第一章

质点的运动

§1-1质点运动的描述

1．质点

物体：具有大小、形状、质量和内部结构的物质形态。

一般情况下，物体各部分的运动不相同，在运动的过程中大小、形状可能改变，这使得运动问题变得复杂。

某些情况下，物体的大小、形状不起作用，或者起次要作用而可以忽略其影响——简化为质点模型。

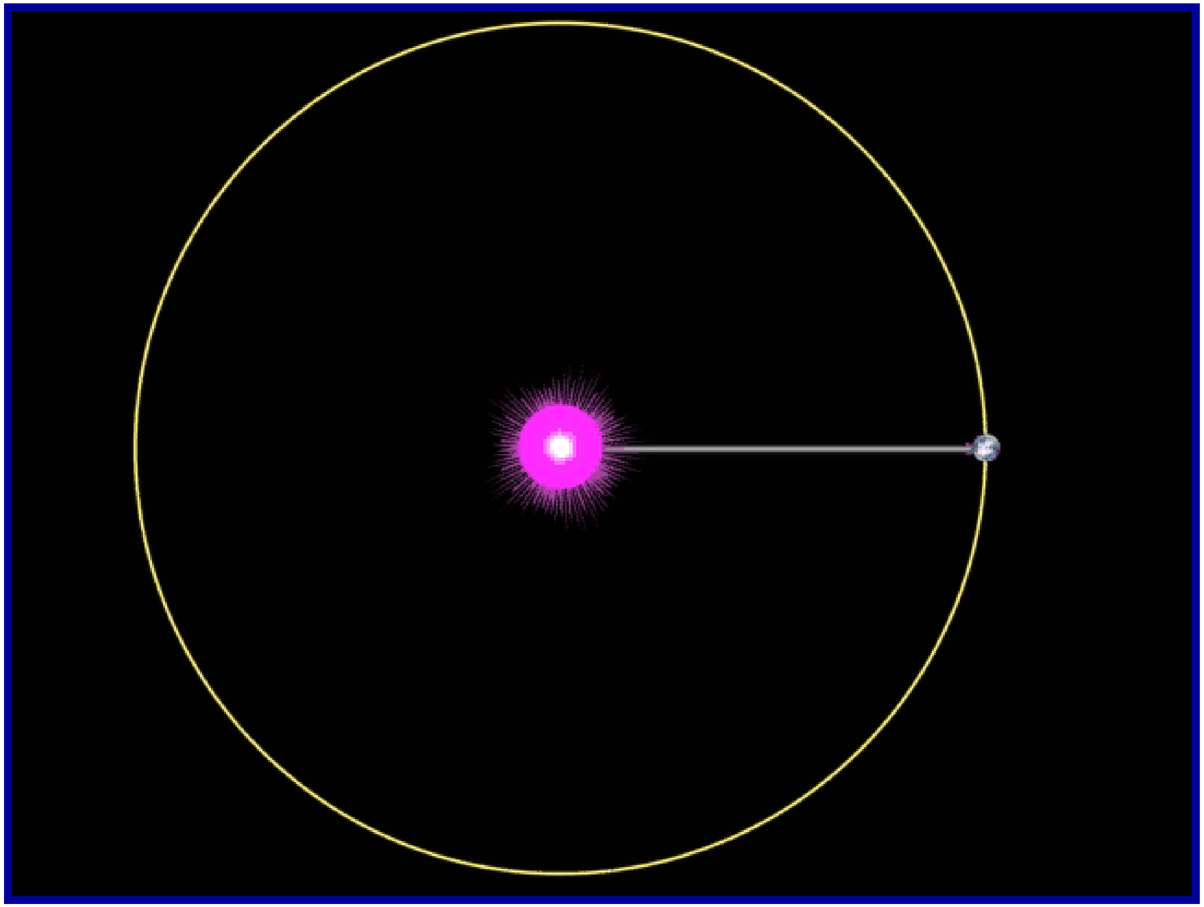
质点：具有一定质量没有大小或形状的理想物体。

可以作为质点处理的物体的条件：大小和形状对运动没有影响或影响可以忽略。

研究地球公转

$$\frac{R_{ES}}{R_E}=\frac{1.5\times10^8}{6.4\times10^3}$$

$$\approx 2.4\times10^4 >> 1$$

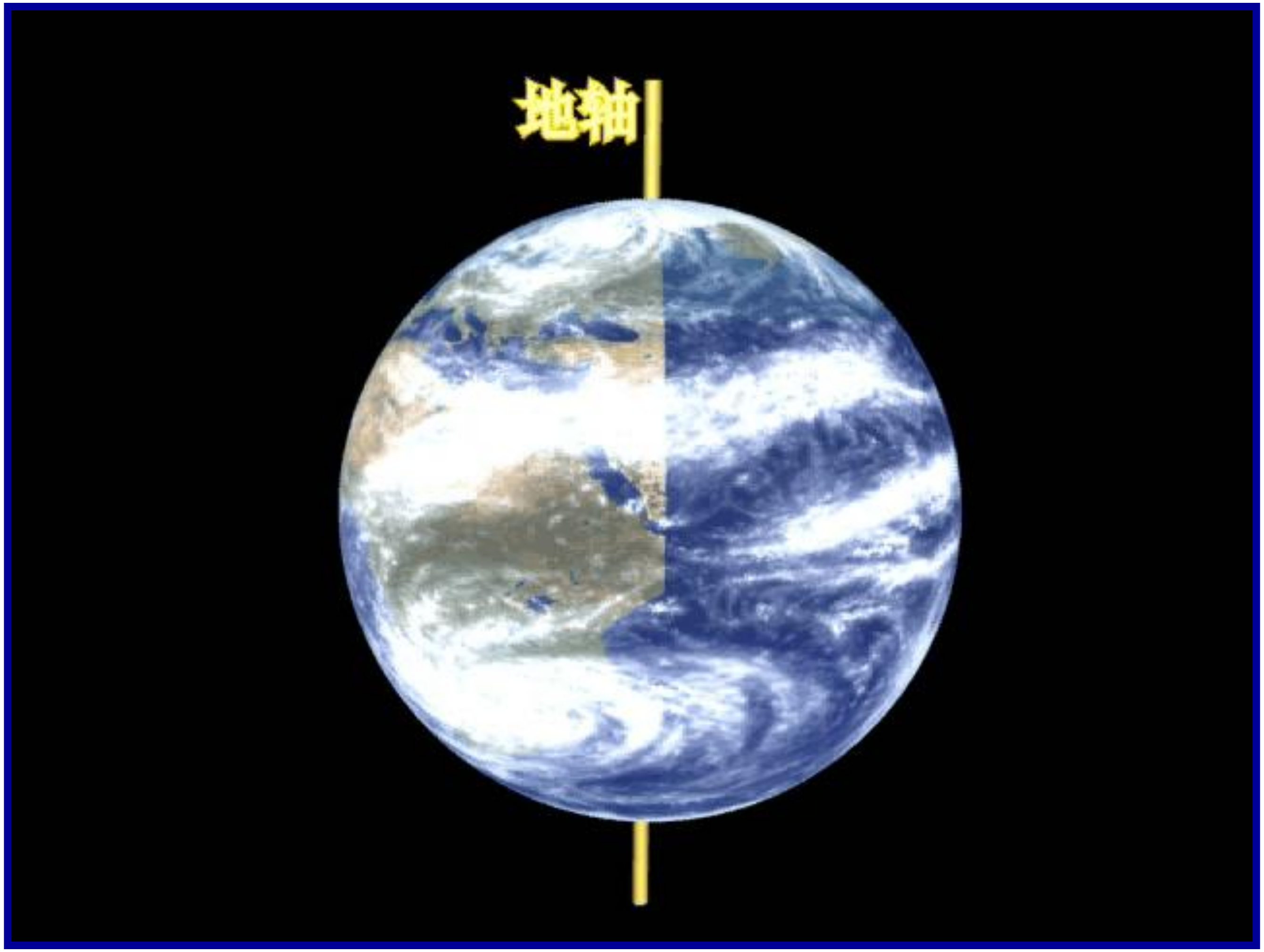


地球上各点的公转速度相差很小，忽略地球自身尺寸的影响，作为质点处理。

研究地球自转

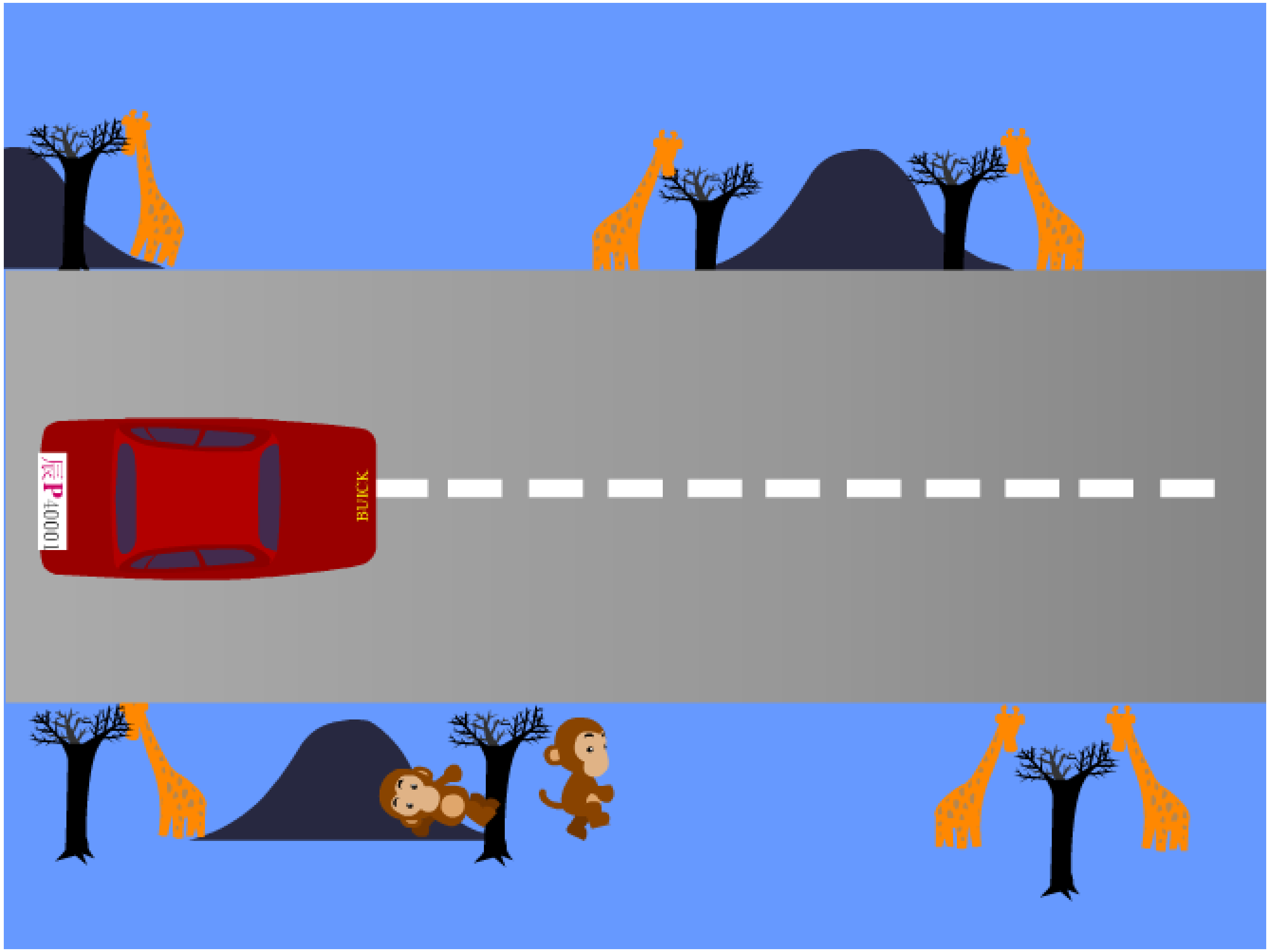
$$v = \omega R$$

地球上各点的速度相差很大，地球自身的大小和形状不能忽略，不能作质点处理。



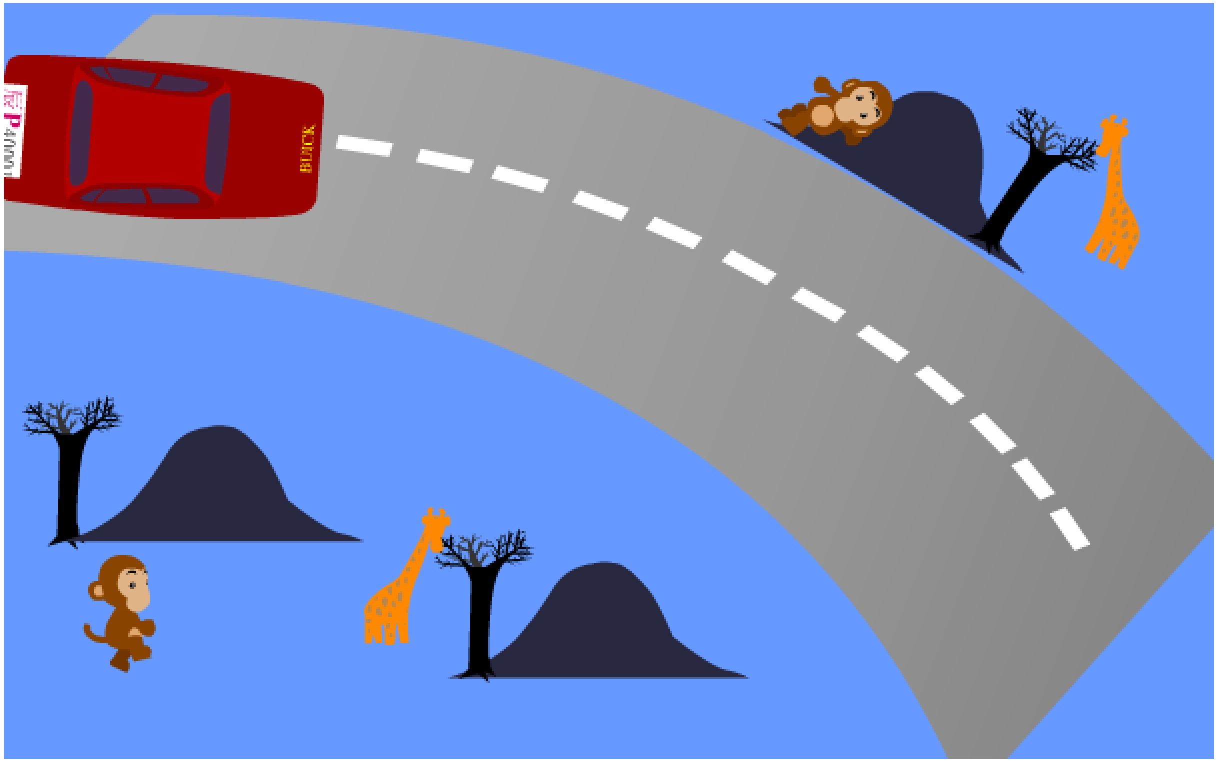
研究汽车在平直道路上运动

除车轮外，汽车各部分运动情况完全相同，车轮的运动是次要的，可把汽车作为质点处理。



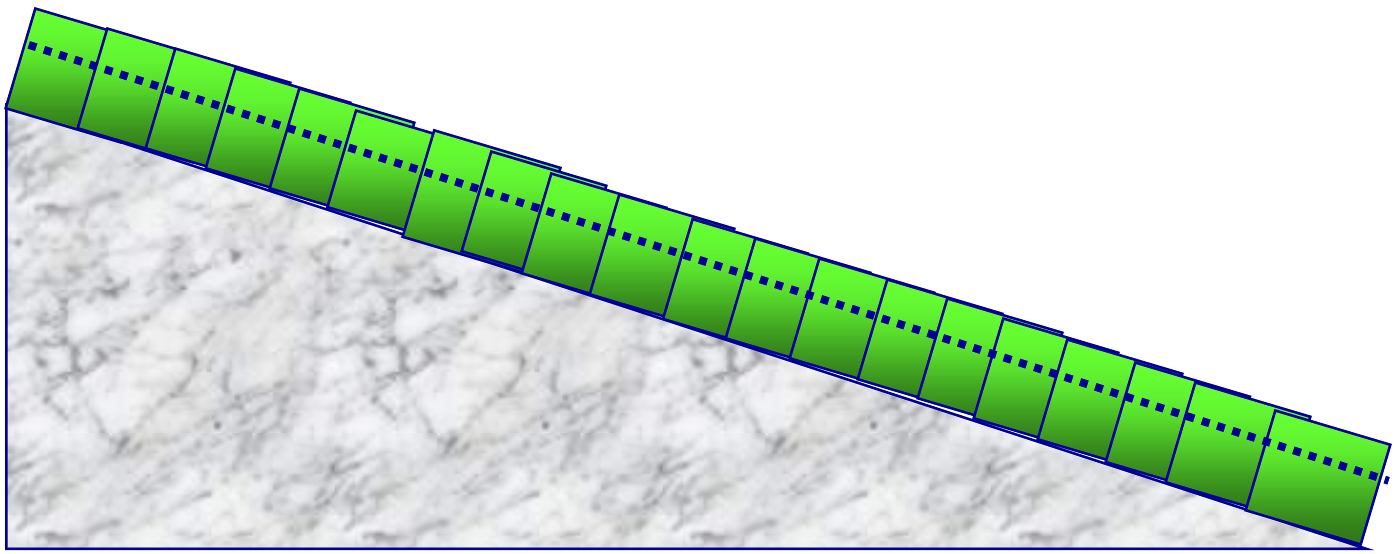
研究汽车突然刹车“前倾”或转弯

涉及转动问题，汽车各部分运动情况不同，各车轮受力差异很大，不能把汽车作质点处理。



质点是从实际中抽象出的理想模型，研究质点运动是为了抓住主要规律。

物体平动时可视为质点。

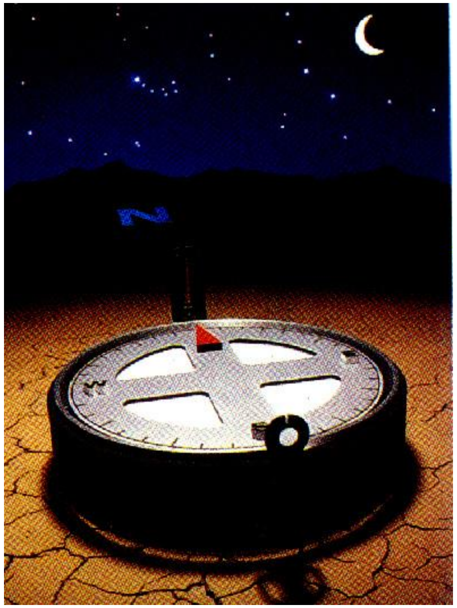


物体上任一点的运动都可以代表物体的运动。

2．确定质点位置的方法——参考系和坐标系

静止和运动是相对的。地心学说被日心说取代，让人们明白，判断物体运动与否，首先要选择统一的物体作参考。即使是太阳，在银河系中其它恒星系统观察，仍然是运动着的。

银河系

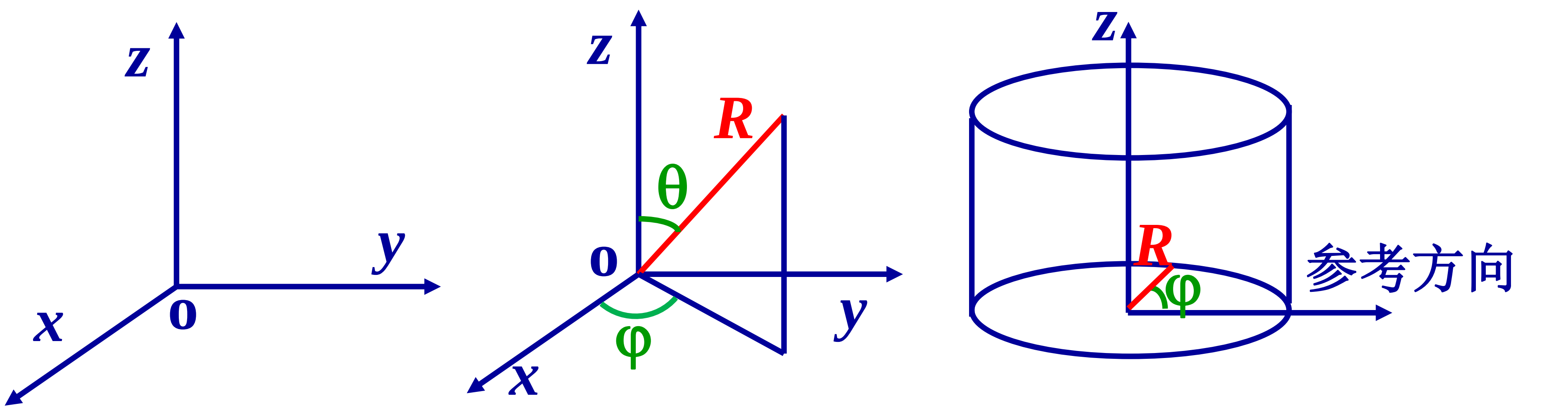


指南针

参考系：描述物体运动时，被选作参考的物体，称为参考系。

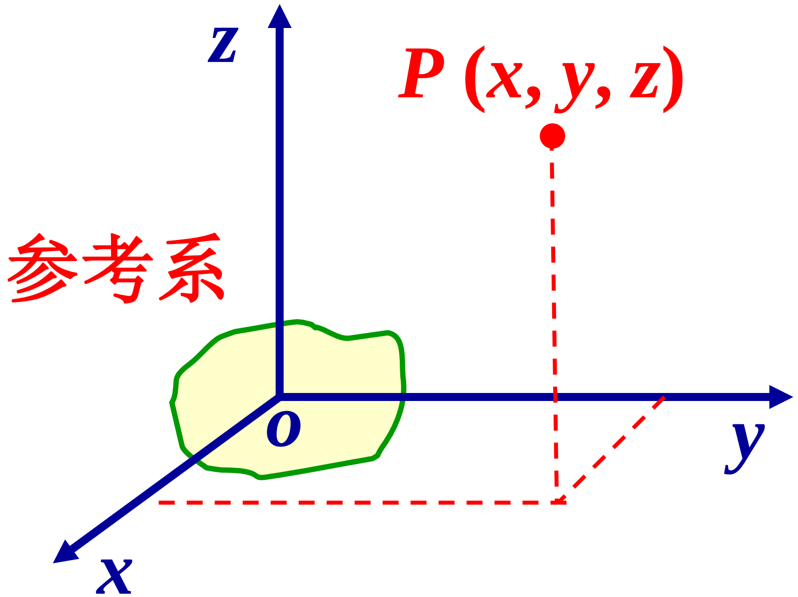
定量描述物体的位置与运动情况，要运用数学手段，采用固定在参考系上的坐标系。

直角坐标系(x, y, z)，极坐标系(ρ, θ)，球坐标系(R, θ, φ)，柱坐标系(R, φ, z)。



(1) 确定质点位置的方法——坐标法

若质点在空间运动，其位置可用直角坐标(x, y, z)确定。



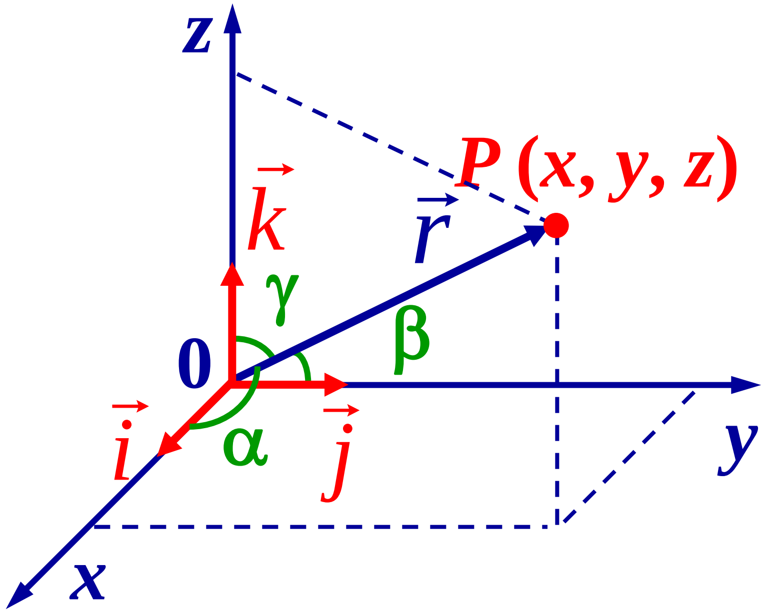
若质点在平面上运动，其位置可用直角坐标(x, y)确定

若质点沿直线运动，可在该直线上建立一个坐标轴，例如 x 轴，质点的位置只需一个坐标x就可以确定。

(2) 位矢法

在坐标系中用来确定质点所在位置的矢量，叫做位置矢量，简称位矢。位置矢量是从坐标原点指向质点所在位置的有向线段。

质点的直角坐标(*x*, *y*, *z*)是位矢沿坐标轴 *x*, *y*, *z* 的投影



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

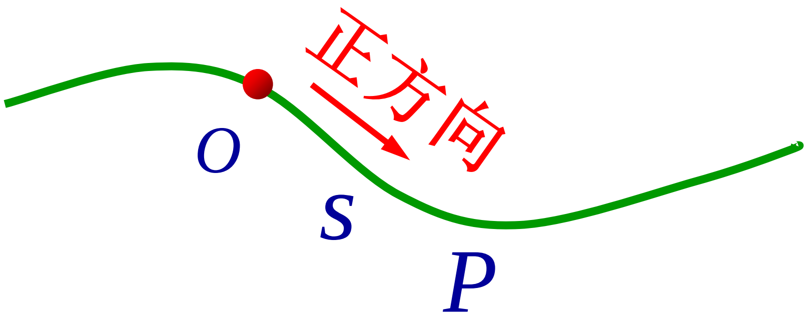
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = x/r \qquad \cos\beta = y/r$$

$$\cos\gamma = z/r \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(3) 自然法　（用于运动轨迹已知的质点）

在已知运动轨迹上任选固定点O，从O点起沿轨迹量得曲线长度s正值，此方向称为正向。



质点在轨迹上的位置可以用s唯一确定。

$$s = f(t)$$

注意：路程 s 是代数量，其实就是弧长。

3．运动学方程与轨迹方程

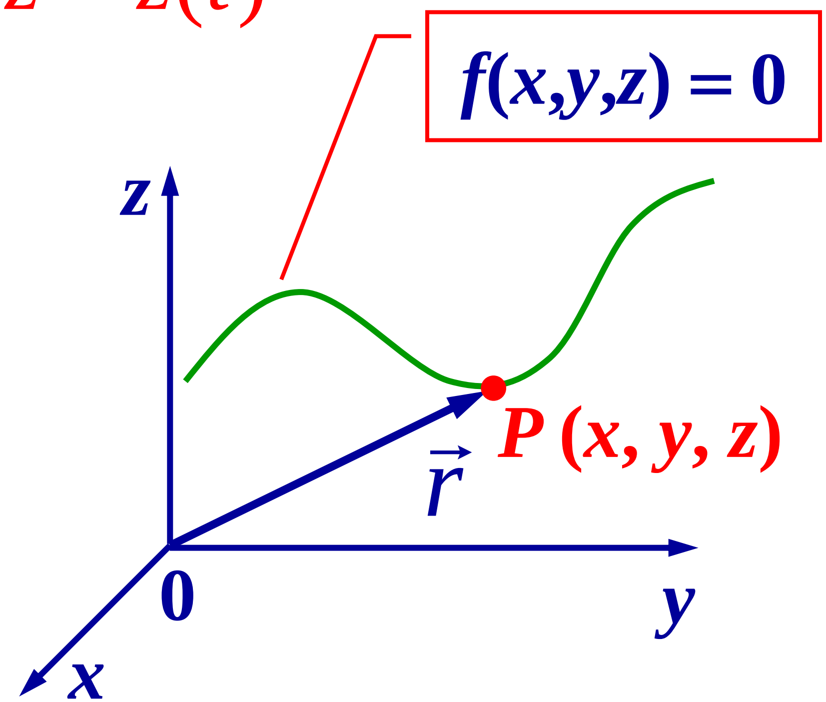
一定坐标系中，质点位置随时间按一定规律变化，位置用坐标表示为时间的函数，叫做运动学方程。

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

例如：

$$x = x_0 + vt$$

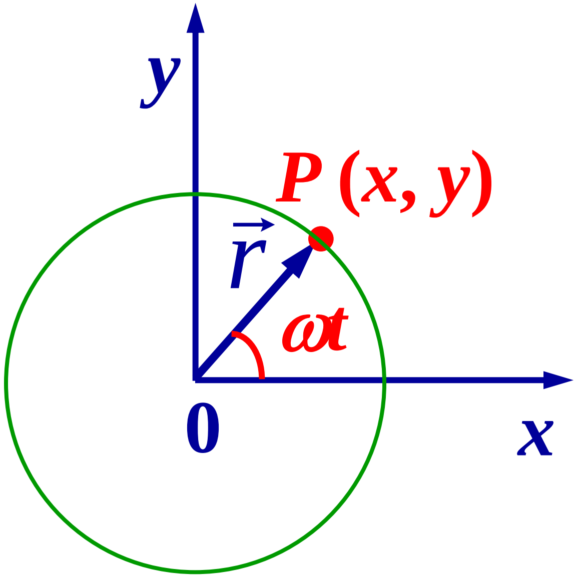
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



将时间消去，得到质点运动的轨迹方程。一般情况轨迹方程是空间曲线。

$$f(x,y,z) = 0$$

例1.1如图所示，一质点作匀速圆周运动，圆周半径为r，角速度为ω。分别写出直角坐标、位矢、自然法表示的质点运动学方程。



解：直角坐标（真正实用的方法）

$$x = r\cos\omega t$$

$$y = r\sin\omega t$$

位矢的表示方法：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

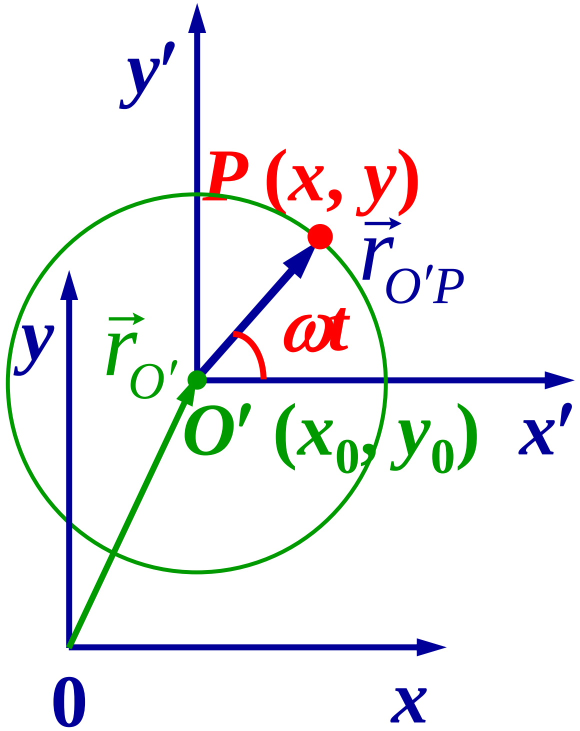
$$= r\cos\omega t\vec{i} + r\sin\omega t\vec{j}$$

取$t = 0$时弧长为0，则t时刻的弧长s：

$$s = r\omega t$$

例：如图所示，一质点作匀速圆周运动，圆周半径为r，角速度为ω。在x-y坐标系中表示的质点运动学方程。

解：归结为坐标原点的平移问题。



$$x = x_0 + r\cos\omega t$$

$$y = y_0 + r\sin\omega t$$

位矢的表示方法：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

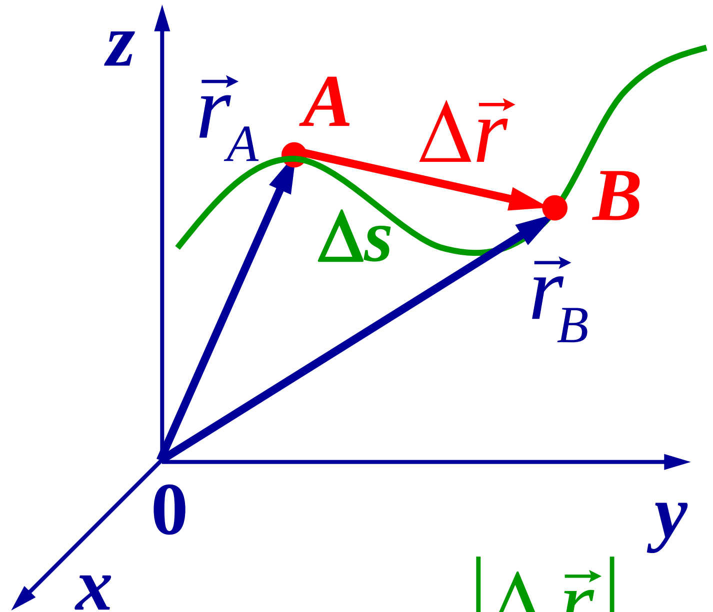
$$= (x_0 + r\cos\omega t)\vec{i} + (y_0 + r\sin\omega t)\vec{j}$$

§ 1-2&3 质点的位移、速度和加速度

1. 位移

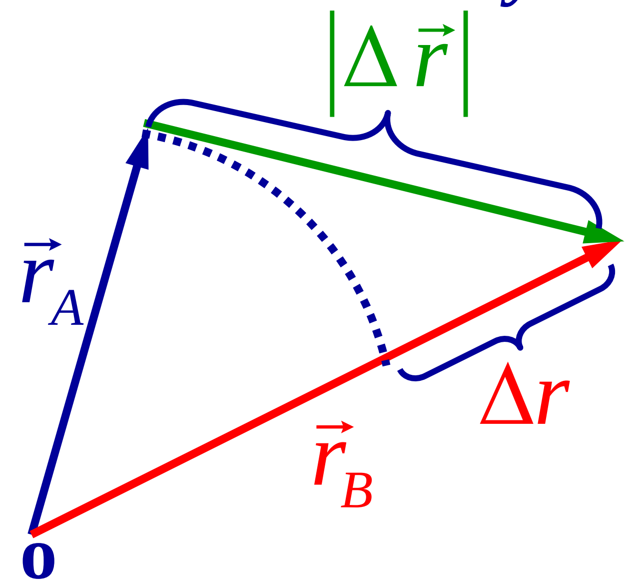
反映质点位置变化的物理量，从初始位置指向末位置的有向线段。

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



路程是质点经过实际路径的长度，Δs是标量。

注意 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r$



位移 $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$

$$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$

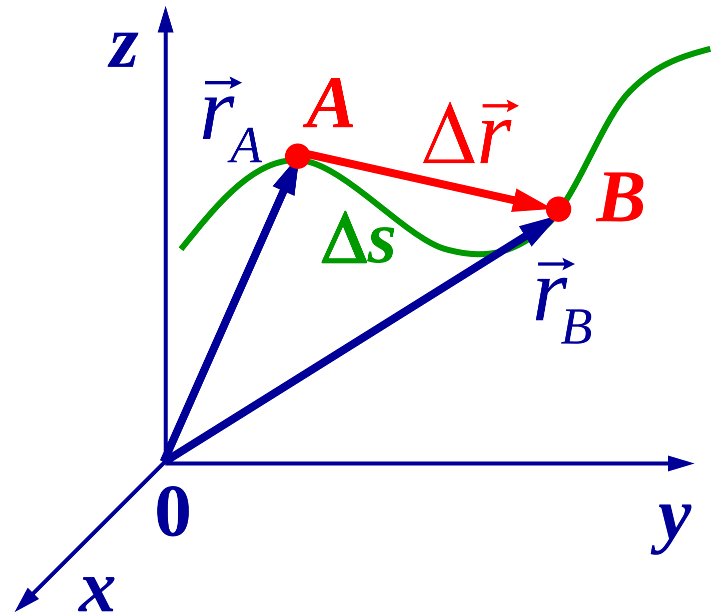
位移的大小

$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

位移的方向：由A点指向B点

某点至坐标原点的距离：r

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

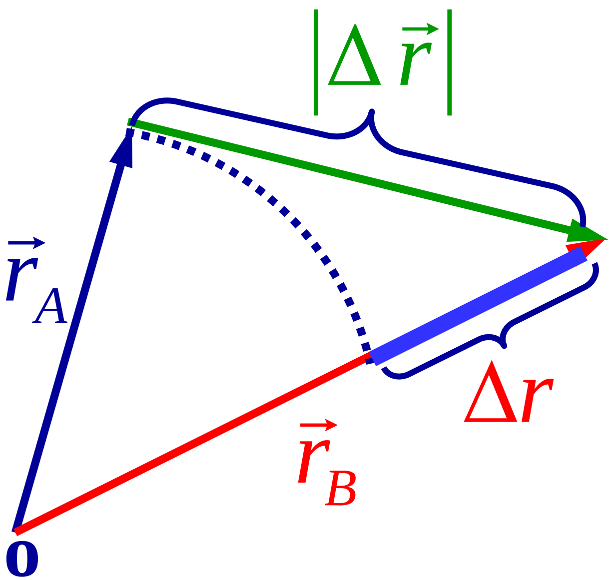


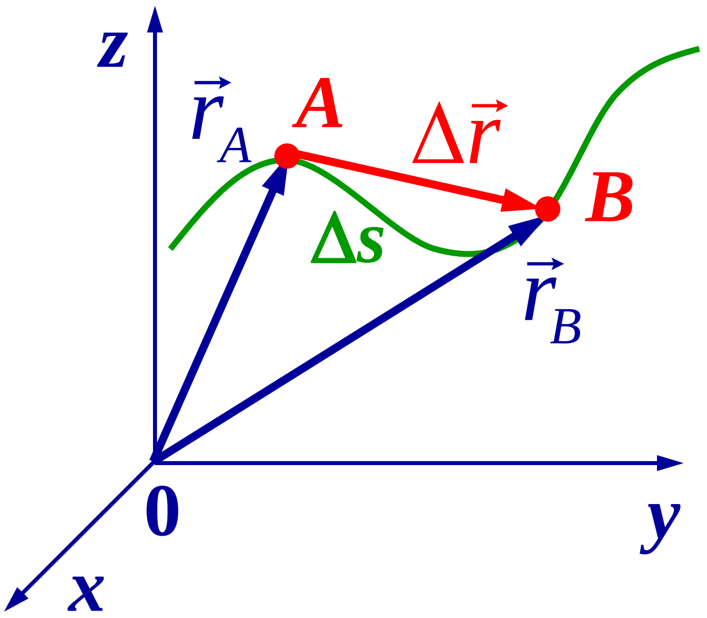
$$r_A = \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2} \qquad r_B = \sqrt{x_B{}^2 + y_B{}^2 + z_B{}^2}$$

至原点距离的变化

$$\Delta r = \sqrt{x_B{}^2 + y_B{}^2 + z_B{}^2} - \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2}$$

所以：$\therefore \left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta r$





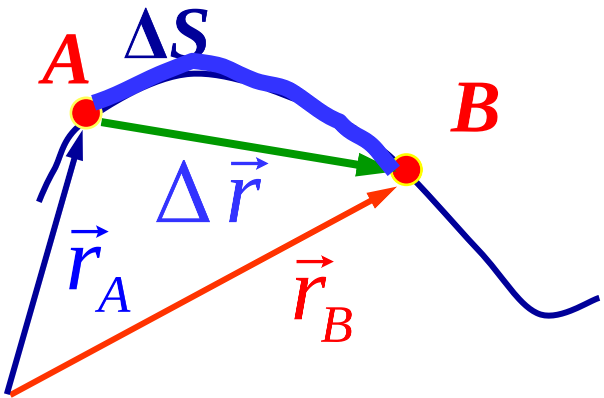
路程是质点经过实际路径的长度。路程是标量。

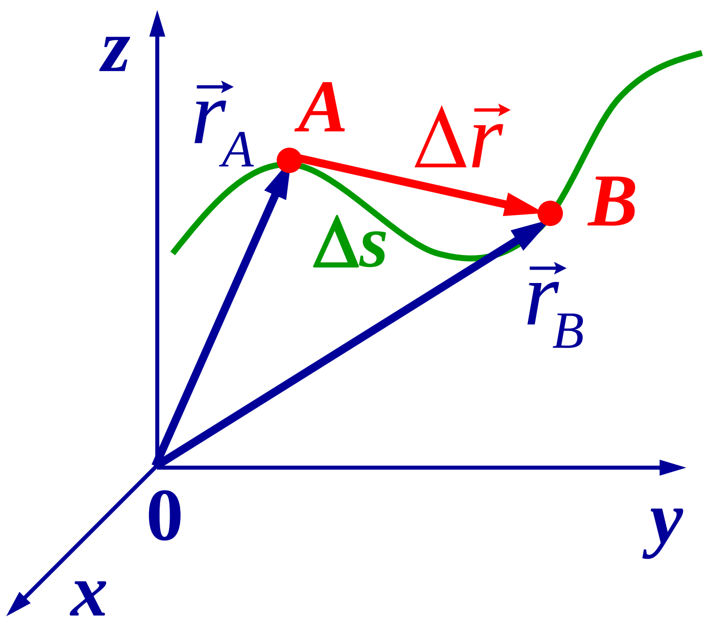
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

$$\Delta s=\int_L{}_A^B ds=\int_{t_A}^{t_B}\frac{ds}{dt}dt=\int_{t_A}^{t_B}v\,dt$$

$$=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\,dt$$



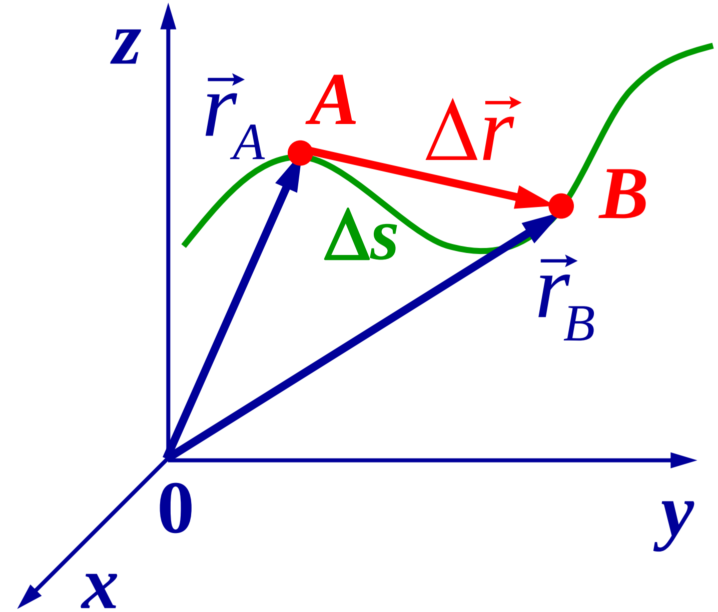


2. 速度

描述质点位置随时间变化的快慢和方向的物理量。

平均速度 $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

平均速率 $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$



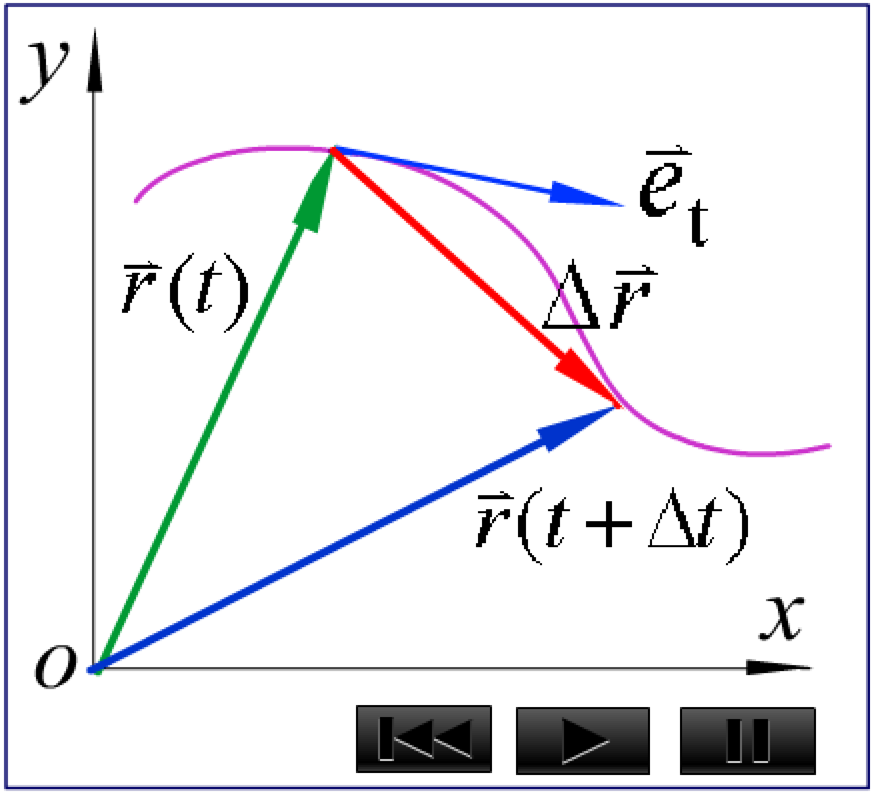
平均速度是矢量，其方向与位移的方向相同。平均速率是标量。平均速度的大小并不等于平均速率。例如质点沿闭合路径运动一周时平均速度为0！

当$\Delta t \to 0$时平均速度的极限叫做瞬时速度，简称速度

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



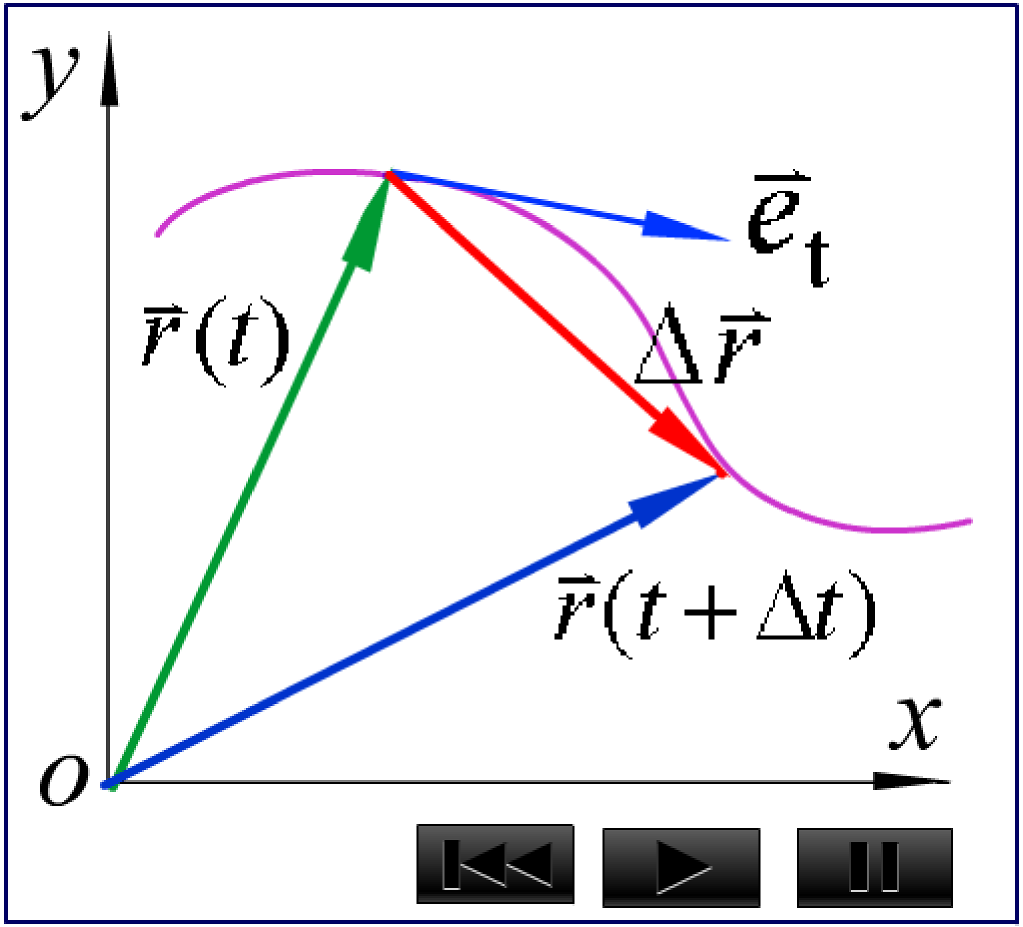
当$\Delta t\to 0$时平均速度的极限叫做瞬时速度，简称速度

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

当$\Delta t\to 0$时，$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\mathrm{d}s$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$$



瞬时速度是矢量，直角坐标系中分量形式：

$\Delta t \to 0$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

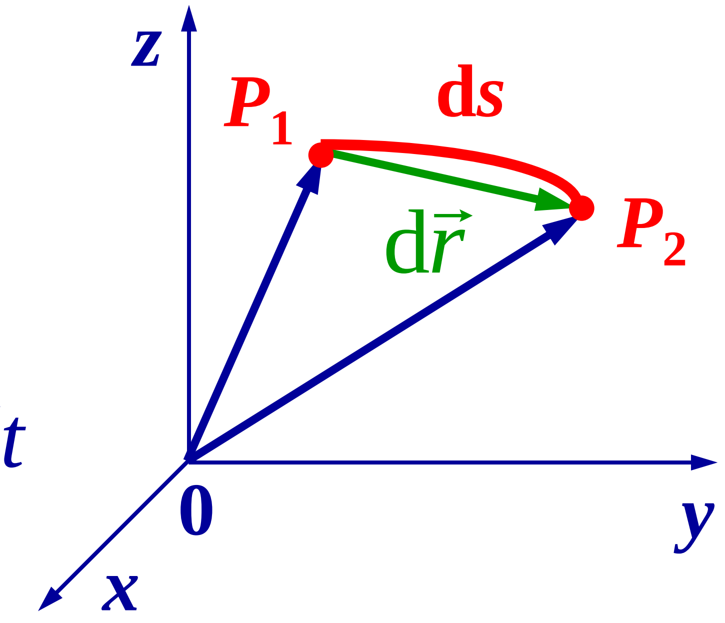
大小:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

方向:

当$\Delta t \to 0$时位移 $\Delta \vec{r}$ 的极限方向，该点的切线方向，指向质点前进的一侧。

路程与速度的关系



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

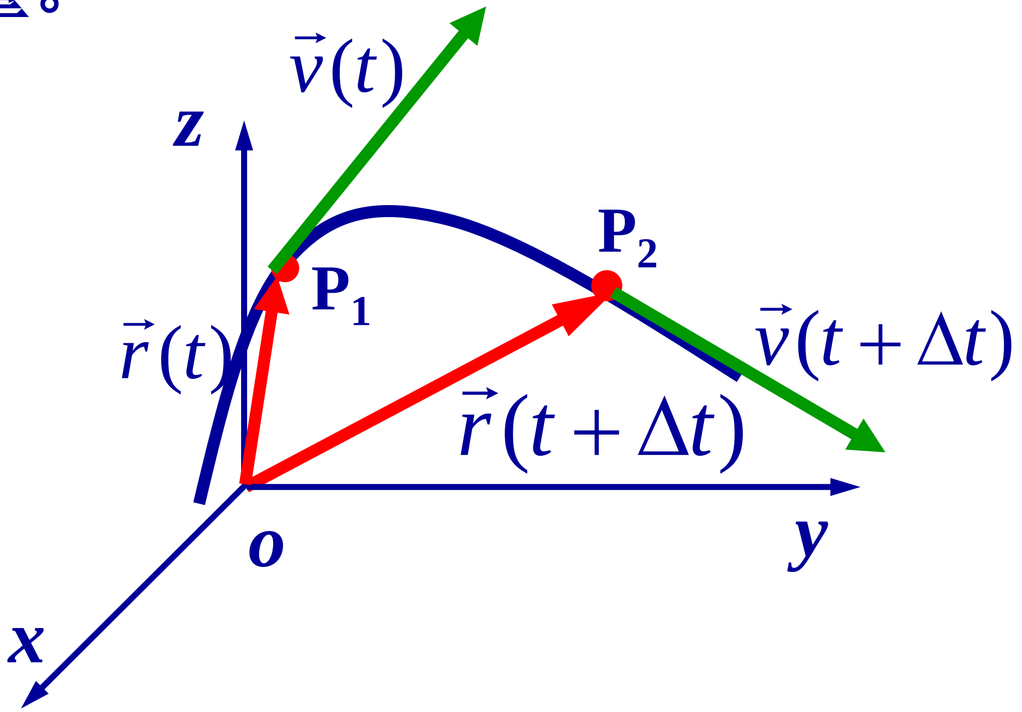
$$\Delta s = \int_L {}_A^B ds = \int_{t_A}^{t_B} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

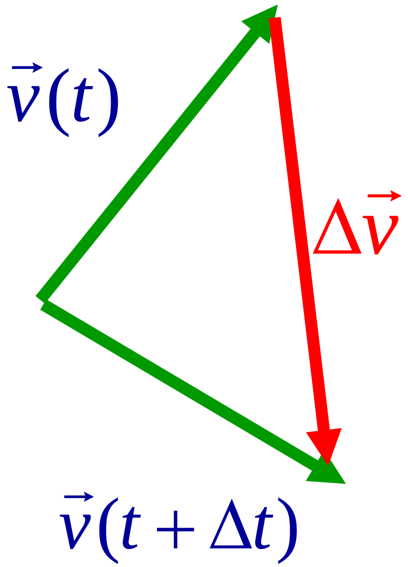
$$= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} dt$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt$$

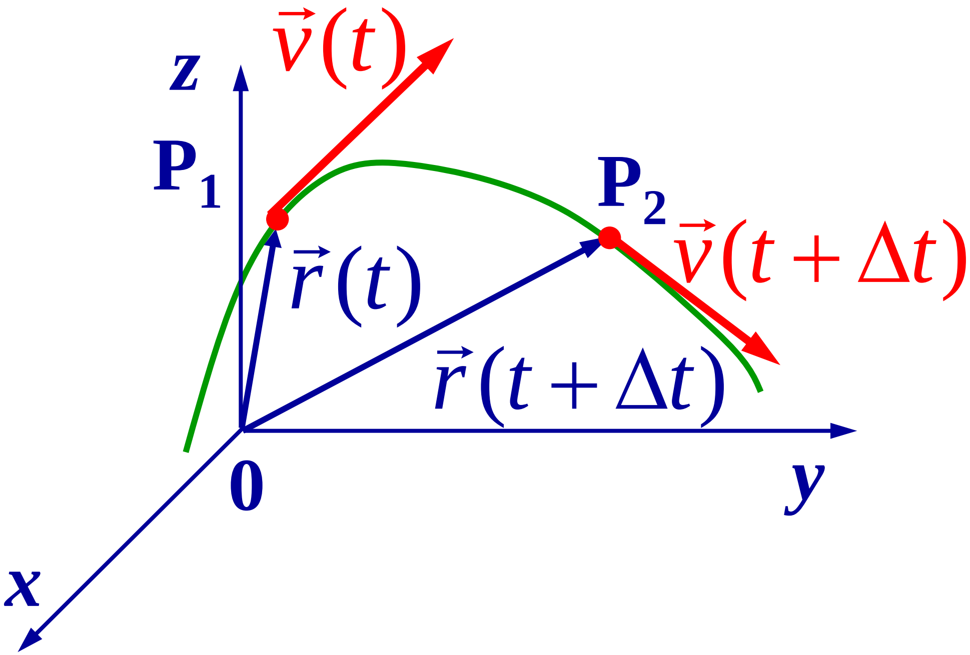
3．加速度

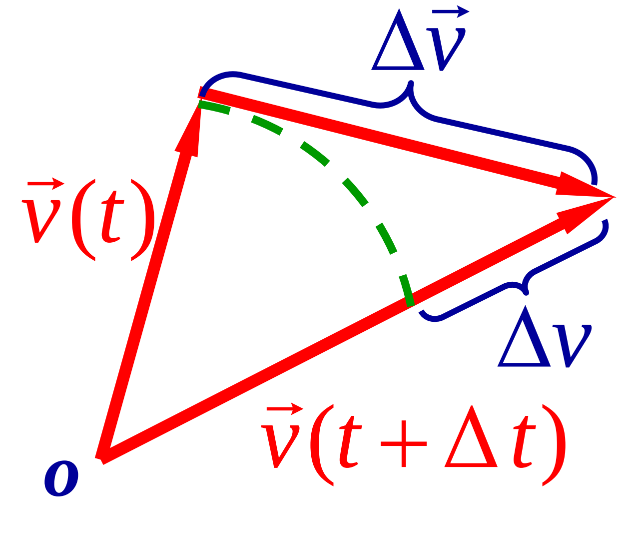
描述质点速度的大小和方向随时间变化快慢的物理量。





注意区分 $\left|\Delta\vec{v}\right|$　Δv





平均加速度　　$\overline{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

平均加速度是矢量，方向与速度增量的方向相同。

第一次：第一章：4、7、9、10、21

瞬时加速度

与瞬时速度的定义相类似，瞬时加速度是一个极限值

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

瞬时加速度简称加速度，它是矢量，在直角坐标系中用分量表示:

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\qquad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

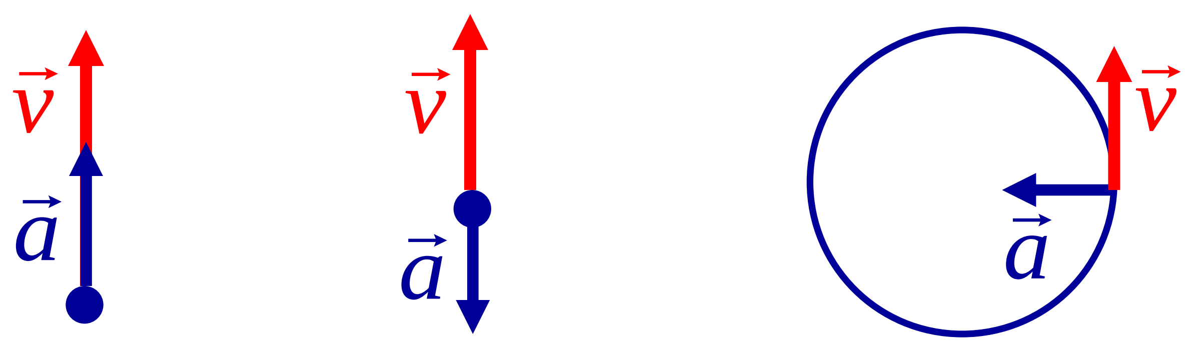
$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

大小 $$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度的方向是时间Δt 趋于零时，速度增量的极限方向。加速度与速度方向一般不同。

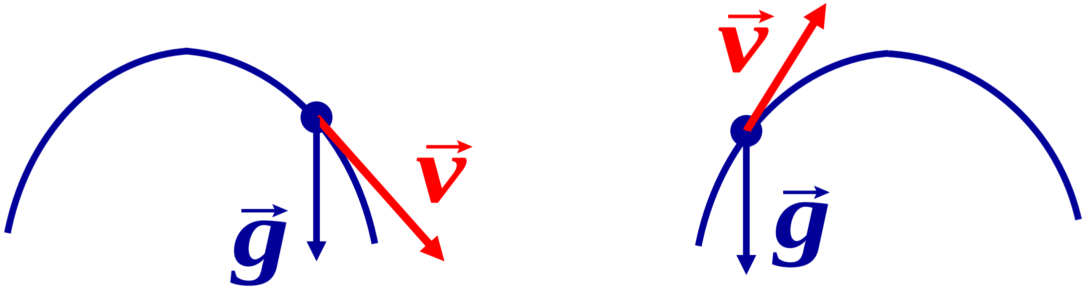
加速度与速度的夹角为0°或180°，质点做直线运动。

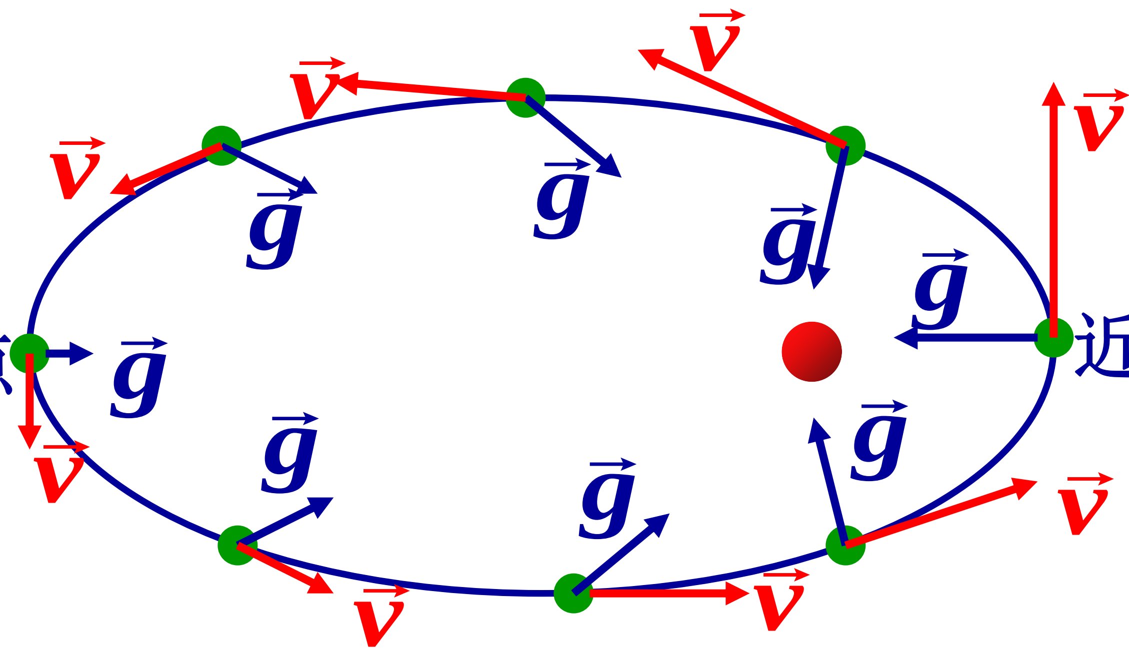
加速度与速度的夹角等于90°，质点可以做圆周运动。



加速度与速度的夹角大于90°，速率减小。

加速度与速度的夹角等于90°，速率不变。





BTW，春分、秋分、冬至、夏至都在哪儿？

例：已知质点作匀加速直线运动，加速度为$\boldsymbol{a}$，求该质点的运动方程。

解：已知速度或加速度求运动方程，积分法：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\,\mathrm{d}t$$

对于作直线运动的质点，

$$\mathrm{d}v=a\,\mathrm{d}t$$

两端积分可得到速度

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\,\mathrm{d}t \qquad v=v_0+at$$

根据速度的定义式：

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = v = v_0 + at$$

两端积分得到运动方程

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}\,x = \int_0^t (v_0 + at)\,\mathrm{d}\,t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

消去时间，得到

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

例题：已知质点的运动方程 $\vec{r}=2t\vec{i}+(2-t^2)\vec{j}$ (SI)

求(1)质点的轨迹；(2) $t=0$s 及$t=2$s 时，质点的位置矢量；(3) $t=0$s到$t=2$s时间内的位移；(4) $t=2$s内的平均速度；(5) $t=2$s末的速度及速度大小；(6) $t=2$s末加速度及加速度大小。

解：(1) 先写运动方程的分量式

$$\begin{cases} x=2t \\ y=2-t^2 \end{cases}$$

消去 t 得轨迹方程：

$$y=2-\frac{x^2}{4}$$

(2) 位矢：$\vec{r}\big|_{t=0\text{s}} = 2\vec{j}$

$$\vec{r}\big|_{t=2\text{s}} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

(3) 位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}\big|_{t=2\text{s}} - \vec{r}\big|_{t=0\text{s}}$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{j}$$

$$= 4\vec{i} - 4\vec{j}$$

大小 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2}\,\text{m} = 5.65\text{m}$

方向 $\theta_0 = \arctan\dfrac{-4}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$

(4) 平均速度：

$$\bar{\vec{v}}\Big|_{t=0-2\text{s}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta \text{t}}\,\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

大小 $$\bar{v}\Big|_{t=0-2\text{s}} = \sqrt{\bar{v}_x + \bar{v}_y} = 2.82\text{m/s}$$

(5) 速度：

$$\vec{v} = \frac{\text{d}\vec{r}}{\text{d}t} = \frac{\text{d}x}{\text{d}t}\vec{i} + \frac{\text{d}y}{\text{d}t}\vec{j} = 2\vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$\vec{v}\Big|_{t=2\text{s}} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

大小 $v\Big|_{t=2\text{s}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.47\text{m/s}$

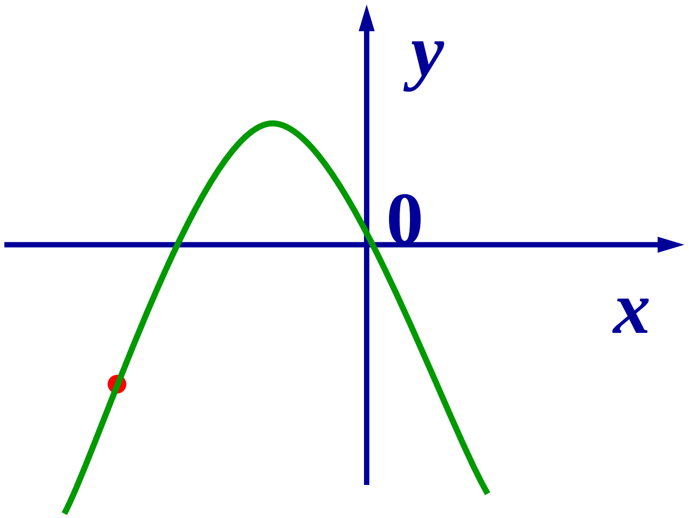
(5) 加速度：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -2\vec{j}$$

$$\vec{a}\Big|_{t=2\text{s}} = -2\vec{j}$$

$\boldsymbol{a} = \mathbf{2\ m/s^2}$，沿$-y$ 方向，与时间无关。

例题：质点运动轨迹为抛物线$y = -x^2 - 2x$，用t表示时间，有$x = -t^2$，$y = -t^4 + 2t^2$。求：$x = -4$时$(t > 0)$粒子的速度、速率、加速度。



解： $x = -4$ 时, $t = 2$。

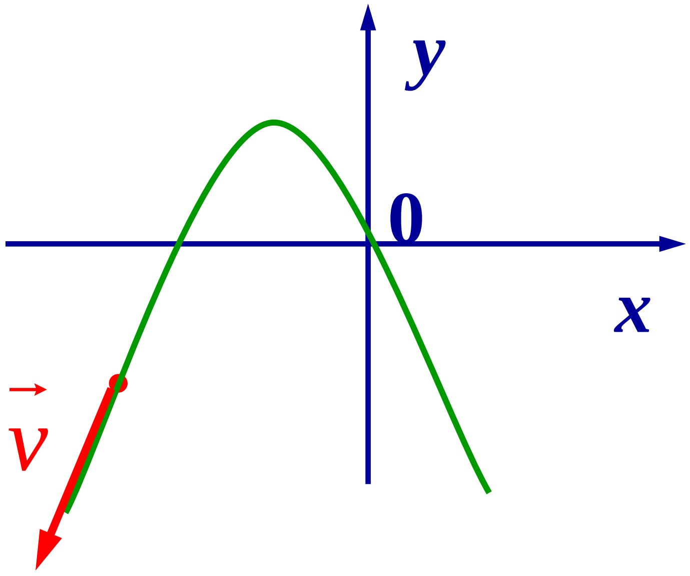
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=2} = -2t\,\Big|_{t=2} = -4$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=2} = (-4t^3 + 4t)\Big|_{t=2} = -24$$

速度 $\therefore \quad \vec{v} = -4\hat{i} - 24\hat{j}$

速率 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4\sqrt{37}$



$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=2}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=2}$$

$\boldsymbol{x = -t^2,\ \ y = -t^4 + 2t^2}$

$\therefore$加速度为：

$$\vec{a} = -2\hat{i} - 44\hat{j}$$

思考题

质点作曲线运动，判断下列说法的正误。

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta r \qquad \Delta\left|\vec{r}\right| = \Delta r \qquad \Delta s = \Delta r$$

$$\Delta s = \left|\Delta\vec{r}\right| \qquad \Delta s = \Delta\left|\vec{r}\right|$$

质点运动学方程为$\boldsymbol{x = 6 + 3t - 5t^3}$**(SI)**，判断正误：

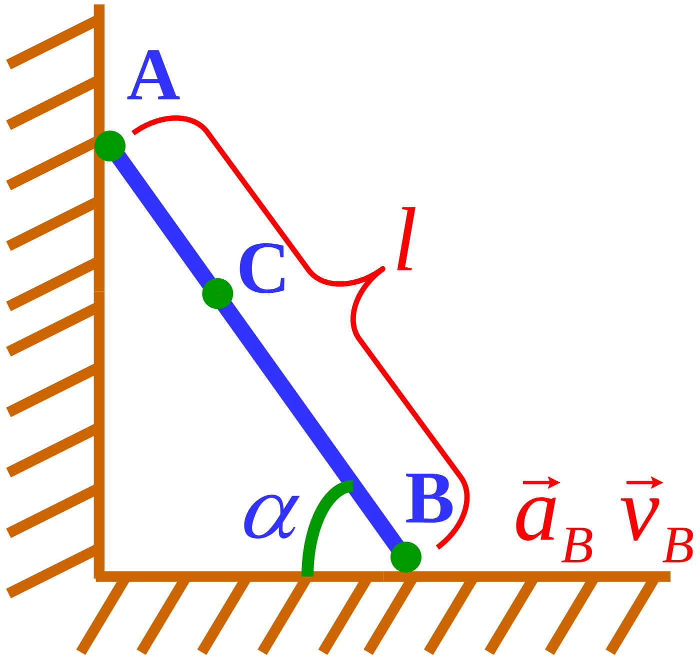
质点作匀加速直线运动，加速度为正。

质点作匀加速直线运动，加速度为负。

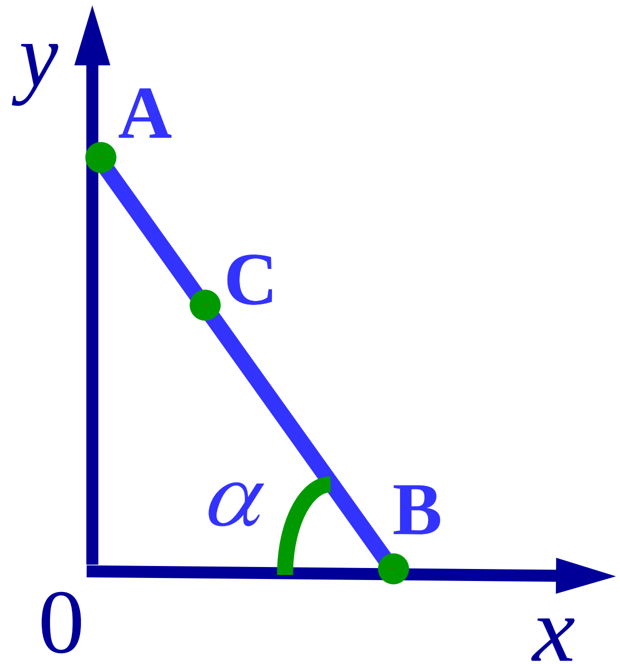
质点作变加速直线运动，加速度为正。

质点作变加速直线运动，加速度为负。

不可伸缩的细杆AB，两端A、B分别与地面和墙接触。已知地面和墙垂直，t时刻B点的位置、速度、加速度，及杆与地面的角度，杆AB长度l。求杆上任一点C此时的速度、加速度。

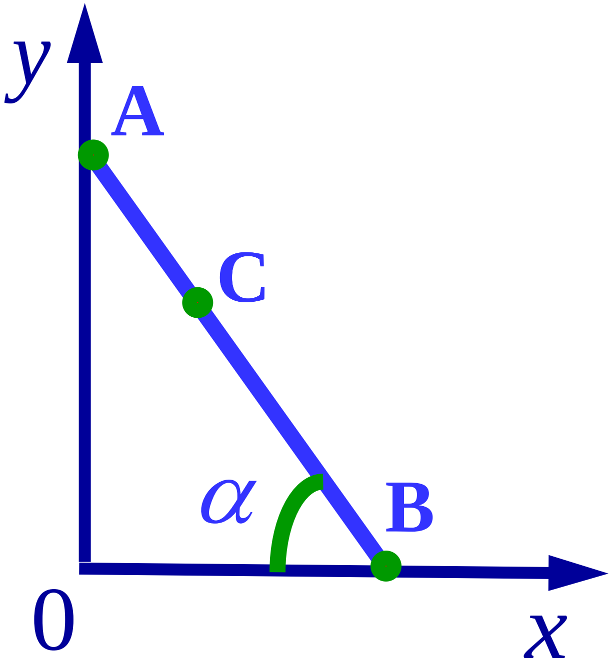


解：建立如图坐标系，令AC长度为s。



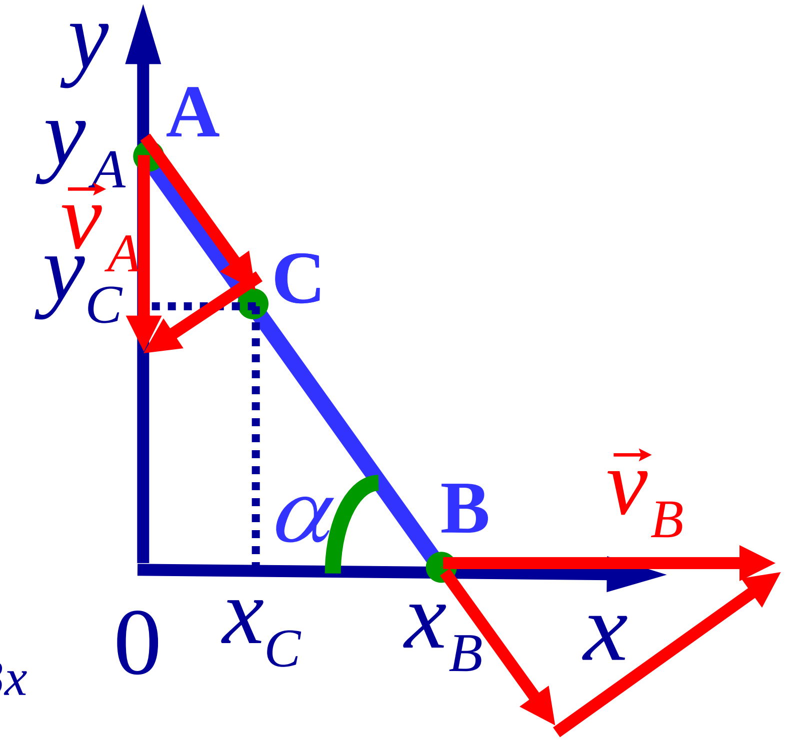
解：建立如图坐标系，令AC长度为s。

应用速度、加速度的定义，利用几何关系（即杆不可伸缩的约束）在坐标系中求解。



解：建立如图坐标系，令AC长度为s。

杆不可伸缩的约束：



$$v_{Ay}\sin\alpha = -v_{Bx}\cos\alpha$$

$$\frac{x_C}{x_B} = \frac{s}{l} \qquad \frac{y_C}{y_A} = \frac{l-s}{l}$$

$$\therefore v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = \frac{s}{l}\frac{dx_B}{dt} = \frac{s}{l}v_{Bx}$$

$$\therefore v_{Cy} = \frac{dy_C}{dt} = \frac{l-s}{l}\frac{dy_A}{dt} = \frac{l-s}{l}v_{Ay} = \frac{s-l}{l}v_{Bx}\cot\alpha$$

凡是把加速度象速度那样进行分解的做法

都是错误的！

为什么？

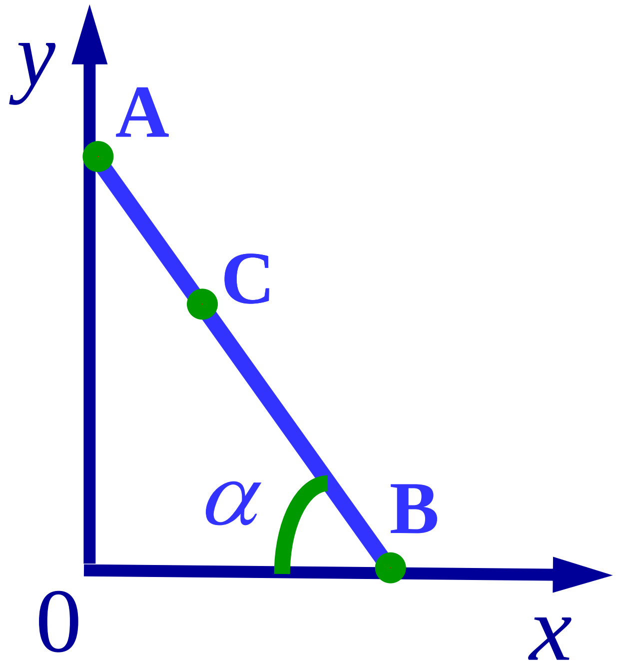
考虑单摆的运动

向心加速度沿着杆的方向，随点而异！

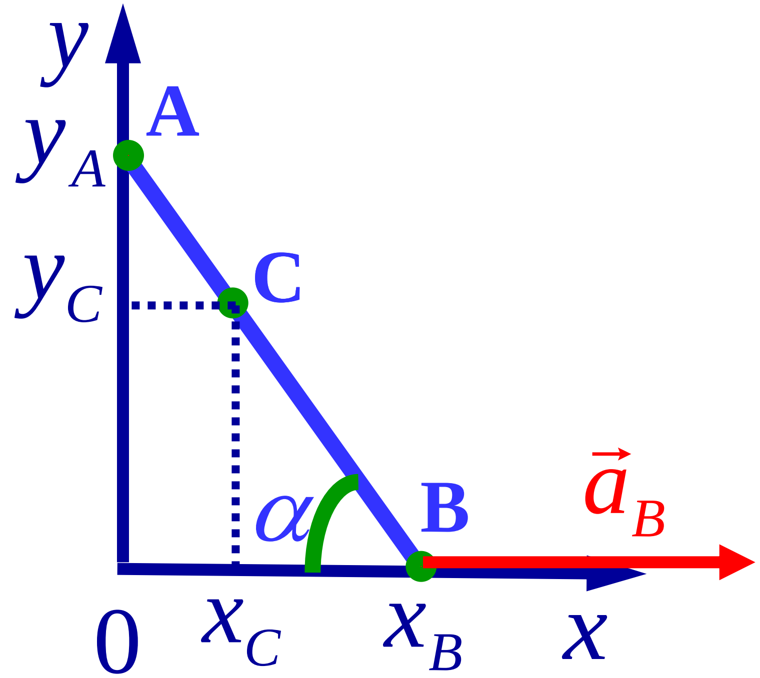
怎么办？

从加速度的定义出发，

对速度求导！



求加速度。注意B的加速度为0时，A的加速度不为0！不能像速度那样分解！



$$\because v_{Ay} = -v_{Bx} \cot\alpha$$

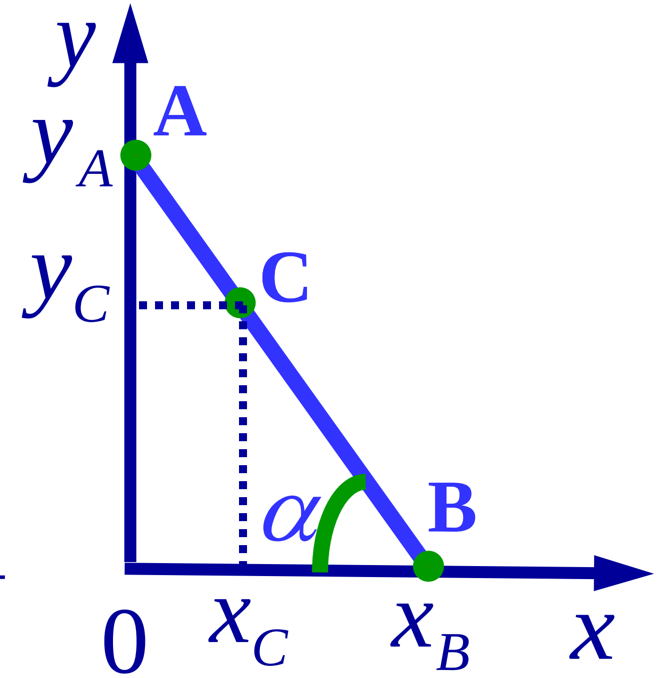
$$\therefore a_{Ay} = \frac{dv_{Ay}}{dt}$$

$$= -a_{Bx} \cot\alpha + v_{Bx} \frac{1}{\sin^2\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\because \cos\alpha = \frac{x_B}{l}$$

$$\therefore -\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{l}\frac{dx_B}{dt} = \frac{v_{Bx}}{l}$$

$$\therefore a_{Ay} = -a_{Bx}\cot\alpha - \frac{1}{\sin^3\alpha}\frac{v_{Bx}^2}{l}$$



$$\therefore a_{Cx} = \frac{dv_{Cx}}{dt} = \frac{s}{l}a_{Bx}$$

$$\therefore a_{Cy} = \frac{l-s}{l}a_{Ay} = \frac{s-l}{l}\left(a_{Bx}\cot\alpha + \frac{1}{\sin^3\alpha}\frac{v_{Bx}^2}{l}\right)$$

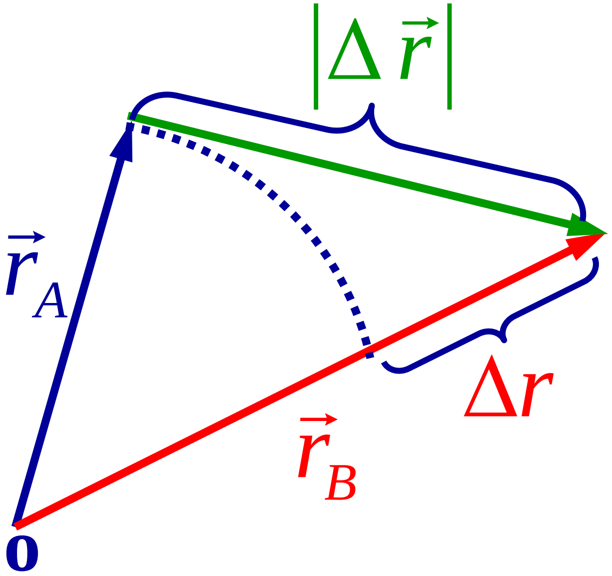
$$\Delta|\vec{r}| = \Delta r, \quad |\Delta\vec{r}| \neq \Delta r \neq \Delta s$$

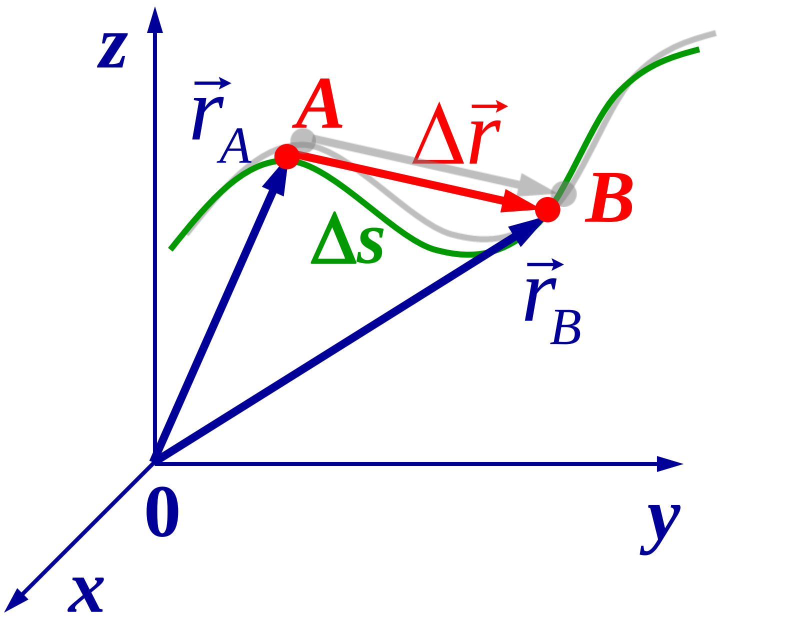
$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

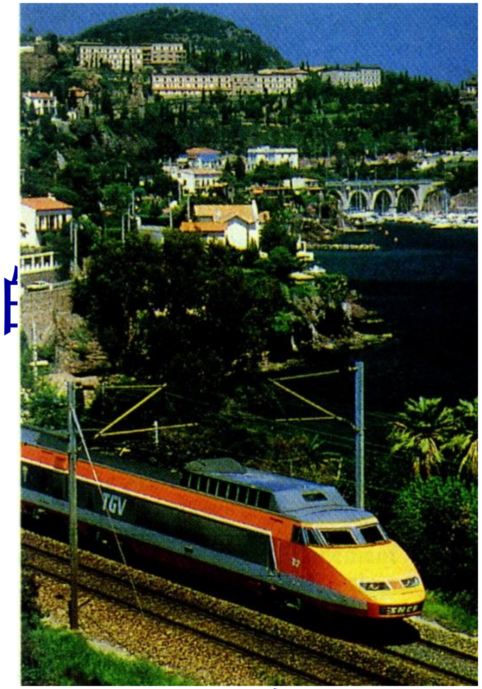
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Delta r = \Delta|\vec{r}| = \sqrt{x_B{}^2 + y_B{}^2 + z_B{}^2} - \sqrt{x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2}$$





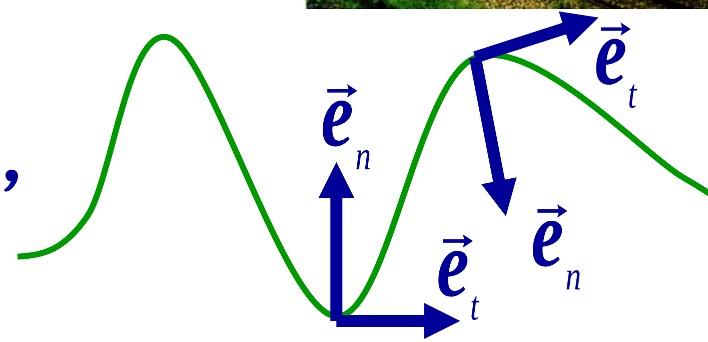
§1-4 用自然坐标表示平面曲线运动中的速度和加速度



采用自然坐标系，可以更好地理解加速度

自然坐标系

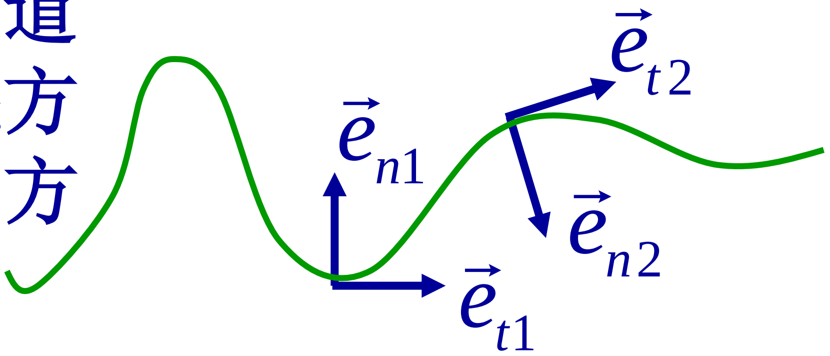
在运动轨道上任一点建立正交坐标系，其一根坐标轴沿轨道切线方向，正方向为运动的前进方向；一根沿轨道法线方向，正方向指向轨道内凹的一侧。



切向单位矢量 $\vec{\mathbf{e}}_t$　　　法向单位矢量 $\vec{\mathbf{e}}_n$

显然，轨迹上各点处，坐标轴的方位不断变化。

自然坐标系：一根坐标轴沿轨道切线方向,正方向为运动的前进方向；一根沿轨道法线方向，正方向指向轨道内凹的一侧。



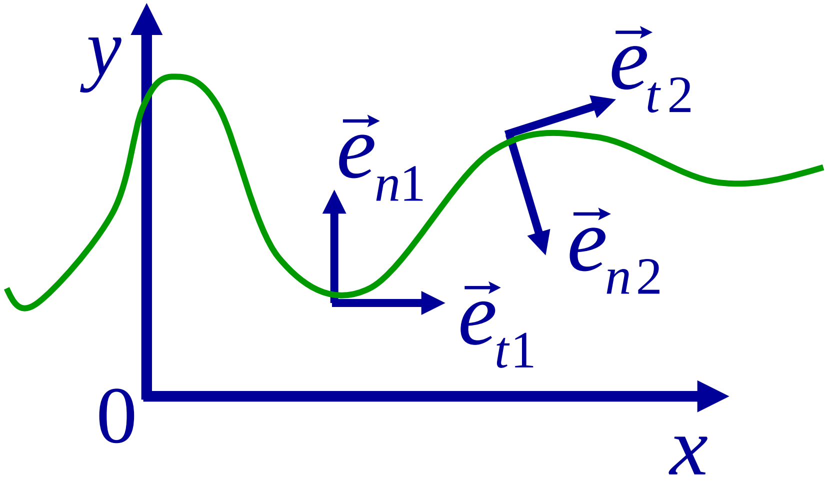
切向单位矢量 $\vec{e}_t$　　法向单位矢量 $\vec{e}_n$

轨迹上各点都可以如此建立坐标系，坐标轴的方位随点而异。但是坐标系是静止在轨迹上的，不是运动的；质点是运动的。

质点经过哪点时，就用该点的自然坐标系来描述。

速度矢量总可以表示为其大小（即速率）与其前进方向上单位矢量的乘积。一般说来，都是时间的函数（大小与方向都随着时间变化）。

$$\vec{v}(t)=v(t)\vec{\tau}(t)$$



当然，也可建立直角坐标系来描述质点的运动：

$$\vec{v}(t)=v_x(t)\vec{i}+v_y(t)\vec{j}$$

矢量的表示：

$$\vec{A}=\left|\vec{A}\right|\hat{A}=\left|\vec{A}\right|\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

自然坐标系下的速度

注意，质点速度的方向一定沿着轨迹的切向，没有法向分量，而切向和法向恰恰是自然坐标系的坐标轴方向。

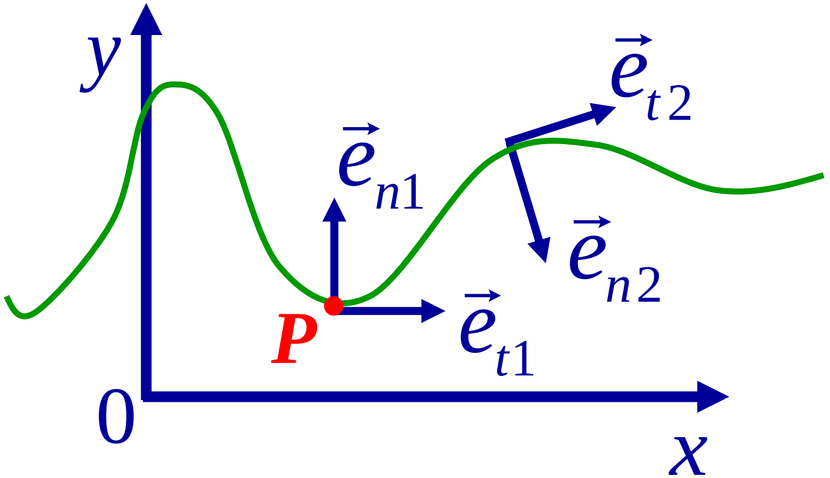
若某时刻t_0，质点恰经过轨迹上某点P，则用该点的自然坐标系，速度可表示为：

$$\vec{v}(t_0) = v(t_0)\vec{e}_{t1}$$

注意：单位矢量$\vec{e}_{t1}$（坐标标架）不随时间变化。

坐标系是静止在轨迹上的，不是运动的；质点是运动的。

质点经过哪点时，就用该点的自然坐标系来描述。



$$\vec{v}(t_0) = v\vec{e}_t$$

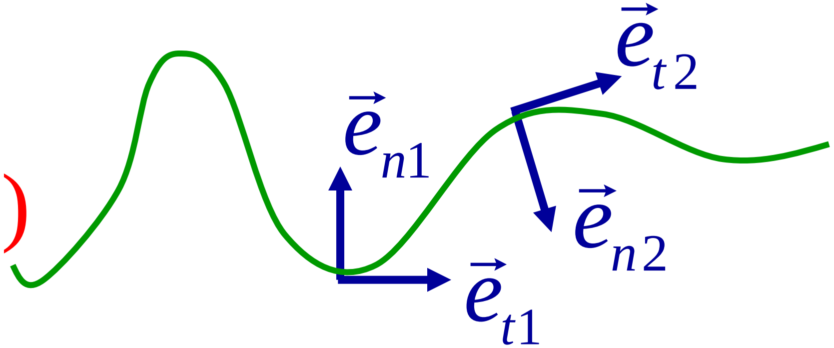
含义为，在时刻t_0质点经过原点，速度沿切向坐标轴方向，速度在法向坐标轴的分量为0。

$$\vec{v}(t) = v_{\vec{e}_t}(t)\vec{e}_t + v_{\vec{e}_n}(t)\vec{e}_n$$

$$\vec{v}(t)\Big|_{t=t_0} = [v_{\vec{e}_t}(t)\vec{e}_t + v_{\vec{e}_n}(t)\vec{e}_n]\Big|_{t=t_0} = v(t_0)\vec{e}_t$$

$$\because v_{\vec{e}_n}(t)\,|_{t=t_0} = 0,$$

$$v_{\vec{e}_t}(t)\,|_{t=t_0} = v_{\vec{e}_t}(t_0) = v(t_0)$$



自然坐标系下的加速度

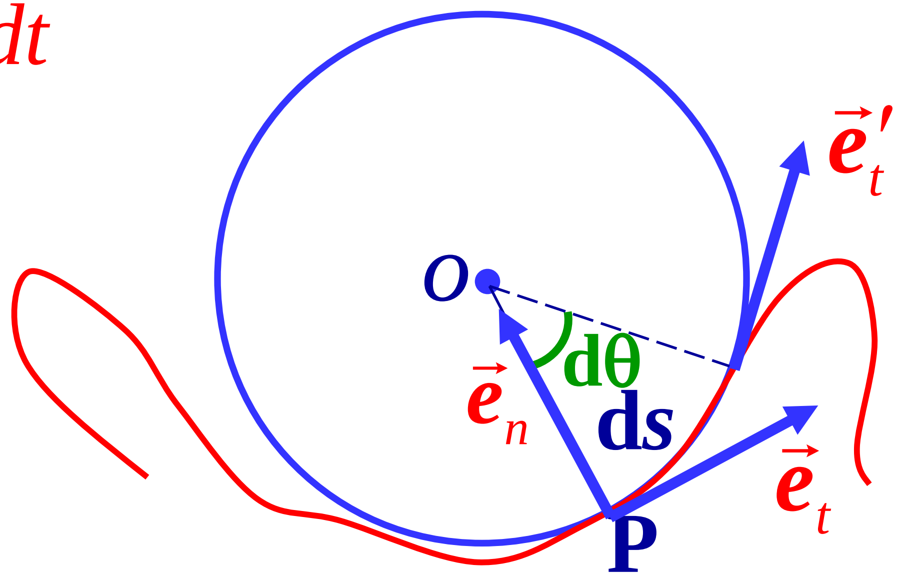
由加速度的定义有

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \qquad \because \vec{v}(t)=v(t)\vec{\tau}(t)$$

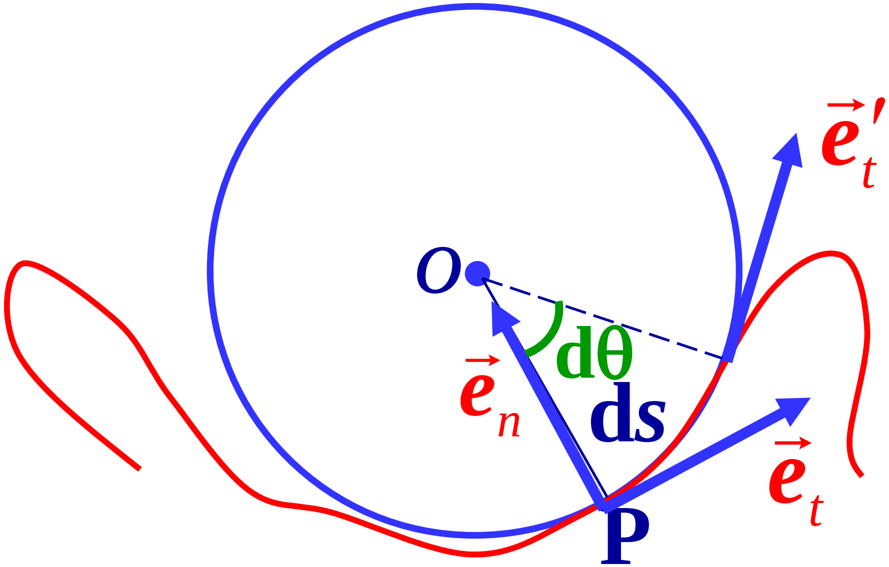
$$=\frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t)+v(t)\frac{d\vec{\tau}(t)}{dt}$$

$$=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

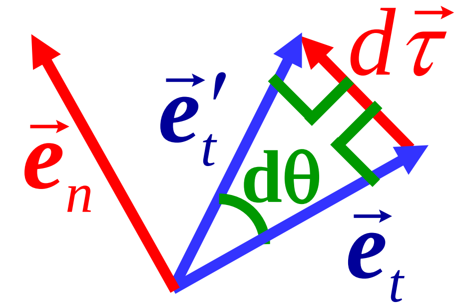
$$d\vec{\tau}=\vec{e}_t'-\vec{e}_t$$



质点在dt 时间内经历弧长ds，对应于角位移dθ ，切线的方向改变dθ角度。



$$\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{e}_t' - \vec{e}_t$$



圆的弧长： $s = R\theta$　　$d\theta \to 0, ds = Rd\theta \approx dl$

圆的弦长： $l = 2R\sin\dfrac{\theta}{2}$

半径为单位矢量长度，故半径为1

$$\mathrm{d}t \to 0, |\mathrm{d}\vec{\tau}| = \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}t \to 0, \Rightarrow \mathrm{d}\theta \to 0$$

由三角形内角和公式

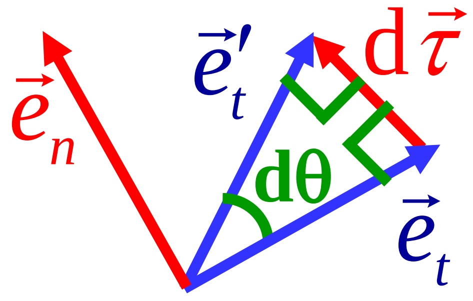
$$\mathrm{d}\vec{\tau} \perp \vec{e}_t, \mathrm{d}\vec{\tau} \perp \vec{e}\,'_t, \mathrm{d}\vec{\tau} // \vec{e}_n$$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{\tau} = \mathrm{d}\theta \vec{e}_n$$

特殊的等腰“直角”三角形！

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \omega \vec{e}_n$$

$$\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{e}\,'_t - \vec{e}_t$$



$$\therefore \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\omega\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

半径为单位矢量长度，故半径为1

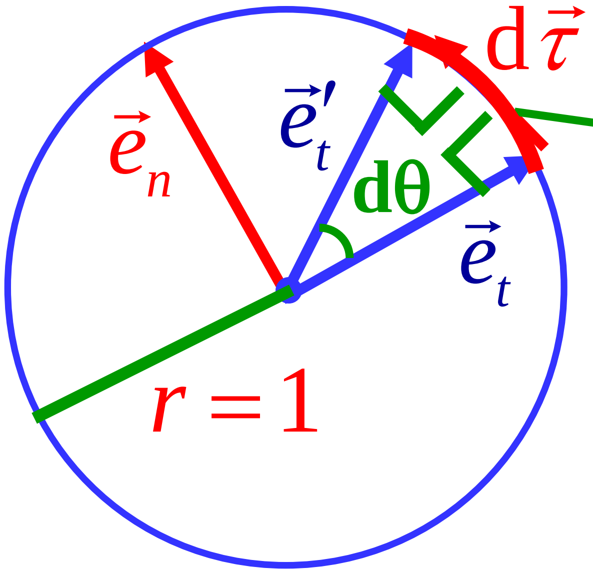
$$\mathrm{d}t \to 0, |\mathrm{d}\vec{\tau}| = \mathrm{d}\theta$$

由三角形内角和公式

$$\mathrm{d}\vec{\tau} \perp \vec{e}_t, \mathrm{d}\vec{\tau} \perp \vec{e}_t', \mathrm{d}\vec{\tau} // \vec{e}_n$$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{\tau} = \mathrm{d}\theta \vec{e}_n$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\theta}{dt}\vec{e}_n = \omega \vec{e}_n$$

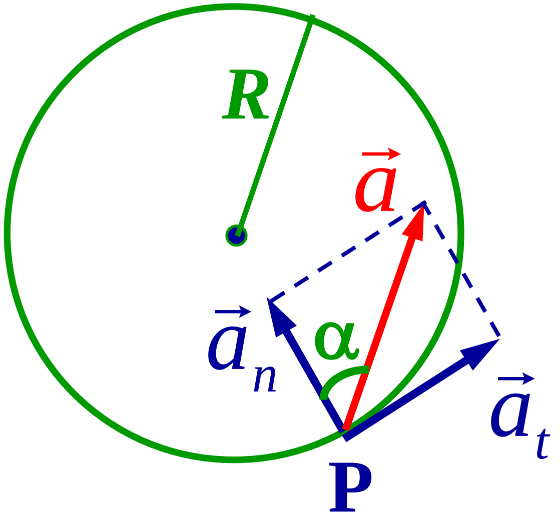


$$\boxed{d\theta \to 0, ds = rd\theta = d\theta \approx |d\vec{\tau}|}$$

以圆周运动为例：$\boldsymbol{v = \omega R}$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\omega\vec{e}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$



即圆周运动的加速度可分解为两个正交分量：

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$\boldsymbol{a_t}$称切向加速度，改变质点速率；

$\boldsymbol{a_n}$称法向加速度，改变质点速度方向。

上述加速度表达式对任何平面曲线运动都适用，但式中半径$\boldsymbol{R}$ 要用曲率半径$\boldsymbol{\rho}$代替。

一般平面曲线运动的加速度

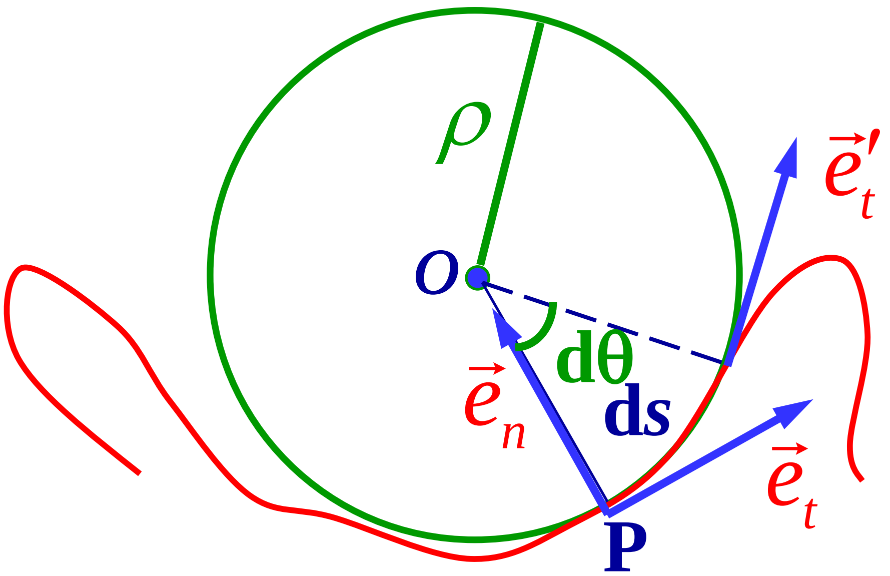
$$\because \vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\theta}{dt}\vec{e}_n = \omega\vec{e}_n$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\omega\vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$



由 $$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$\vec{a}$ 的大小为 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

方向由它与法线方向的夹角给出为$\alpha=\arctan\frac{a_t}{a_n}$

讨论：下列情况时，质点各作什么运动？

a_t等于0，a_n等于0，质点做什么运动？

a_t等于0，a_n不等于0，质点做什么运动？

a_t不等于0，a_n等于0，质点做什么运动？

a_t不等于0，a_n不等于0，质点做什么运动？

由 $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$\vec{a}$ 的大小为 $$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

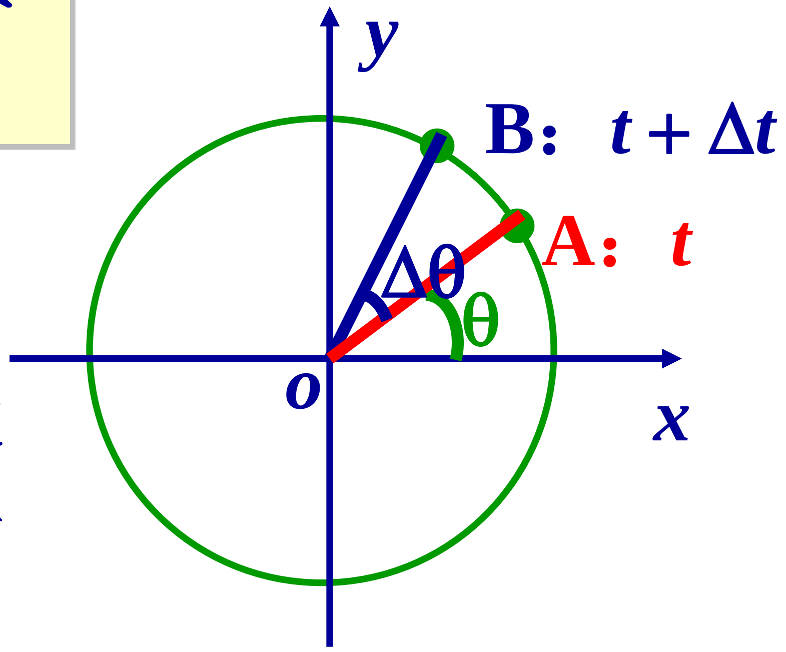
a_t等于0，a_n不等于0，质点做什么运动？

a_t称切向加速度，改变质点速率；

a_n称法向加速度，改变质点速度方向。

只要切向加速度为0，法向加速度不为0，则速度方向改变，而速率不变。

§1-5 圆周运动的角量表示
角量与线量的关系



1．圆周运动的角量描述

用位矢、速度、加速度描写圆周运动的方法，称线量描述法；也可用一个角度来确定其位置，称角量描述法。

设质点在oxy平面内绕o点、沿半径为R的轨道作圆周运动，如图。以ox轴为参考方向，则质点的

角位置为 θ

角位移为 $\Delta\theta$ 规定逆时针为正

平均角速度为 $\overline{\omega}=\Delta\theta/\Delta t$

角速度 $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度 $\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

角速度的单位：弧度/秒($\mathbf{rad \cdot s^{-1}}$)；

角加速度的单位：弧度/平方秒($\mathbf{rad \cdot s^{-2}}$)。

讨论：

(1) 角加速度α对运动的影响：

α等于零，质点作匀速圆周运动；

α不等于零但为常数，质点作匀变速圆周运动；

α随时间变化，质点作一般的圆周运动。

(2) 质点作匀速或匀变速圆周运动时的角速度、角位移与角加速度的关系式为

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \alpha t^2 / 2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

与匀变速直线运动的几个关系式

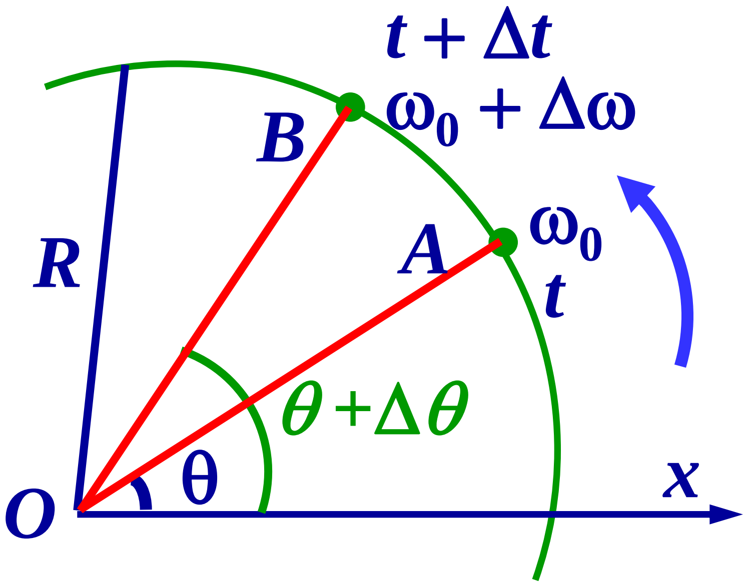
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x - x_0 &= v_0 t + at^2 / 2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\}$$

比较：两者数学形式相同，说明用角量描述，可把平面圆周运动转化为一维直线运动形式。

2．线量与角量之间的关系

圆周运动既可以用速度、加速度描述，也可以用角速度、角加速度描述，二者应有一定的对应关系。

如图，一质点作圆周运动：在Δt 时间内，质点的角位移为$\Delta\theta$，则A、B间的有向线段与弧将满足下面的关系



$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\overset{\frown}{AB}$$

两边同除以Δt，得到速度与角速度之间的关系：

$$v = R\omega$$

上式两端对时间求导，得到切向加速度与角加速度之间的关系：

$$a_t = R\alpha$$

将速度与角速度的关系代入法向加速度的定义式，得到法向加速度与角速度之间的关系：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

法向加速度也叫向心加速度。

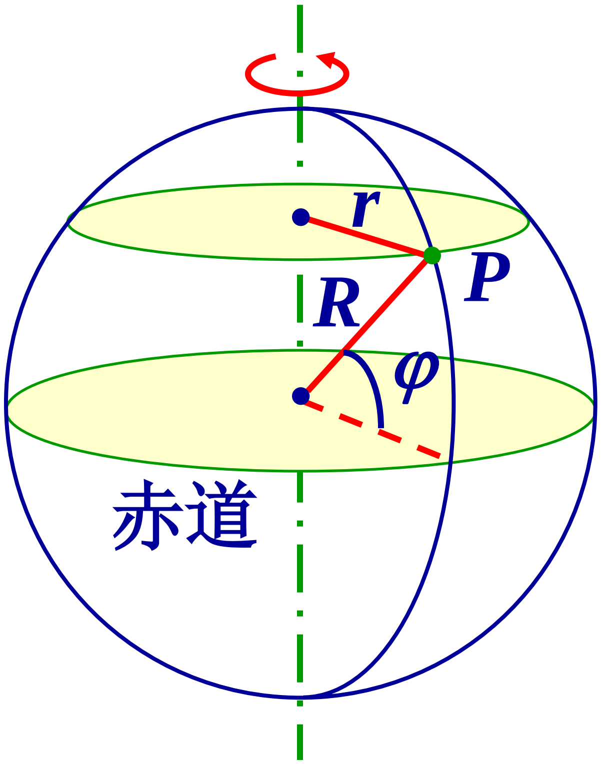
例题：计算地球自转时地面上各点的速度和加速度。

解：自转周期$T = 24×60×60$ s，角速度大小为：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.27\times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$$

如图，地面上纬度为φ 的P点，在与赤道平行的平面内作圆周运动，其轨道半径为

$$r = R\cos\varphi$$



P点速度的大小为

$$v=\omega r=\omega R\cos\varphi$$

$$=7.27\times10^{-5}\times6.73\times10^{6}\times\cos\varphi$$

$$=4.65\times10^{2}\cos\varphi\quad(\mathrm{m/s})$$

速度方向与过**P**点运动平面上半径为**R**的圆相切。

P点只有运动平面上的向心加速度，其大小为

$$a_n=\omega^2 r=\omega^2 R\cos\varphi$$

$$=(7.27\times10^{-5})^2\times6.73\times10^{6}\times\cos\varphi$$

$$=3.37\times10^{-2}\cos\varphi\quad(\mathrm{m/s^2})$$

P点加速度的方向在运动平面上由**P**指向地轴。

例如：已知北京、上海和广州三地的纬度分别是北纬39°57′、31°12′和 23°00′，则三地的v 和 a_n分别为：

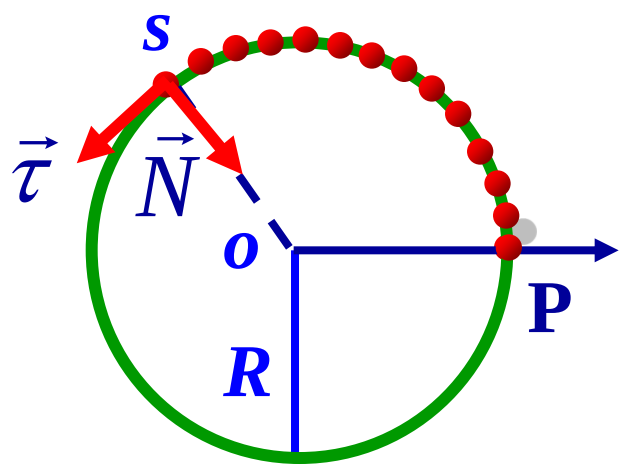
北京：$v = 356\ \ (\mathrm{m/s}),\quad a_n = 2.58\times10^{-2}\ \ (\mathrm{m/s}^2)$

上海：$v = 398\ \ (\mathrm{m/s}),\quad a_n = 2.89\times10^{-2}\ \ (\mathrm{m/s}^2)$

广州：$v = 428\ \ (\mathrm{m/s}),\quad a_n = 3.10\times10^{-2}\ \ (\mathrm{m/s}^2)$

例题：一质点沿半径为R的圆按规律 $s = v_0 t - bt^2/2$ 运动，v_0、b都是正的常量。求：(1) t时刻质点的总加速度的大小；(2)t为何值时，总加速度的大小为b；(3)总加速度大小为b时，质点沿圆周运行了多少圈。

解：先作图如右，$t = 0$ 时，质点位于$s = 0$ 的P点处。



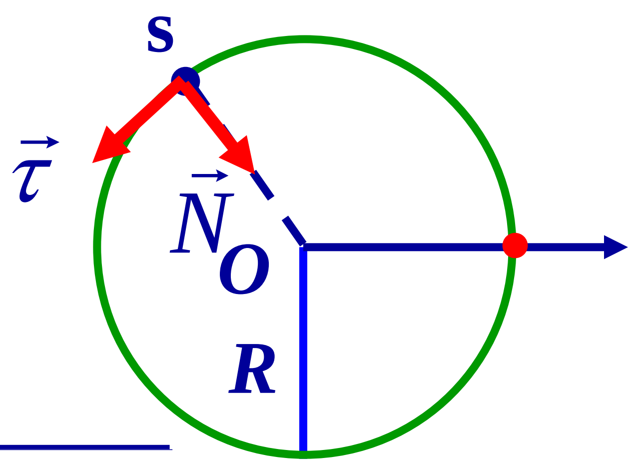
在t 时刻，质点运动到位置 s 处。

质点速率为

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$$

(1) *t*时刻切向加速度、法向加速度及加速度大小:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -b$$



$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R}$$

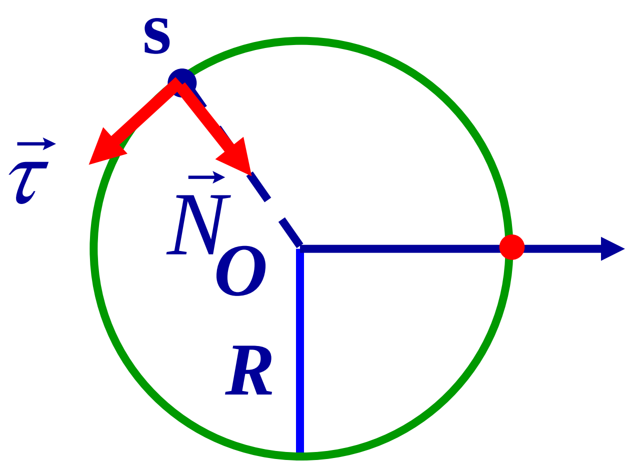
(2) 令*a* = *b*，即

$$a = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R} = b$$

解得 $t = v_0 / b$

(3) 当$a=b$ 时，$t=v_0/b$ ，由此可求得质点历经的弧长为

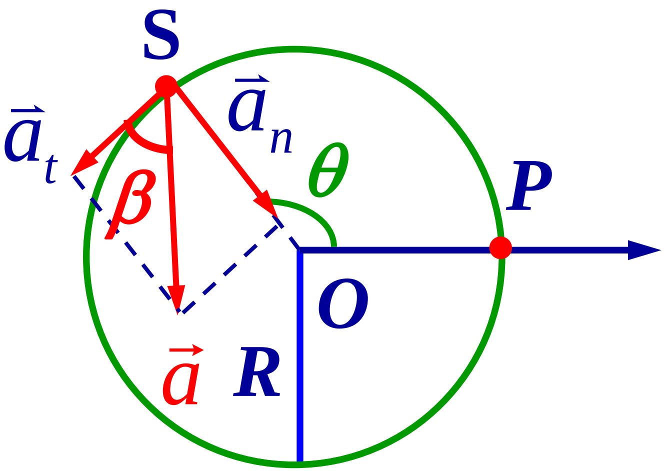
$$s=v_0t-bt^2/2=v_0^2/(2b)$$



它与圆周长之比即为圈数：

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

例题：一质点沿半径0.1米的圆周运动。其角位置满足：$\theta(\text{rad}) = 2 + 4t^3$。$t$的单位为s。问：$t = 2$s时质点的法向和切向加速度是多少？质点加速度是多少？



解：角速度：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$

角加速度：$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 24t$

法向加速度：$a_n = R\omega^2 = 230.4\mathrm{m/s^2}$

切向加速度：$a_t = R\alpha = 4.8\mathrm{m/s^2}$

加速度大小：$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 230.45\mathrm{m/s^2}$

加速度方向：$\tan\beta = a_n / a_t$

例题：光盘音轨区域内半径$R_1 = 2.2$ cm，外半径R_2 =5.6 cm。径向音轨密度N = 650 条/mm，激光束相对光盘以v = 1.3 m/s的恒定线速度运动。（1）播放时间？（2）$r = 5.0$ cm处的角速度和角加速度。

解：径向位移dr，则近似的相当于走了Ndr个圆周。

$$t = \int_0^T dt = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r N dr}{v} = \frac{\pi N}{v}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 69.4\text{min}$$

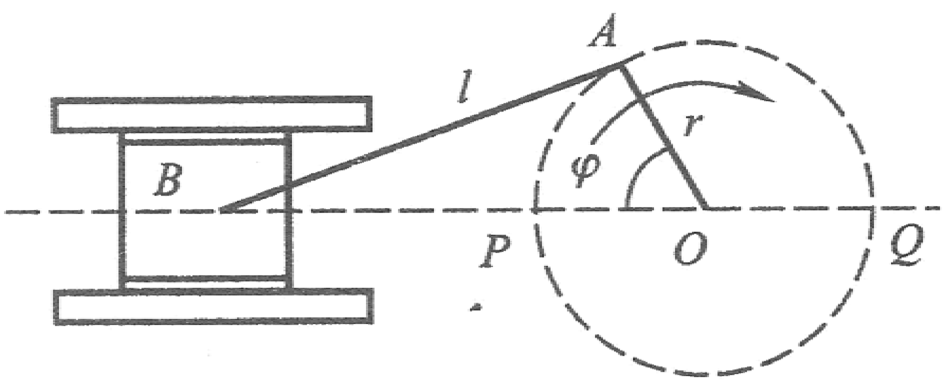
近似看成圆周运动：

$$\omega \approx \frac{v}{r} = 26\text{rad/s}$$

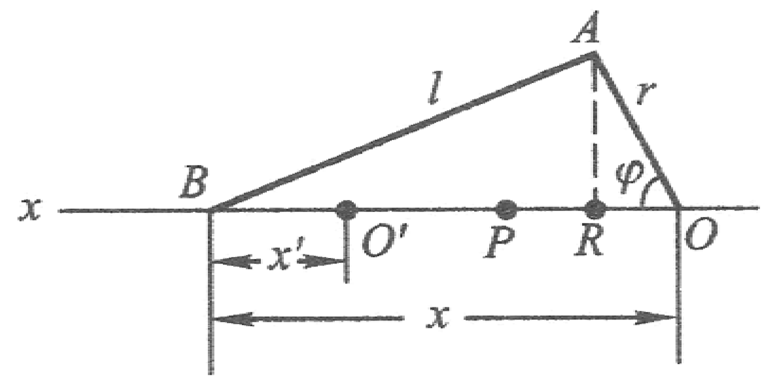
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{v}{2\pi r N} = -3.31\times 10^{-3}\text{rad/s}^2$$

第二次：第一章：12、14、15、16、25、28

例题：如图*a*所示为一曲柄连杆机构，曲柄*OA*长为*r*，连杆*AB*长为*l*，*AB*的一段用销子在*A*处与曲柄*OA*相连，另一端以销子在*B*处与活塞相连。当曲柄以匀角速*ω*绕轴*O*旋转时，通过连杆将带动*B*处活塞在汽缸内往复运动，试求活塞的运动学方程。

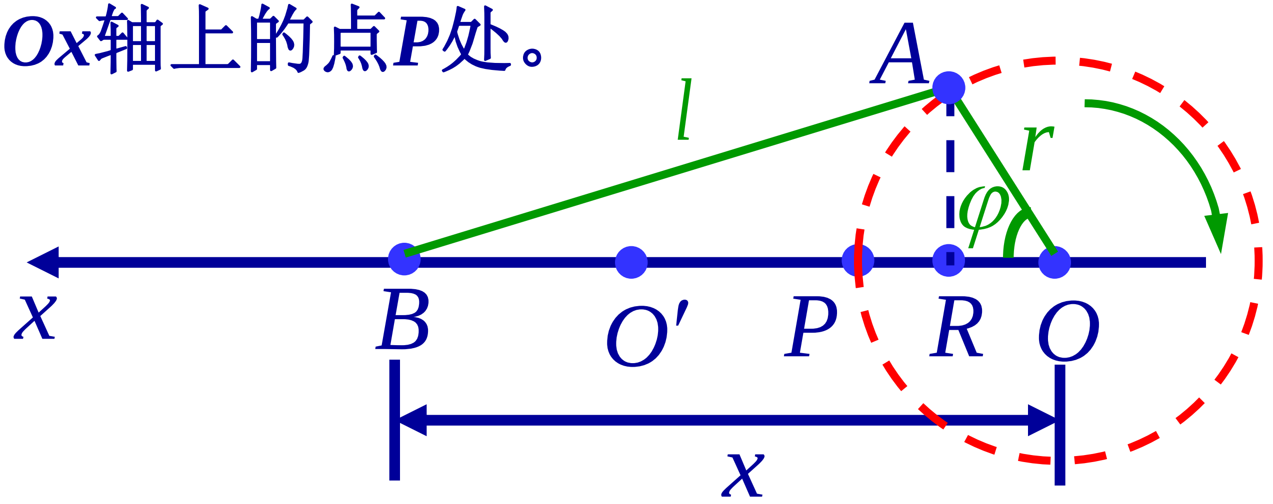


(a)



(b)

解： 取O为原点，Ox轴水平向左，如图b所示；并设开始时，曲柄A在Ox轴上的点P处。



曲柄以匀角速ω转动时，在t时刻曲柄转角为$\varphi = \omega t$，这时B处活塞的位置为$x = OR + RB$，即

$$x = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$$

这就是活塞的运动学方程。

$$x = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$$

我们把上式右端第二项按二项式定理展开为级数：

$$\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t} = l\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\omega t + \cdots\right]$$

$$x \approx 0,\ (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \cdots$$

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \ x = -\frac{r^2\sin^2\omega t}{l^2}$$

一般**r/l < 1/3.5**，因此高阶小量可以略去，于是活塞的运动学方程

$$x = r\cos\omega t + l[1 - \frac{1}{2}(r/l)^2\sin^2\omega t]$$

x比较小时，在0点的Tayor展开公式：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha}{2!}(\alpha-1)x^{2}+\cdots$$

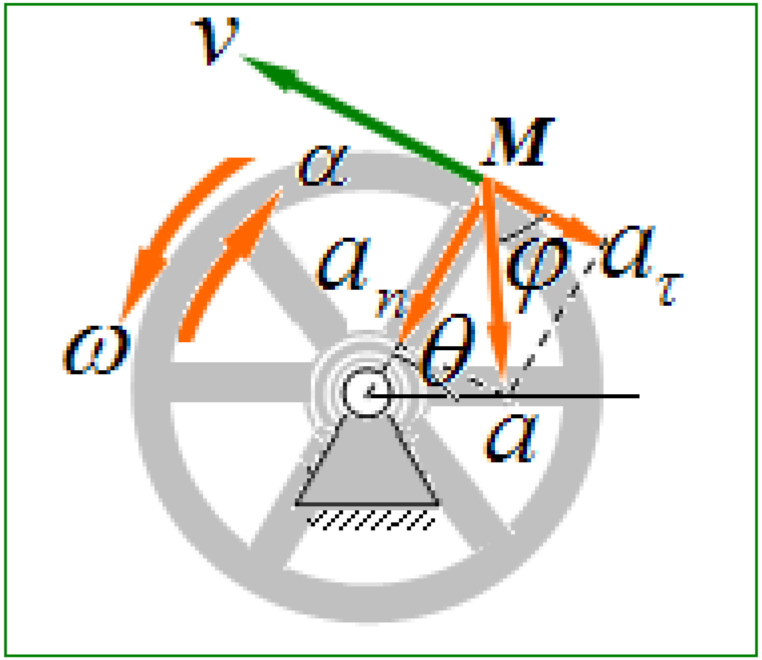
数学公式应用到物理中，按实际问题中的小量展开

$$\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\omega t}=l\left[1-\left(\frac{r}{l}\right)^{2}\sin^{2}\omega t\right]^{1/2}$$

$$x=-\left(\frac{r}{l}\right)^{2}\sin^{2}\omega t,\quad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\sqrt{l^{2}-r^{2}\sin^{2}\omega t}=l[1-\frac{1}{2}(\frac{r}{l})^{2}\sin^{2}\omega t+\cdots]$$

例题(1.9)：半径为r = 0.2m，可绕O轴转动，如图所示。已知轮缘上任一点 M 的运动方程为$\theta = -t^2 + 4t$，求 $t = 1\text{s}$ 时 M 点的速度和加速度。



解：飞轮运动时，M点将作半径为r 的圆周运动，其角速度、角加速度分别为

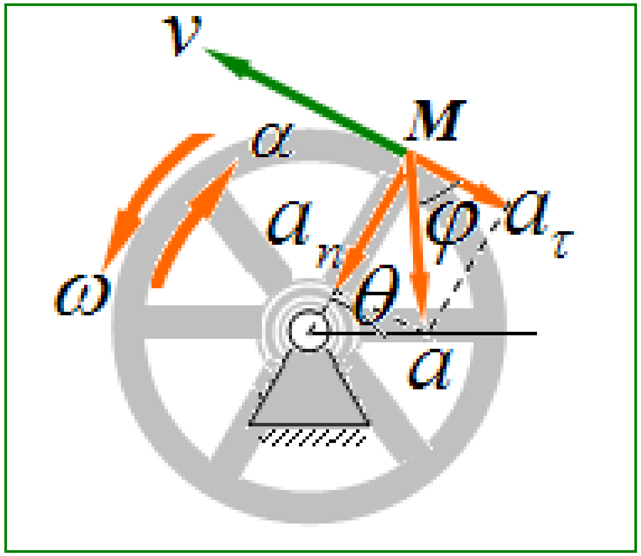
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -2t + 4\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -2\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

t **=1s** 时，***M***点的速度大小为

$$v = r\omega = 0.2\times(-2\times1+4)$$

$$= 0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$



方向沿***M***点的切线方向，如图所示。

M点的切向加速度和法向加速度为

$$a_\tau = r\alpha = -0.4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{2}$$

$$a_n = r\omega^2 = 0.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

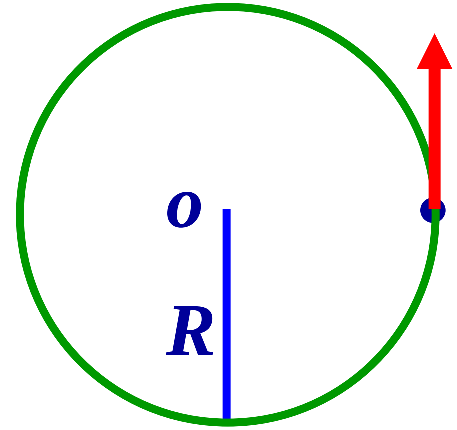
加速度的大小和方向

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0.89\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\tan\varphi = \left|\frac{a_n}{a_\tau}\right| = 2,\ \ \varphi = 63.4^\circ$$

思考题

1. 质点作匀变速圆周运动，则



切向加速度的大小和方向都在变化 ✗

法向加速度的大小和方向都在变化 ✓

切向加速度的方向变化，大小不变 ✓

切向加速度的方向不变，大小变化 ✗

$$a_t = R\alpha$$

方向：切向（不断变化）

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

方向：法向（不断变化）

2. 判断下列说法的正、误：

a. 加速度恒定不变时，物体的运动方向必定不变。 ×

b. 平均速率等于平均速度的大小。 ×

平均速率 $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$

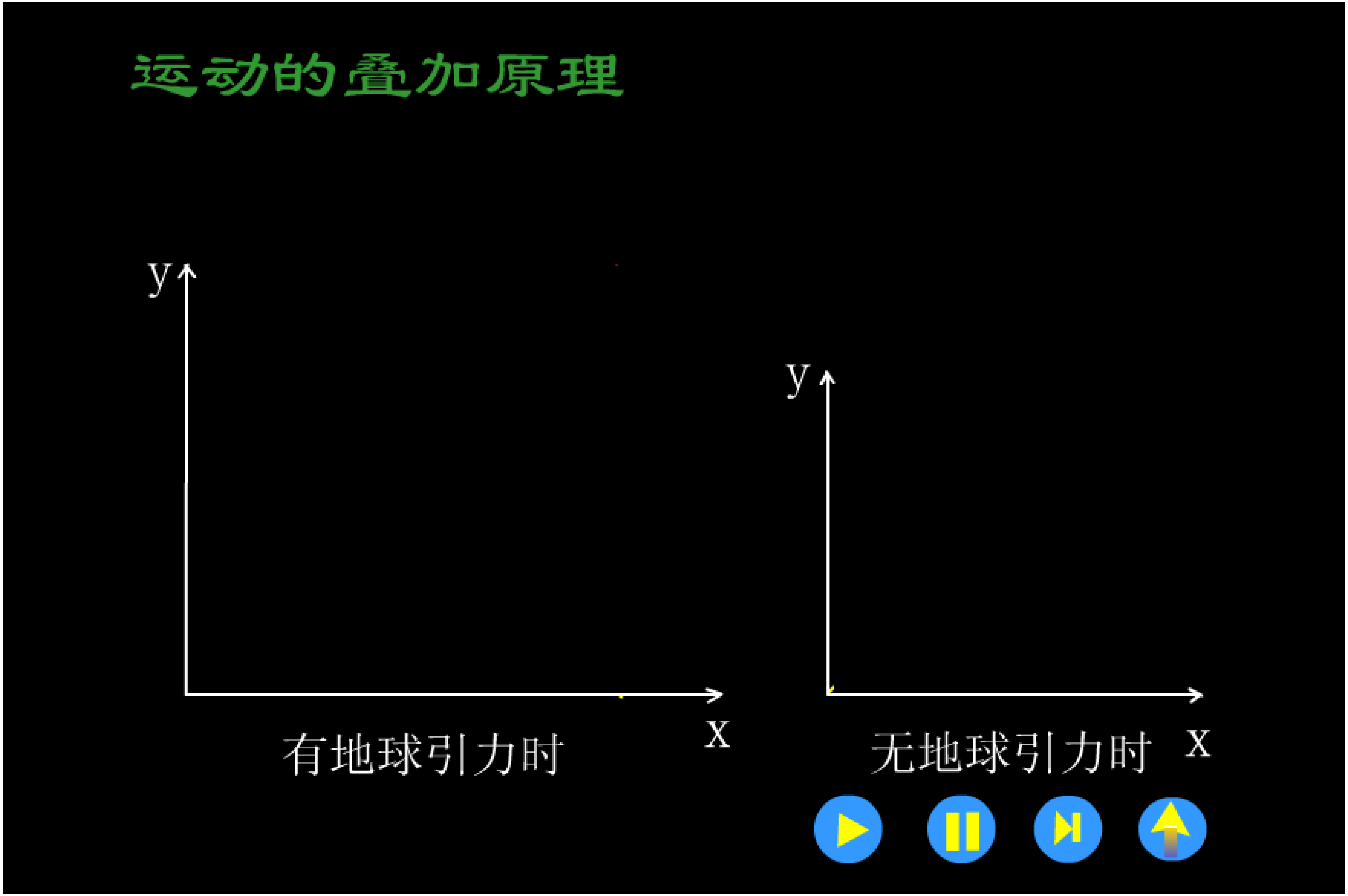
平均速度大小 $\left|\vec{\bar{v}}\right| = \left|\Delta \vec{r} / \Delta t\right|$

c. 不论加速度如何，平均速率的表达式总可写成 $\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$，其中 v_1是初速度， v_2 是末速度。 ×

d. 运动物体的速率不变时，速度可以变化。 √

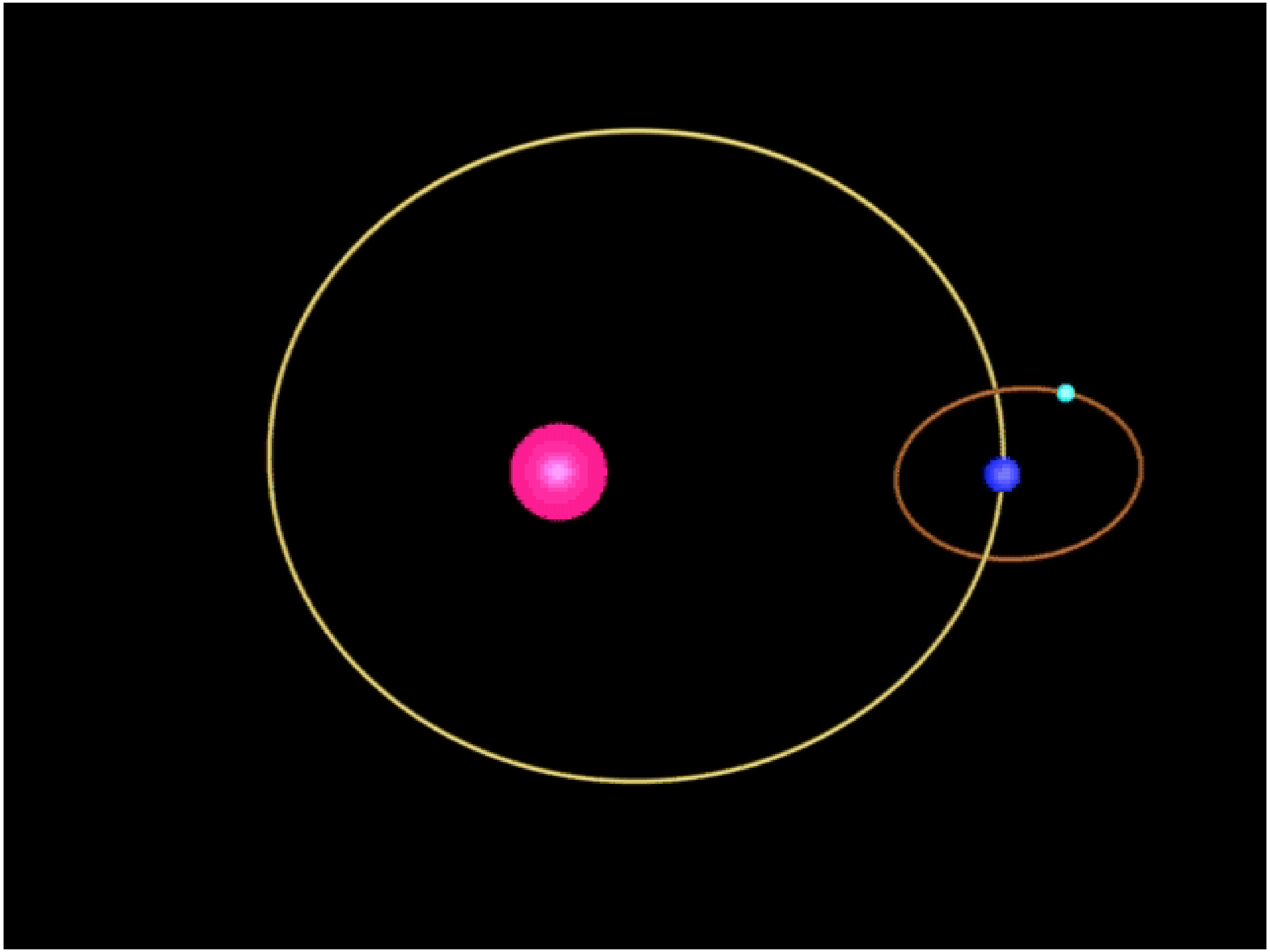
只要切向加速度为0，法向加速度不为0，则速度方向改变，而速率不变。

运动叠加原理



运动叠加原理

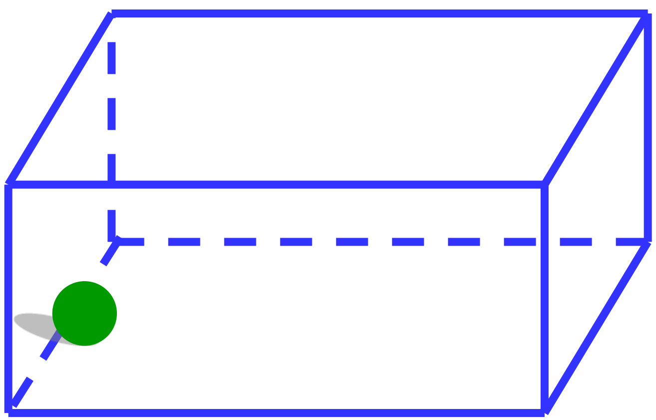
§1-6 速度与加速度的坐标变换（相对运动）



太阳、地球、月球系统

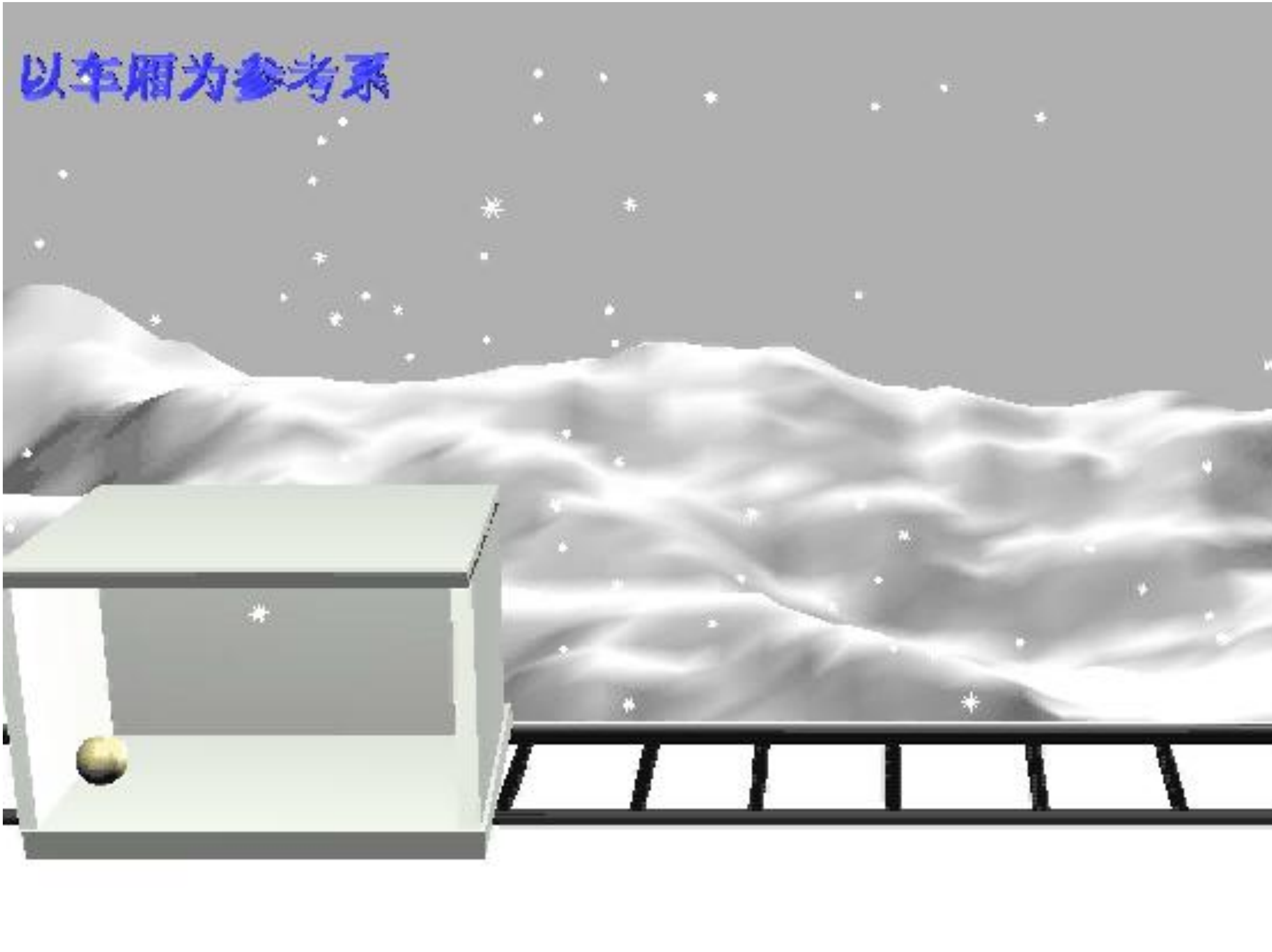
运动的描述具有相对性，在不同参考系中研究同一物体的运动情况，结果会完全不同。

火车在运动，一小球在车厢内运动，以火车或地面为参考系来研究小球的运动情况。



观察小球与火车的运动情况：

以地为参考系


以车厢为参考系

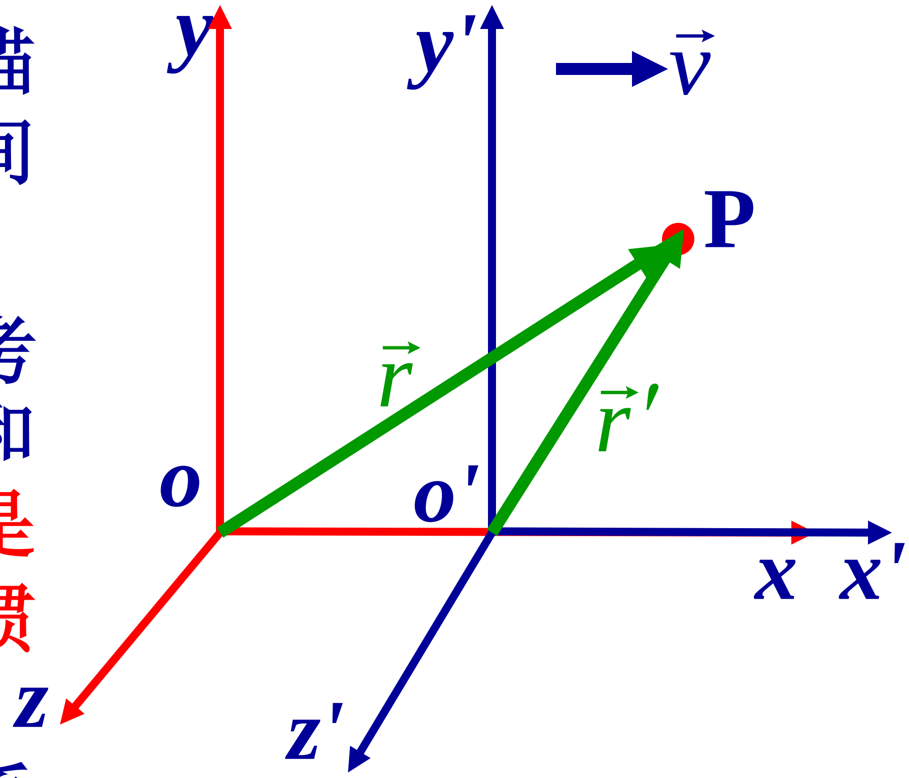
相对运动的数学描述

1. 伽利略坐标变换

不同参考系对同一个运动描述的结果不同，其结果之间是否有某种联系呢？

考虑两个作相对运动的参考系中的坐标系K(*Oxyz*)和K′(*O′x′y′z′*)。注意：没说是匀速直线运动！不需要是惯性系！

如图，此时K′系相对于K系的速度为*v*，对于同一个质点P，在两个坐标系中的所对应的位置矢量：



K′系原点在K系中的位矢：

从图中易见矢量关系：

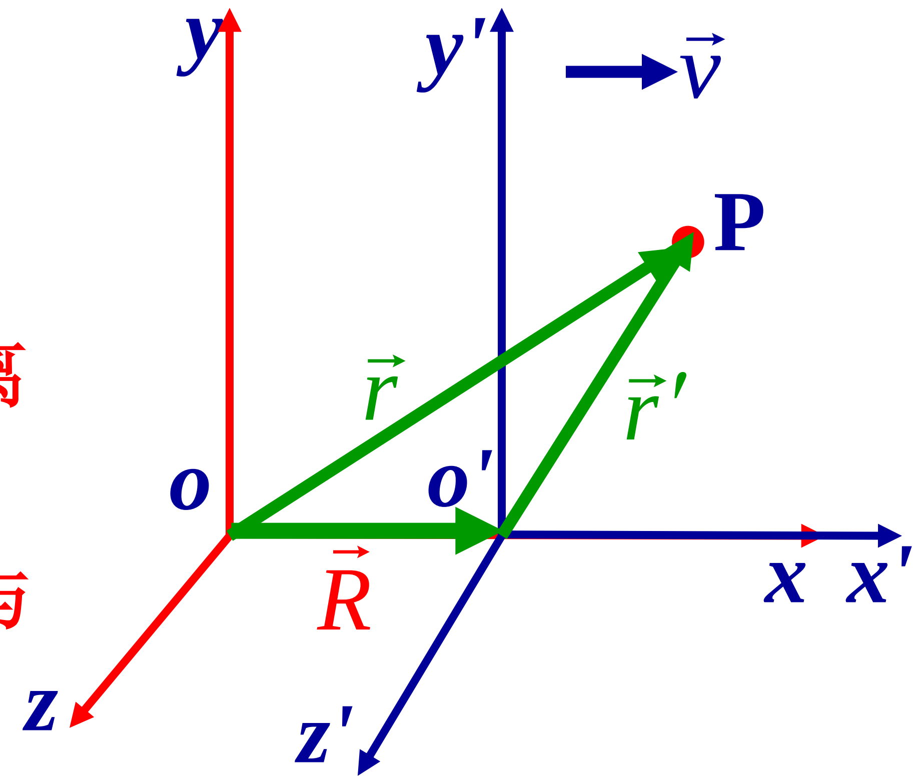
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

成立的条件：经典时空观！
所导致的结论如下：

空间绝对性：空间两点距离的测量与坐标系无关。

时间绝对性：时间的测量与坐标系无关。

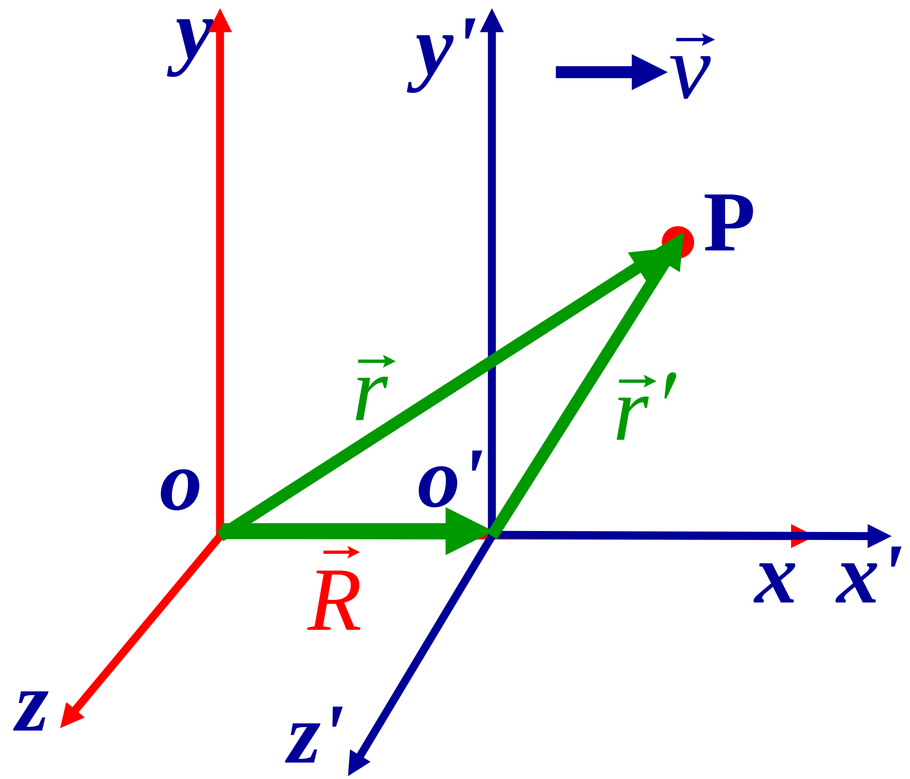
$$t = t'$$



若坐标系K(Oxyz)和K′(O′x′y′z′)相对作匀速直线运动，且在$t = 0$时刻坐标原点重合。则P点在K系和K′系的空间、时间坐标的对应关系为：

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$



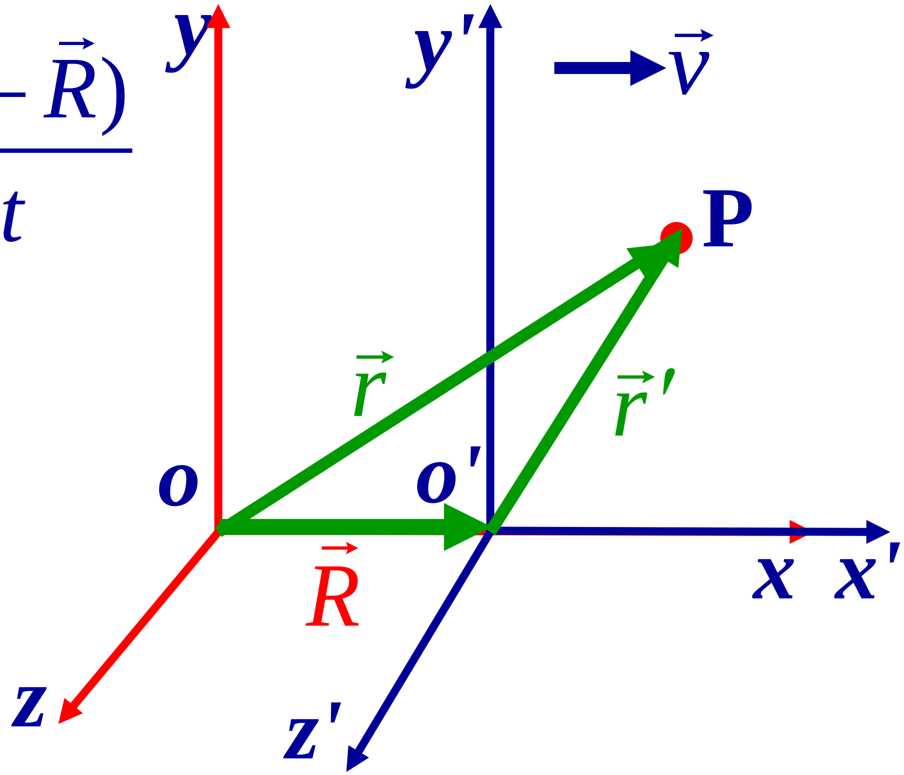
此即经典时空观下的伽利略坐标变换式

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

2．伽利略速度变换

若此时K′系相对K系的速度为 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}$

质点在两个坐标系中的速度分别为$\vec{v}_{\mathrm{K}},\vec{v}_{\mathrm{K}'}$



$$\vec{v}_{\mathrm{K}'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}-\vec{R})}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}_{\mathrm{K}}-\vec{v}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}'}=\vec{v}_{\mathrm{K}}-\vec{v}$$

$$\vec{v}_{A\mathrm{K}}=\vec{v}_{A\mathrm{K}'}+\vec{v}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}}$$

在直角坐标系中的分量形式

$$v_{\mathrm{K}'x}=v_{\mathrm{K}x}-v\quad v_{\mathrm{K}'y}=v_{\mathrm{K}y}\quad v_{\mathrm{K}'z}=v_{\mathrm{K}z}$$

若K′系相对K系作匀速直线运动，速度为$\vec{v}$

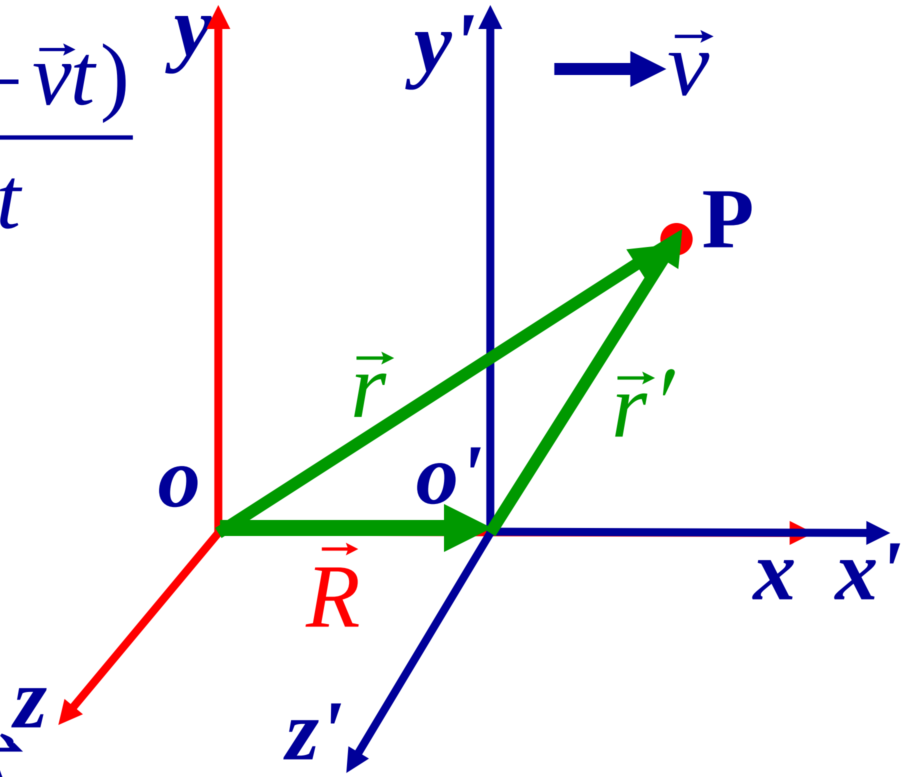
质点在两个坐标系中的速度分别为$\vec{v}_{\mathrm{K}},\vec{v}_{\mathrm{K}'}$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}-\vec{v}t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}_{\mathrm{K}}-\vec{v}$$

$$\vec{v}_{\mathrm{K}'}=\vec{v}_{\mathrm{K}}-\vec{v}$$

$$\vec{v}_{A\mathrm{K}}=\vec{v}_{A\mathrm{K}'}+\vec{v}_{\mathrm{K}'\mathrm{K}}$$

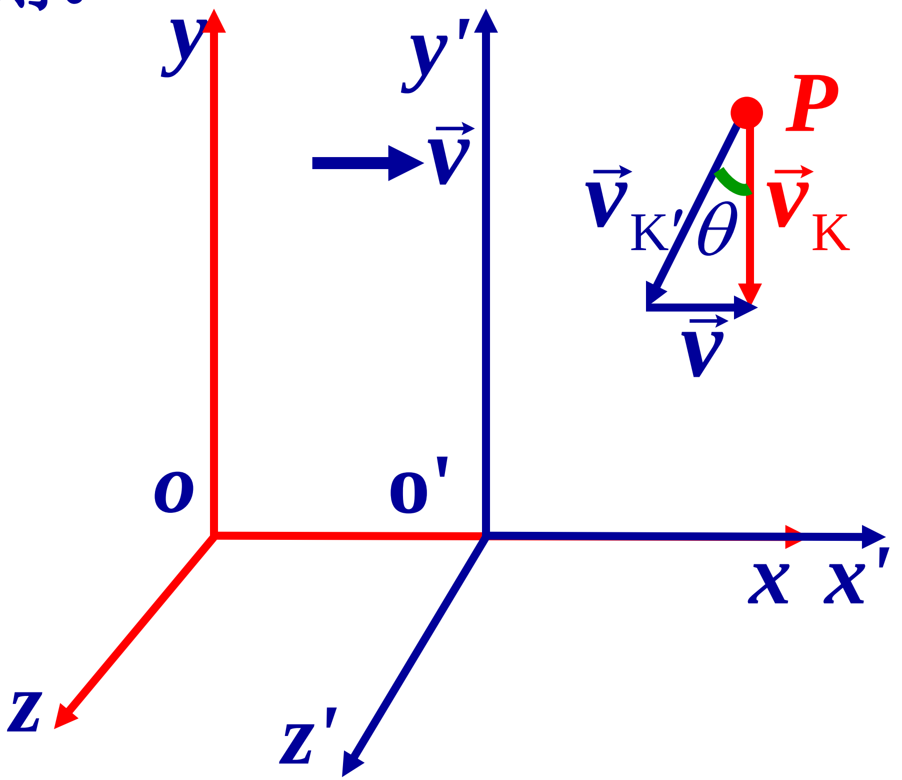


在直角坐标系中写成分量形式

$$v_{\mathrm{K}'x}=v_{\mathrm{K}x}-v \quad v_{\mathrm{K}'y}=v_{\mathrm{K}y} \quad v_{\mathrm{K}'z}=v_{\mathrm{K}z}$$

相对于地面竖直下落的物体，作出各个坐标系中的速度方向，满足矢量三角形法则。

$$\tan\theta=\frac{v}{v_{\mathrm{K}}}$$



为便于记忆，通常把速度变换式写成下面的形式

$$\vec{v}_{AK}=\vec{v}_{AK'}-\vec{v}_{KK'}$$

注意：低速运动的物体满足速度变换式，并且可通过实验证实，对于高速运动（接近光速）的物体，上面的变换式失效。

3. 加速度变换

设该时刻**K′**系相对于**K**系的加速度为 $\vec{a}_0$，由定义

$$\because \vec{v}_{K'} = \vec{v}_K - \vec{v},\ t' = t$$

$$\therefore \frac{d\vec{v}_{K'}}{dt'} = \frac{d\vec{v}_K}{dt'} - \frac{d\vec{v}}{dt'} = \frac{d\vec{v}_K}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_K - \vec{a}_0$$

$$\vec{a}_K = \vec{a}_{K'} + \vec{a}_0$$

$$\vec{a}_0 = 0,\ \vec{a}_K = \vec{a}_{K'}$$

表明质点的加速度相对于作匀速运动的各个参考系不变。

最后重申，上述结论纯粹是运动学的结论，完全从速度、加速度的定义出发，丝毫不涉及动力学（没有出现力、质量）。正因为如此，上述结论与K系和K′系是否为惯性系没有任何关系。而我们当中有些同学，可能习惯认为K系和K′系是做相对匀速直线运动的惯性系，仅仅熟悉该特殊情形下的伽利略坐标变换式及其结论，甚至许多教材也是如此讲解的。所以我们拓展到更一般的结论，并借此机会提醒大家，不要局限我们的思维，不要局限我们的视野。要知道，当年杨振宁、李政道的诺贝尔奖就是这么搞定的。

例题：某人以**4km/h**的速度向东行进时，感觉风从正北吹来。如果速度增加一倍，则感觉风从东北方向吹来。求相对于地面的风速和风向。

解：作矢量三角形图，取地面为**K**系，人为**K′**系

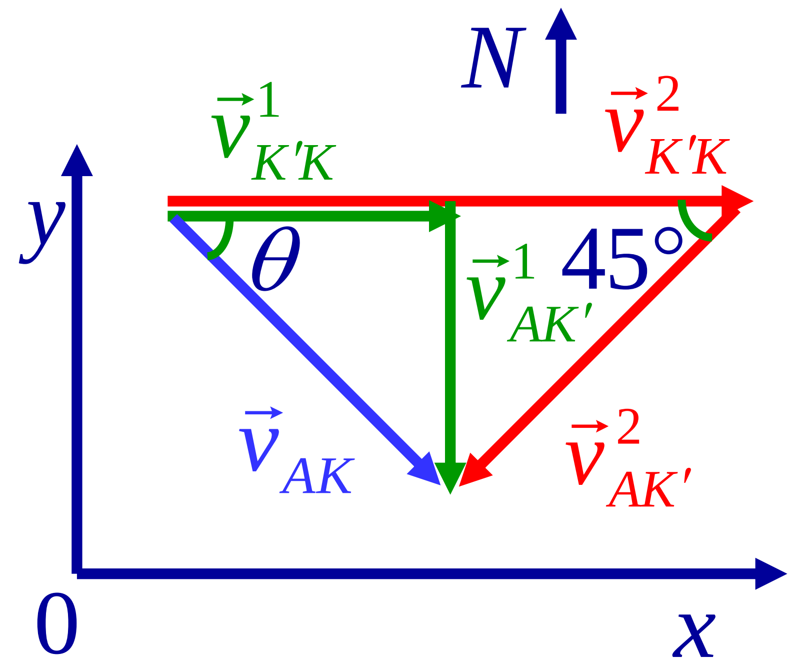
$$\vec{v}=\vec{v}_{AK}=\vec{v}^{\,1}_{AK'}+\vec{v}^{\,1}_{K'K}$$

$$\vec{v}=\vec{v}_{AK}=\vec{v}^{\,2}_{AK'}+\vec{v}^{\,2}_{K'K}$$

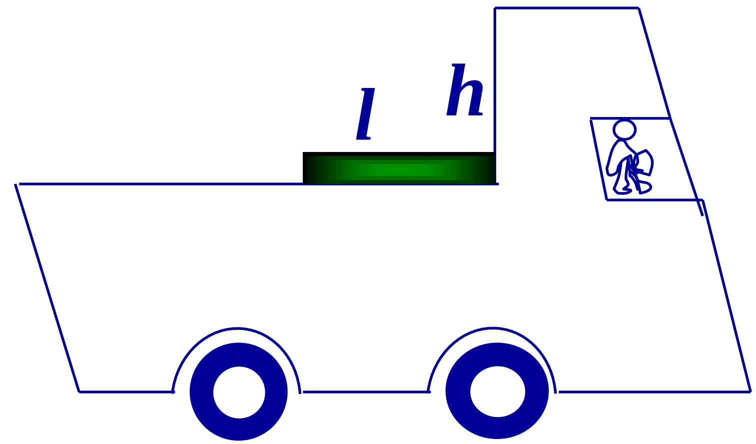
$$\theta=?$$

$$\because 45^\circ,\quad \vec{v}^{\,2}_{K'K}=2\vec{v}^{\,1}_{K'K}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4},\quad |\vec{v}_{AK}|=4\sqrt{2}\text{km/h}\approx 5.66\text{km/h}$$



例：一货车在行驶过程中，遇到5m/s竖直下落的大雨，车上紧靠挡板平放有长为l ＝ 1m的木板。如果木板上表面距挡板最高端的距离h = 1m，问货车以多大的速度行驶，才能使木板不致淋雨？

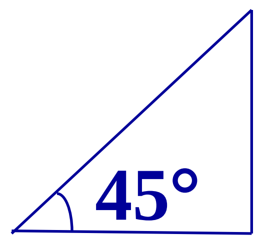


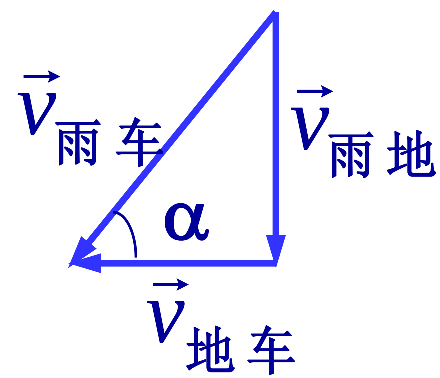
解：车在前进的过程中，雨相对于车向后下方运动，使雨不落在木板上，挡板最上端处的雨应飘落在木板的最左端的左方。

$$\alpha = 45^\circ$$

$$v_{车} = \left| v_{地车} \right|$$

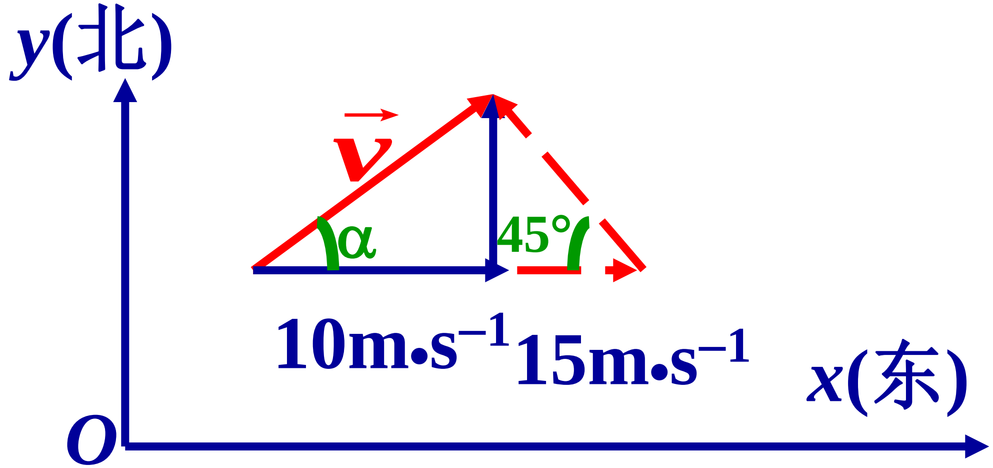
$$= \left| v_{雨地} \right| = 5(\mathrm{m/s})$$





例：某人骑摩托车向东前进，其速率为$10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$时觉得有南风，当其速率为$15\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$时，又觉得有东南风，试求风速度。

解：取风为研究对象，骑车人和地面作为两个相对运动的参考系。作图



根据速度变换公式得到：

$$\vec{v}=\vec{v}_{AK}=\vec{v}^{\,1}_{AK'}+\vec{v}^{\,1}_{K'K}$$

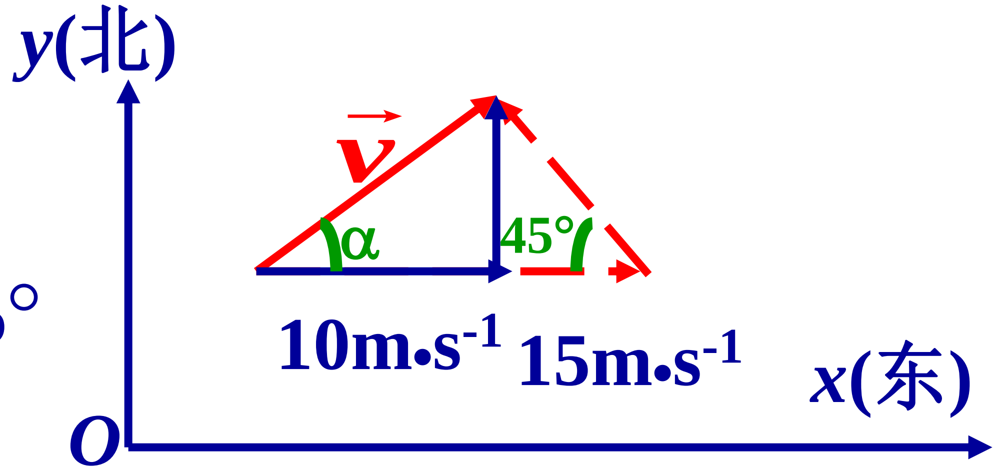
$$\vec{v}=\vec{v}_{AK}=\vec{v}^{\,2}_{AK'}+\vec{v}^{\,2}_{K'K}$$

由图中的几何关系，知：

$$v_x = v^1_{K'K} = 10(m/s)$$

$$v_y = (v^2_{K'K} - v^1_{K'K})\text{tg}45°$$

$$= 15 - 10 = 5(m/s)$$



风速的大小：

$$v = \sqrt{10^2 + 5^2}$$

$$= 11.2(m/s)$$

风速的方向：

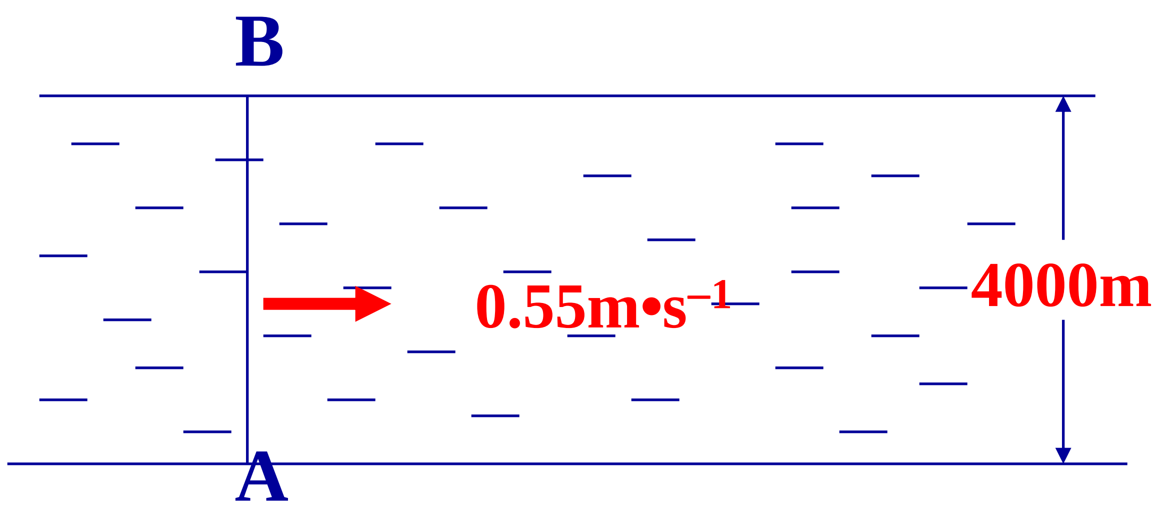
$$\alpha = \text{arctg}\frac{5}{10} = 26°34'$$

为东偏北**26°34'**

例：一人能在静水中以$1.1\,m\cdot s^{-1}$的速率划船前进，今欲横渡一宽度为4000m、水流速度为$0.55\,m\cdot s^{-1}$的大河。

(1) 若要达到河正对岸的一点，应如何确定划行方向？需要多少时间？

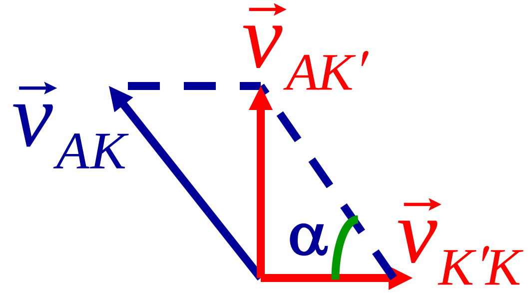
(2) 如希望用最短的时间过河，应如何确定划行方向？船到达对岸的位置在何处？



解：（1）相对运动的问题，以船A为研究对象，分别选择岸k、水k′作为参考系：

根据分析：船对水的速度方向应垂直于河岸

$$\vec{v}_{AK}=\vec{v}_{AK'}+\vec{v}_{K'K}$$

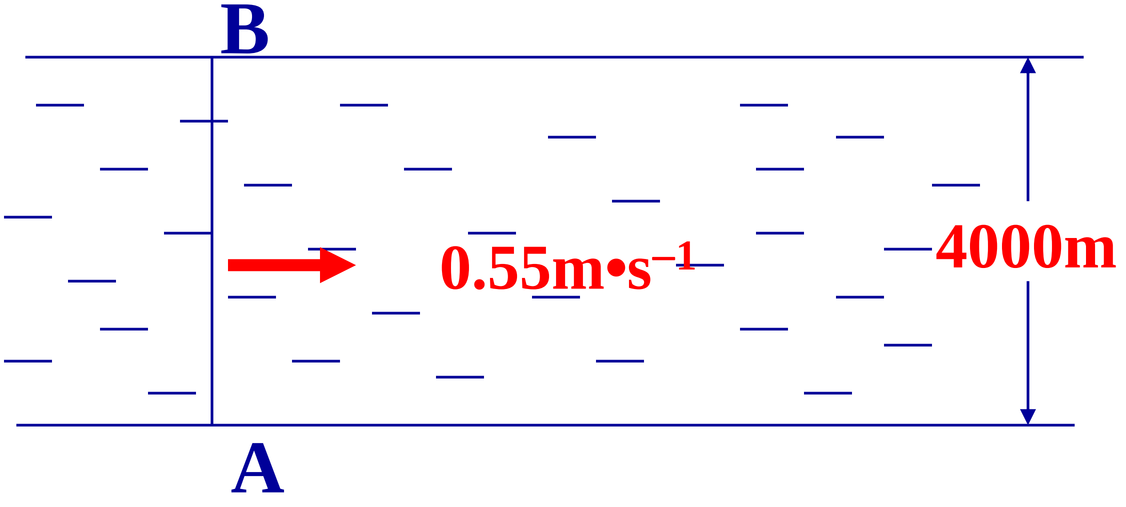


$$\cos\alpha=\left|\frac{v_{\mathrm{K'K}}}{v_{\mathrm{AK}}}\right|$$

$$=\frac{0.55}{1.1}=0.5$$

$$\alpha=\arccos 0.5$$

$$=60^{\circ}$$



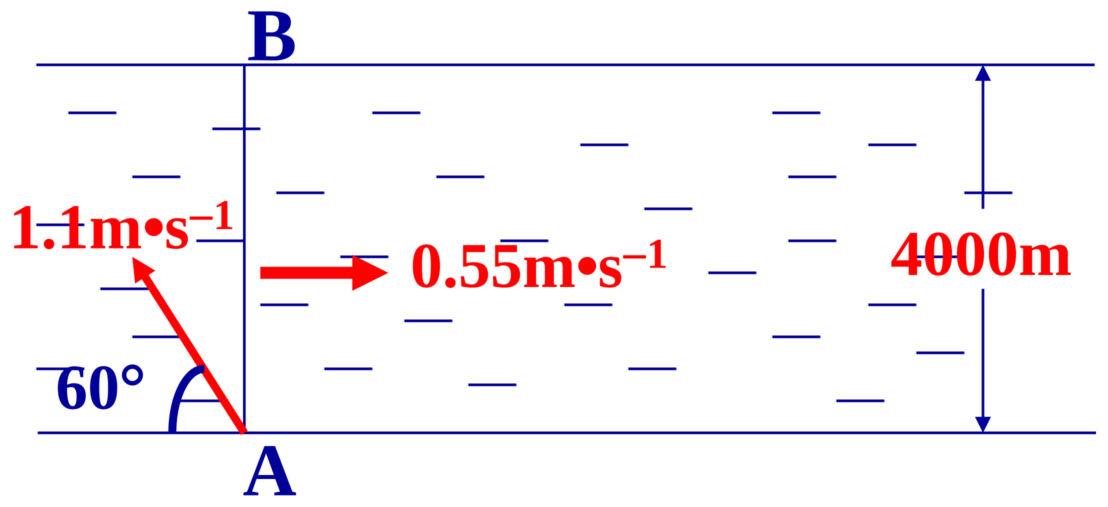
$$v_{AK} = v_{AK'} \sin 60^\circ = 1.1 \times \sqrt{3}/2 \approx 0.9526(\text{m/s})$$

需要时间：

$$t = 4000/0.9526$$

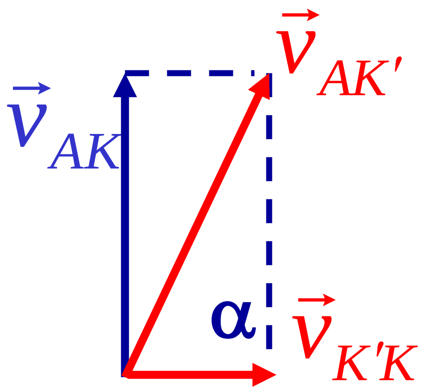
$$\approx 4199(\text{s})$$

$$\approx 70(\text{min})$$



（2） 分析（1）的速度合成图

需要的时间最短，v_{AK}在垂直于河岸的方向投影量最大，$\alpha=90°$ 。

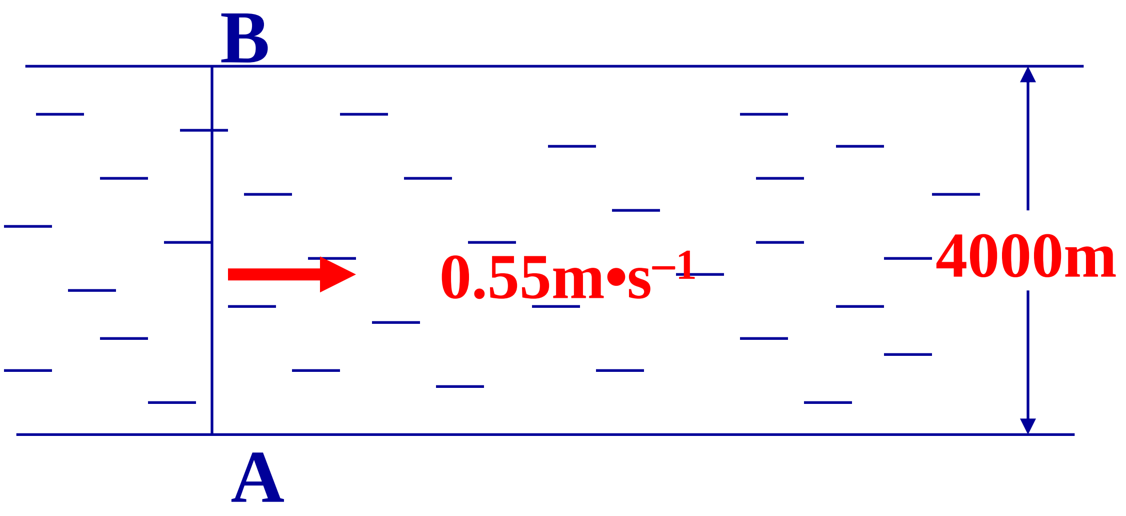


$$t = 4000 / v_{AK}$$

$$= 4000 / 1.1$$

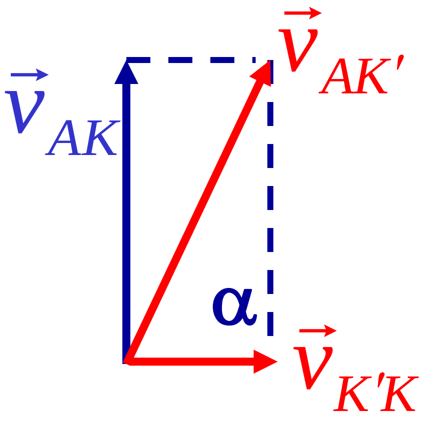
$$\approx 3636.36(\mathrm{s})$$

$$\approx 60.6(\mathrm{min})$$



根据相对运动速度关系

$$\vec{v}_{AK'} = \vec{v}_{AK'} + \vec{v}_{K'K}$$

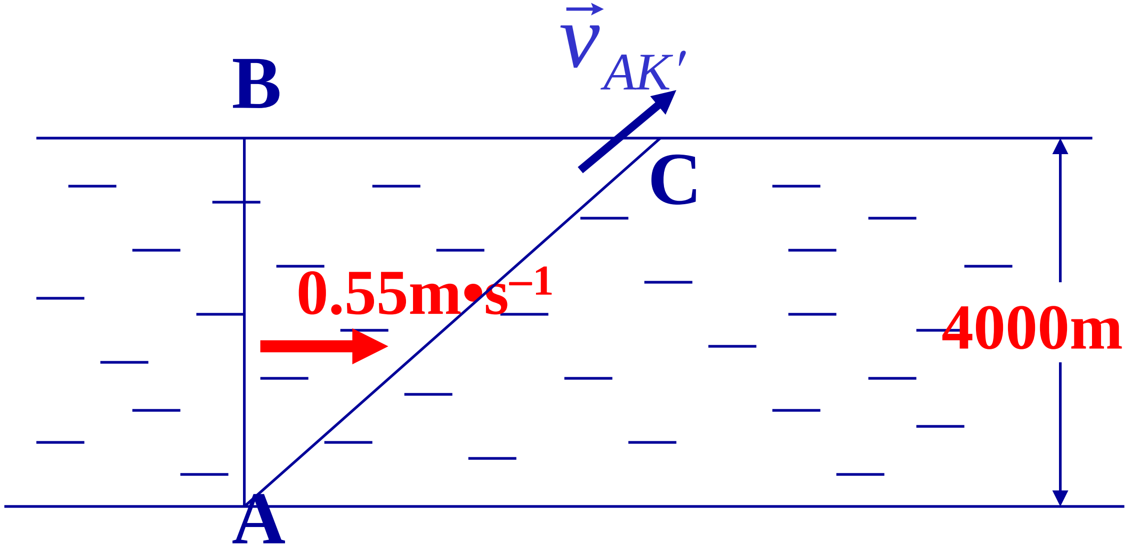


利用几何关系：

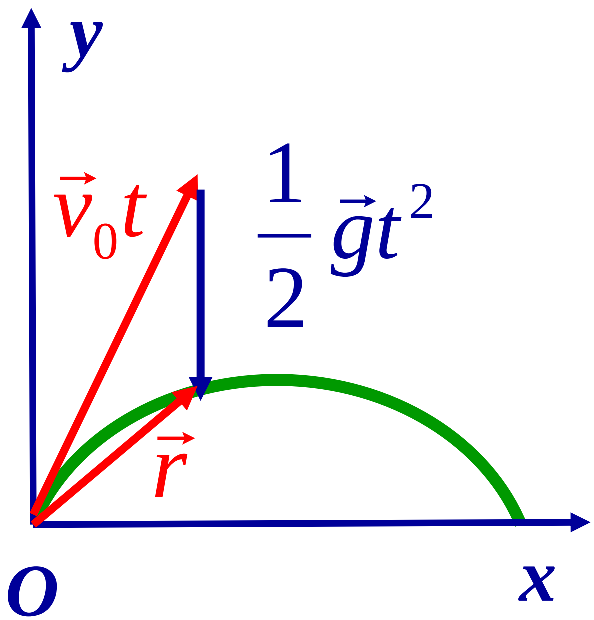
$$BC = \frac{v_{AK'}}{v_{AK}} AB$$

$$= \frac{0.55}{1.1} 4000$$

$$= 2000(\text{m})$$



运动的合成



猎人瞄准树上的猴子射击，猴子一见火光就跳下（自由下落），却不能避开子弹。因为子弹相对猴子做匀速直线运动。（当然，真枪不可能是这样设计的。）