_2 的高斯球面，按高斯定理：$4\pi r_2^2 E_2=q/\varepsilon_0$ 得：

$$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$ ($R_2>R$)， $\vec{E}_2$ 方向沿半径向外

(3) 球内电势：

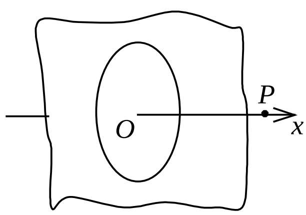
$$U_1=\int_{r_1}^{R}\vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}+\int_R^{\infty}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=\int_{r_1}^{R}\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\mathrm{d}\,r+\int_R^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\,r$$

$$=\frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr_1^3}{12\pi\varepsilon_0 R^4}=\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(4-\frac{r_1^3}{R^3}\right)\quad (r_1\le R)$$

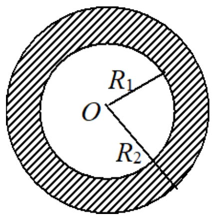
球外电势：

$$U_2=\int_{r_2}^{R}\vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=\int_{r_2}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\,r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\quad (r_2>R)$$

*11. 一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ。如图所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势(选 O 点的电势为零)。

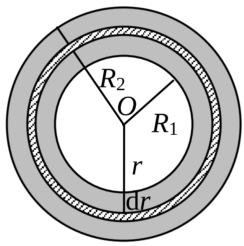


12. 一个均匀带电，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀带电球壳，所带电荷体密度为 ρ，求：(1) 半径为 r_A（$r<R_1$）和半径为 r_B（$R_1<r<R_2$）处的电势，(2) 半径为 r_A（$r<R_1$）和半径为 r_B（$R_1<r<R_2$）处的场强。



解：**方法一：电势叠加。**

(1) 电势



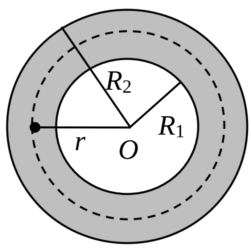
① $r<R_1$：在半径为 r 的球壳处取一厚度为 dr 的薄壳，其体积为 dV=4πr^2dr，包含的电量为 dq=ρdV=4πρr^2dr，在其内部任意一点（内部为等势）产生的电势为

$$\mathrm{d}U_O=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\mathrm{d}r,$$

球心处的总电势为

$$U_O=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}r\mathrm{d}r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2),$$

② $R_1<r<R_2$：如图，r 处的电势是该球面（虚线）外的电荷和球面内的电荷共同产生的。



球面外的电荷在 r 处产生的电势就等于这些电荷在球心处产生的电势，根据上面的推导可得

$$U_1=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-r_B^2)$$。

球面内的电荷在 r 处产生的电势等于这些电荷集中在球心对 r 处产生的电势。球壳在球面内的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi(r_B^3-R_1^3)$$，

包含的电量为 $Q=\rho V$，这些电荷集中在球心时对 r 处产生的电势为

$$U_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r_B}(r_B^3-R_1^3)$$。

总电势为 $U_B=U_1+U_2$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2-r_B^2-2\frac{R_1^3}{r_B})$$。

(2) 场强

① $r<R_1$：

$$E_A=-\frac{\partial U_A}{\partial r_A}=0$$。

② $R_1<r<R_2$：

$$E_B=-\frac{\partial U_B}{\partial r_B}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_B-\frac{R_1^3}{r_B^2})$$。

方法二：高斯定理。

(1) 场强

过空腔中一点作一半径为 r 的同心球形高斯面，由于面内没有电荷，根据高斯定理，可得空腔中场强为 $E=0$，$(r\le R_1)$。过球壳中一点作一半径为 r 的同心球形高斯面，面内球壳的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1^3)$$，

包含的电量为 $q=\rho V$，根据高斯定理得方程 $4\pi r^2E=q/\varepsilon_0$，可得场强为

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})$$，　$(R_1 \le r \le R_2)$。

在球壳外面作一半径为 r 的同心球形高斯面，面内球壳的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi(R_2^3-R_1^3)$$，

包含的电量为 $q=\rho V$，根据高斯定理得可得球壳外的场强为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$，$(R_2 \le r)$。

(2) 电势

$r<R_1$ 处的电势为

$$U_A=\int_{r_A}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_{r_A}^{\infty}E\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r_A}^{R_1}0\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)$$。

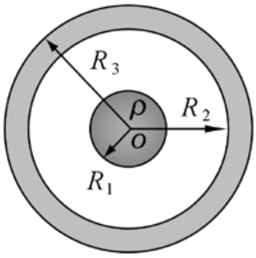
$R_1<r<R_2$ 处的电势为

$$U_B=\int_{r_B}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_{r_B}^{\infty}E\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r_B}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2-r_B^2-2\frac{R_1^3}{r_B})$$

13. 半径为 R_1 的均匀带电球体的电荷体密度为 ρ，球外有一内外半径分别为 R_2、R_3 的同心导体球壳。试计算空间电场强度和电势分布。



解：要求电场强度分布，需先确定电荷的分布．因为处于静电平衡状态的导体内部场强处处为零，所以由高斯定理和电荷守恒定律可知，球壳内表面带电量为$-Q$，外表面带电量为Q($Q=\rho R_1^3\pi 4/3$) 。由于带电体是球对称的，所以电荷必是球对称分布的．作半径为r的同心球面为高斯面，则由高斯定理可知

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

当 $r \leqslant R_1$ 时

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

当 $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$\sum q = 0$$

$$E_3 = 0$$

当 $r > R_3$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_4 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

电场分布的矢量形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_1 = \dfrac{\rho \boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0}, & r \leqslant R_1 \\ \boldsymbol{E}_2 = \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \\ \boldsymbol{E}_3 = 0, & R_2 < r < R_3 \\ \boldsymbol{E}_4 = \dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0, & r > R_3 \end{cases}$$

选无穷远处为电势零参考点，由电势定义可求得各区域的电势为

当 $r \geq R_3$ 时

$$u = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^{R_3} \boldsymbol{E}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^{\infty} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$$

当 $R_2 \leq r \leq R_3$ 时

$$u = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^{R_3} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_3}^{\infty} \boldsymbol{E}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{R_3}^{\infty} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_3}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时

$$u = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^{R_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_2}^{R_3} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_3}^{\infty} \boldsymbol{E}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int_r^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + 0 + \int_{R_3}^{\infty} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

当 $0 \leq r \leq R_1$ 时

$$u = \int_r^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_r^{R_1} \boldsymbol{E}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_2}^{R_3} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{R_3}^{\infty} \boldsymbol{E}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= \int_r^{R_1} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + 0 + \int_{R_3}^{\infty} \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

另解：

对电势分布也可直接用电势叠加原理求解，具体解法如下：若求空间任意一点 P 的电势，设 P 点距离球心为 r ，则以半径为 r 的球面为界面，将电荷分为内、外两部分．内部电荷在场点 P 产生的电势就如同内部电荷全部集中在球心处的点电荷在 P 点产生的电势；而外部电荷可以视为由许多极薄的带电同心球壳叠加而成，每一个薄球壳在 P 点产生的电势就是此带电薄球壳单独存在时其本身的电势．所以

当 $r \geq R_3$ 时

$$u = u_{内} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$$

当 $R_2 \leq r \leq R_3$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = 0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_3}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

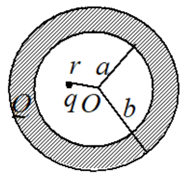
$$= \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

当 $0 \leq r \leq R_1$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r} + \int_r^{R_1} \frac{\rho \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r'} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}$$

*14. 如图所示，一内半径为 A、外半径为 B 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q。设无限远处为电势零点，试求：

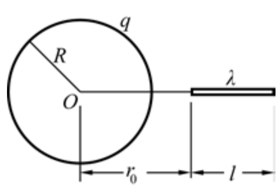


(1) 球壳内外表面上的电荷。

(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。

(3) 球心 O 点处的总电势。

*15. 如图所示，半径为 R 的均匀带电球面，带有电荷 q．沿某一半径方向上有一均匀带电细线，电荷线密度为 λ，长度为 l，细线左端离球心距离为 r_0．设球和线上的电荷分布不受相互作用影响，试求细线所受球面电荷的电场力和细线在该电场中的电势能(设无穷远处的电势为零)．

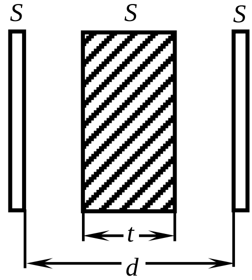


16. 一空气平行板电容器，两极板面积均为 S，板间距离为 d（d 远小于极板线度），在

两极板间平行地插入一面积也是 S，厚度为 t (t<d)的金属片，如图所示。试求:

(1) 电容 C 的值;

(2) 金属片放在两极板间的位置对电容值有无影响？



解：设极板上分别带电荷+q 和-q；金属片与 A 板距离为 d_1，与 B 板距离为 d_2；金属片与 A 板间场强为$E_1=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$

金属板与 B 板间场强为　　$E_2=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$

金属片内部场强为　　$E'=0$

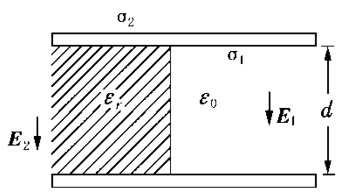
则两极板间的电势差为

$$U_A-U_B=\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}=E_1d_1+E_2d_2=\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d_1+d_2)=\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d-t)$$

由此得$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$

因 C 值仅与 d、t 有关，与 d_1、d_2 无关，故金属片的安放位置对电容值无影响。

17. 如图所示，在平行板电容器的一半容积内充入相对介电常数为 ε_r 的电介质. 试求：在有电介质部分和无电介质部分极板上自由电荷面密度的比值.



解: 如图所示，充满电介质部分场强为$\vec{E}_2$，真空部分场强为$\vec{E}_1$，自由电荷面密度分别为σ_2与σ_1，由

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$$

得

$$D_1=\sigma_1，\ D_2=\sigma_2$$

而

$$D_1=\varepsilon_0 E_1, D_2=\varepsilon_0\varepsilon_r E_2$$

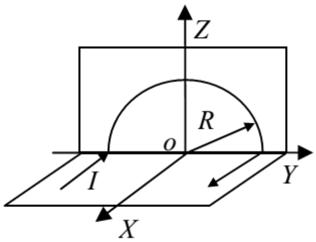
于是

$$E_1=E_2=\frac{U}{d}$$

$$\therefore \frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{D_2}{D_1}=\varepsilon_r$$

第十一章 静磁场

1. 如图所示的载流导线，图中半圆的半径为 R，直线部分伸向无限远处。求圆心 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。



解：在直线磁场公式

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

中，令 $\theta_1=0$、$\theta_2=\pi/2$，或者 $\theta_1=\pi/2$、$\theta_2=\pi$，就得半无限长导线在端点半径为 R 的圆周上产生的磁感应强度 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

两无限长半直线在 O 点产生的磁场方向都向着□ Z 方向，大小为 $B_z=\mu_0 I/2\pi R$

半圆在 O 处产生的磁场方向沿着 X 方向，大小为 $B_x=\mu_0 I/4R$

O 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}=-B_x\mathbf{i}-B_z\mathbf{k}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\mathbf{i}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathbf{k}$$

场强大小为

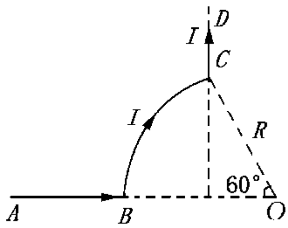
$$B=\sqrt{B_x^2+B_z^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sqrt{4+\pi^2}$$

与 X 轴的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{B_z}{B_x}=\arctan\frac{2}{\pi}$$

2. 如图所示，AB、CD为长直导线，$\widehat{BC}$为圆心在O点的一段圆弧形导线，其半径为R. 若

通以电流I，求O点的磁感应强度。



解：O点磁场由AB、$\hat{B}C$、CD三部分电流产生．其中

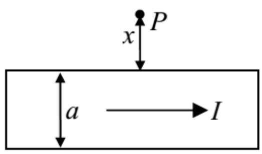
AB 产生$\vec{B}_1 = 0$

$\hat{B}C$ 产生$B_2 = \frac{\mu_0 I}{12R}$，方向垂直向里

CD 段产生　$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{R}{2}}(sin\,9\,0^{\circ} - sin\,6\,0^{\circ}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$，方向⊥向里

$\therefore B_0 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6})$，方向⊥向里.

3. 如图所示，宽度为 a 的薄长金属板中通有电流 I，电流沿薄板宽度方向均匀分布。求在薄板所在平面内距板的边缘为 x 的 P 点处的磁感应强度。



解：电流分布在薄板的表面上，单位长度上电流密度，即面电流的线密度为$\delta = I/a$，

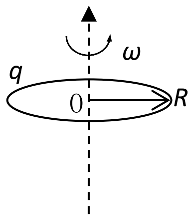
以板的下边缘为原点，在薄板上取一宽度为 dl 的通电导线，电流强度为$\mathrm{d}I = \delta \mathrm{d}l$。在 P 点产生磁感应强度为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \delta \mathrm{d}l}{2\pi(x + a - l)}$$

磁场方向垂直纸面向外。由于每根电流产生的磁场方向相同，总磁场为

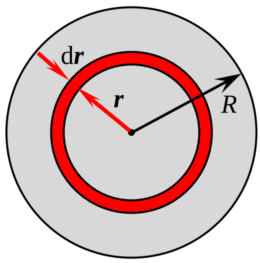
$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 \delta \mathrm{d}l}{2\pi(x + a - l)} = -\frac{\mu_0 \delta}{2\pi}\ln(x + a - l)\Bigg|_{l=0}^{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln(1 + \frac{a}{x})$$

4．一个圆盘半径为 R，电荷 q 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动，角速度为ω。求圆盘中心处的磁感应强度。



解：在圆盘上取半径为 r、宽度为 dr 的同心圆环，其带电量为

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr$$



圆环上的电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr$$

dI 在圆心处激发的磁感强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

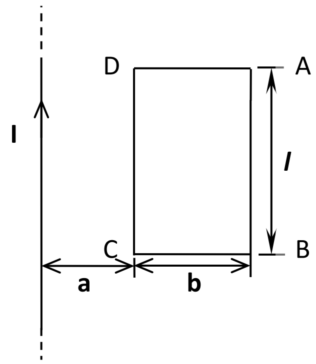
圆盘中心处的磁感强度大小

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

方向垂直于纸面。

▶

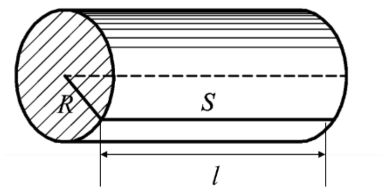
5．如图所示，载流长直导线中的电流为 I，求穿过矩形回路的磁通量。



解：$B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$，$d\varphi_m=B_x dS=B_x l dx=\frac{\mu_0 I l}{2\pi x}dx$，

$$\varphi_m=\int d\varphi_m=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 I l}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 I l}{2\pi}ln\frac{a+b}{a}$$

6．一无限长直圆柱状导体，半径为 R，其中通有电流 I，并且在其横截面上电流密度均匀分布。(1) 求导体内、外磁感应强度的分布。(2) 在导体内部作一长度为 l 的平面S，如图所示，试计算通过平面的磁通量。



解：(1) 圆柱体轴对称，以轴上一点为圆心取垂直轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路

$$\because \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=2\pi rB=\mu_0\sum I$$

当$r\geq R$　　$\sum I$=I

$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当$r\leq R$　　$\sum I$=$\frac{Ir^2}{R^2}$

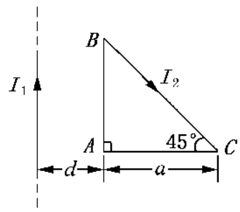
$$\therefore \oint_r \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

(2) 磁通量

$$\Phi_m=\int_{(s)}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_0^R\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}l\,dr=\frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$

7. 如图所示，长直电流I_1附近有一等腰直角三角形线框，通以电流I_2，二者共面．求△ABC的各边所受的磁力。



解：

$$\vec{F}_{AB}=\int_B^A I_2 d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$F_{AB}=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}$$

方向垂直AB向左

$$\vec{F}_{AC}=\int_A^C I_2 d\vec{l}\times\vec{B}$$

方向垂直AC向下，大小为

$$F_{AC}=\int_d^{d+a} I_2 dr\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}ln\frac{d+a}{d}$$

同理$\vec{F}_{BC}$方向垂直BC向上，大小

$$F_{Bc}=\int_d^{d+a} I_2 dl\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\because dl=\frac{dr}{cos\,45^{\circ}}$$

$$\therefore F_{BC}=\int_a^{d+a}\frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r\,cos\,45^{\circ}}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi}ln\frac{d+a}{d}$$

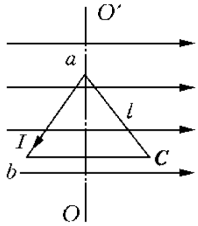
8. 边长为l=0.1m的正三角形线圈放在磁感应强度B=1T的均匀磁场中，线圈平面与磁场

方向平行.如图所示，使线圈通以电流I=10A，求：

(1) 线圈每边所受的安培力；

(2) 对OO'轴的磁力矩大小；

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功。



解：(1)$\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$

$\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$方向⊥纸面向外，大小为

$$F_{ab} = IlB \sin 120^{\circ} = 0.866 \ \ N$$

$\vec{F}_{ca} = I\vec{l} \times \vec{B}$方向⊥纸面向里，大小

$$F_{ca} = IlB \sin 120^{\circ} = 0.866 \ \ N$$

(2) $P_m = IS$

$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$ 沿$\overrightarrow{OO'}$方向，大小为

$$M = ISB = I\frac{\sqrt{3}l^2}{4}B = 4.33 \times 10^{-2} \quad N \cdot m$$

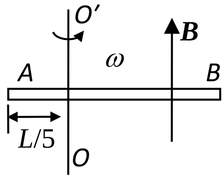
(3) 磁力功$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

$$\because \Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 B$$

$$\therefore A = I\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 B = 4.33 \times 10^{-2} J$$

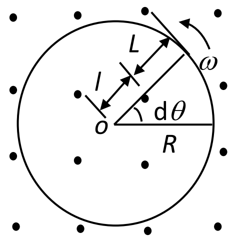
第十二章 电磁感应

1．一条铜棒长为 L，水平放置，可绕距离 A 端为 $L/5$ 处和棒垂直的轴 OO'在水平面内旋转，每秒转动一周。铜棒置于竖直向上的匀强磁场中，如图所示，磁感应强度 B。求铜棒两端 A、B 的电势差，何端电势高。



解：设想一个半径为 R 的金属棒绕一端做匀速圆周运动，角速度为ω，经过时间 $\mathrm{d}t$ 后转过的角度为

$$\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t,$$



扫过的面积为 $\mathrm{d}S=R^2\mathrm{d}\theta/2$，

切割的磁通量为 $\mathrm{d}\Phi=B\mathrm{d}S=BR^2\mathrm{d}\theta/2$，

电动势的大小为$\varepsilon=\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=\omega BR^2/2$。

根据右手螺旋法则，圆周上端点的电势高。

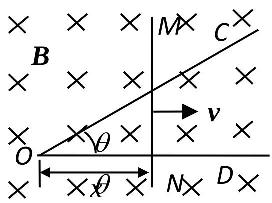
AO 和 BO 段的动生电动势大小分别为

$$\varepsilon_{AO}=\frac{\omega B}{2}(\frac{L}{5})^2=\frac{\omega BL^2}{50},\quad \varepsilon_{BO}=\frac{\omega B}{2}(\frac{4L}{5})^2=\frac{16\omega BL^2}{50}。$$

由于 $BO > AO$，所以 B 端的电势比 A 端更高，A 和 B 端的电势差为

$$\varepsilon=\varepsilon_{BO}-\varepsilon_{AO}=\frac{3\omega BL^2}{10}。$$

2．如图，有一弯成θ角的金属架 COD 放在磁场中，磁感应强度 B 的方向垂直于金属架 COD 所在平面，一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度 v 向右滑动，v 与 MN 垂直，设 t=0 时，x=0，求下列两情形，框架内的感应电动势ε_i。（1）磁场分布均匀，且 B 不随时间改变；（2）非均匀的交变磁场 $B=Kx\cos\omega t$。



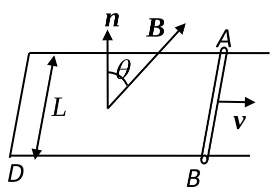
解：（1）经过时间 t，导体杆前进的距离为 $x=vt$，杆的有效长度为 $l=\tan\theta=(\tan\theta)t$，电动势由 N 指向 M，M 点电势高，大小为$\varepsilon_i=Blv=Bv^2(\tan\theta)t$。
（2）取顺时针为回路绕向的正方向，则通过该面的磁通量为

$$\Phi=\int_0^x Kx^2\tan\theta\cos\omega t dx=\frac{Kx^3\cos\omega t\tan\theta}{3}$$

感应电动势为

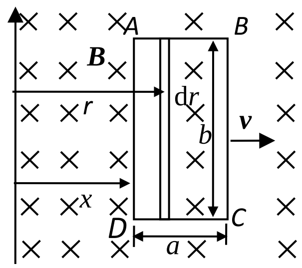
$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{Kx^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3}-Kx^2v\cos\omega t\tan\theta$$
$$=\frac{Kv^3t^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3}-Kv^3t^2\cos\omega t\tan\theta$$

3．如图所示，匀强磁场 B 与矩形导线回路的法线 n 成θ =60°角，$B=kt$（k 为大于零的常数）。长为 L 的导体杆 AB 以匀速 v 向右平动，求回路中 t 时刻的感应电动势的大小和方向（设 $t=0$ 时，$x=0$）。



解：经过时间 t，导体杆运动的距离为 $x=vt$，
扫过的面积为 $S=Lx=Lvt$，
通过此面积的磁通量为 $\Phi=BS=BS\cos\theta=Lvkt^2/2$。
感应电动势的大小为 $\varepsilon=\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=Lvkt$。
由于回路中磁通量在增加，而感应电流的磁通量阻碍原磁通量增加，其磁场与原磁场的方向相反，所以感应电动势的方向是顺时针的。

4．长为 b，宽为 a 的矩形线圈 $ABCD$ 与无限长直截流导线共面，且线圈的长边平行于长直导线，线圈以速度 v 向右平动，t 时刻 AD 边距离长直导线为 x；且长直导线中的电流按 $I=I_0\cos\omega t$ 规律随时间变化，如图所示。求回路中的电动势ε。



解：电流 I 在 r 处产生的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，

穿过面积元 dS=bdr 的磁通量为 $\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi r}\mathrm{d}r$，

穿过矩形线圈 $ABCD$ 的磁通量为 $\Phi = \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_x^{x+a}\dfrac{1}{r}\mathrm{d}r = \dfrac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln(\dfrac{x+a}{x})$，

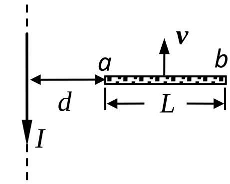
回路中的电动势为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}[\ln(\frac{x+a}{x})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]$$

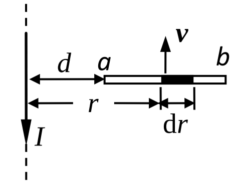
$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}[\omega\ln(\frac{x+a}{x})\sin\omega t + \frac{av\cos\omega t}{x(x+a)}]。$$

显然，第一项是由于磁场变化产生的感生电动势，第二项是由于线圈运动产生的动生电动势。

5．如图，导线 ab 以速率 v 沿平行于长直载流导线的方向运动，ab 与直导线共面，且与它垂直。导线中电流强度为 I，ab 长 L，a 端到直导线的距离为 d，求导线 ab 中的动生电动势，并判断哪端电势较高。



解：在导线 ab 所在直线上距长直载流导线 r 处取一线元 dr，方向向右。

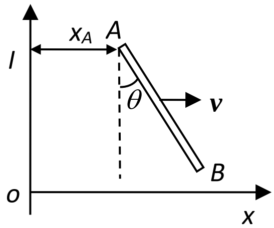


$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r，$$

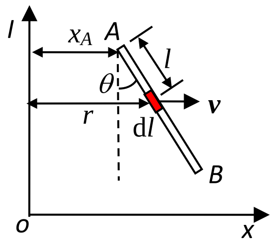
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}\varepsilon = \int_d^{d+L}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{d+L}{d}$$

$\varepsilon_{ab}>0$，电动势的方向由 a 指向 b，b 端电势较高。

6．如图所示，一长直载流导线电流强度为 I，铜棒 AB 长为 L，A 端与直导线的距离为 x_A，AB 与直导线的夹角为θ，以水平速度 v 向右运动。铜棒与载流直导线共面，求 AB 棒的电动势为多少，何端电势高？



解：在棒上长为 l 处取一线元 dl，在垂直于速度方向上的长度为 $\mathrm{d}l_\perp=\mathrm{d}l\cos\theta$；线元到直线之间的距离为 $r=x_A+l\sin\theta$，



直线电流在线元处产生的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x_A+l\sin\theta)}\text{。}$$

由于 B，v 和 $\mathrm{d}l_\perp$相互垂直，线元上动生电动势的大小为

$$\mathrm{d}\varepsilon=Bv\mathrm{d}l_\perp=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta\mathrm{d}l}{2\pi(x_A+l\sin\theta)},$$

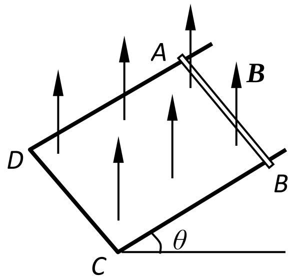
棒的动生电动势为

$$\varepsilon=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta}{2\pi}\int_0^L\frac{\mathrm{d}l}{x_A+l\sin\theta}=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta}{2\pi\sin\theta}\int_0^L\frac{\mathrm{d}(x_A+l\sin\theta)}{x_A+l\sin\theta}$$

$$=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\cot\theta\ln\frac{x_A+L\sin\theta}{x_A},$$

A 端的电势高。

7．如图所示，质量为 m，长为 l，电阻为 R 的金属棒 AB 放置在一个倾斜的光滑 U 形框架上，并由静止下滑，磁场 $\boldsymbol{B}$ 垂直向上。求：（1）U 形框架为绝缘时，AB 棒内的动生电动势与时间的函数关系；（2）U 形框架为导体时（不计电阻），AB 棒下滑速度随时间的变化关系，最大速度为多少？



解：（1）$\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overline{BA}=vB\sin\alpha\cdot l=vBl\cos\theta$

$\because$ 在斜面上，$mg\sin\theta=ma$，$\therefore a=g\sin\theta$

$$v=at=gt\sin\theta,\quad \therefore \varepsilon_i=gt\sin\theta\cdot Bl\cos\theta=\frac{1}{2}Bglt\sin 2\theta$$

（2）此时，在 BADC 回路中产生感应电流，所以 AB 还受安培力作用，大小为

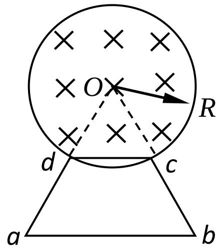
$$F_i=BlI=Bl\frac{\varepsilon_i}{R}=\frac{B^2l^2}{R}v\cos\theta$$，方向水平向右。

沿斜面，$$mg\sin\theta-F_i\cos\theta=ma=m\frac{dv}{dt}$$，

即 $$mg\sin\theta-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{R}v=m\frac{dv}{dt}$$

解得 $$v_{\max}=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}(1-e^{-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{mR}t})$$，$$v_{\max}=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$$。

8．在半径为 R 的细长螺线管内有 $\frac{dB}{dt}>0$ 的均匀磁场，一等腰梯形金属框 $abcd$ 如图放置。已知，$ab=2R$，$cd=R$，求：（1）各边产生的感生电动势；（2）线框的总电动势。



解：（1）径向上的电动势为零，即 $\varepsilon_{ad}=\varepsilon_{cd}=0$，在 ΔOdc 中，以 dc 为底，设 h_1 为高

$$\Phi_1=\frac{1}{2}Rh_1\cdot B=\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot B=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2B$$

$$\therefore\ \varepsilon_1=\varepsilon_{cd}=\left|\frac{d\Phi_1}{dt}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{dB}{dt}$$ 方向 $d\to c$

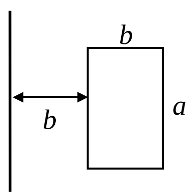
在 ΔOab 中，$\Phi_2=\frac{1}{6}\pi R^2\cdot B$，

$$\therefore\ \varepsilon_2=\varepsilon_{ab}=\left|\frac{d\Phi_2}{dt}\right|=\frac{\pi R^2}{6}\frac{dB}{dt}$$ 方向 $a\to b$

（2）线框总电动势

$$\varepsilon_i=\varepsilon_2-\varepsilon_1=(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2\frac{dB}{dt}$$

9．如图，边长分别为 a、b 的矩形线圈，放在一无限长导线的旁边且二者共面。求：线圈与长直导线间的互感。

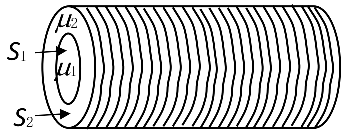


解：设长直电流为 I，它产生的磁场通过矩形线圈的磁通为

$$\boldsymbol{\Phi}_{12}=\int_{(S)}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_b^{2b}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 2$$

$$M=\frac{\boldsymbol{\Phi}_{12}}{I}=\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 2\ \ (\mathrm{H})$$

10．管长 l，匝数 N 的螺线管，管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为 S_1 和 S_2，磁导率分别为μ_1和μ_2，如图所示。求该螺线管的自感系数。



解：设通电流 I，则两介质中的磁场分别为 $B_1=\mu_1\dfrac{N}{l}I$，$B_2=\mu_2\dfrac{N}{l}I$

$$\therefore \Phi_1=B_1S_1=\frac{\mu_1 NI}{l}S_1,\quad \Phi_2=B_2S_2=\frac{\mu_2 NI}{l}S_2$$

$$\Psi=N(\Phi_1+\Phi_2)=\frac{N^2I}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2),\quad \therefore L=\frac{\Psi}{I}=\frac{N^2}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2)$$

第十三章 波动光学

1. 在杨氏双缝实验中，双缝间距 d =0.20mm，缝屏间距 D =1.0m，试求：
(1)若第二级明条纹离屏中心的距离为 6.0mm，计算此单色光的波长；
(2)相邻两明条纹间的距离．

解：(1)由 $x_{明}=\dfrac{D}{d}k\lambda$ 知，$6.0=\dfrac{1\times10^3}{0.2}\times2\lambda$，

$$\therefore \lambda=0.6\times10^{-3}\ \text{mm}=6000\ \text{Å}$$

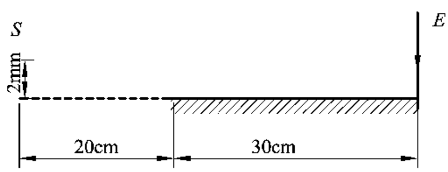
(2) $\Delta x=\dfrac{D}{d}\lambda=\dfrac{1\times10^3}{0.2}\times0.6\times10^{-3}=3\ \ \text{mm}$

2. 在双缝装置中，用一很薄的云母片(n=1.58)覆盖其中的一条缝，结果使屏幕上的第七级明条纹恰好移到屏幕中央原零级明纹的位置．若入射光的波长为 5500 Å，求此云母片的厚度．

解： 设云母片厚度为 e，则由云母片引起的光程差为 $\delta=ne-e=(n-1)e$
按题意 $\delta=7\lambda$

$$\therefore e=\frac{7\lambda}{n-1}=\frac{7\times5500\times10^{-10}}{1.58-1}=6.6\times10^{-6}\ \text{m}\ \ =6.6\ \mu\text{m}$$

3. 洛埃镜干涉装置如题 4 图所示，镜长 30cm，狭缝光源 S 在离镜左边 20cm 的平面内，与镜面的垂直距离为 2.0mm，光源波长 $\lambda=7.2\times10^{-7}$m，试求位于镜右边缘的屏幕上第一条明条纹到镜边缘的距离．



解：镜面反射光有半波损失，且反射光可视为虚光源 S' 发出．所以由 S 与 S' 发出的两光束到达屏幕上距镜边缘为 x 处的光程差为

$$\delta=(r_2-r_1)+\frac{\lambda}{2}=d\frac{x}{D}+\frac{\lambda}{2}$$

第一明纹处，对应 $\delta=\lambda$

$$\therefore x=\frac{\lambda D}{2d}=\frac{7.2\times10^{-5}\times50}{2\times0.4}=4.5\times10^{-2}\ \text{mm}$$

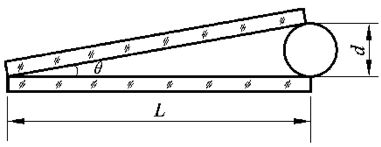
4. 如图 7，波长为 6800 Å 的平行光垂直照射到 L =0.12m 长的两块玻璃片上，两玻璃片一边相互接触，另一边被直径 d =0.048mm 的细钢丝隔开．求：

(1)两玻璃片间的夹角 $\theta=$?

(2)相邻两明条纹间空气膜的厚度差是多少?

(3)相邻两暗条纹的间距是多少?

(4)在这 0.12 m 内呈现多少条明条纹?



解： (1)由图知，$L\sin\theta=d$，即 $L\theta=d$

故 $\theta=\dfrac{d}{L}=\dfrac{0.048}{0.12\times10^{3}}=4.0\times10^{-4}$ (弧度)

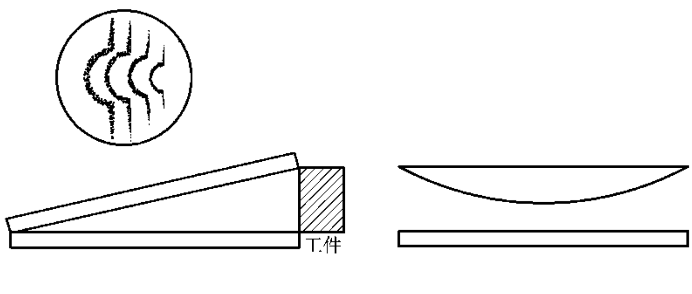
(2)相邻两明条纹空气膜厚度差为 $\Delta e=\dfrac{\lambda}{2}=3.4\times10^{-7}$ m

(3)相邻两暗纹间距 $l=\dfrac{\lambda}{2\theta}=\dfrac{6800\times10^{-10}}{2\times4.0\times10^{-4}}=850\times10^{-6}\ \text{m}=0.85\ \ \text{mm}$

(4) $\Delta N=\dfrac{L}{l}\approx141$ 条

5. 用劈尖干涉来检测工件表面的平整度，当波长为 λ 的单色光垂直入射时,观察到的干涉条纹如题 9 图所示，每一条纹的弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分的连线相切. 试说明工件缺陷是凸还是凹?并估算该缺陷的程度.

解：工件缺陷是凹的．故各级等厚线(在缺陷附近的)向棱边方向弯曲．按题意，每一条纹弯曲部分的顶点恰与左邻的直线部分连线相切，说明弯曲部分相当于条纹向棱边移动了一条，故相应的空气隙厚度差为 $\Delta e=\dfrac{\lambda}{2}$，这也是工件缺陷的程度.



6. 当牛顿环装置中的透镜与玻璃之间的空间充以液体时，第十个亮环的直径由 $d_1=$

1.40×10^{-2}m 变为 d_2 =1.27×10^{-2}m，求液体的折射率．

解：由牛顿环明环公式

$$r_{空}=\frac{D_1}{2}=\sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}$$

$$r_{液}=\frac{D_2}{2}=\sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}}$$

两式相除得 $\frac{D_1}{D_2}=\sqrt{n}$，即 $n=\frac{D_1^2}{D_2^2}=\frac{1.96}{1.61}\approx 1.22$

7. 白光垂直照射到空气中一厚度为 3800 Å 的肥皂膜上，设肥皂膜的折射率为 1.33，试问该膜的正面呈现什么颜色?背面呈现什么颜色?

解：由反射干涉相长公式有

$$2ne+\frac{\lambda}{2}=k\lambda\ (k=1,2,\cdots)$$

得 $\lambda=\frac{4ne}{2k-1}=\frac{4\times1.33\times3800}{2k-1}=\frac{20216}{2k-1}$

$$k=2,\ \lambda_2=6739\ \text{Å}\ \ (红色)$$

$$k=3,\ \lambda_3=4043\ \text{Å}\ \ (紫色)$$

所以肥皂膜正面呈现紫红色．

由透射干涉相长公式 $2ne=k\lambda\ (k=1,2,\cdots)$

所以 $\lambda=\frac{2ne}{k}=\frac{10108}{k}$

当 $k=2$ 时， λ =5054 Å (绿色)

故背面呈现绿色．

8. 在折射率 n_1=1.52 的镜头表面涂有一层折射率 n_2 =1.38 的 MgF_2 增透膜，如果此膜适用于波长 λ =5500 Å 的光，问膜的厚度应取何值?

解：设光垂直入射增透膜，欲透射增强，则膜上、下两表面反射光应满足干涉相消条件，即

$$2n_2e=(k+\frac{1}{2})\lambda\ (k=0,1,2,\cdots)$$

$$\therefore e=\frac{(k+\frac{1}{2})\lambda}{2n_2}=\frac{k\lambda}{2n_2}+\frac{\lambda}{4n_2}$$

$$=\frac{5500}{2\times1.38}k+\frac{5500}{4\times1.38}=(1993k+996)\ \mathring{A}$$

令 $k=0$，得膜的最薄厚度为 $996\ \mathring{A}$．当 k 为其他整数倍时，也都满足要求．

9. 把折射率为 n =1.632 的玻璃片放入迈克耳逊干涉仪的一条光路中，观察到有 150 条干涉条纹向一方移过．若所用单色光的波长为 λ =5000 $\mathring{A}$，求此玻璃片的厚度．

解：设插入玻璃片厚度为 d，则相应光程差变化为

$$2(n-1)d=\Delta N\lambda$$

$$\therefore d=\frac{\Delta N\lambda}{2(n-1)}=\frac{150\times5000\times10^{-10}}{2(1.632-1)}=5.9\times10^{-5}\ \text{m}=5.9\times10^{-2}\ \text{mm}$$

10. 一单色平行光垂直照射一单缝，若其第三级明条纹位置正好与 6000 $\mathring{A}$ 的单色平行光的第二级明条纹位置重合，求前一种单色光的波长．

解：单缝衍射的明纹公式为

$$a\sin\varphi=(2k+1)\ \frac{\lambda}{2}$$

当 $\lambda=6000\ \mathring{A}$ 时，$k=2$。$\lambda=\lambda_x$ 时，$k=3$。重合时 φ 角相同，所以有

$$a\sin\varphi=(2\times2+1)\frac{6000}{2}=(2\times3+1)\ \frac{\lambda_x}{2}$$

得 $\lambda_x=\frac{5}{7}\times6000=4286\ \mathring{A}$

11. 单缝宽 0.10mm，透镜焦距为 50cm，用 $\lambda=5000\ \mathring{A}$ 的绿光垂直照射单缝．求：(1)位于透镜焦平面处的屏幕上中央明条纹的宽度和半角宽度各为多少?(2)若把此装置浸入水中(n=1.33)，中央明条纹的半角宽度又为多少?

解：中央明纹的宽度为 $\Delta x=2\frac{\lambda}{na}f$，半角宽度为 $\theta=\sin^{-1}\frac{\lambda}{na}$

(1)空气中，$n=1$，所以

$$\Delta x=2\times0.5\times\frac{5000\times10^{-10}}{0.10\times10^{-3}}=5.0\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$\theta=\sin^{-1}\frac{5000\times10^{-10}}{0.10\times10^{-3}}=5.0\times10^{-3}\ \text{rad}$$

(2)浸入水中，$n=1.33$，所以有

$$\Delta x=2\times0.50\times\frac{5000\times10^{-10}}{1.33\times0.10\times10^{-3}}\approx3.76\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$\theta=\sin^{-1}\frac{5000\times10^{-10}}{1.33\times0.1\times10^{-3}}\approx3.76\times10^{-3}\ \text{rad}$$

12. 已知天空中两颗星相对于一望远镜的角距离为 4.84×10^{-6}rad，它们都发出波长为 5500 $\overset{\circ}{\text{A}}$ 的光，试问望远镜的口径至少要多大，才能分辨出这两颗星?

解：由最小分辨角公式 $\theta=1.22\dfrac{\lambda}{D}$

$$\therefore D=1.22\frac{\lambda}{\theta}=1.22\times\frac{5.5\times10^{-5}}{4.84\times10^{-6}}=13.86\ \text{cm}$$

13. 试指出当衍射光栅的光栅常数为下述三种情况时，哪些级次的衍射明条纹缺级?(1)a+b=2a;(2)a+b=3a;(3)a+b=4a.

解：由光栅明纹条件和单缝衍射暗纹条件同时满足时，出现缺级．即

$$\begin{cases}(a+b)\sin\varphi=\pm k\lambda & (k=0,1,2,\cdots)\\ a\sin\varphi=\pm k'\lambda & (k'=1,2\cdots)\end{cases}$$

可知，当 $k=\dfrac{a+b}{a}k'$ 时明纹缺级.

(1) $a+b=2a$ 时，$k=2,4,6,\cdots$偶数级缺级；

(2) $a+b=3a$ 时，$k=3,6,9,\cdots$级次缺级；

(3) $a+b=4a$，$k=4,8,12,\cdots$级次缺级.

14. 波长 $\lambda=6000\ \overset{\circ}{\text{A}}$ 的单色光垂直入射到一光栅上，第二、第三级明条纹分别出现在 $\sin\varphi=0.20$ 与 $\sin\varphi=0.30$ 处，第四级缺级．求：(1)光栅常数；(2)光栅上狭缝的宽度；(3)在 90°＞φ＞-90°范围内，实际呈现的全部级数.

解：(1)由 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ 式

对应于 $\sin\varphi_1=0.20$ 与 $\sin\varphi_2=0.30$ 处满足：

$$0.20(a+b)=2\times6000\times10^{-10}$$

$$0.30(a+b)=3\times6000\times10^{-10}$$

得 $a+b=6.0\times10^{-6}$ m

(2) 因第四级缺级，故此须同时满足

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$
$$a\sin\varphi = k'\lambda$$

解得 $a = \dfrac{a+b}{4}k' = 1.5\times10^{-6}k'$

取 $k'=1$，得光栅狭缝的最小宽度为 1.5×10^{-6} m

(3) 由 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$

$$k = \frac{(a+b)\sin\varphi}{\lambda}$$

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$，对应 $k = k_{\max}$

$$\therefore\ k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda} = \frac{6.0\times10^{-6}}{6000\times10^{-10}} = 10$$

因 ±4，±8 缺级，所以在 $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$ 范围内实际呈现的全部级数为

$k = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm5,\pm6,\pm7,\pm9$ 共 15 条明条纹($k = \pm10$ 在 $k = \pm90^\circ$ 处看不到).