第四章

冲量与动量

§4-1 质点的动量定理

微分形式的牛顿第二定律必须考虑中间的每个过程。积分形式的牛顿定律可以由几个状态求解问题，这就是动量定理与动能定理。

1. 动量与冲量

重写牛顿第二定律的微分形式

$$\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\vec{p}$$

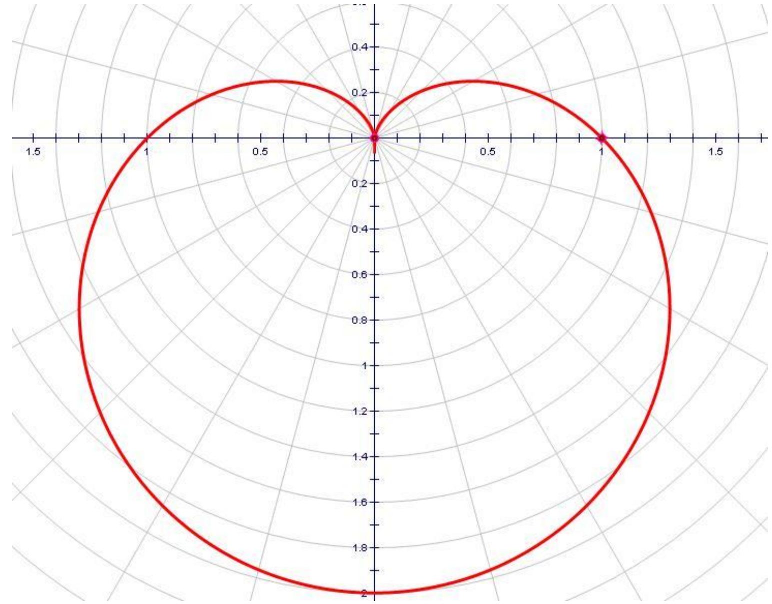
时间从t_1–t_2，两端积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\,\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

其中，$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ 称为**动量**，且有 $d\vec{p} = d(m\vec{\upsilon})$

动量概念的最早提出者
勒内 笛卡尔
（Rene Descartes，1596——1650）
（明 万历24年~清 顺治7年）

我思，故我在……



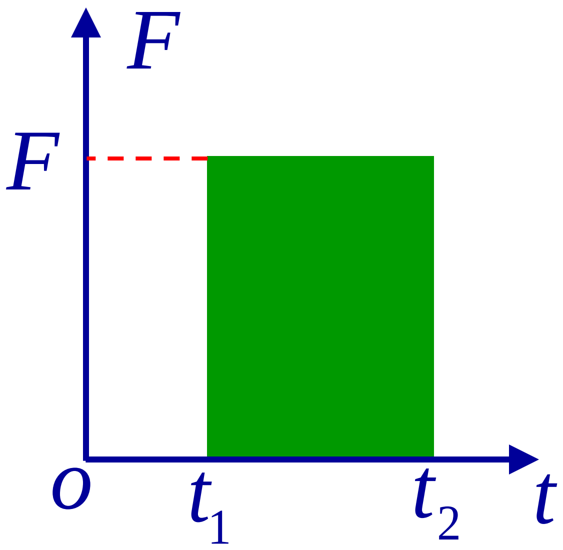
笛卡尔的爱情坐标公式

$$r = a(1 - \sin\theta)$$

左侧积分表示力对时间的累积量，叫做冲量。

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\,\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$



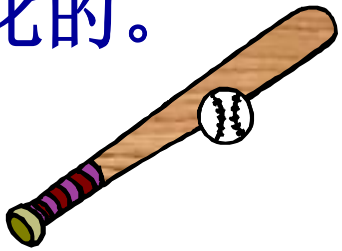
(1) 恒力 $\vec{F}$ 的冲量(时间$t_1 \rightarrow t_2$):

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$$

在$F \sim t$ 图曲线下的面积$S = F(t_2 - t_1)$为冲量大小。

(2)变力的冲量

很多实际问题中，物体所受力是随时间变化的。如打棒球时，棒与球之间的作用力是随时间变化的。

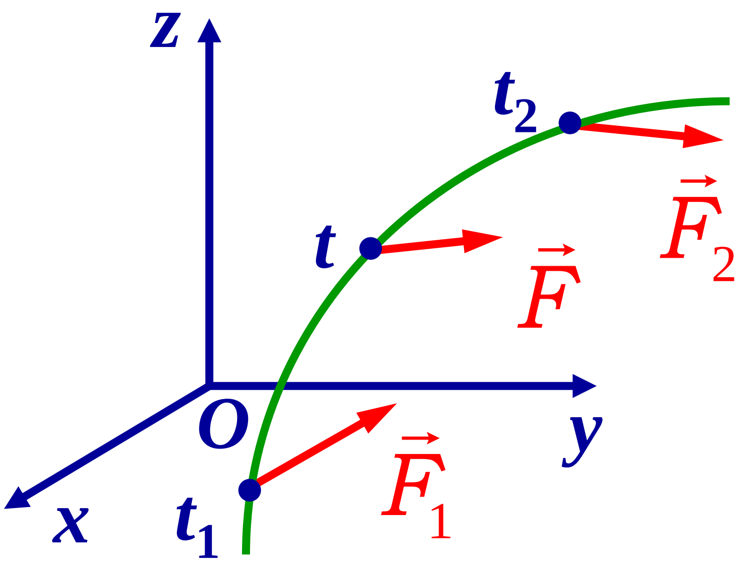


元冲量：

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

时间$t_1 \to t_2$：

$$\vec{I} = \int \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$$



2．质点的动量定理

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\,\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

这就是**动量定理：物体在运动过程中所受到的合外力的冲量，等于该物体动量的增量。**

动量定理的几点说明：

(1)冲量的方向：

$\vec{I}$的方向一般不是某一瞬时力 $\vec{F}_i$ 的方向，而是所有元冲量 $\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 的合矢量 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t$ 的方向。

(2)在直角坐标系中将矢量方程改为标量方程

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \,\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x}$$

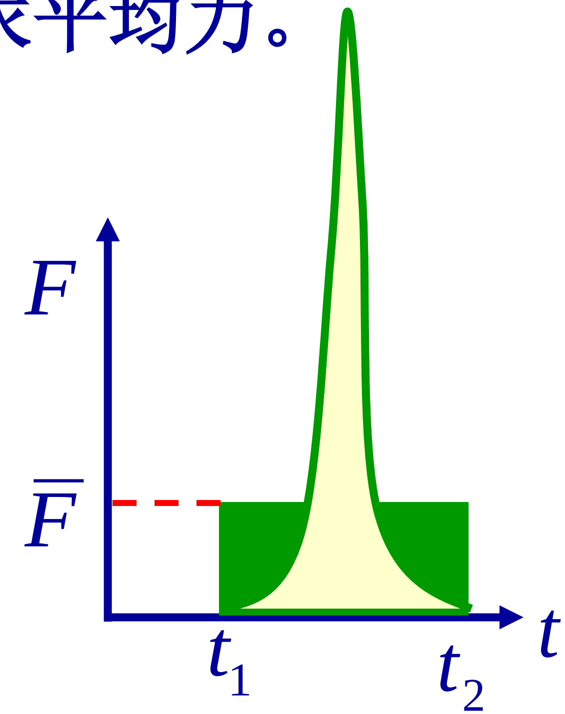
$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \,\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y}$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \,\mathrm{d}t = mv_{2z} - mv_{1z}$$

(3)动量定理是牛顿第二定律的积分形式，因此其适用范围是惯性系。

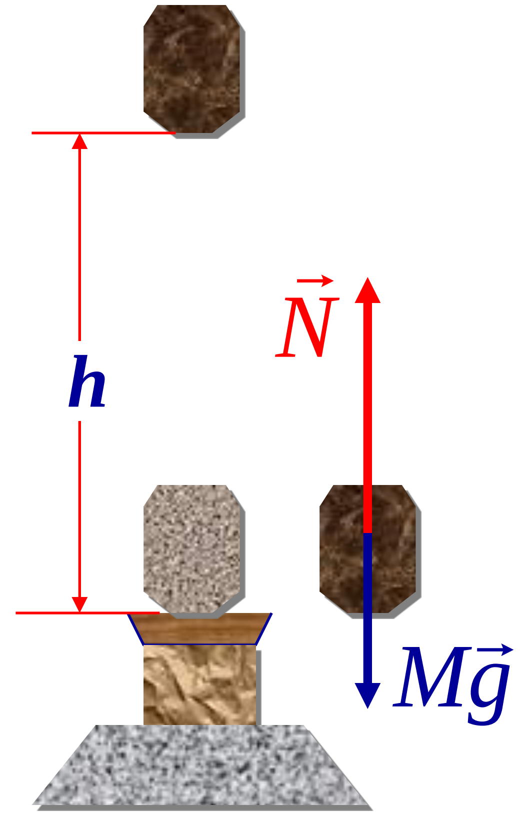
(4)动量定理在打击或碰撞问题中用来求平均力。

打击或碰撞，力$\vec{F}$的方向保持不变，曲线与t轴所包围的面积就是t_1到t_2这段时间内力$\vec{F}$的冲量的大小，根据改变动量的等效性，得到平均力。



$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$$

例题：一质量$M = 3\mathrm{t}$的重锤，从高度$h = 1.5\mathrm{m}$处自由落到受锻压的工件上，工件发生形变。如果作用的时间(1)$\tau = 0.1\mathrm{s}$，(2)$\tau = 0.01\mathrm{s}$。试求锤对工件的平均冲力。



解：以重锤为研究对象，分析受力，作受力图：

解法一：锤对工件的冲力变化范围很大，用平均冲力计算，反作用力用平均支持力代替。

在竖直方向利用动量定理，取竖直向上为正。

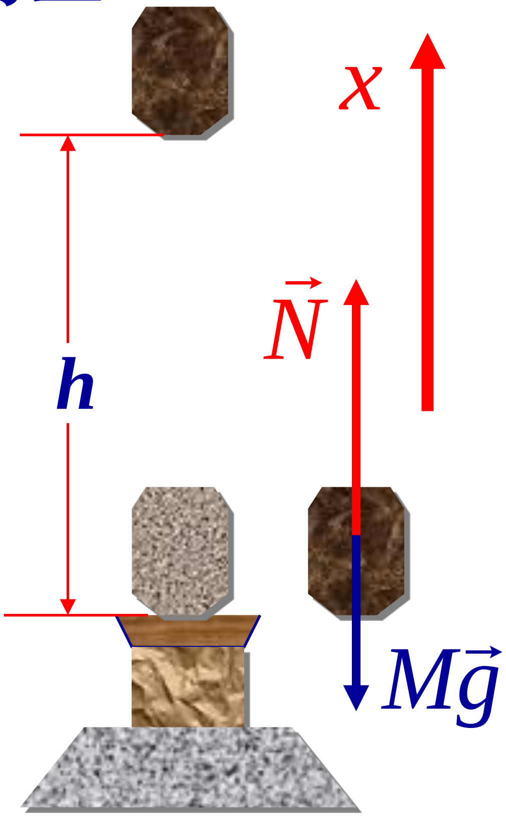
$$(\overline{N}-Mg)\tau = Mv - Mv_0$$

初状态动量为 $-M\sqrt{2gh}$

末状态动量为**0**

得到 $(\overline{N}-Mg)\tau = M\sqrt{2gh}$

解得 $\overline{N} = Mg + M\sqrt{2gh}/\tau$



代入***M***、***h***、***τ***的值，求得：

(1) $\overline{N} = 3\times10^3\times(9.8+\sqrt{2\times9.8\times1.5}/0.1)$

$=1.92\times10^5$牛顿

(2) $$\overline{N} = 3\times10^3\times(9.8+\sqrt{2\times9.8\times1.5}/0.01)$$
$$=1.9\times10^6\text{牛顿}$$

解法二：考虑从锤自由下落到静止的整个过程，动量变化为零。

重力作用时间为

$$\tau+\sqrt{2h/g}$$

支持力作用时间为τ

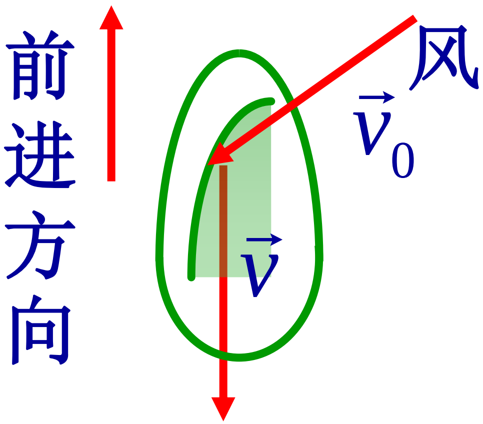
根据动量定理，整个过程合外力的冲量为零，即

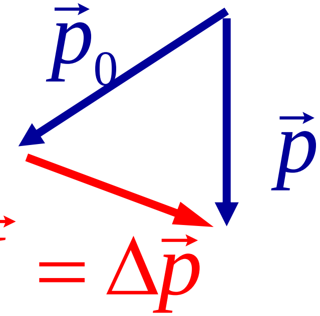
$$\overline{N}\tau - Mg(\tau+\sqrt{2h/g}) = 0$$

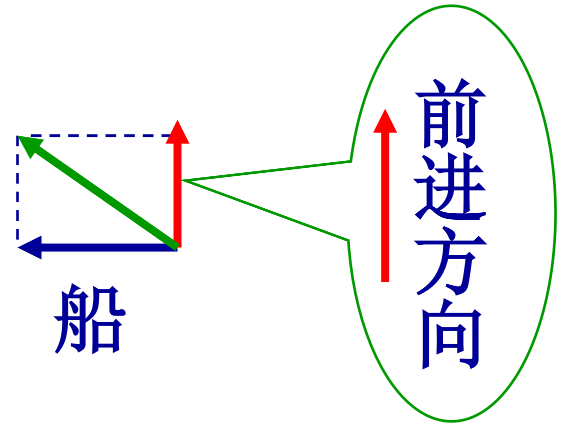
得到相同的结果

$$\overline{N} = Mg + M\sqrt{2gh}/\tau$$

动量定理解释了“逆风行舟”。







取一小块风**d*m***为研究对象

初 $\mathrm{d}\vec{p}_0=\vec{v}_0\mathrm{d}m$

末 $\mathrm{d}\vec{p}=\vec{v}\mathrm{d}m$

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}$$

由牛顿第三定律

风对帆的冲量大小

$$\left|\vec{I}\right|=\left|\Delta\vec{p}\right|$$

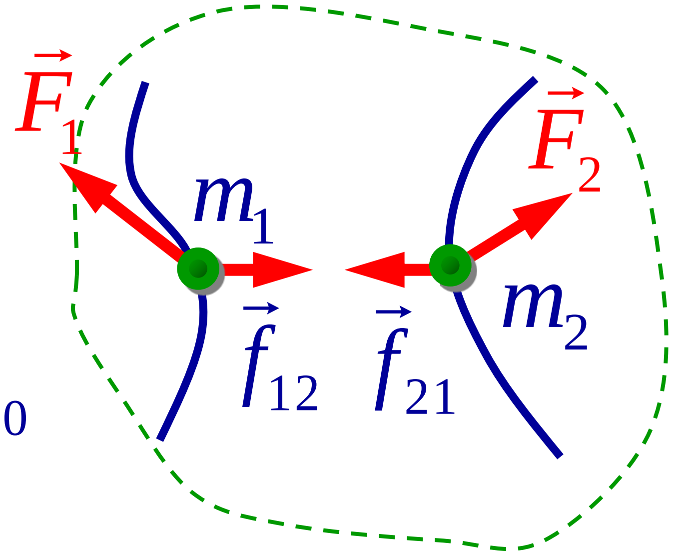
方向与 $\Delta\vec{p}$ 相反

$$\left|\vec{F}\right|=\frac{\left|\Delta\vec{p}\right|}{\Delta t}$$

§ 4-2 质点系的动量定理

两个质点质量分别为m_1、m_2，所受外力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$，内力为$\vec{f}_{12}$、$\vec{f}_{21}$，初速度为$\vec{v}_{10}$、$\vec{v}_{20}$，末速度为$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$

由质点动量定理



$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{f}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{f}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

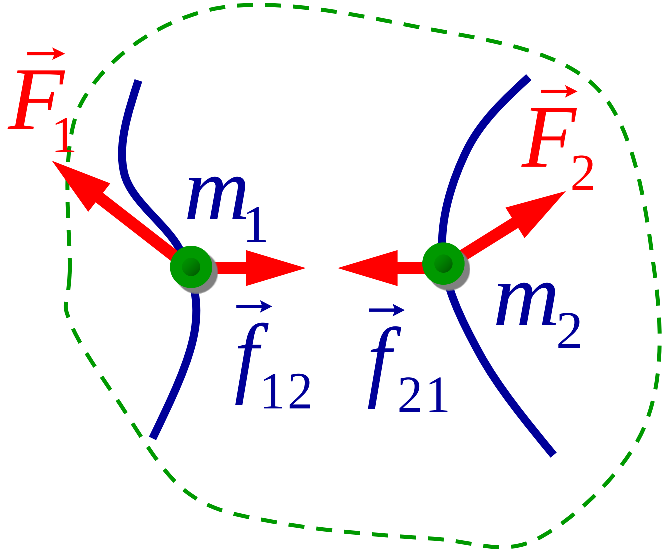
相加

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}(\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21})\mathrm{d}t$$

$$=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21})\mathrm{d}t$$

$$=(m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2)-(m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20})$$



内力，牛顿第三定律：

$$\because\ \vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0$$

$$\therefore\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2)-(m_1\vec{V}_{10}+m_2\vec{V}_{20})$$

对*n*个质点构成的系统：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\sum_i\vec{F}_i)\mathrm{d}t=\sum_i m_i\vec{V}_i-\sum_i m_i\vec{V}_{i0}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t=\sum_i m_i\vec{V}_i-\sum_i m_i\vec{V}_{i0}$$

质点系的动量为系统各质点动量的矢量和：

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2}(\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

质点系动量定理：某段时间内，质点系动量的增量，等于同时间内作用在质点系上所有外力在同一时间内的冲量的矢量和(合外力的冲量）。

几点说明：(1) 只有外力可改变系统的总动量。

例如：拔河时，甲队拉乙队的力，与乙队拉甲队的力是一对作用力与反作用力，为系统的内力，不会改变系统总的动量。

只有运动员脚下的摩擦力才是系统外力，因此哪个队脚下的摩擦力大，哪个队能获胜。所以拔河应选质量大的运动员，以增加系统外力。

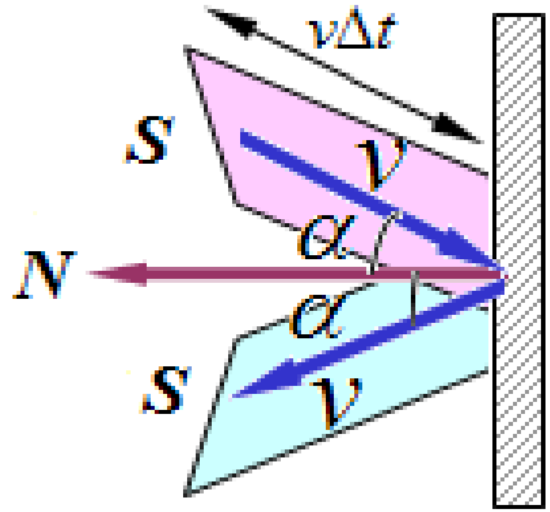
(2) 内力可改变系统内单个质点的动量 —— 内部作用复杂。

(3) 质点系的冲量沿某坐标轴的投影等于同一方向上质点系动量投影的增量。直角坐标系中表示为：

$$\begin{cases} \sum_i m_i V_{ix} - \sum_i m_i V_{i0x} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} F_{ix}\mathrm{d}t \\ \sum_i m_i V_{iy} - \sum_i m_i V_{i0y} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} F_{iy}\mathrm{d}t \\ \sum_i m_i V_{iz} - \sum_i m_i V_{i0z} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} F_{iz}\mathrm{d}t \end{cases}$$

第四次：第三章：22、第四章：3、4、9、10、11、18

例：容器中有大量气体分子，为简单起见，假想每个分子都以速度 v 碰到铅直的器壁上，v与器壁法线 N 方向的夹角为α，并以相同的速率和角度弹回来。若单位体积内的分子数为n，每个分子的质量为m，求分子对器壁的压强。



解：取Δt 时间内碰到器壁上的气体分子系统为研究对象，系统总质量为

$$M = mnSv\Delta t\cos\alpha$$

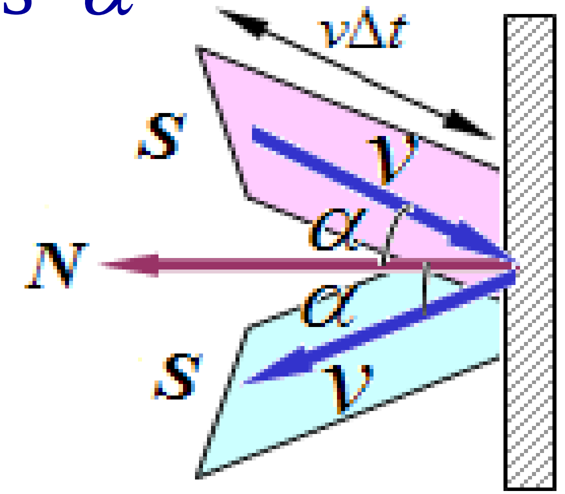
碰撞前后分子系统沿N方向的投影分别为

$$P_0 = -Mv\cos\alpha = -mnSv^2\Delta t\cos^2\alpha$$

$$P = mnSv^2\Delta t\cos^2\alpha$$

由动量定理

$$\bar{F}\Delta t = P - P_0 = 2mnSv^2\Delta t\cos^2\alpha$$

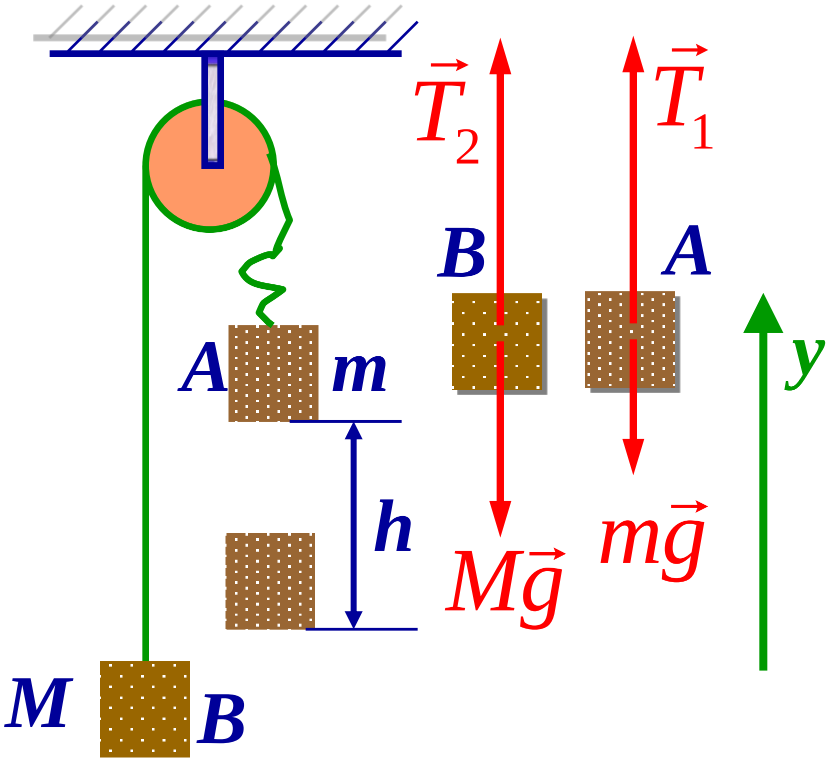


故 $$\bar{F} = 2mnSv^2\cos^2\alpha$$

$$p = \frac{\bar{F}}{S} = 2mnv^2\cos^2\alpha$$

例题：一绳跨过一定滑轮，两端分别拴有质量为***m***及***M***的物体***A***和***B***， ***M***大于***m***。***B***静止在地面上，当***A***自由下落距离***h***后，绳子才被拉紧。求绳子刚被拉紧时两物体的速度，以及能上升的最大高度。

解：以***A***和***B***为系统作为研究对象，隔离法分析受力，作出绳拉紧时的受力图：



绳子刚好拉紧前的瞬间，物体***A***的速度为：

$$v = \sqrt{2gh}$$

取竖直向上为正方向。

绳子拉紧后，经过短暂时间的作用，两物体速率相等，对两个物体分别应用动量定理，得到：

$$(T_1 - mg)\Delta t = -mV - (-mv)$$

$$(T_2 - Mg)\Delta t = MV - 0$$

忽略重力，考虑到绳不可伸长，有：$T_1 = T_2$

故 $$V = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

当物体B上升速度为零时，达到最大高度

$$2aH = V^2 - 0$$

$$a = \frac{M-m}{M+m}g$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$

*变质量物体的运动方程

物体**m**与质元**dm**在**t**时刻的速度以及在**t + dt**时刻合并后的共同速度如图所示：

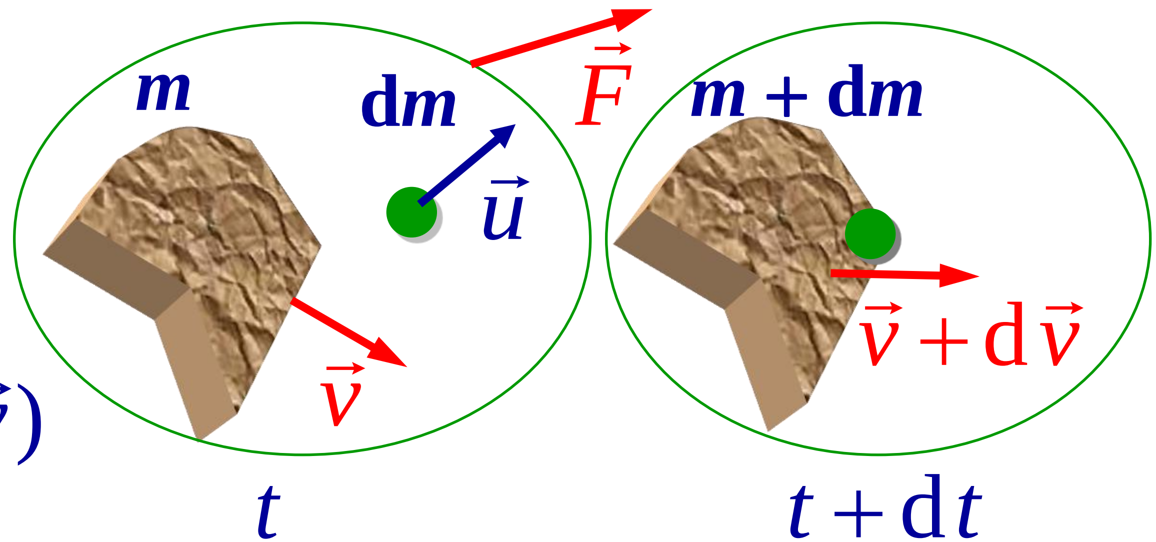
把物体与质元作为系统考虑，初始时刻与末时刻的动量分别为：

初始时刻

$$m\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{u}$$

末时刻

$$(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})$$



对系统利用动量定理

$$(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}=\vec{F}\mathrm{d}t$$

$$m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}=\vec{F}\mathrm{d}t$$

略去二阶小量，两端除d*t*

变质量物体运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$$

应注意，**d*m***可正可负。**d*m***取负值，物体质量减小，对于火箭之类喷射问题，$\vec{u}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 为尾气推力。

$$m\,\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}-dm\vec{u}=\vec{F}dt$$

$$(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}=\vec{F}dt$$

略去二阶小量，两端除d*t*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})$$

$$+m(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k})$$

$$m\,\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}+\mathrm{d}m\vec{v}-dm\vec{u}=\vec{F}dt$$

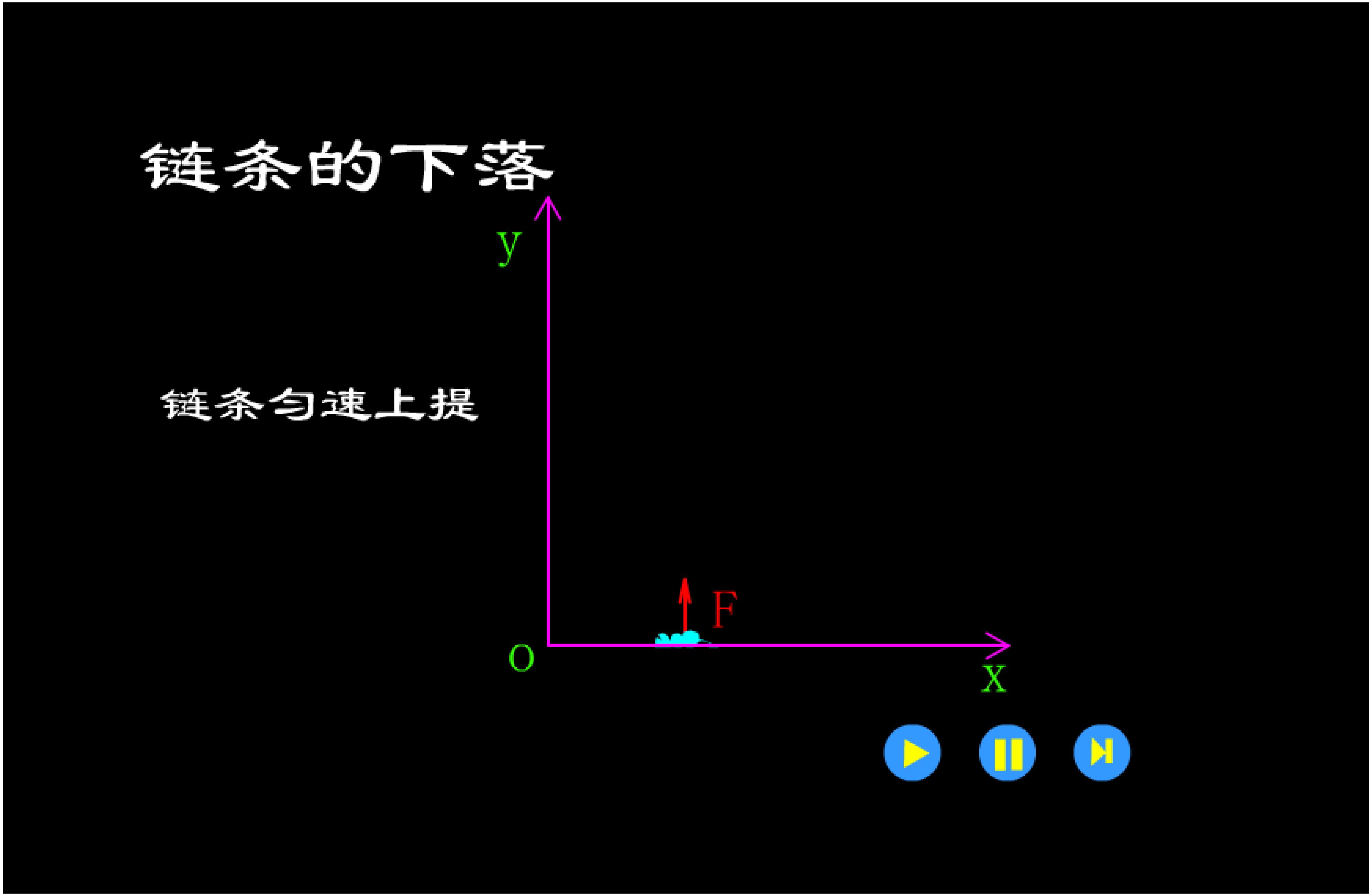
$$(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})-m\vec{v}-\mathrm{d}m\vec{u}=\vec{F}dt$$

略去二阶小量，两端除d*t*

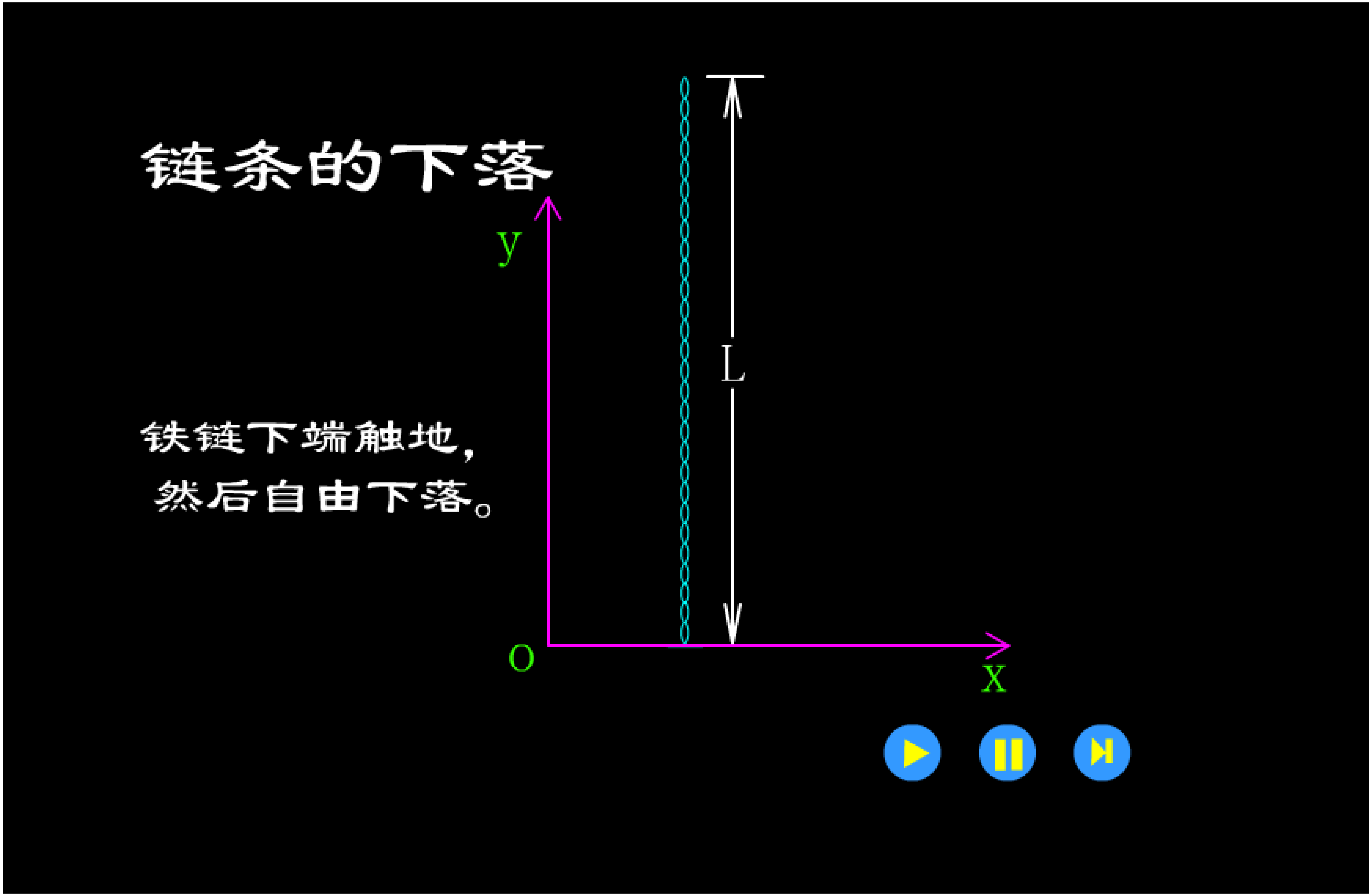
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}=\vec{F}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}g+f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}+m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

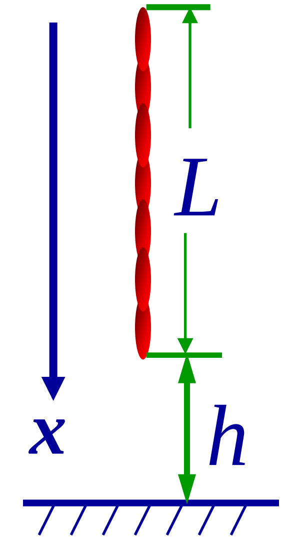


链条的上提



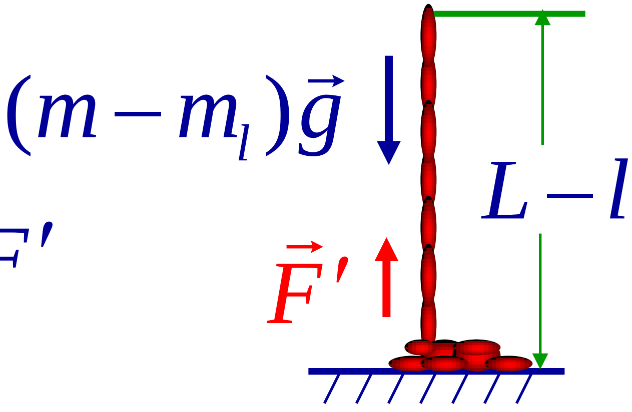
链条的下落

例题：质量为*m*的匀质链条，全长为*L*，手持其上端，使下端离地面为*h*。然后放手让它自由下落到地面上，如图所示。求链条落到地上的长度为*l*时，地面所受链条作用力的大小。



解：应用变质量物体运动方程。以链条为系统，向下为*x*正向。*t*时刻，已落地面链段m_l速度为零，空中链段$(m - m_l)$速度为*v*，受力如图。

对空中链段写变质量物体的牛二



$$\frac{\mathrm{d}[(m-m_l)v]}{\mathrm{d}t}=(m-m_l)g-F'$$

$$v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m-m_l)+(m-m_l)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(m-m_l)g-F'$$

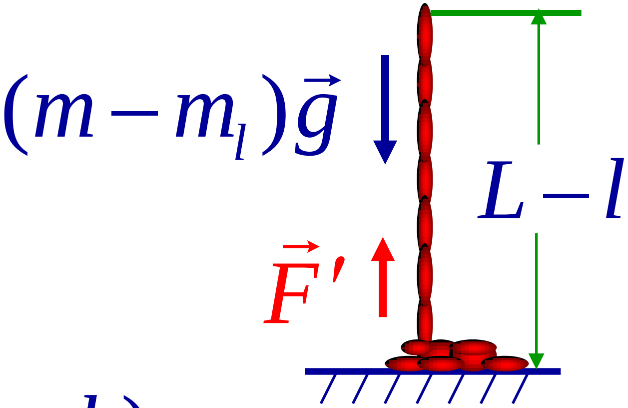
$$\because \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g,\quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\therefore -v\frac{\mathrm{d}m_l}{\mathrm{d}t}=-F'$$

$$\because m_l=\frac{m}{L}l, v=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}, v^2=2g(l+h)$$

$$F'=v\frac{\mathrm{d}m_l}{\mathrm{d}t}=v\frac{m}{L}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{L}v^2$$

$$=\frac{2m(l+h)}{L}g$$

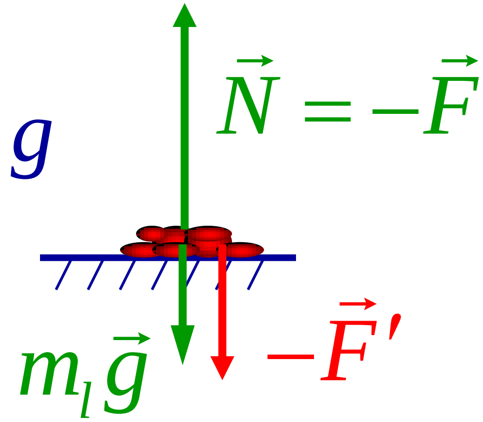


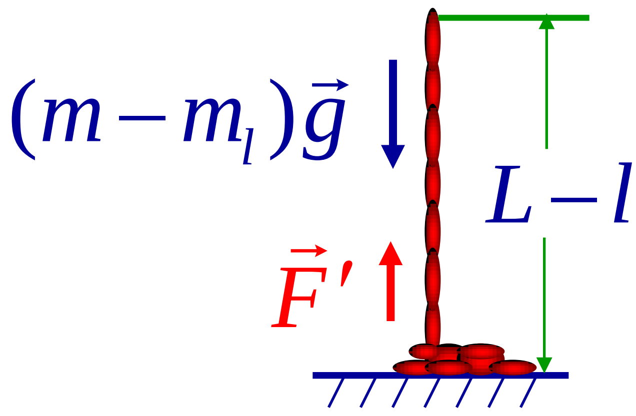
$$F' = \frac{2m(l+h)}{L} g$$

地面所受链条的作用力的大小等于***F '***的反作用力与已经落地的链条的重力之和。

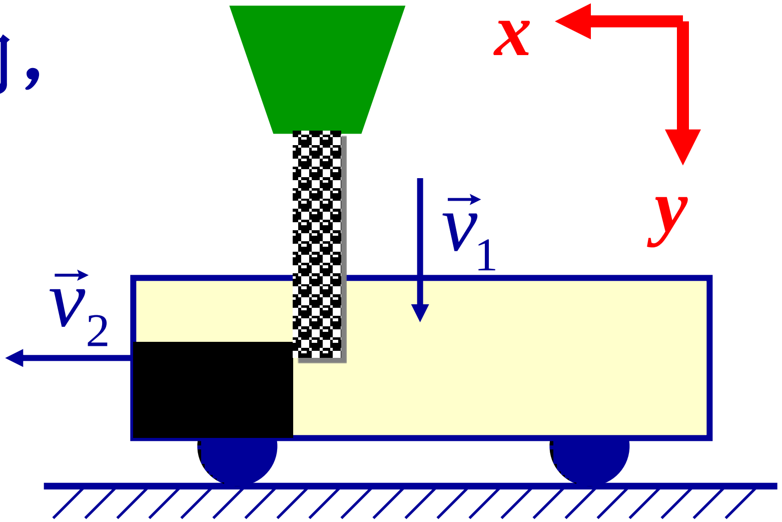
$$F = F' + m_l\, g = \frac{2m(l+h)}{L} g + \frac{ml}{L} g$$

$$= \frac{m}{L}(3l + 2h) g$$





例：列车在平直铁轨上装煤，列车空载时质量为m_0，煤炭以速率v_1竖直流入车厢，每秒流入质量为α。假设列车与轨道间的摩擦系数为μ，列车相对于地面的运动速度v_2保持不变，求机车的牵引力。



解：车和煤为系统，向下为y正向，向左为x正向，建立坐标系。

$t \to t + \mathrm{d}t$时刻，$\mathrm{d}m = \alpha \mathrm{d}t$

$$\vec{p}(t) = (m_0 + \alpha t)\vec{v}_2 + \alpha \mathrm{d}t \vec{v}_1$$

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = (m_0 + \alpha t + \alpha \mathrm{d}t)\vec{v}_2$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\alpha \mathrm{d}t$$

$$\vec{F}+\vec{f}+\vec{N}+(m_0+\alpha t)\vec{g}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\alpha(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

竖直 $(m_0+\alpha t)g-N=-\alpha v_1$

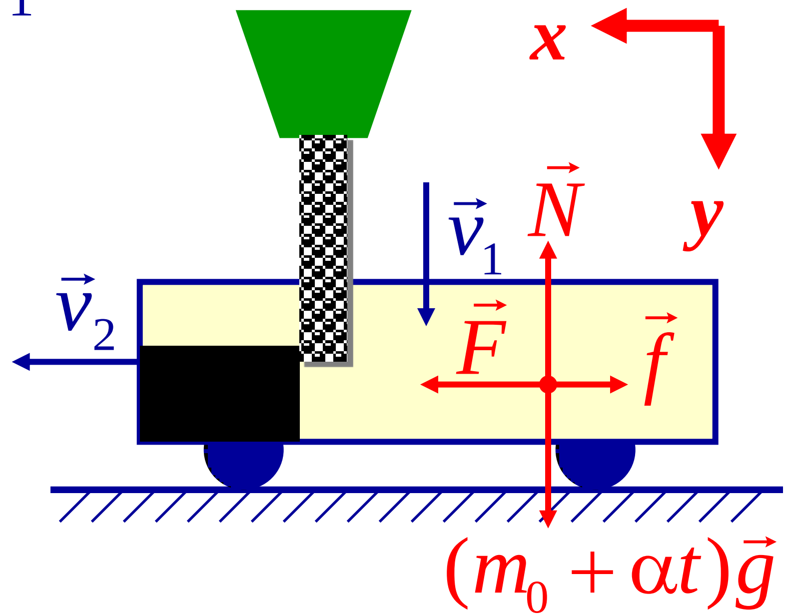
$$N=\alpha v_1+(m_0+\alpha t)g$$

水平 $F-f=\alpha v_2$

$$F=\alpha v_2+f$$

$$=\alpha v_2+\mu N$$

$$=\mu(m_0+\alpha t)g+\alpha(v_2+\mu v_1)$$



§ 4-3 质点系动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ➡ $\vec{P}_2 \equiv \vec{P}_1$

即 $\vec{P} = \left(\sum_i m_i \vec{V}_i \right)$ =常矢量

质点系动量守恒定律：当质点系所受合外力为零时，该质点系的动量保持不变。

直角坐标系下的分量形式

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \cdots + m_n v_{nx} = \text{常量}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \cdots + m_n v_{ny} = \text{常量}$$

$$m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + \cdots + m_n v_{nz} = \text{常量}$$

几点说明：

(1)系统内各质点的动量必须相对于同一惯性系，系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的。

(2)若系统在某方向上所受合外力为零，则该方向上动量守恒。

动量守恒分方向成立

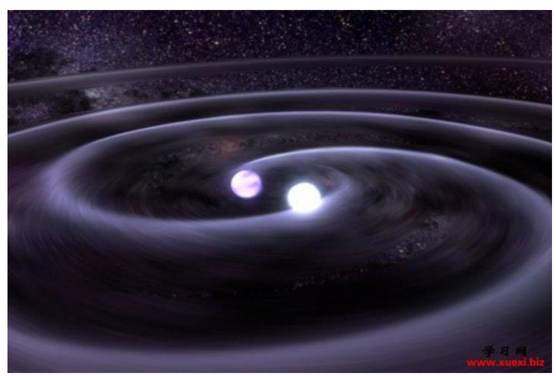
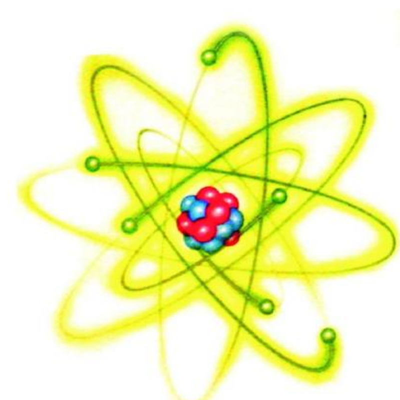
$$\begin{cases} F_x = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{ix}\right) = P_x = \text{常量} \\ F_y = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iy}\right) = P_y = \text{常量} \\ F_z = 0 \Rightarrow \left(\sum m_i v_{iz}\right) = P_z = \text{常量} \end{cases}$$

(3)系统所受合外力不为零，但内>>外力时，也可近似地认为系统动量守恒，如打击、碰撞问题。



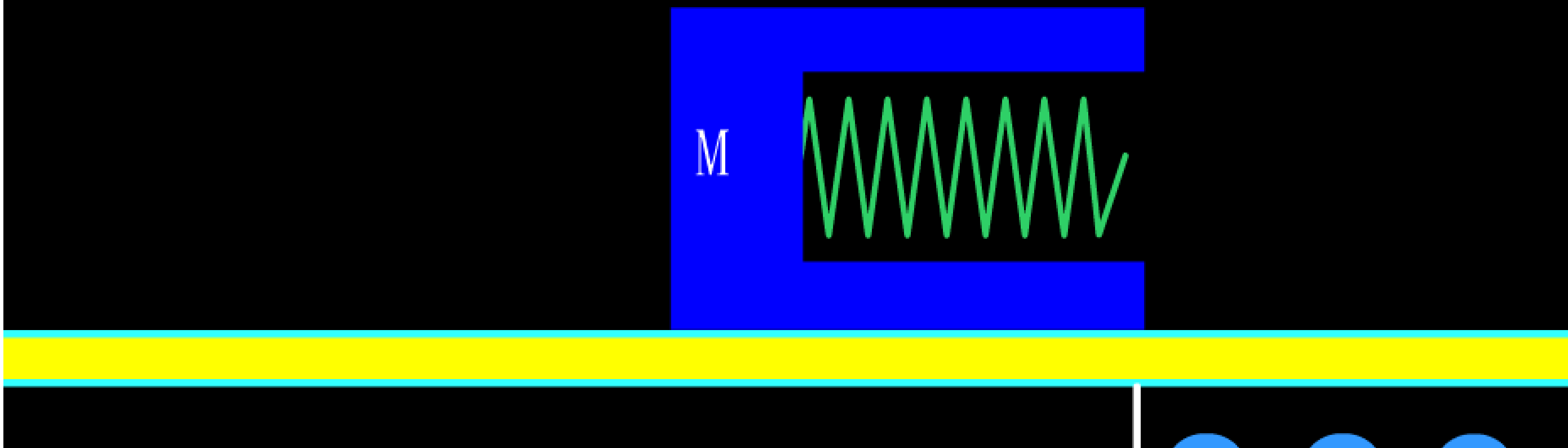
(4) 动量守恒定律只适用于惯性系。

(5) 动量守恒定律也适用于高速，微观领域。

运动物体对弹簧的压缩

小球速度为：v
弹簧劲度系数为：k

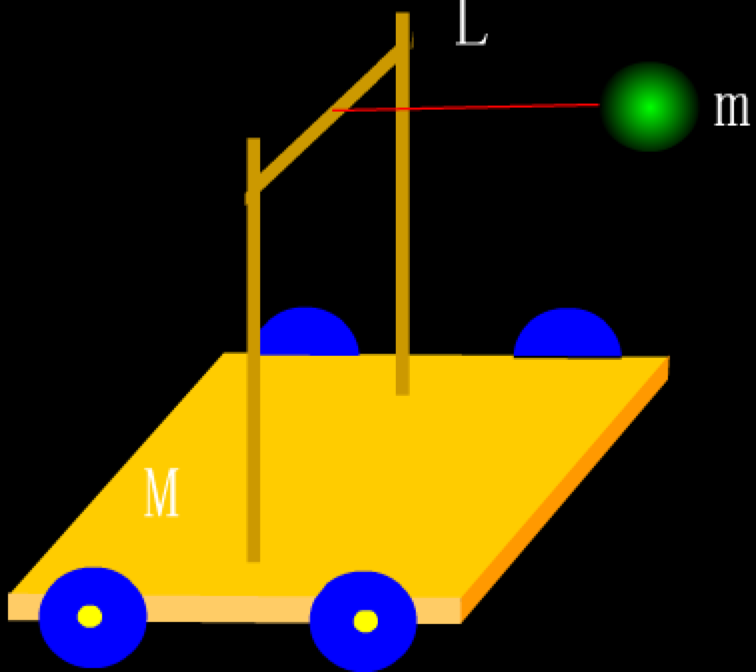


球与小车

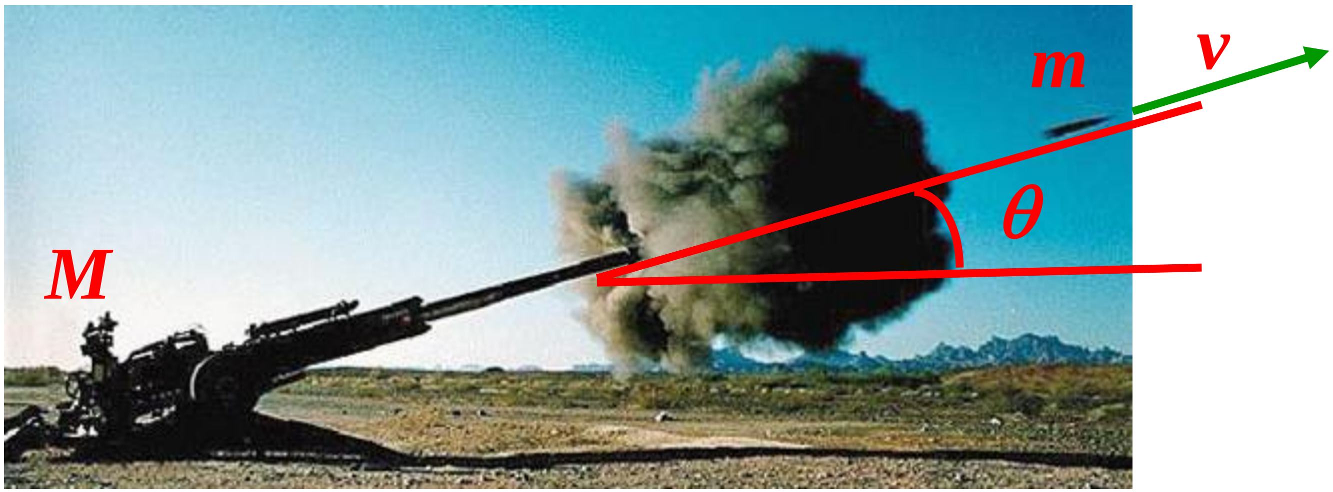
小车速度： V

小球速度： v

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=mgL$$
$$MV-mv=0$$



例题：如图，设炮车以仰角θ发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为M和m，炮弹出口速度为v，求炮车的反冲速度V。炮车与地面间的摩擦力不计。



解：把炮车和炮弹看成一个系统。发炮前，系统在竖直方向上的外力有重力$\vec{G}$和地面支持力$\vec{N}$，而且$\vec{G}=-\vec{N}$，在发射过程中$\vec{G}=-\vec{N}$并不成立（想一想为什么？），系统所受的外力矢量和不为零，所以这一系统的总动量不守恒。

经分析，对地面参考系而言，炮弹相对地面的速度 $\vec{u}$，按速度变换为

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{V}$$

它的水平分量为

$$u_x = v\cos\theta - V$$

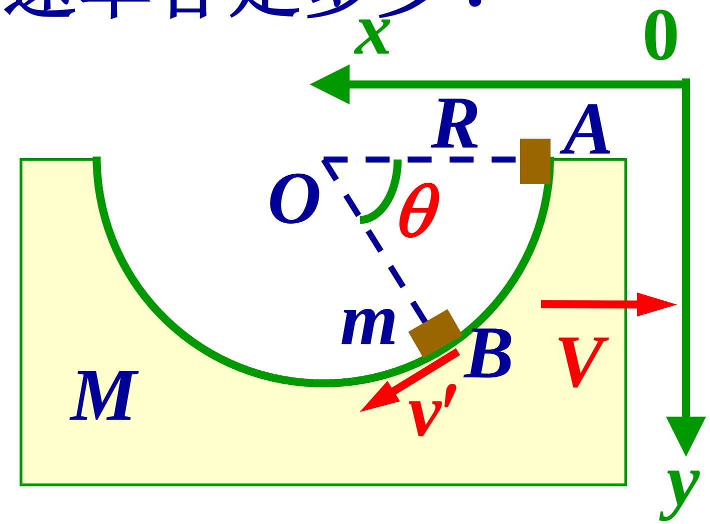
于是，炮弹在水平方向的动量为 $\boldsymbol{m(v\cos\theta - V)}$，而炮车在水平方向的动量为 $\boldsymbol{-MV}$。根据动量守恒定理有

$$-MV + m\left(v\cos\theta - V\right) = 0$$

由此得炮车的反冲速度为

$$V = \frac{m}{m+M} v\cos\theta$$

例：半圆槽质量为M，置于光滑水平桌面上。质量为m的物体从M顶部A处，由静止下滑，求滑至任一点B处时，m相对M和M相对地面的速率各是多少？



解：设m相对半圆槽M的速度为$\vec{v}'$，M对地的速度为$\vec{V}$。

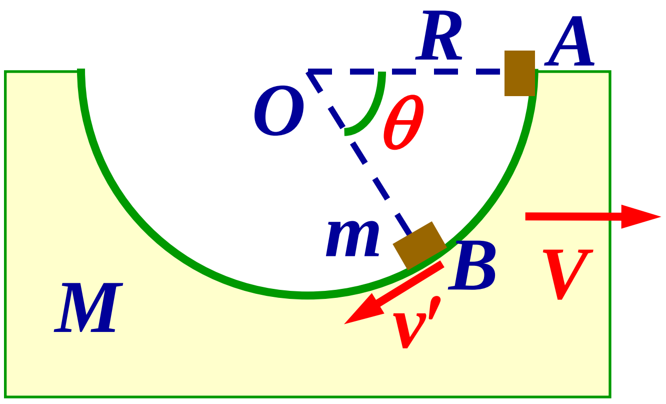
m相对地的速度为：

$$\vec{v} = (v'\sin\theta - V)\hat{i} + (v'\cos\theta)\hat{j}$$

以地面为参考系，选 $m + M$为研究系统，水平方向不受外力，故水平方向动量守恒。

$$m(v'\sin\theta - V) - MV = 0 \quad (1)$$

m相对地的速度：



$$\vec{v} = (v'\sin\theta - V)\hat{i} + (v'\cos\theta)\hat{j}$$

机械能守恒或动能定理：

$$mgR\sin\theta = m(v'\sin\theta - V)^2/2$$

$$+m(v'\cos\theta)^2/2 + MV^2/2 \quad (2)$$

$$m(v'\sin\theta - V) - MV = 0 \quad (1)$$

$$\therefore v' = \sqrt{\frac{2(M+m)Rg\sin\theta}{(M+m) - m\sin^2\theta}}$$

$$V = \frac{m\sin\theta}{M+m}\sqrt{\frac{2(M+m)Rg\sin\theta}{(M+m) - m\sin^2\theta}}$$

* 火箭飞行

前苏联东方1号火箭

长征三号运载火箭

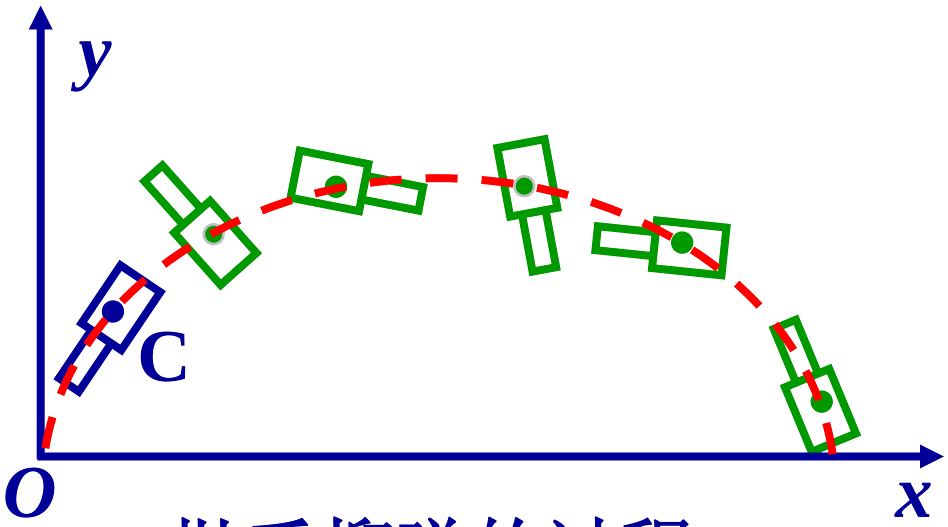
火箭发射

用火箭发射卫星

§ *4-4 质心 质心运动定理

1. 内力、外力、质心

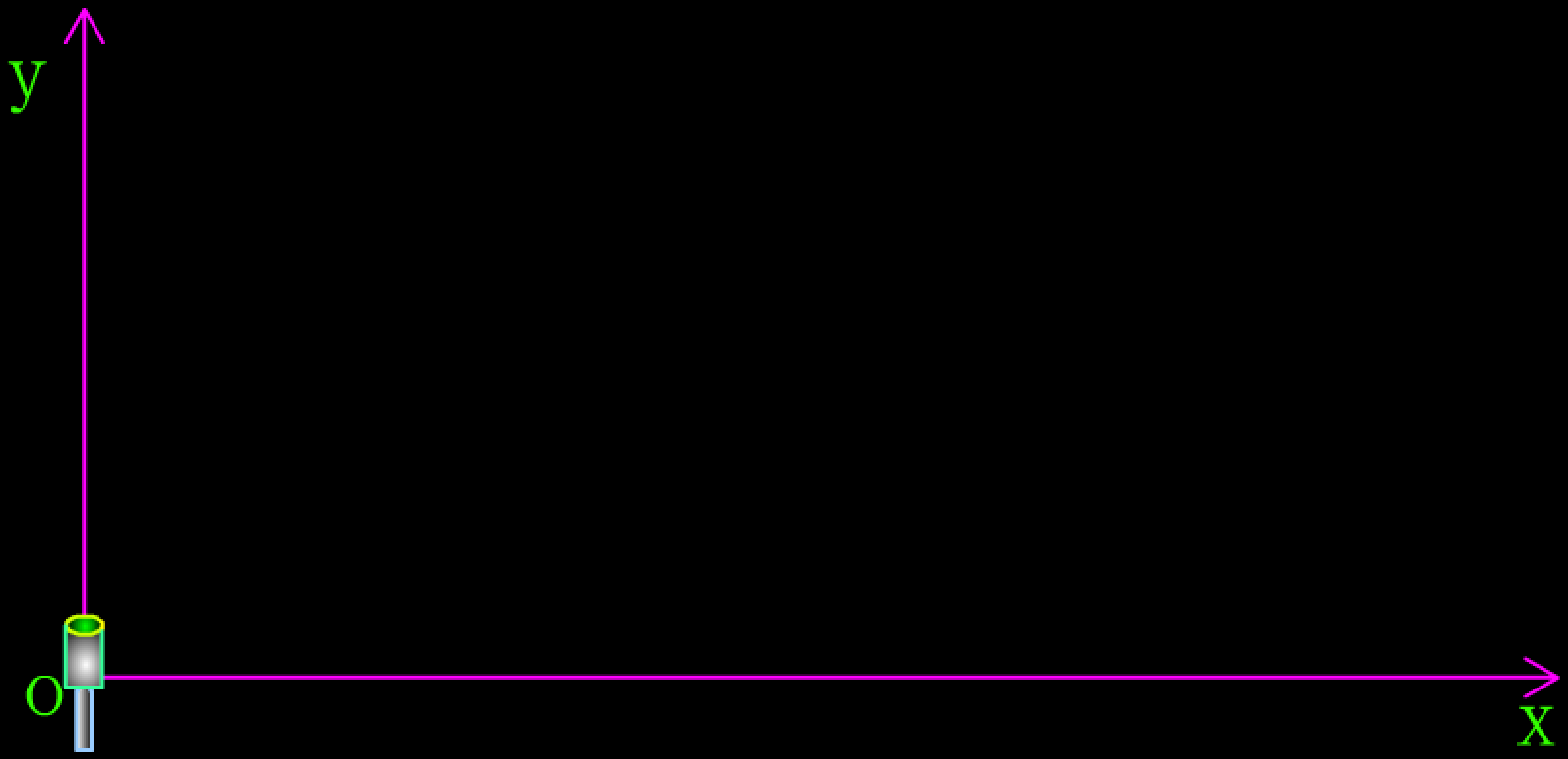
质点系的质量中心，简称质心。具有长度的量纲，描述与质点系有关的某一空间点的位置。



抛手榴弹的过程

质心运动反映了质点系的整体运动趋势。

质心运动

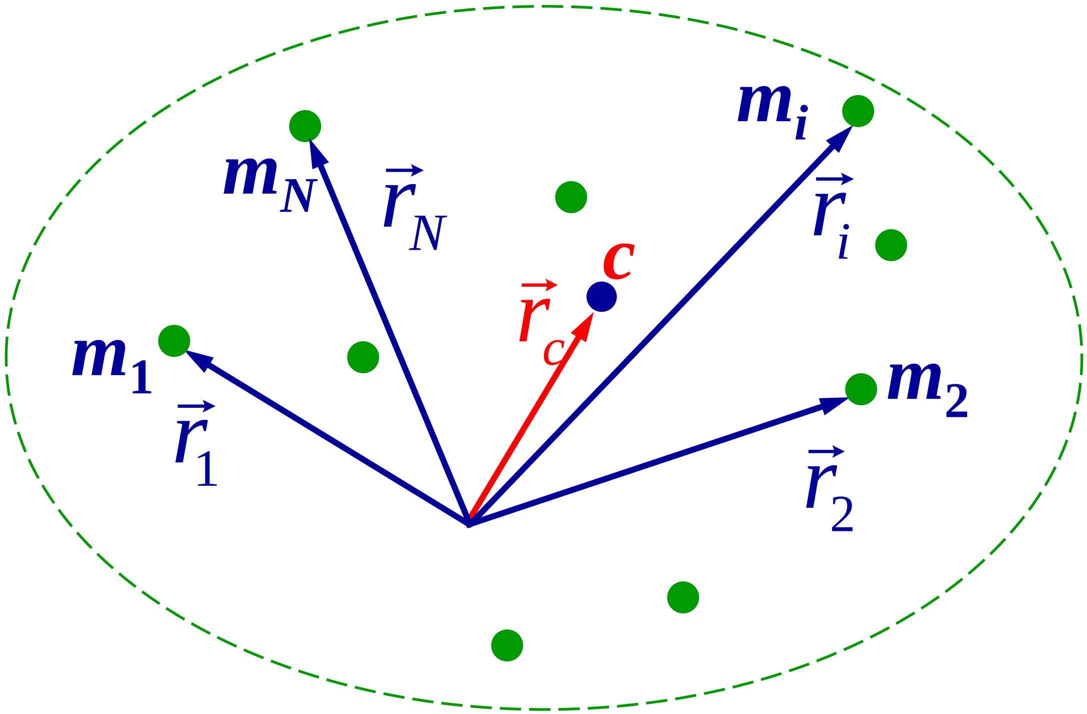


对于N个质点组成的质点系：

$$m_1, m_2, \cdots, m_i, \cdots m_N$$

$$M = \sum m_i$$

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_i, \cdots \vec{r}_N$$



直角坐标系中

$$x_c = \sum m_i x_i / M$$

$$y_c = \sum m_i y_i / M$$

$$z_c = \sum m_i z_i / M$$

$$\vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i / M$$

对于质量连续分布的物体

$$\vec{r}_c = \int \vec{r}\,\mathrm{d}m / M$$

分量形式

$$x_c = \int x\,\mathrm{d}m / M$$

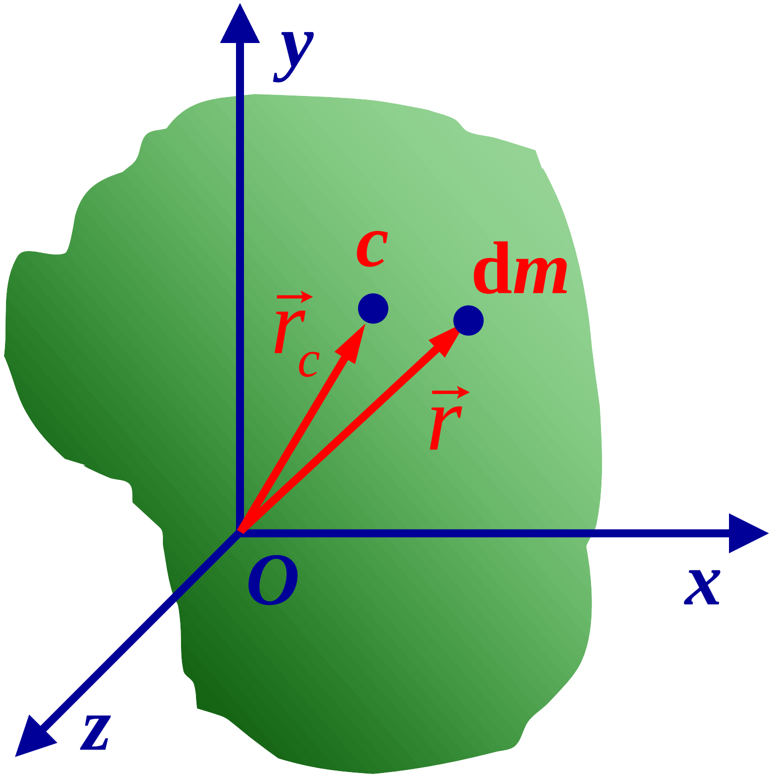
$$y_c = \int y\,\mathrm{d}m / M$$

$$z_c = \int z\,\mathrm{d}m / M$$

线分布 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$

面分布 $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$

体分布 $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$



注意：$\vec{r}_c = \int \vec{r}\,\mathrm{d}m / M$

质心的位矢与参考系的选取有关。

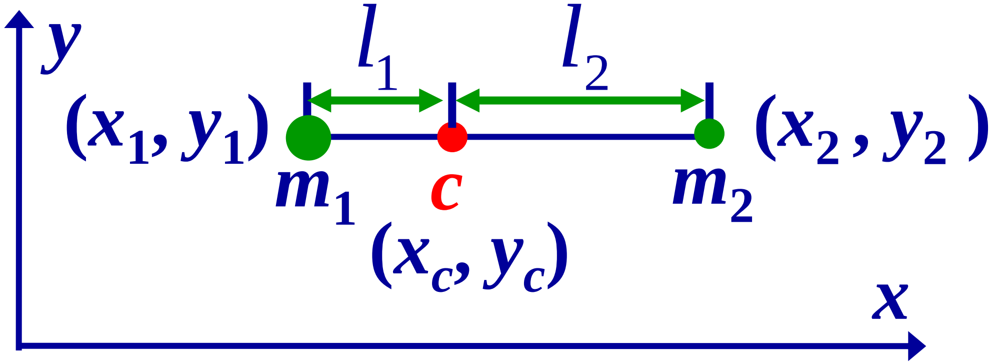
刚体的质心相对自身位置确定不变。

质量均匀的规则物体的质心在几何中心。

质心与重心不一样，物体尺寸不十分大时，质心与重心位置重合。

2个质点：

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$



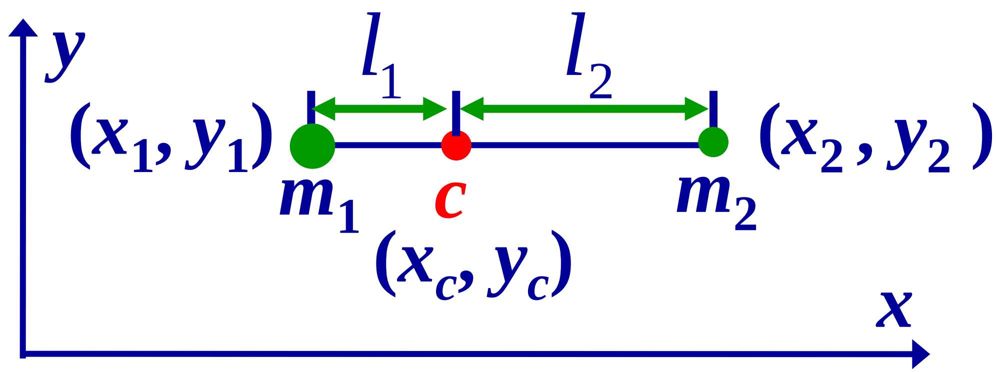
$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

这里为方便起见，选取了平面直角坐标系。但这一做法并未失去一般性，证明方法对三维形式是同样适用的。

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$l_1 = \sqrt{(x_c - x_1)^2 + (y_c - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} - y_1\right)^2}$$

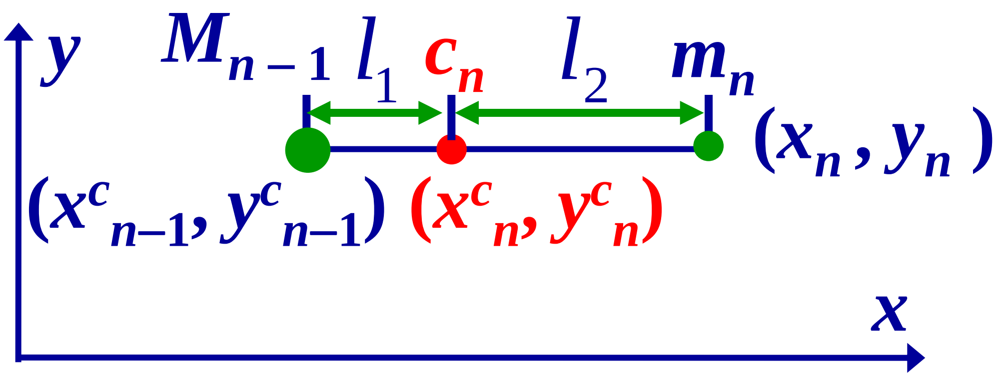
$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

n **个质点：归纳可得**

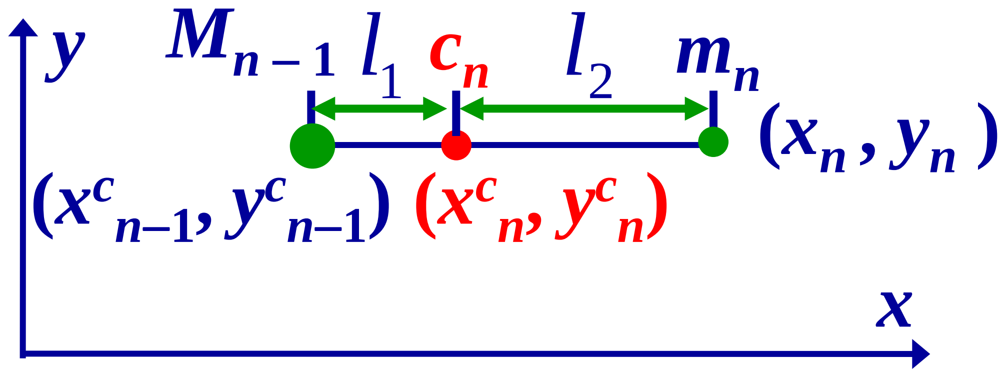
取*n* – 1个质点，假定它们的质心用前述公式表述，总质量为M_{n-1}，并且符合通常对于质量中心的直观看法，于是可将质心代表这*n* – 1个质点。则有

$$x_{n-1}^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}$$

$$y_{n-1}^c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}$$



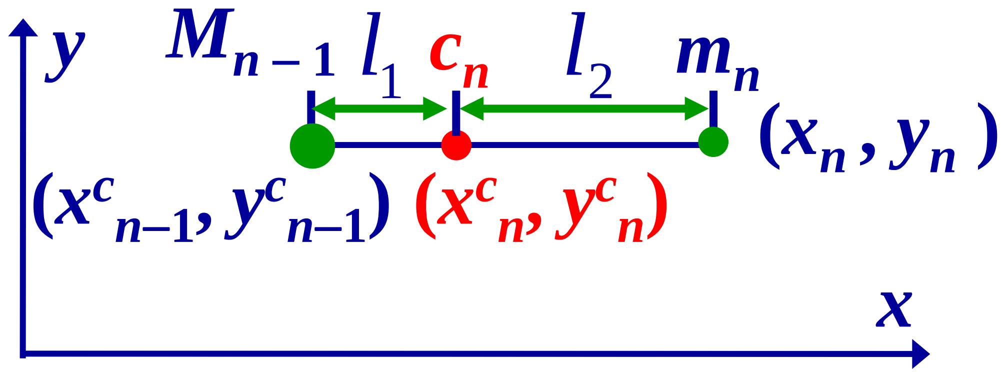
$$x_{n-1}^{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}$$



$$x_n^c = \frac{M_{n-1}x_{n-1}^c + m_n x_n}{M_{n-1} + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + m_n x_n}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

同理 $y_n^c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$

$$x_n^c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



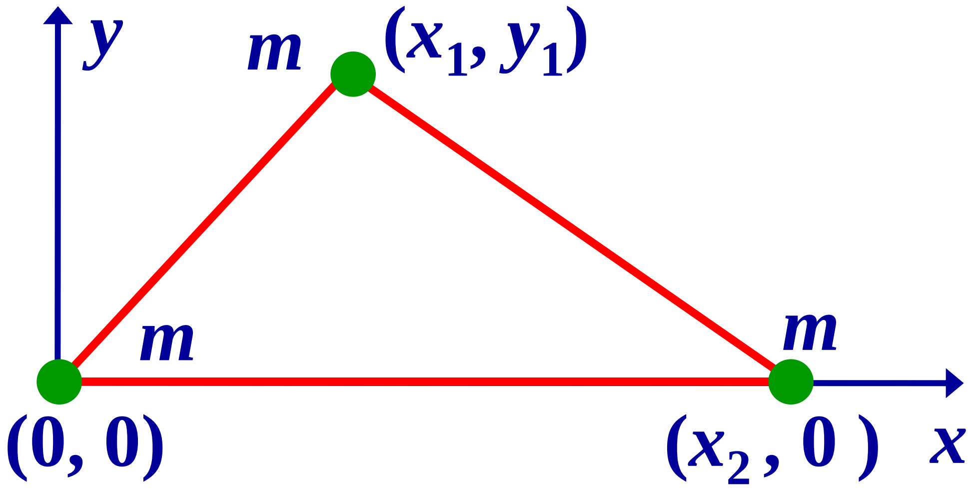
$$l_1 = \sqrt{\left(x_n^c - x_{n-1}^c\right)^2 + \left(y_n^c - y_{n-1}^c\right)^2}$$

$$= \frac{m_n}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \sqrt{\left(x_n - x_{n-1}^c\right)^2 + \left(y_n - y_{n-1}^c\right)^2}$$

$$M_{n-1} l_1 = m_n l_2$$

例：任意三角形的每个顶点有一质量 m 的小球，求系统的质心位置。

$$\begin{cases} x_c = \sum m_i x_i / M, \\ y_c = \sum m_i y_i / M, \\ z_c = \sum m_i z_i / M. \end{cases}$$



$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3},$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}.$$

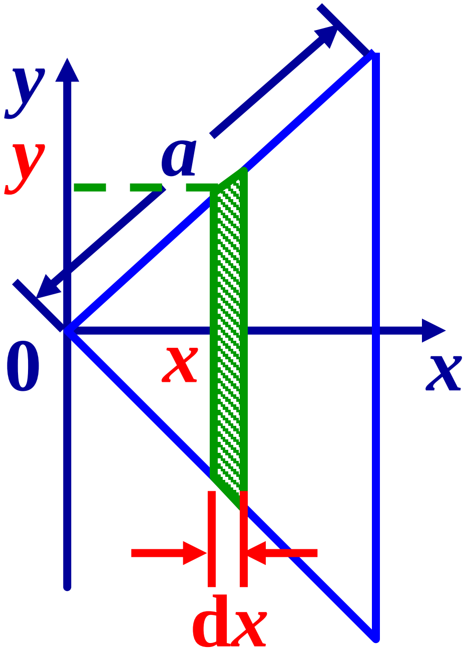
例题：求腰长为*a*等腰直角三角形均匀薄板质心。

解：根据对称性，质心位于直角的角平分线线上。取其为*x*轴，建立如图坐标系。在离原点*x*处取宽度为d*x*的面元，高为2*y*，其面积为2*y*d*x* = 2*x*d*x*。设薄板质量面密度为σ，则此面元质量

$$dm = 2x\sigma dx$$

三角形质心坐标x_c是

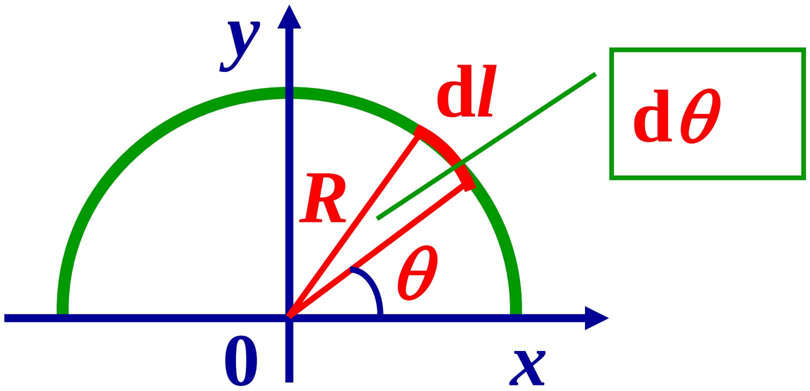
$$x_c = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2\sigma x^2 dx}{\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2\sigma x dx} = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$



和熟知的三角形重心位置一致。

例：一段均匀铁丝弯成半圆形，其半径为R，求此半圆形铁丝的质心。

解：建立如图所示坐标



任取一小段铁丝，其长度为dl，质量为dm，以λ表示铁丝的线密度

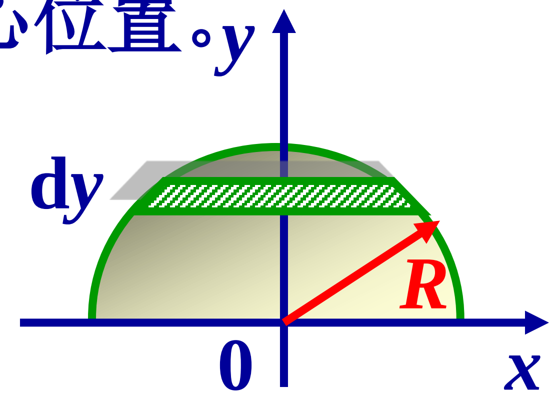
$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \lambda R \mathrm{d}\theta$$

$$y_c = \frac{\int y \mathrm{d}m}{m} = \frac{\int y \lambda \mathrm{d}l}{m} = \frac{\int_0^{\pi} R^2 \lambda \sin\theta d\theta}{\lambda \pi R}$$

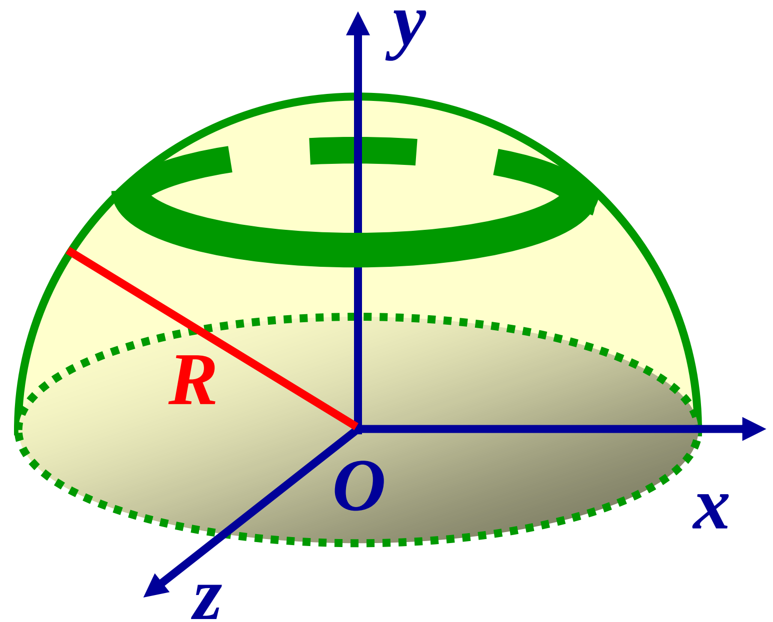
$$= \frac{2\lambda R^2}{\lambda \pi R} = 2R/\pi$$

例：确定半径为***R***的均质半球的质心位置。

解：建立坐标系如图



已知薄圆盘的质心位于圆心，取厚度为**dy**的薄圆盘为质量微元。



$$\mathrm{d}m = \rho\pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$y_c = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}$$

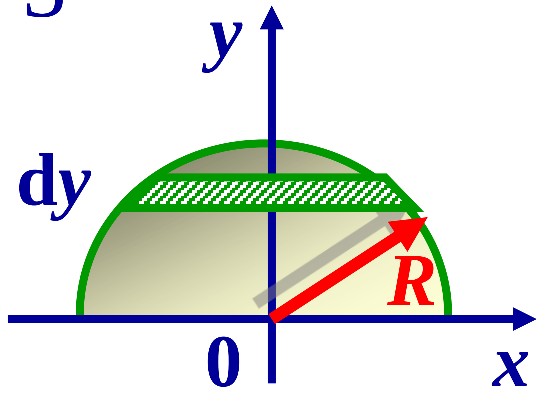
$$= \frac{\int_0^R y\rho\pi(R^2 - y^2)\,\mathrm{d}y}{\rho 2\pi R^3/3}$$

$$y_c = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^R y\rho\pi(R^2 - y^2)\,\mathrm{d}y}{\rho 2\pi R^3/3}$$

$$= \frac{3\int_0^R (yR^2 - y^3)\,\mathrm{d}y}{2R^3}$$

$$= \frac{3(R^2y^2/2 - y^4/4)\Big|_0^R}{2R^3}$$

$$= \frac{3R}{8}$$



质心在距球心**3*R*/8**处。

2. 质心运动定理

设有一质点系，由n个质点组成，质心的位矢是：

$$\vec{r}_c=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

质心的速度为

$$\vec{v}_c=\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}$$

质心的加速度为

$$\vec{a}_c = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{\sum m_i}$$

由牛顿第二定律得

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \cdots + \vec{f}_{1n}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \cdots + \vec{f}_{2n}$$

……

$$m_n\vec{a}_n = m_n\frac{\mathrm{d}\vec{v}_n}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_n + \vec{f}_{n1} + \vec{f}_{n2} + \cdots + \vec{f}_{nn-1}$$

对于内力

$$\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=0,\cdots,\vec{f}_{in}+\vec{f}_{ni}=0,\cdots$$

$$\therefore \sum m_i\vec{a}_i=\sum\vec{F}_i$$

$$\vec{a}_c=\frac{\sum m_i\vec{a}_i}{\sum m_i}$$

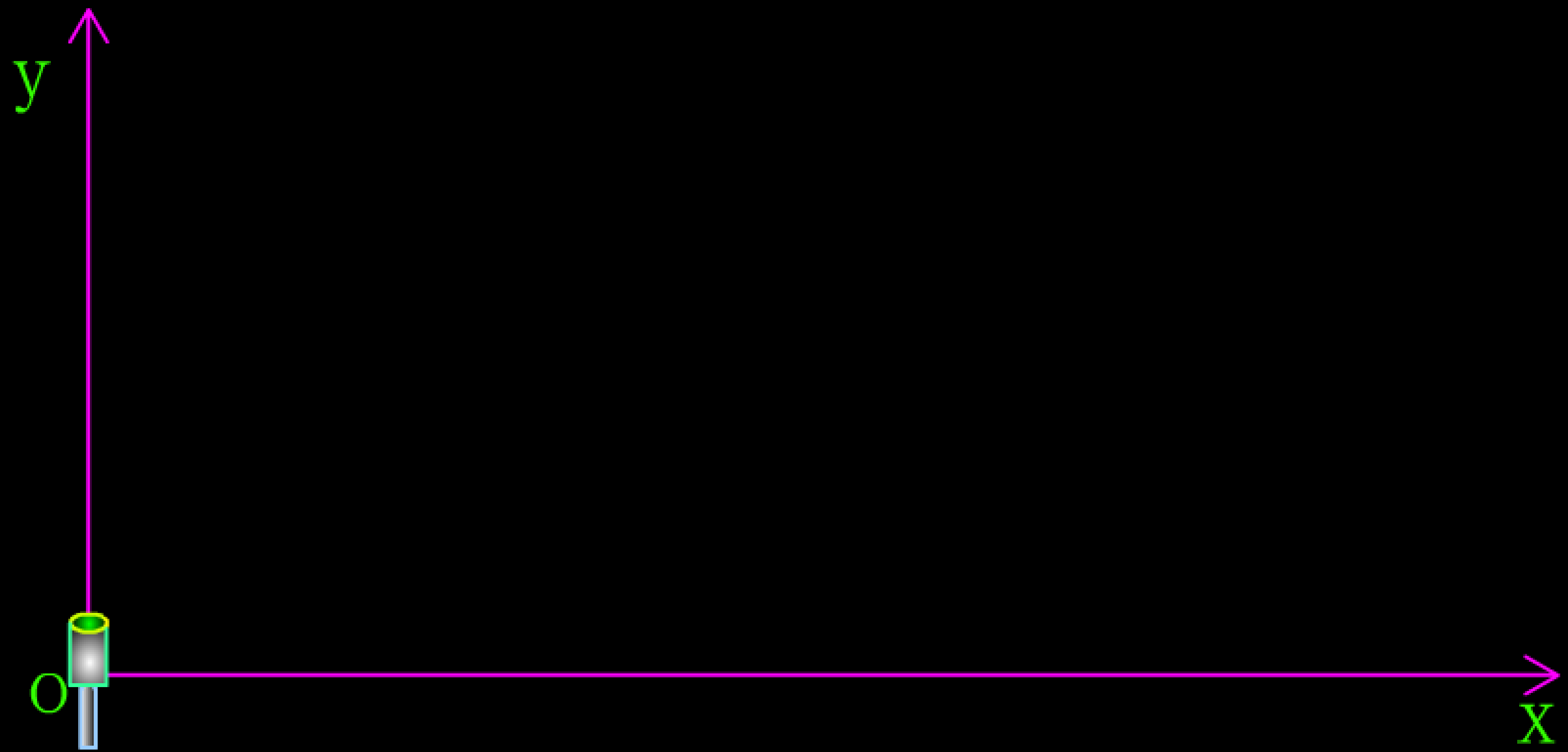
$$\Rightarrow \quad \vec{a}_c=\frac{\sum\vec{F}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum\vec{F}_i}{M}$$

$$\sum\vec{F}_i=M\vec{a}_c$$

质心运动定理

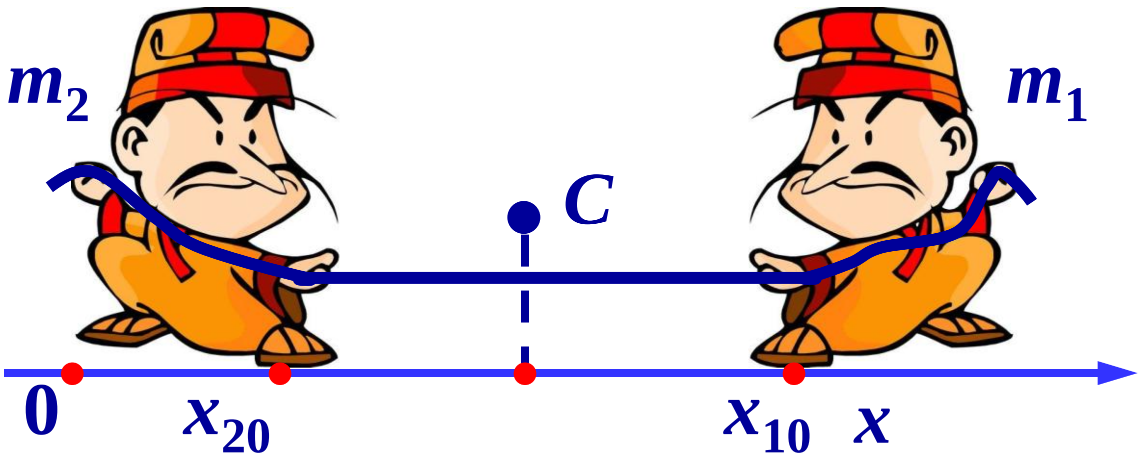
表明：不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么位置上，质心的运动就象是物体的质量全部都集中于此，而且所有外力也都集中作用其上的一个质点的运动一样。

质心运动



跳台跳水

例题：质量为m_1 和m_2的两个小孩，在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方。开始时静止，相距为l。问他们将在何处相遇？



解：把两个小孩和绳看作一个系统，水平方向不受外力，此方向的动量守恒。建立如图坐标系，设开始时质量为m_1 的小孩坐标为x_{10}，质量为m_2的小孩坐标为x_{20}，他们在任意时刻的速度分别v_1为v_2，相应坐标为x_1和x_2，由运动学公式得

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt \qquad \textbf{(1)}$$

$$x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt \qquad \textbf{(2)}$$

在相遇时，$\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_c}$，于是有

$$x_{10} + \int_0^t v_1 dt = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

即 $$x_{10} - x_{20} = \int_0^t (v_2 - v_1) dt \qquad \textbf{(3)}$$

因动量守恒，所以 $\boldsymbol{m_1 v_1 +\ m_2 v_2 = 0}$代入式（3）得

$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t -\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) v_1 dt = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \int_0^t - v_1 dt$$

$$x_{10}-x_{20}=\int_0^t -(\frac{m_1}{m_2}+1)v_1 dt=\frac{m_1+m_2}{m_2}\int_0^t -v_1 dt$$

$$\therefore \int_0^t v_1 dt=\frac{m_2x_{20}-m_2x_{10}}{m_1+m_2}$$

代入式（1），并令$x_1=x_c$得

$$x_c=x_{10}+\frac{m_2x_{20}-m_2x_{10}}{m_1+m_2}=\frac{m_2x_{20}+m_1x_{10}}{m_1+m_2} \quad \textbf{(4)}$$

两小孩在纯内力作用下，将在他们共同的质心相遇。上述结果也可直接由质心运动定律求出。