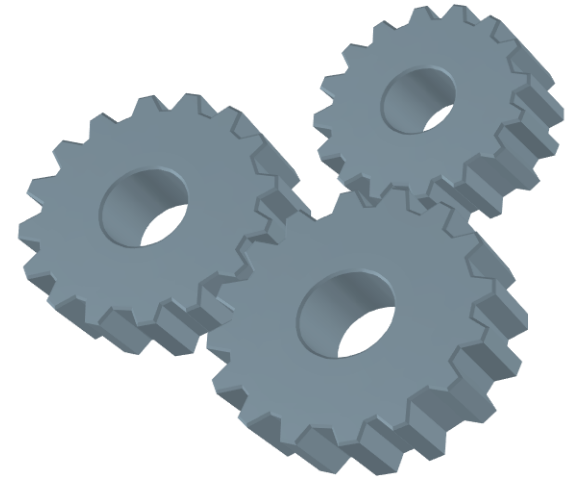
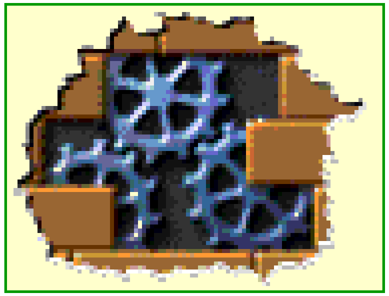
第五章



刚体力学基础 动量矩




1
2
3
4

§3-1 刚体模型及其运动

1. 刚体

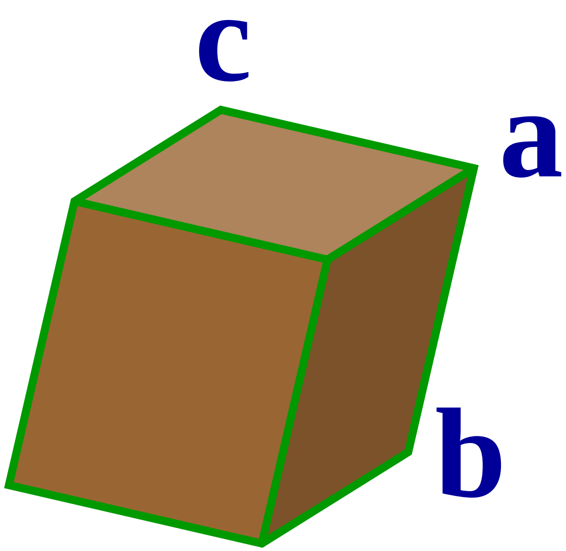
刚体是一种特殊的质点系统，无论它在多大外力作用下，系统内任意两质点间的距离始终保持不变。

2. 平动和转动

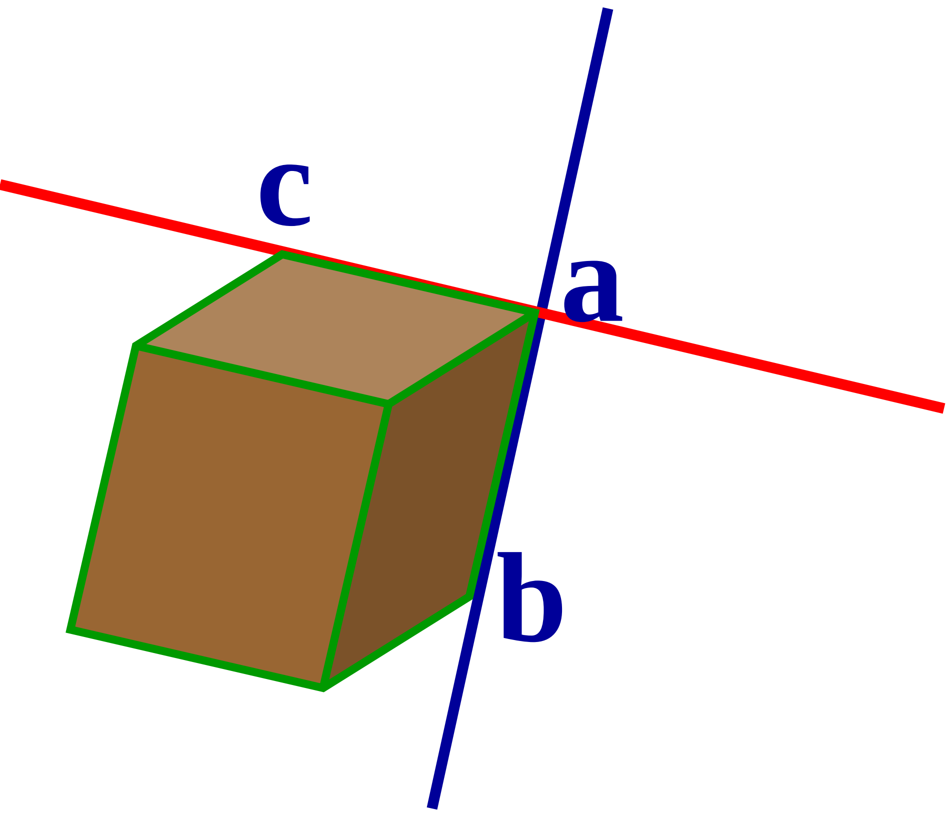
刚体最简单的运动形式是平动和转动。

当刚体运动时，如果刚体内任何一条给定的直线，在运动中始终保持方向不变，这种运动叫平动。

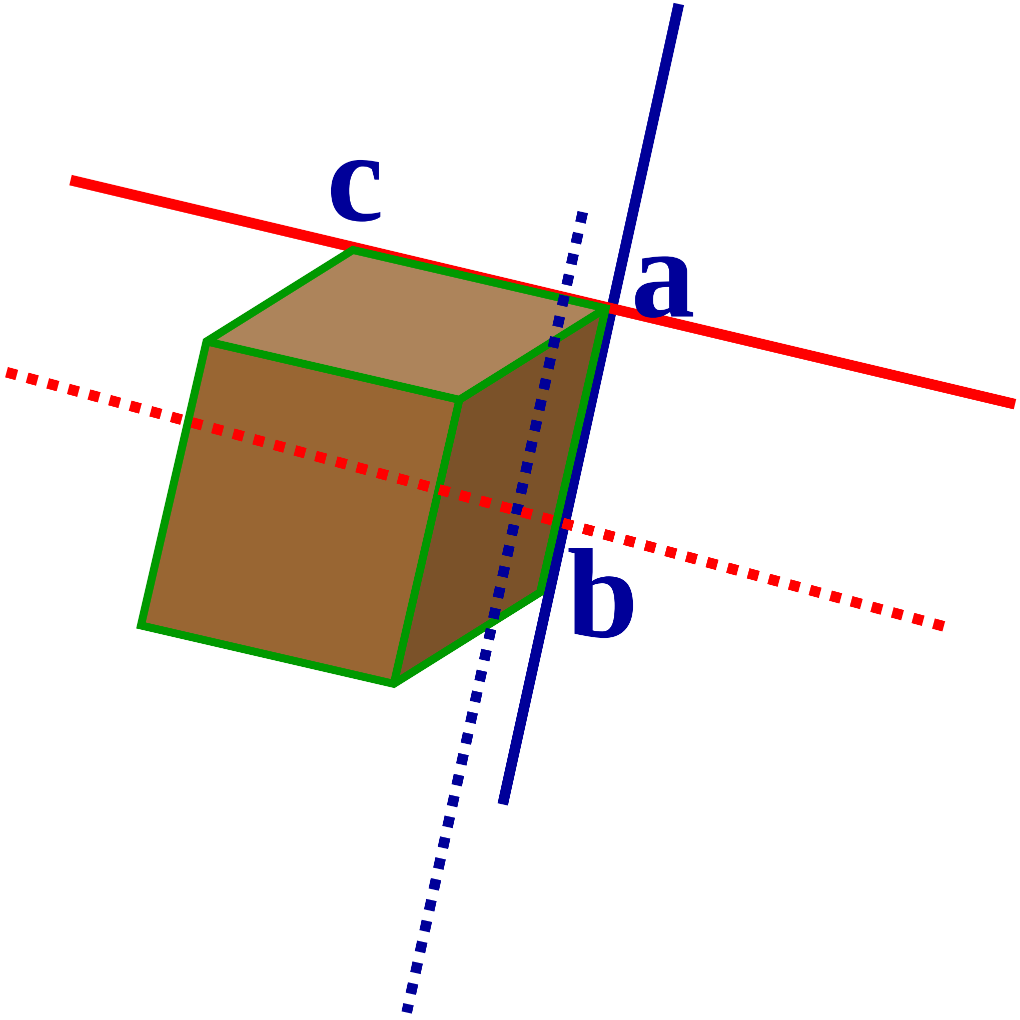
刚体的平动过程



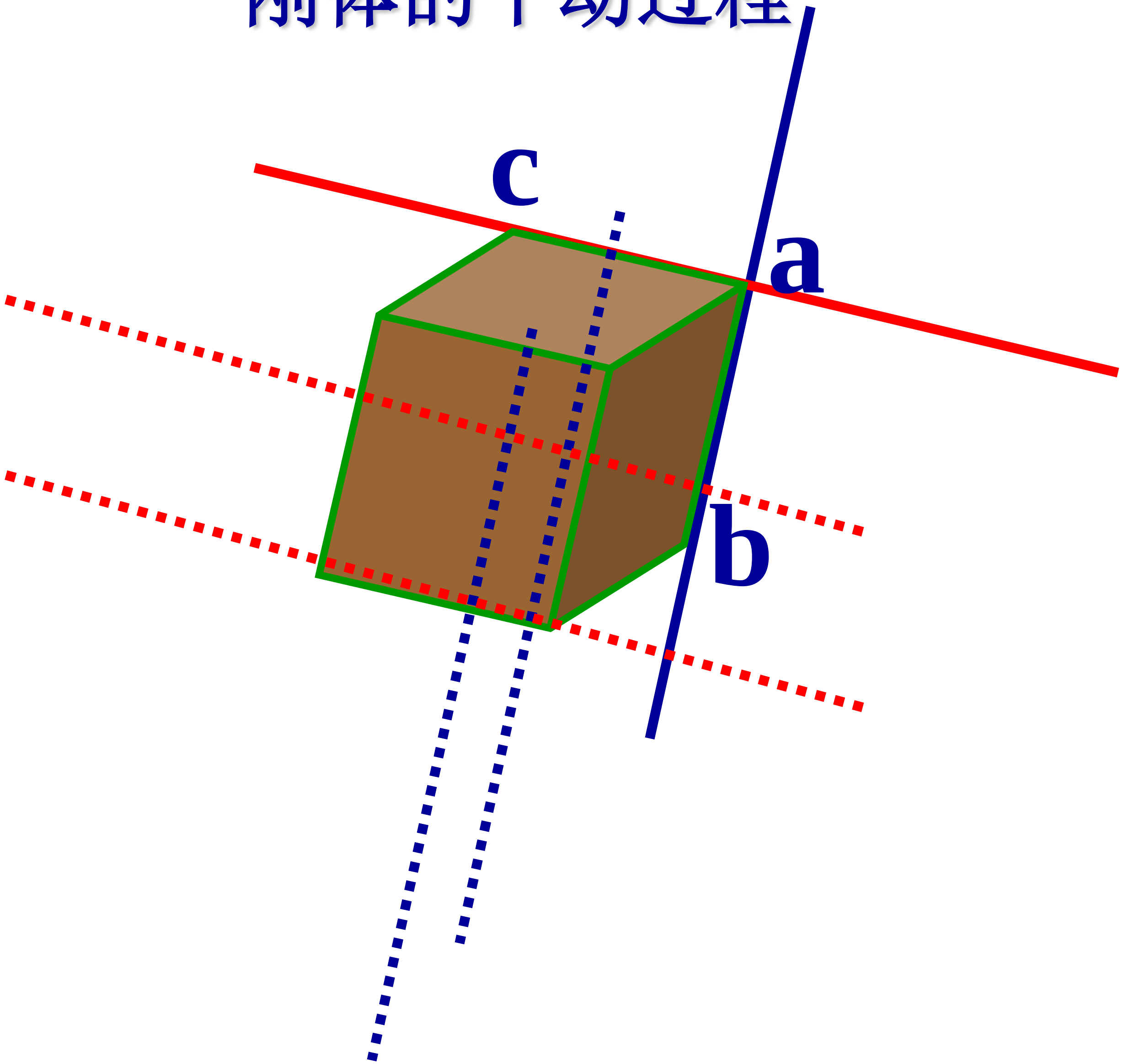
刚体的平动过程



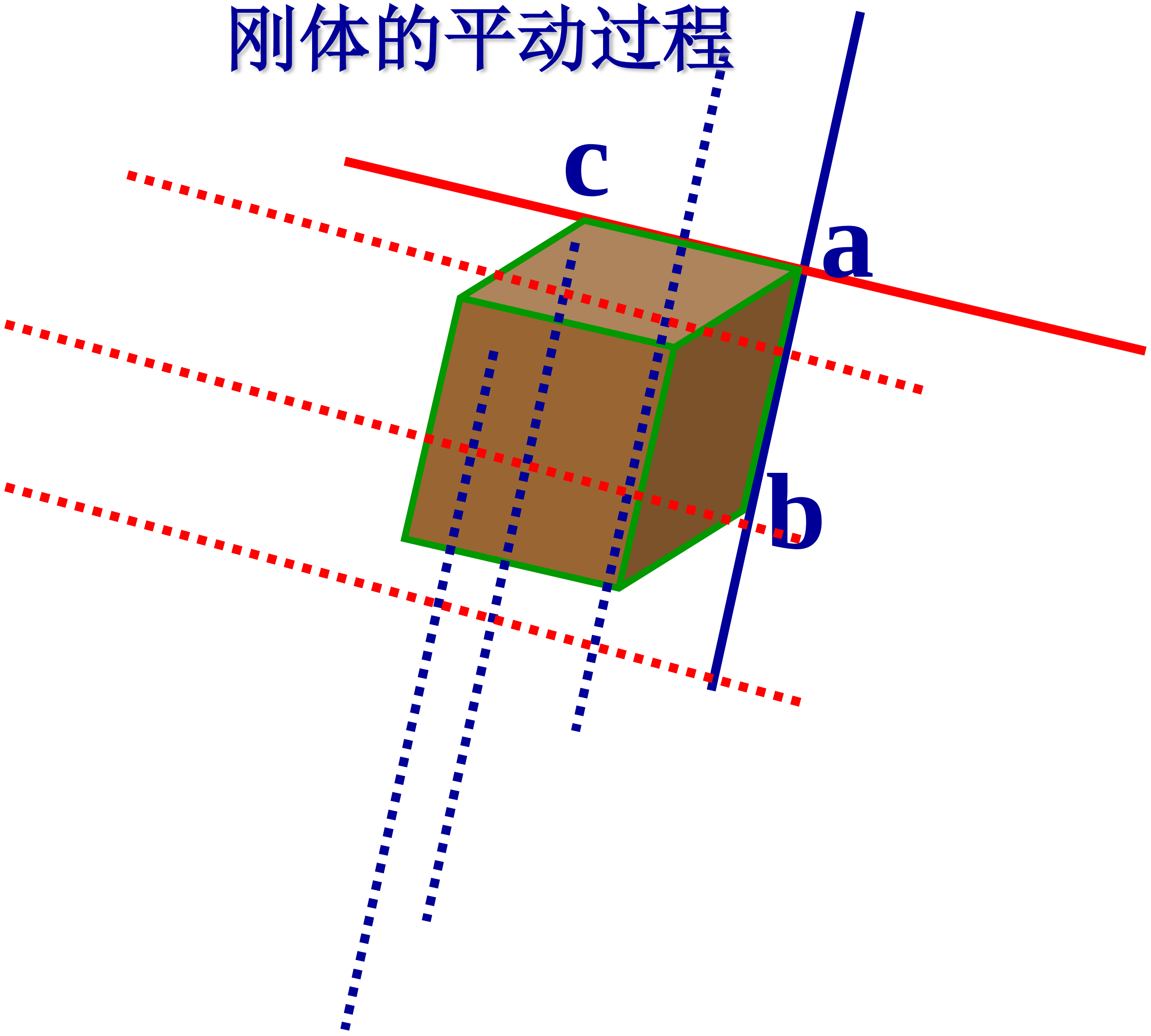
刚体的平动过程



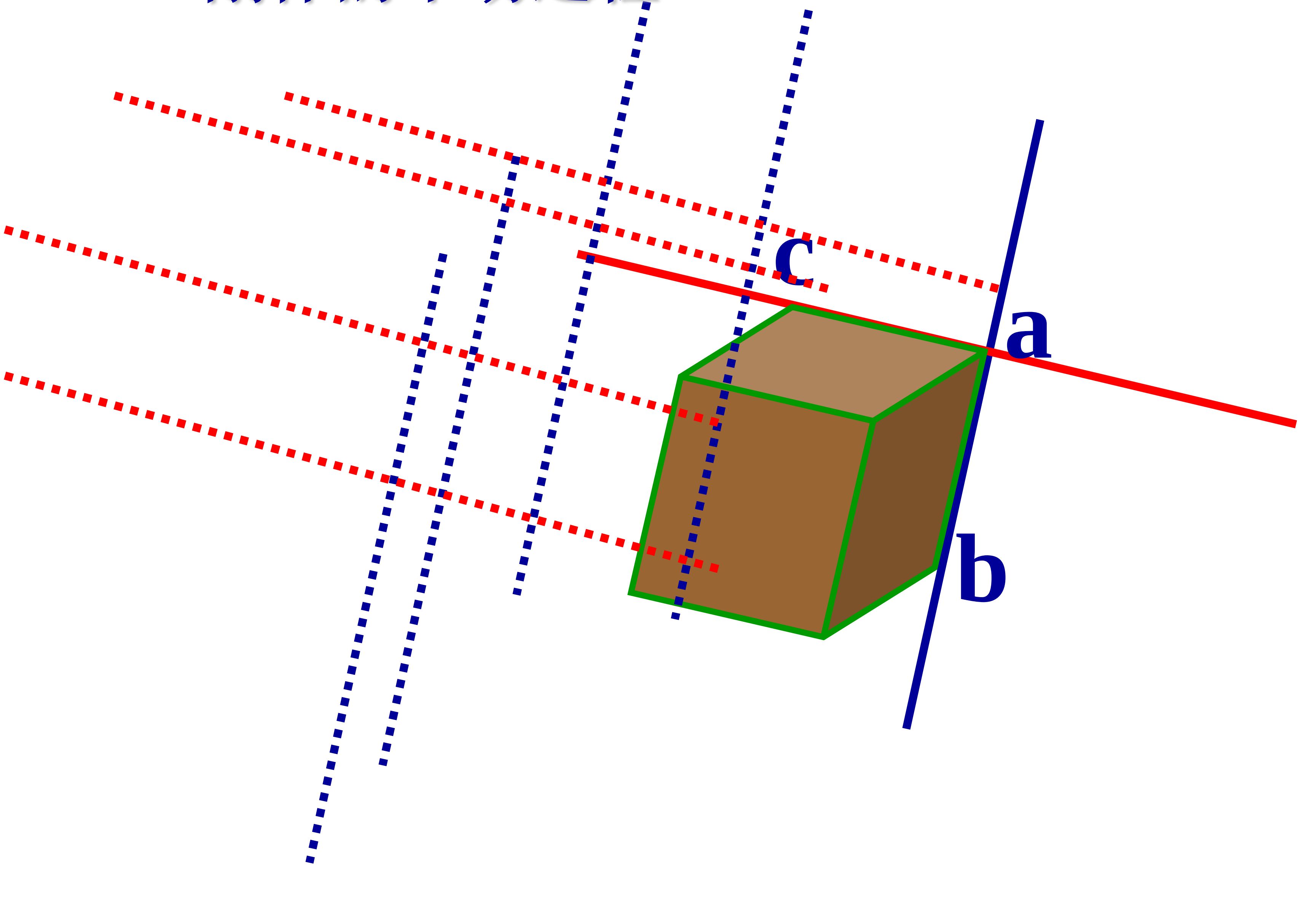
刚体的平动过程



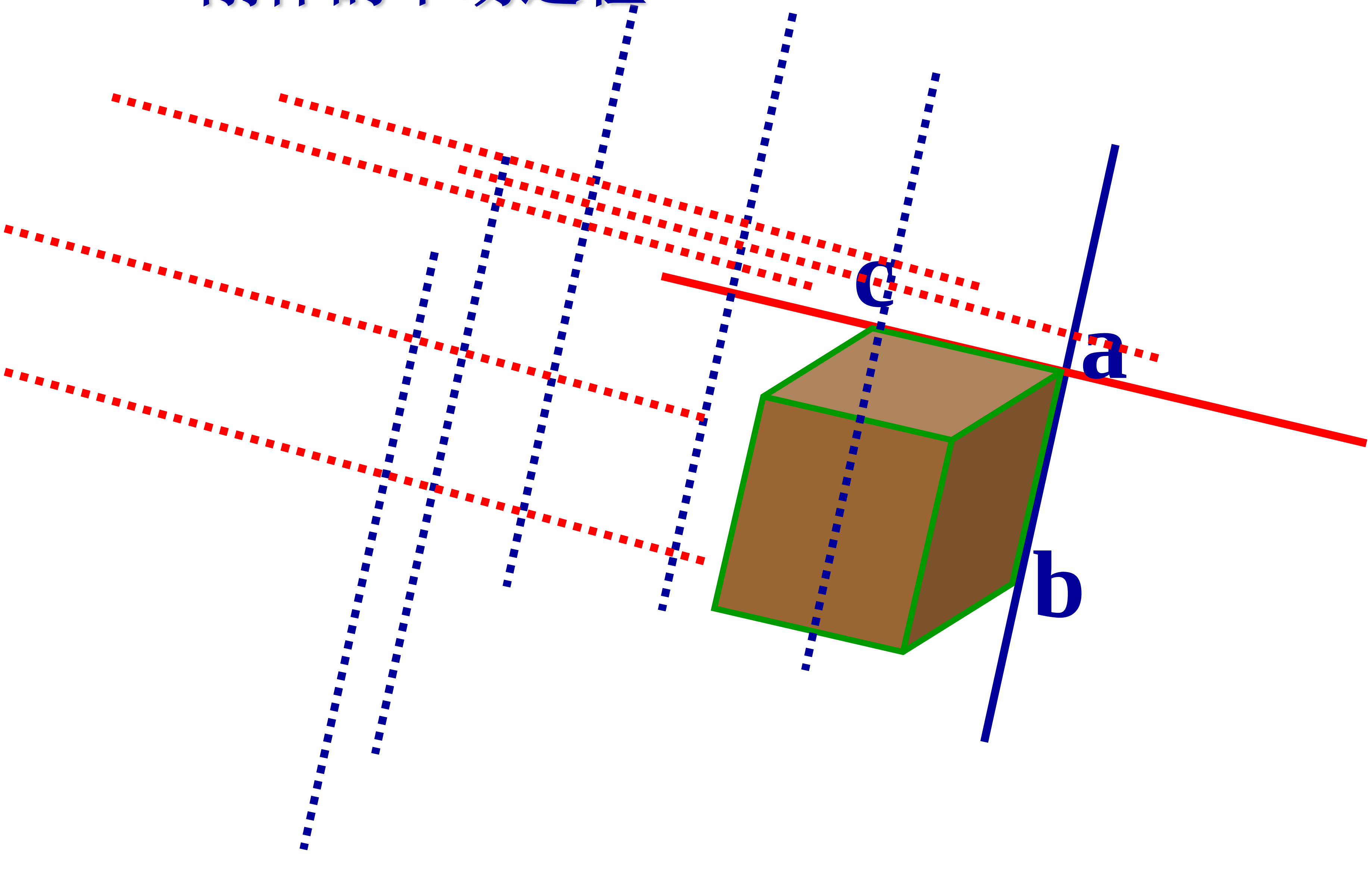
刚体的平动过程



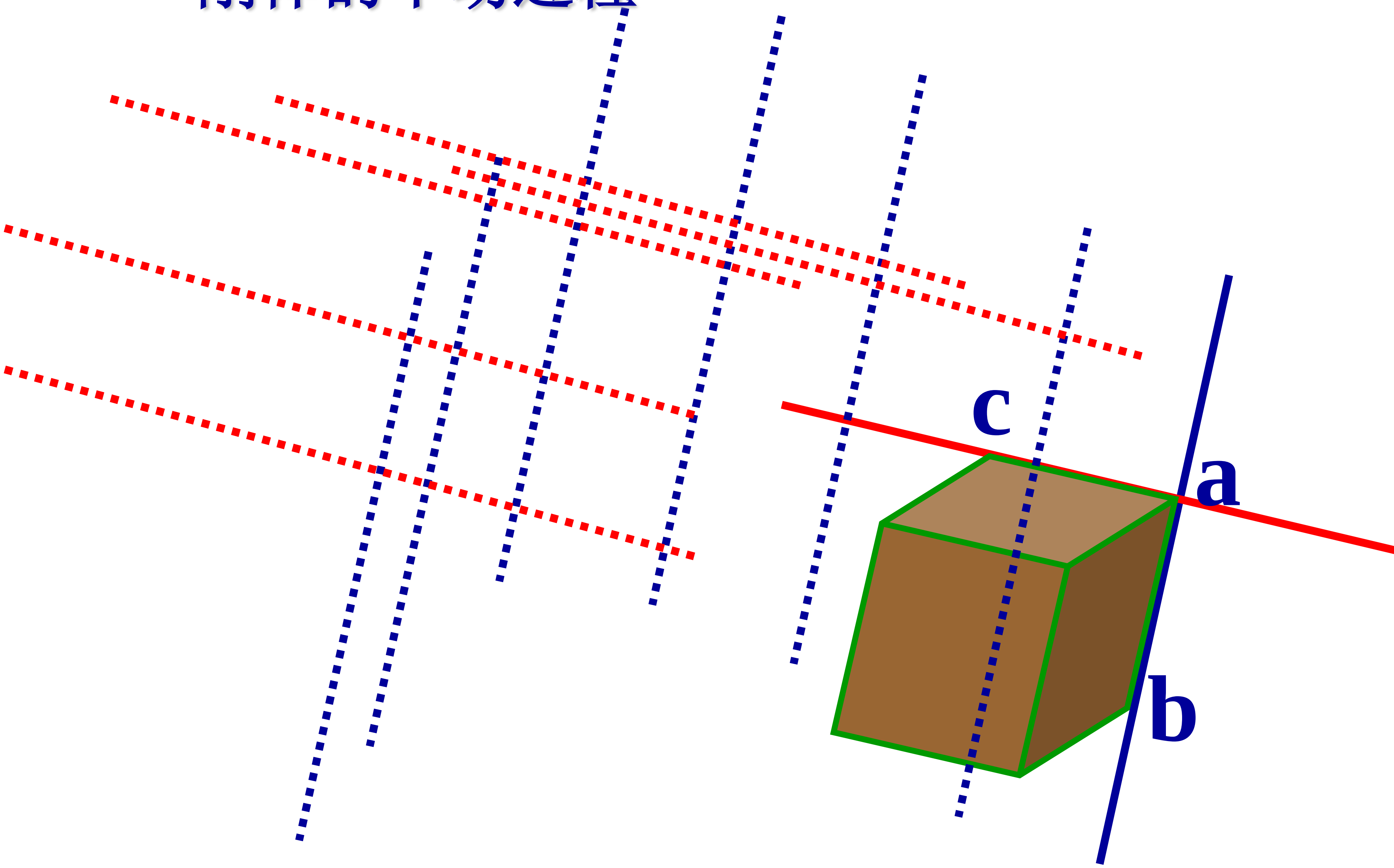
刚体的平动过程



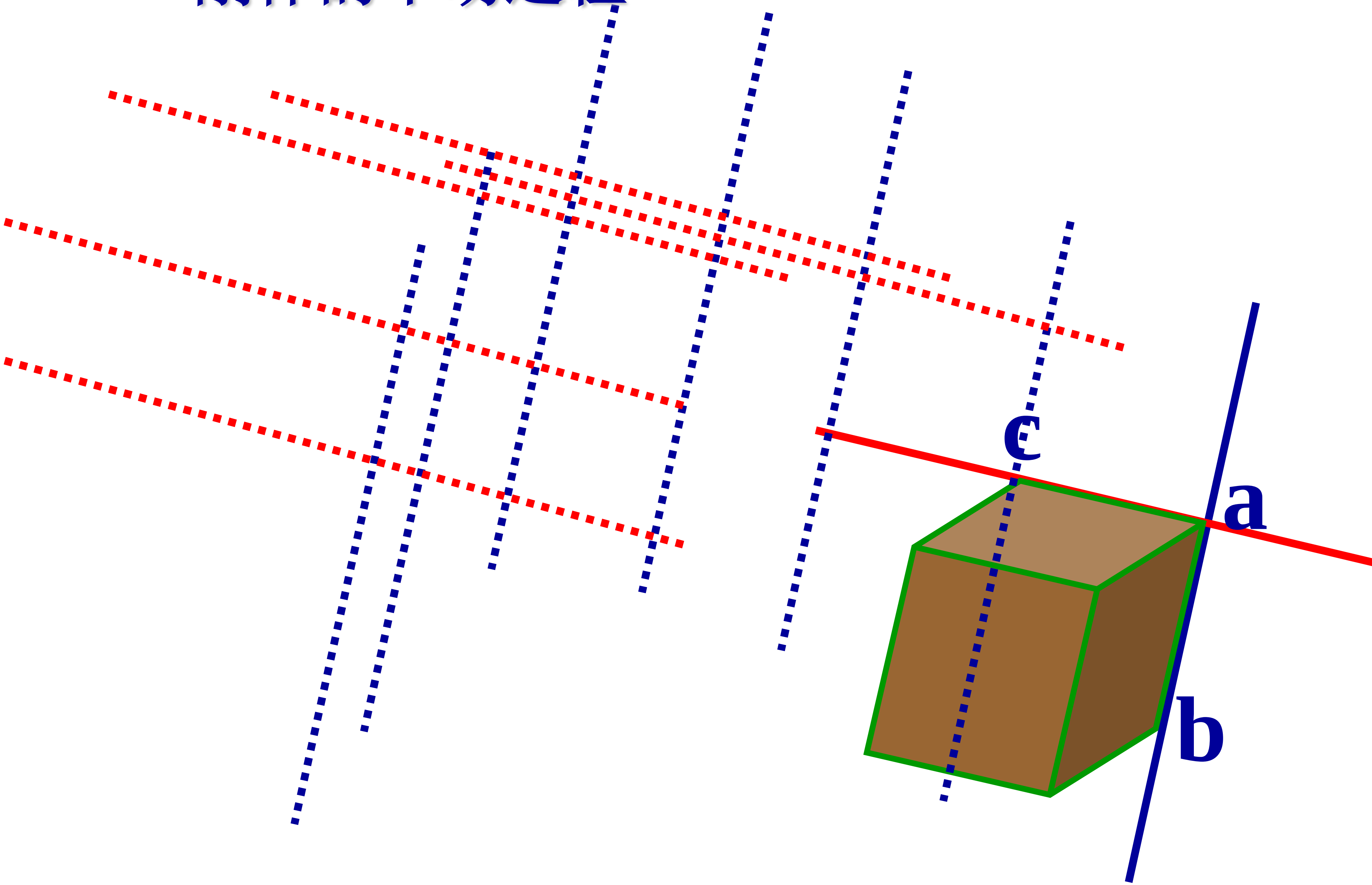
刚体的平动过程



刚体的平动过程



刚体的平动过程

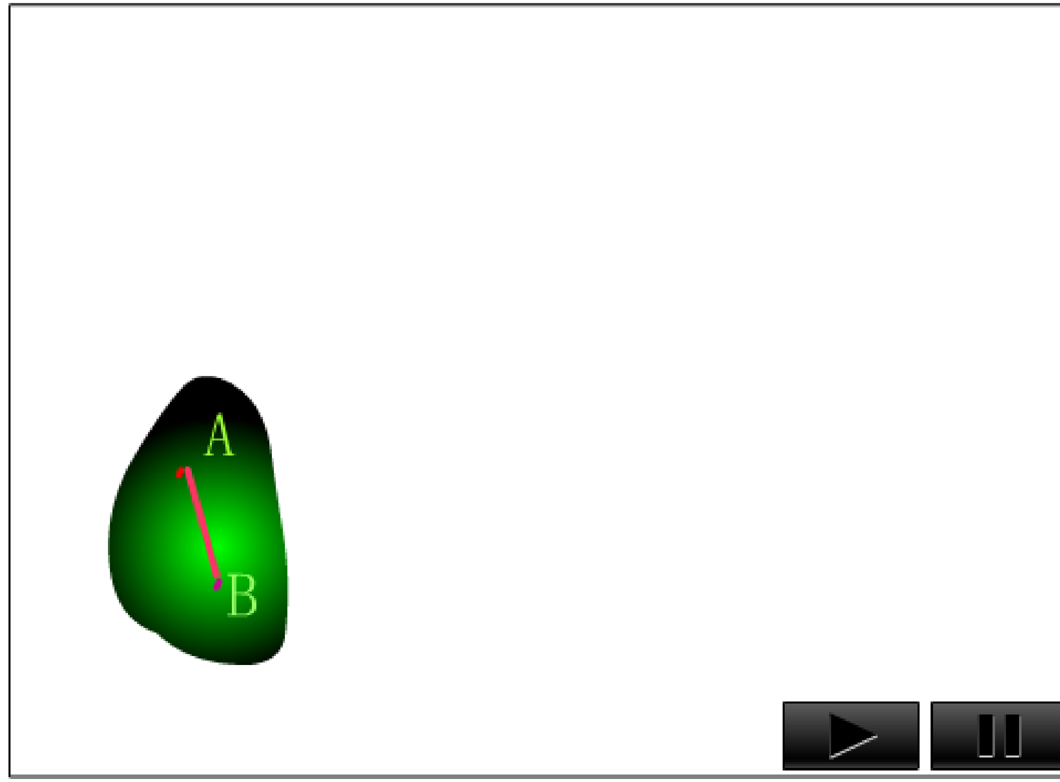


刚体在平动时，在任意一段时间内，刚体中所质点的位移都是相同的。而且在任何时刻，各个质点的速度和加速度也都是相同的。所以刚体内任何一个质点的运动，都可代表整个刚体的运动。

刚体运动时，如果刚体的各个质点在运动中都绕同一直线圆周运动，这种运动就叫做转动，这一直线就叫做转轴。

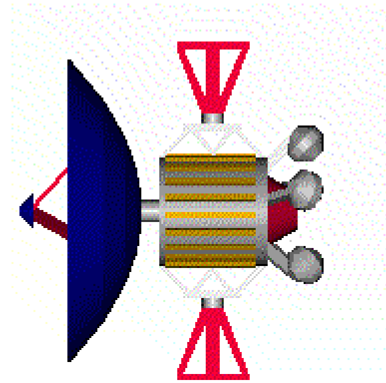
刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变）

平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线。

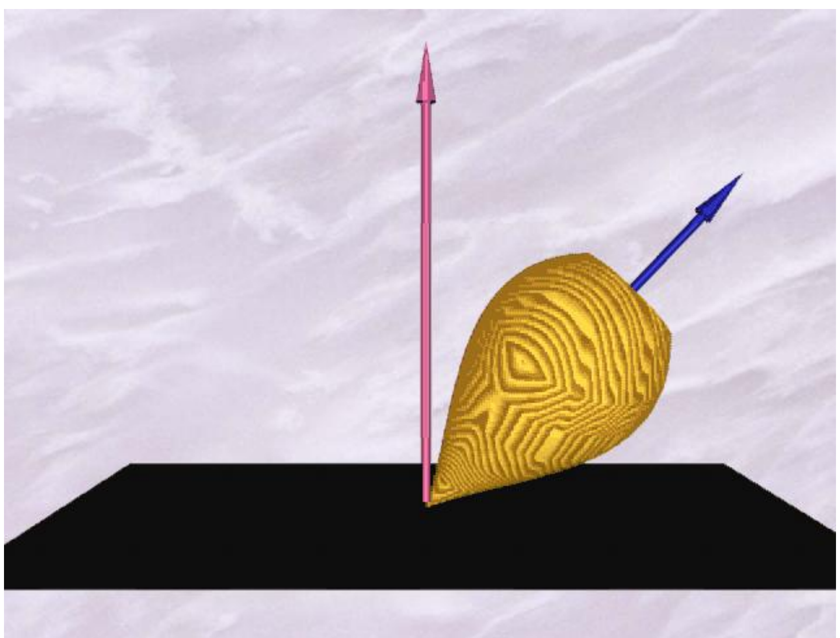


刚体平动 ⟶ 质点运动

➢ 转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动。转动又分定轴转动和非定轴转动 。

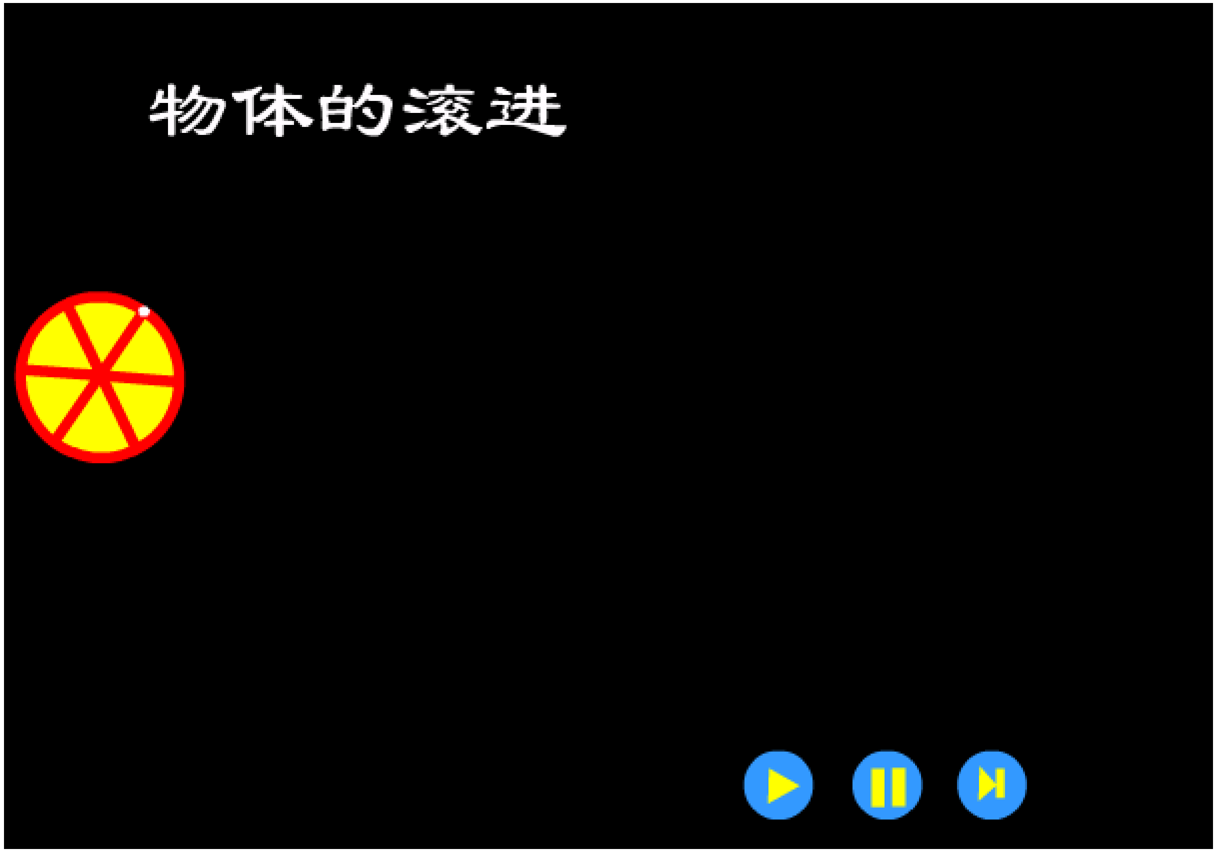


定轴转动



非定轴转动

➢ 刚体的平面运动。



➢ 刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动

事实上，刚体的一般运动可看作：

任一点的平动 + 绕该点的转动

为什么呢？

由于是刚体，确定好某一任意选定的点后，即可确定刚体相对于此点的位置。

将此点连同刚体视为一体，仍然是刚体

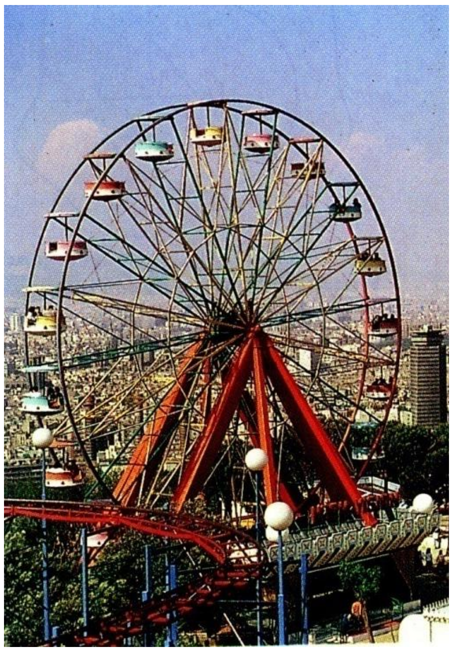
则在此点建立一个坐标系，该系的观察者将只能看到刚体的转动，此即刚体绕该点的转动

在别的参照系中，该点是运动的。因此，别的参照系的观察者将这样看待刚体的转动：该点的平动与绕该点的转动的合成！

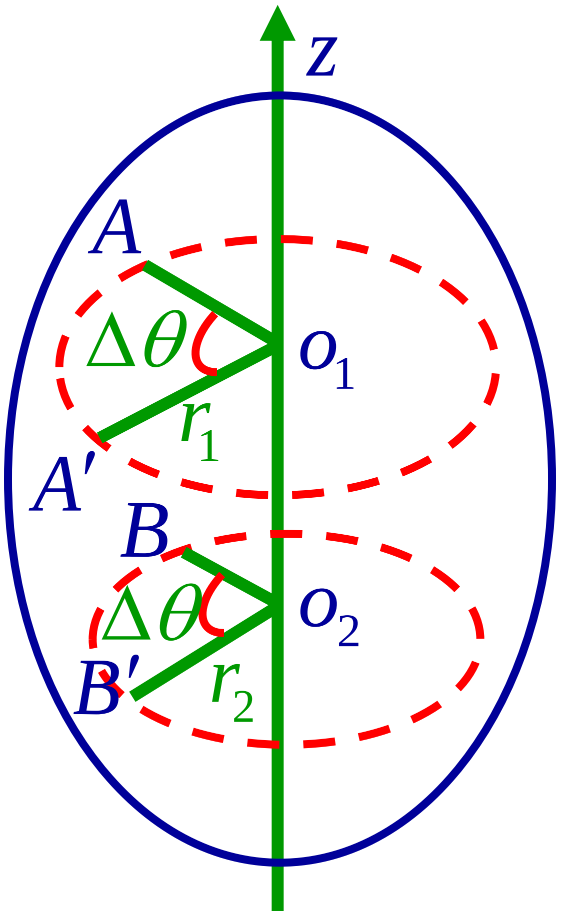
3．刚体的定轴转动

定轴转动：

刚体上各点都绕同一转轴作不同半径的圆周运动，且在相同时间内转过相同的角度。



刚体定轴转动特点：角位移，角速度和角加速度均相同；质点在垂直转轴的平面内作圆周运动。



刚体的定轴转动

角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

$$v = r\omega$$

$$a_n = r\omega^2 \qquad a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

刚体绕定轴的匀速和匀变速转动

刚体绕定轴转动时，若ω，α 都为常数，刚体绕定轴做匀速转动，此时α只能为**0**。

若只有α为常数，刚体绕定轴做匀变速转动。

匀速转动 $\theta = \theta_0 + \omega t$

匀变速转动 $$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha\ t \\ \theta - \theta_0 = \omega_0\ t + \dfrac{1}{2}\alpha\ t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

角速度矢量

角速度的方向：与刚体转动方向呈右手螺旋关系。

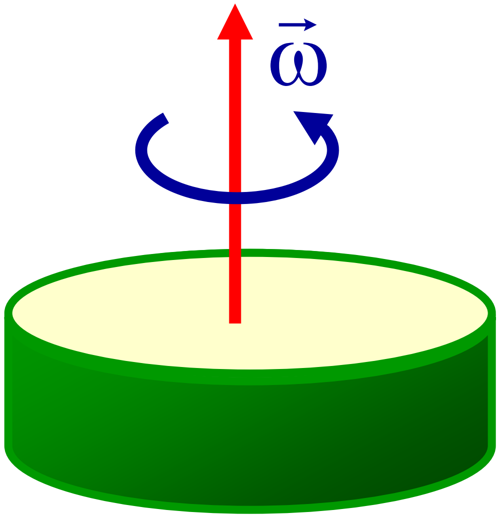
在定轴转动中，角速度的方向沿转轴方向。

逆时针转动，$\theta > 0$，ω沿转轴向上，$\omega > 0$。

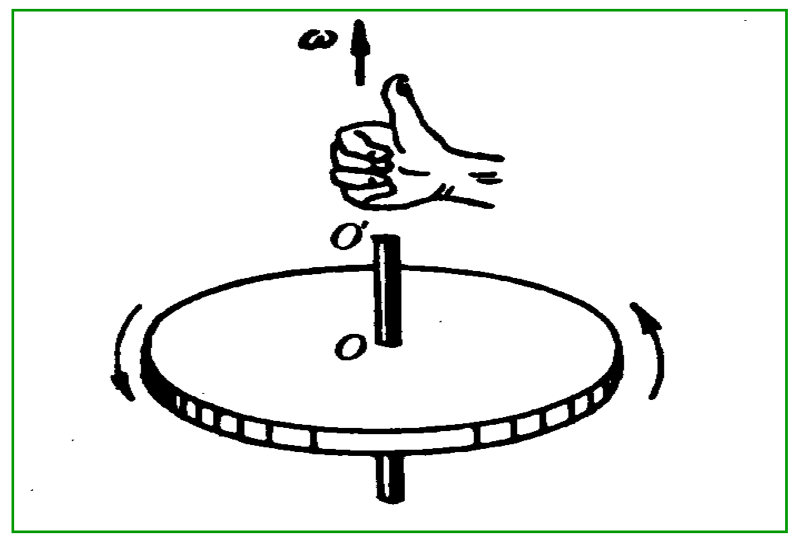
顺时针转动，$\theta < 0$，ω沿转轴向下，$\omega < 0$。

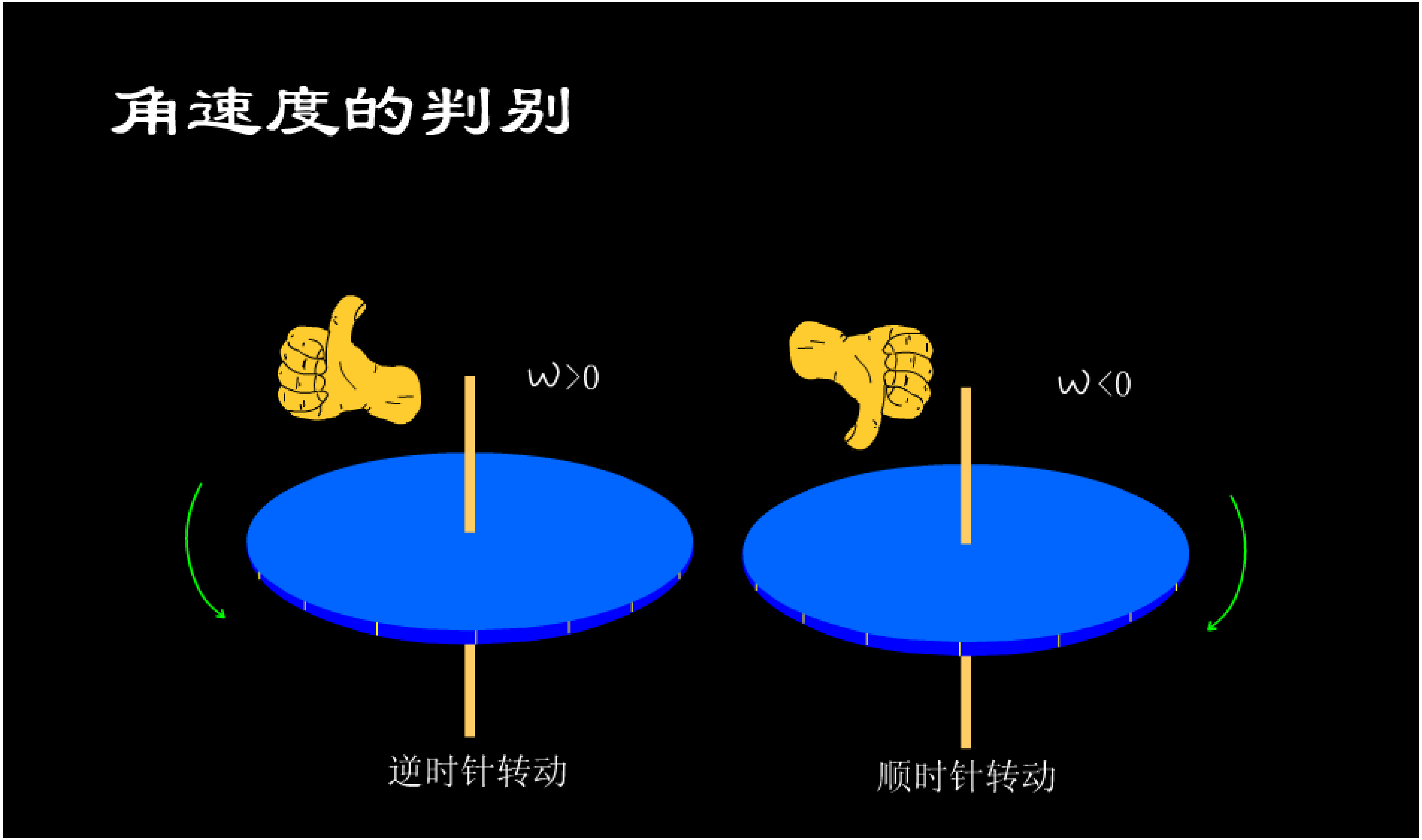
任一点速度

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},\ v = \omega r$$



角速度矢量





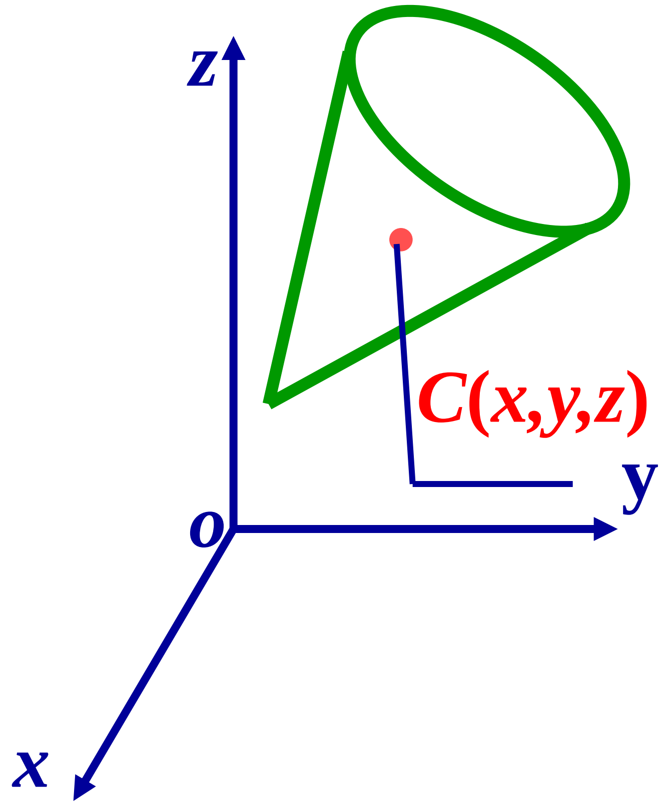
角速度矢量

自由度

决定这个系统在空间的位置所需要的独立坐标的数目。

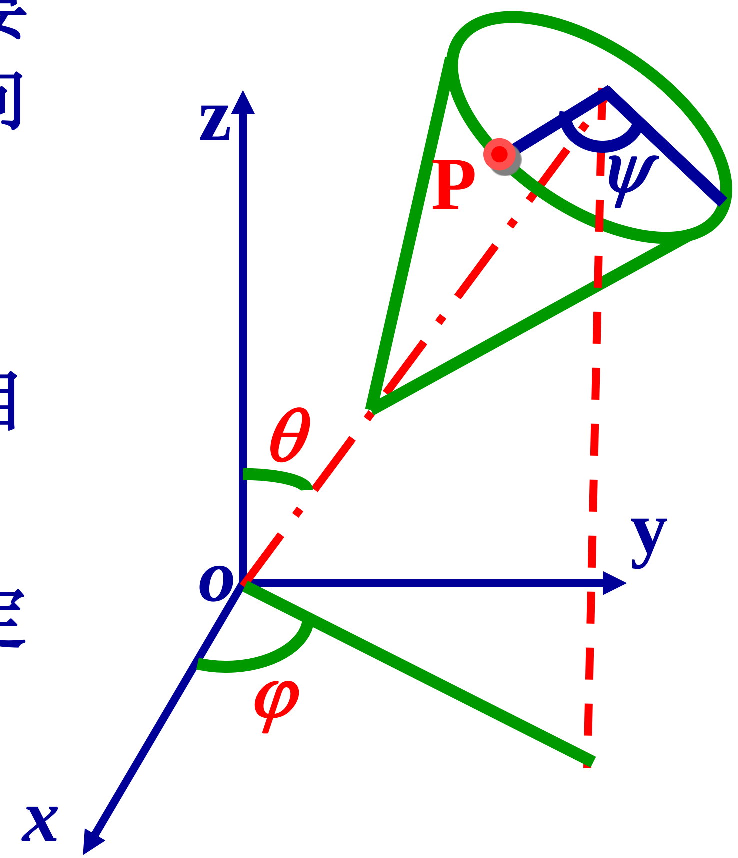
刚体既有平动又有转动，其独立坐标数由质心坐标，转轴的方位角与刚体绕转轴的转动角度决定。

首先确定质心位置。空间任何一个点需要三个独立坐标来确定位置，用三个坐标如$C(x,y,z)$来决定质心位置。



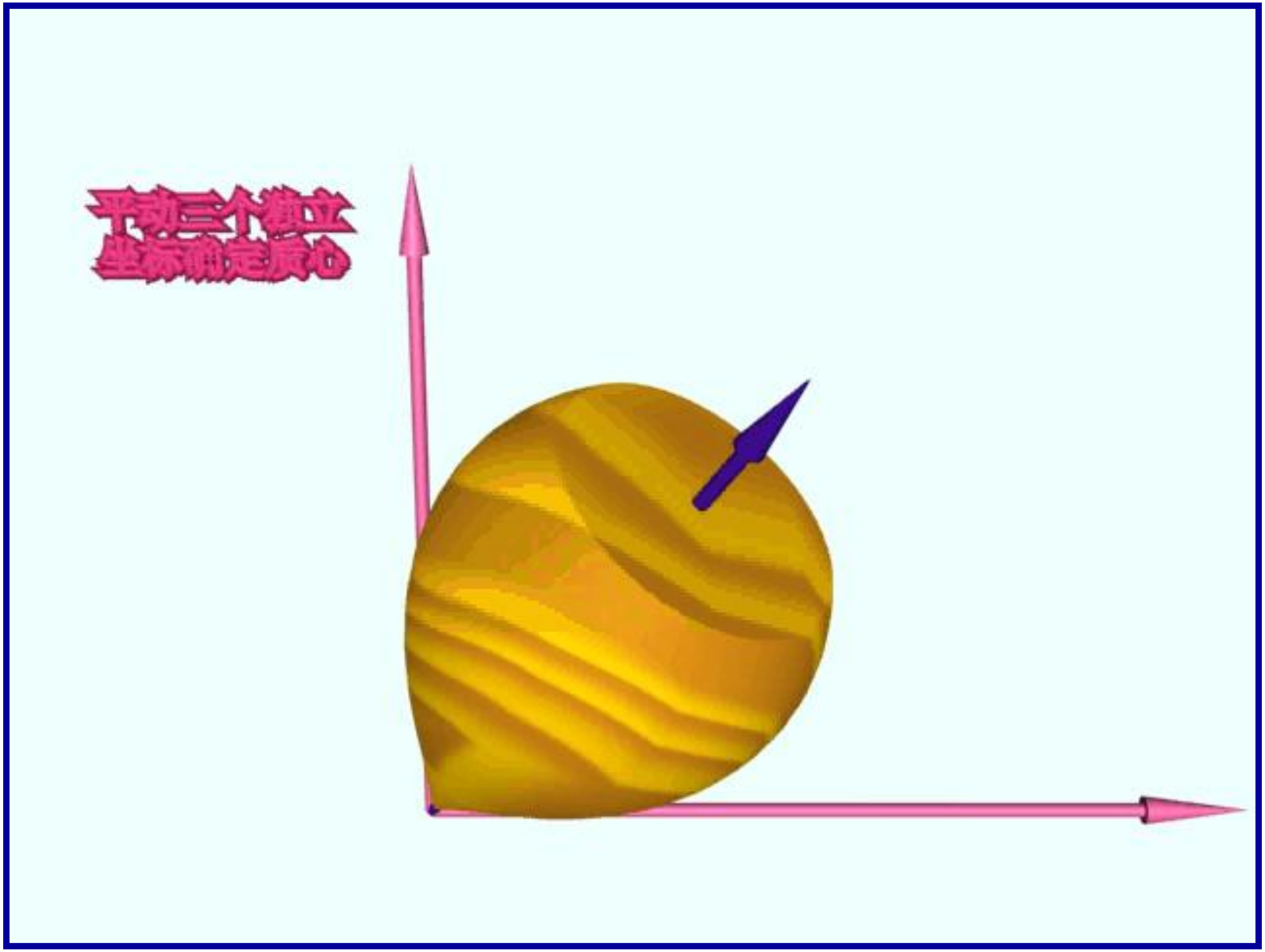
其次刚体的方位由其轴的取向决定，确定空间直线的方位坐标有两个，借用纬度角与经度角来描述，在直角坐标系中，采用用θ、φ，如图所示：

最后，刚体绕定轴转动时，需要一个坐标来描述，选定参考方向后，转动位置用ψ表示。



总的说来，刚体共有6个自由度，其中3个平动自由度，3个转动自由度。

物体有几个自由度，它的运动定律可归结为几个独立的方程。


平动三个独立
坐标确定质心

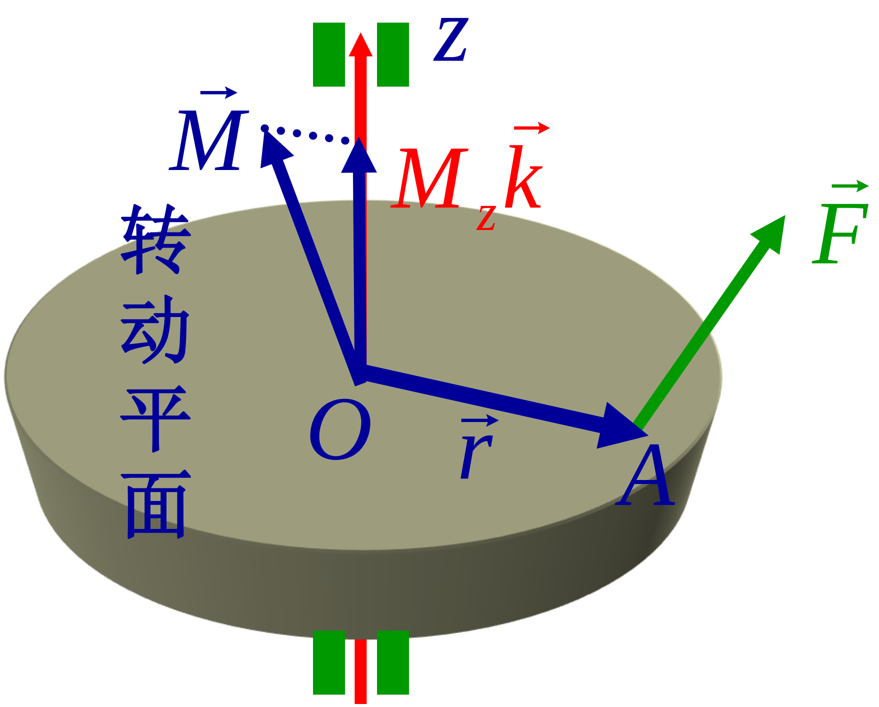
§ 5-2 力矩 刚体绕定轴转动微分方程

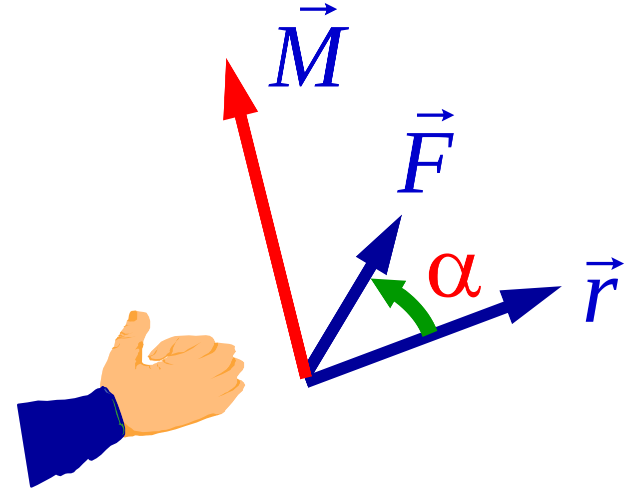
1. 力矩

$\vec{F}$ 对**O** 点的力矩：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF\sin\alpha$$





$\vec{M}$沿z轴分量为$\vec{F}$ 对z轴力矩M_z

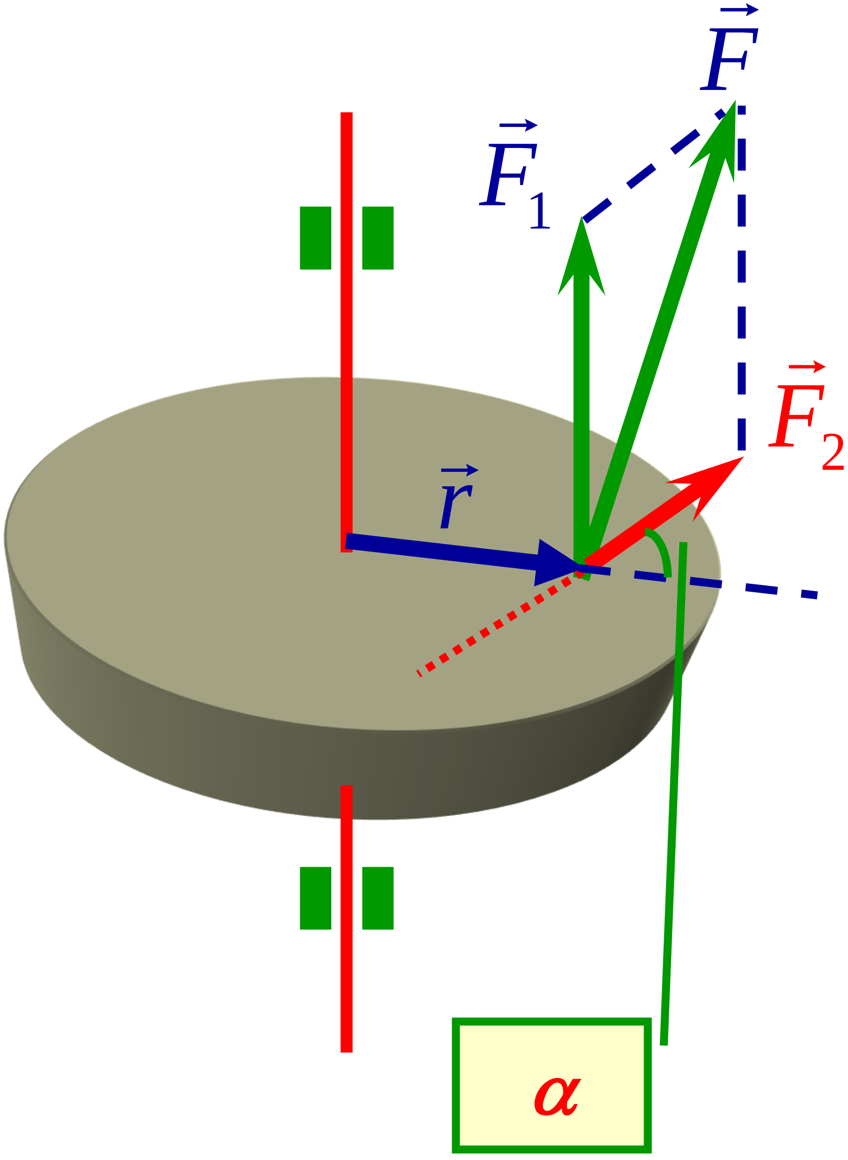
力不在转动平面内

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2$$

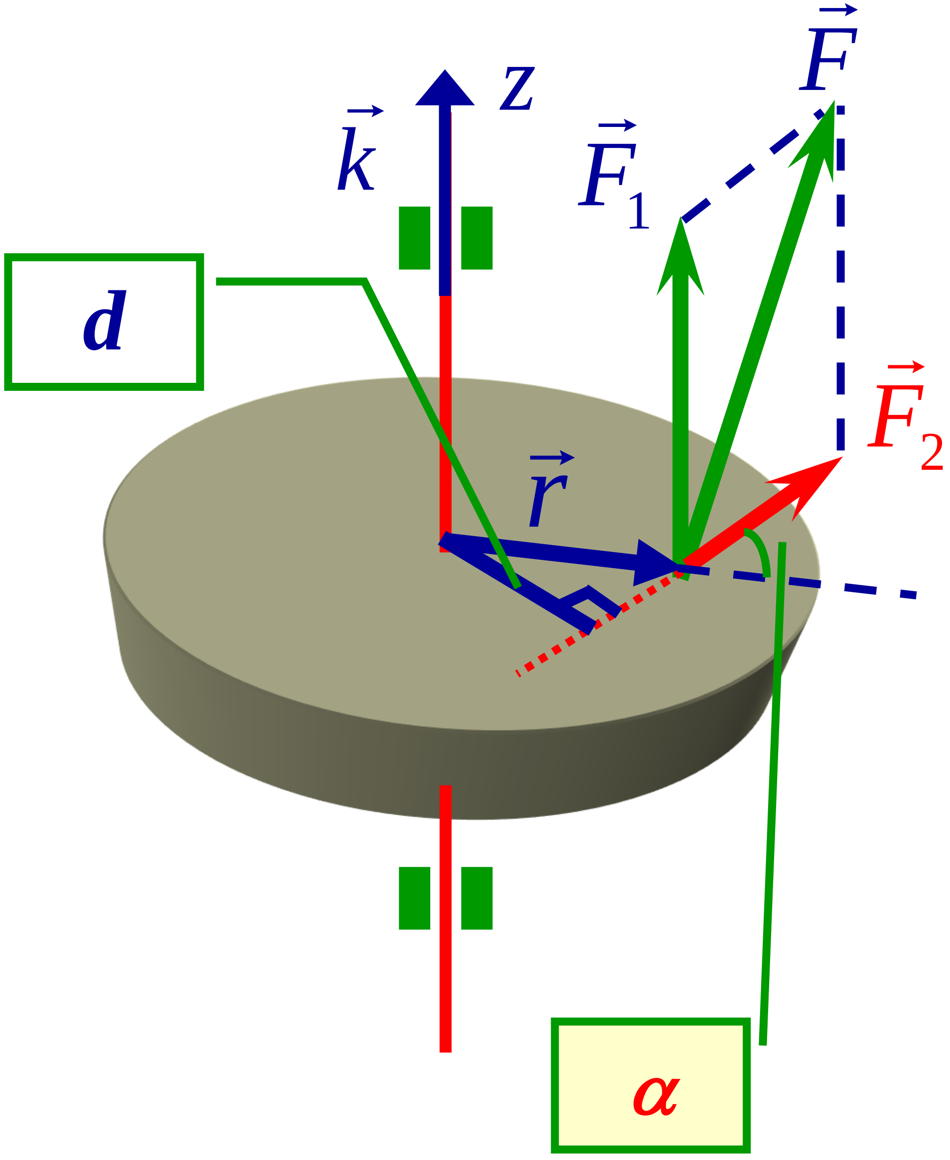
$\vec{r}\times\vec{F}_1$只能引起轴的变形，对转动无贡献。



注（1）在定轴动问题中，如不加说明，所指的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

第五次： 第五章：5、7、10、11

$$\vec{r} \times \vec{F}_2 = dF_2\vec{k}$$

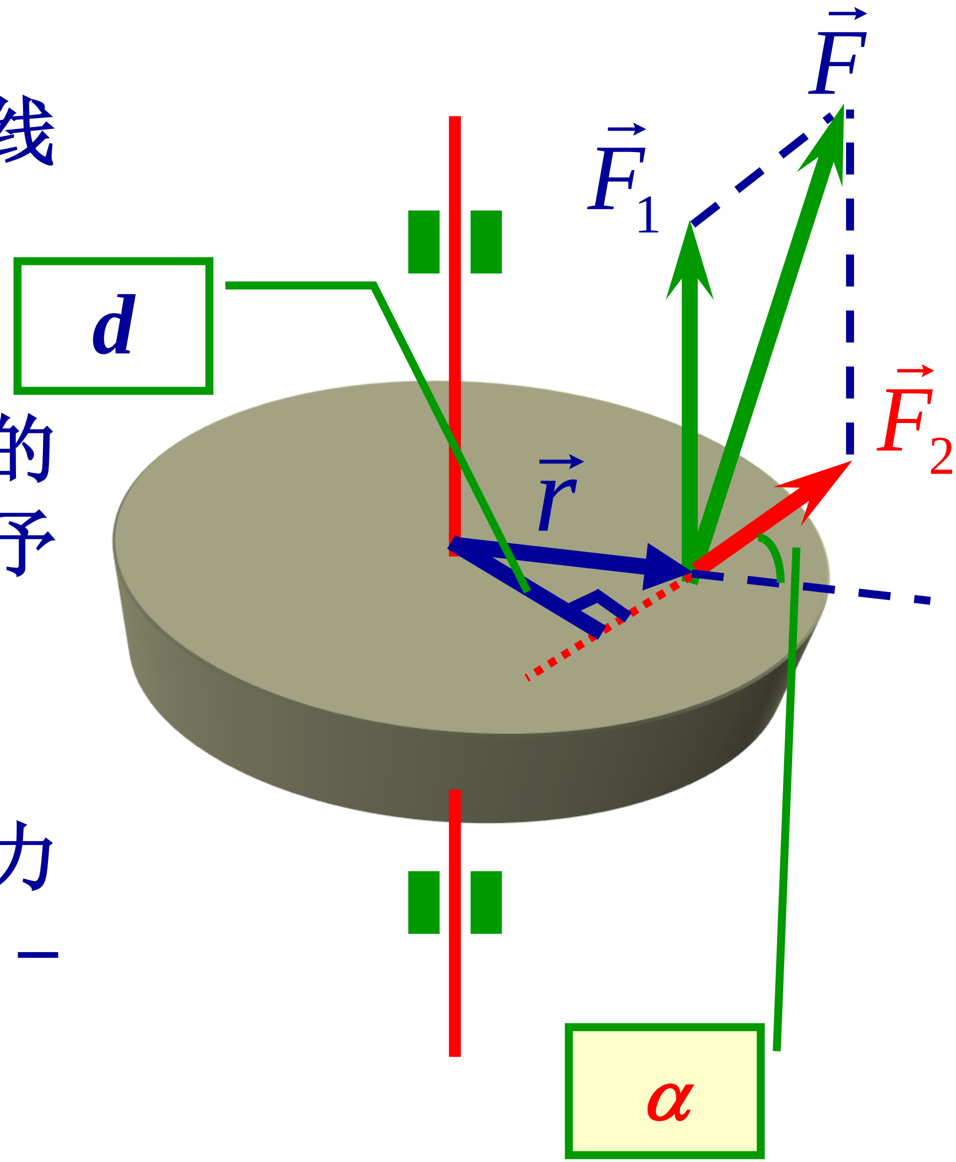


（2） $M_z = rF_2\sin\alpha = rF_2 d$

$d = r\sin\alpha$是转轴到力作用线的距离，称为力臂。

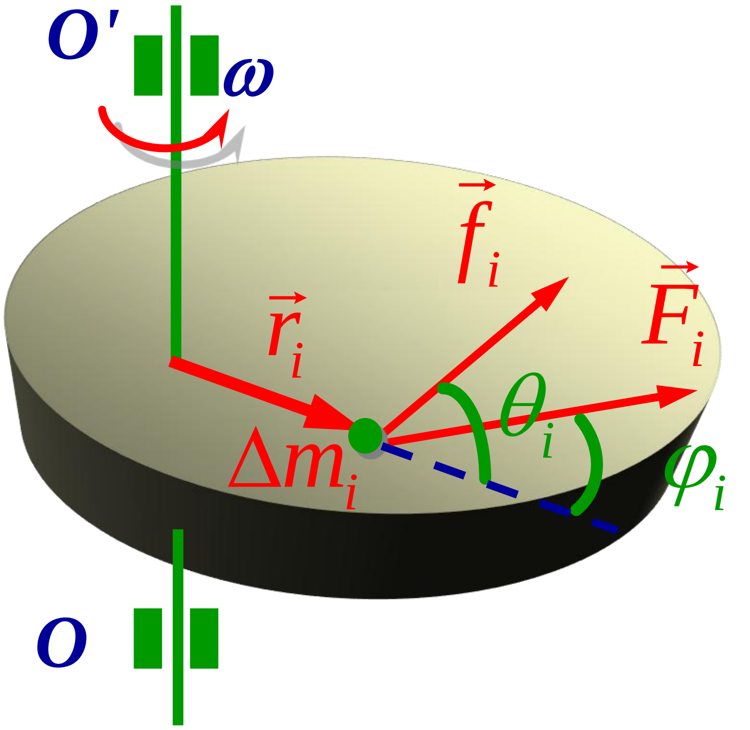
（3）$\vec{F}_1$的作用被固定转轴的力抵消，在定轴转动中不予考虑。

（4）在转轴方向确定后，力对转轴的力矩方向可用+、−号表示。



2. 刚体绕定轴转动微分方程

对刚体中任一质量元$\Delta \boldsymbol{m_i}$



$\vec{F}_i$ –外力

$\vec{f}_i$ –内力

应用牛顿第二定律，可得：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

采用自然坐标系，上式切向分量式为：

$$F_i \sin\varphi_i + f_i \sin\theta_i = \Delta m_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i \alpha$$

$$F_i \sin\varphi_i + f_i \sin\theta_i = \Delta m_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i \alpha$$

用 r_i 乘以上式左右两端：

$$F_i r_i \sin\varphi_i + f_i r_i \sin\theta_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

设刚体由 N 个点构成，对每个质点可写出上述类似方程，将 N 个方程左右相加，得：

$$\sum_{i=1}^{N} F_i r_i \sin\varphi_i + \sum_{i=1}^{N} f_i r_i \sin\theta_i = \sum_{i=1}^{N} (\Delta m_i r_i^2)\alpha$$

根据内力性质(每一对内力等值、反向、共线,对同一轴力矩之代数和为零)，得：

$$\sum_{i=1}^{N} f_i r_i \sin\theta_i = 0$$

得到：$\sum_{i=1}^{N} F_i r_i \sin \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} (\Delta m_i r_i^2)\alpha$

上式左端为刚体所受外力对z轴的合外力矩，以M_z 表示；右端求和符号内的量是刚体对z轴的转动惯量J 。于是

刚体定轴
转动定律

$$M_z = J\alpha = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

讨论：

$$M_z = J\alpha = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

（1） M_z 一定，$J\uparrow \rightarrow \alpha\downarrow$，转动惯量是转动惯性大小的量度；

（2）M 的符号：使刚体向规定的转动正方向加速的力矩为正；

（3）J 和质量分布有关；

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

（4）J 和转轴有关，同一个物体对不同转轴的转动惯量不同。

3．转动惯量

按转动惯量的定义有

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

刚体的质量可认为是连续分布的，所以上式可写成积分形式

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

d*m*—质元的质量

r—质元到转轴的距离

与线量类比

平动：平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$

线动量 mv

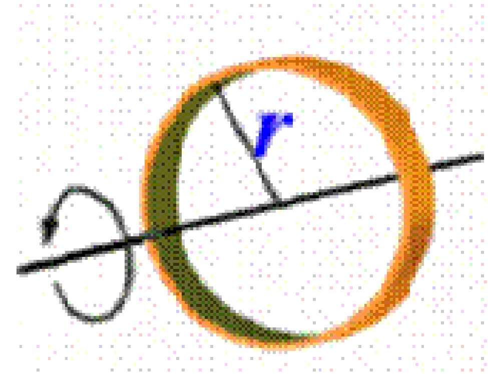
转动：转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$

角动量 $J\omega$

质量是平动中惯性大小的量度。

转动惯量是转动中惯性大小的量度。

$$J=\sum r_i^2 \Delta m_i$$

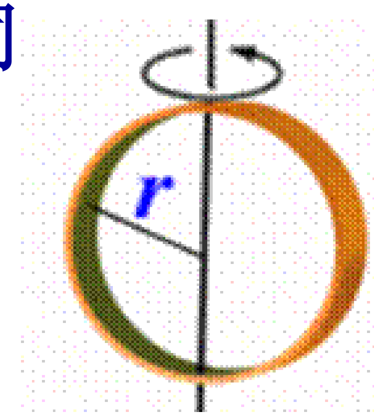


（1）*J* 与总质量有关；

（2）*J* 和质量分布有关；

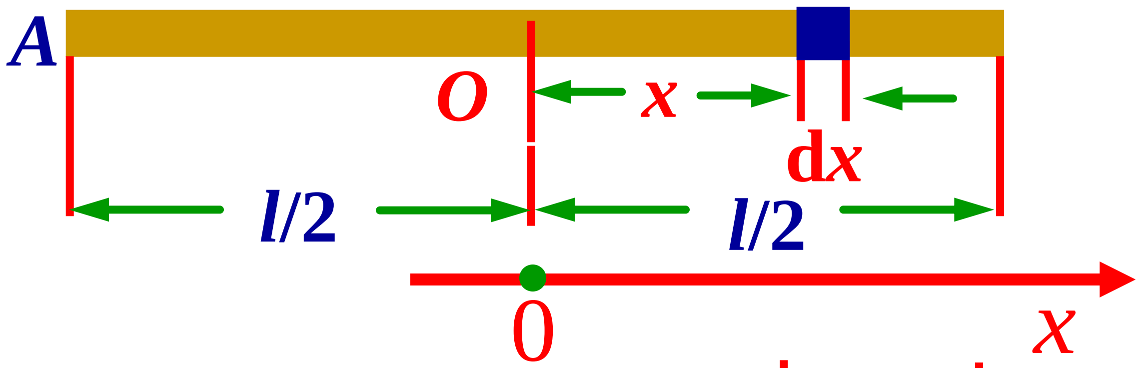
$$J=mr^2$$

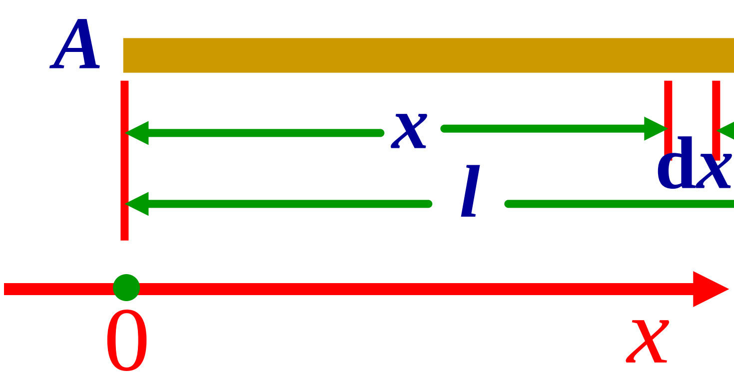
（3）*J* 和转轴有关，同一个物体对不同转轴的转动惯量不同。

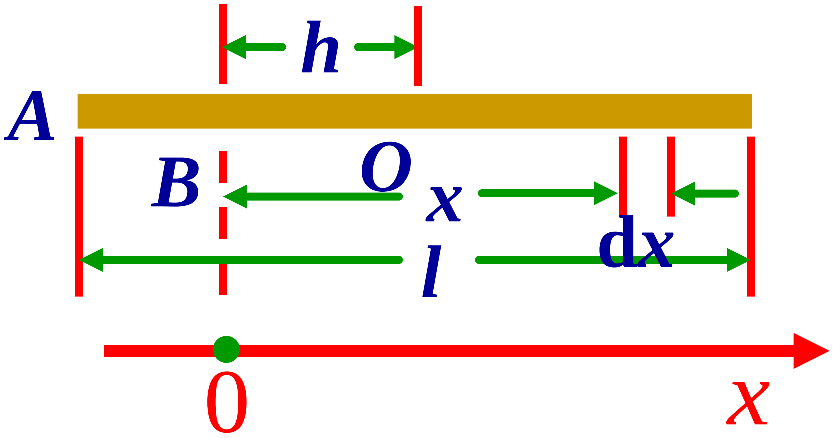


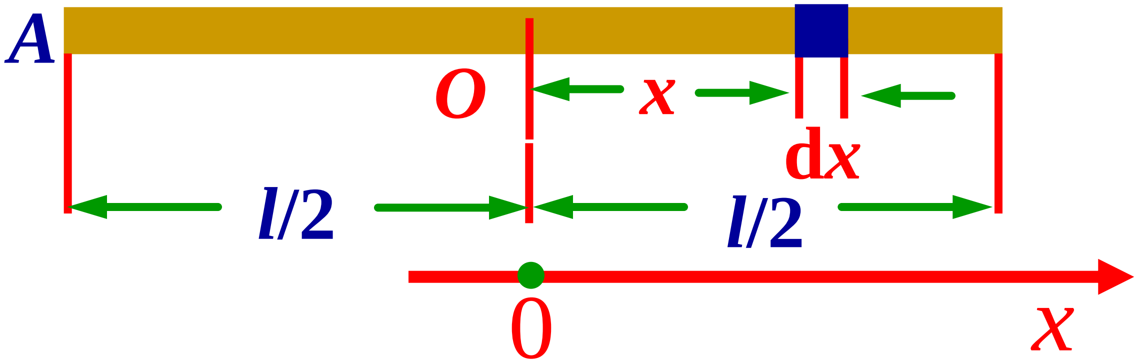
$$J=\frac{1}{2}mr^2$$

例题：求质量为m、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量：（1）转轴通过棒的中心并和棒垂直；（2）转轴通过棒的一端并和棒垂直；（3）转轴通过棒上距中心为h的一点并和棒垂直。









解：如图所示，在棒上离轴x 处，取一长度元dx，如棒的质量线密度为λ，则长度元质量为dm = λdx。

（1）当转轴通过中心并和棒垂直时，我们有

$$J_0 = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 \mathrm{d}x = \frac{\lambda l^3}{12}$$

因$\lambda l=m$，代入得

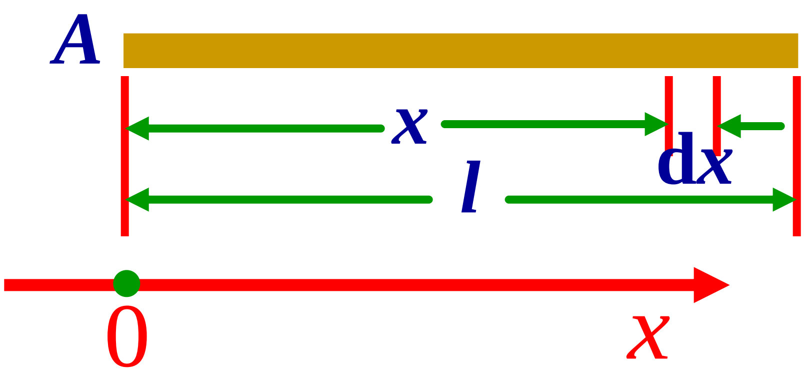
$$J_0=\frac{1}{12}ml^2$$

记住！

（2）当转轴通过棒的一端A并和棒垂直时，

$$J_A=\int_0^l \lambda x^2 dx=\frac{\lambda l^3}{3}=\frac{ml^2}{3}$$

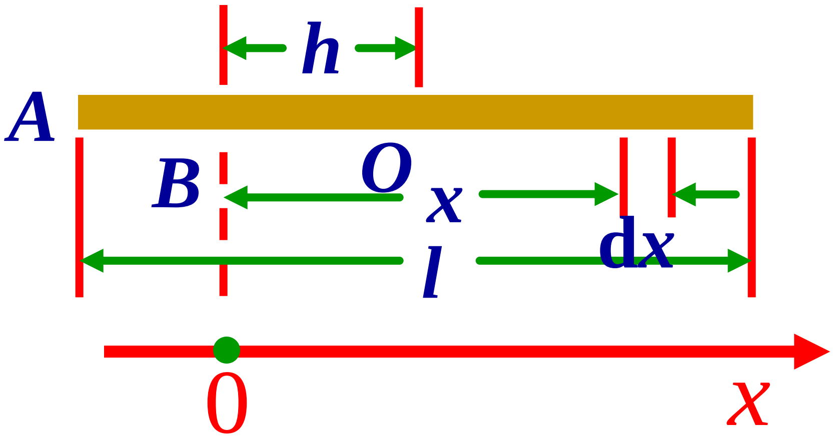
记住！



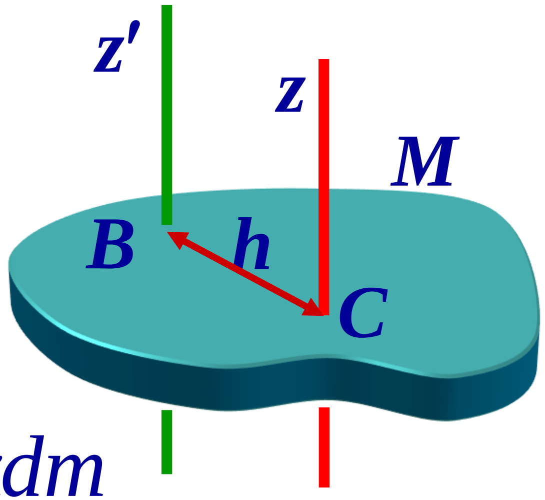
（3）当转轴通过棒上距中心为h的B点并和棒垂直时，我们有

$$J_B = \int_{-l/2+h}^{l/2+h} \lambda x^2 dx = \frac{ml^2}{12} + mh^2$$

这个例题表明，同一刚体对不同位置的转轴，转动惯量并不相同。



平行轴定理：刚体对任一转轴（通过B点）的转动惯量等于刚体对通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量J_C加上刚体质量与两轴间距h的平方的乘积。

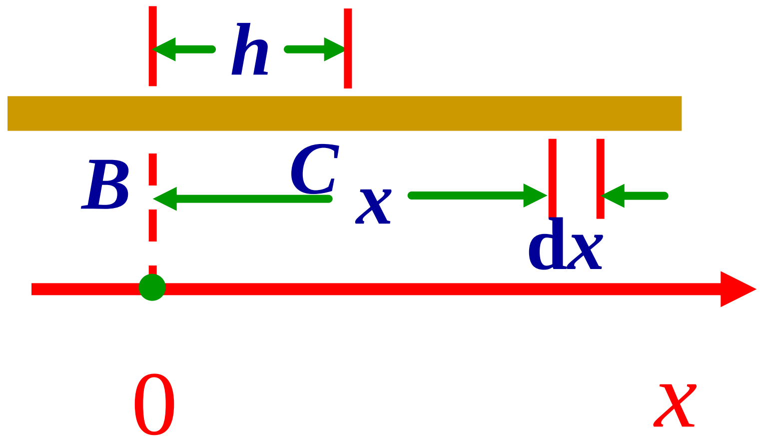


$$J_B = J_C + mh^2$$

$$J_B = \int r^2 dm = \int (x+h)^2 dm$$

$$= \int x^2 dm + h^2 \int dm + 2h \int x dm$$

$$= J_C + mh^2 + 0$$



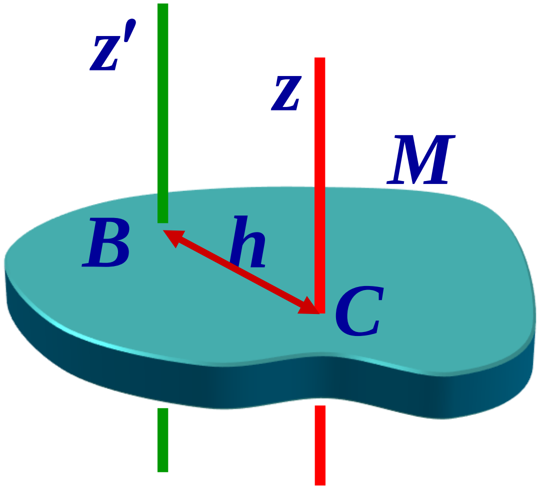
运用矢量知识，易将上述计算推广到一般的三维情形。仍旧将质心取为原点，则

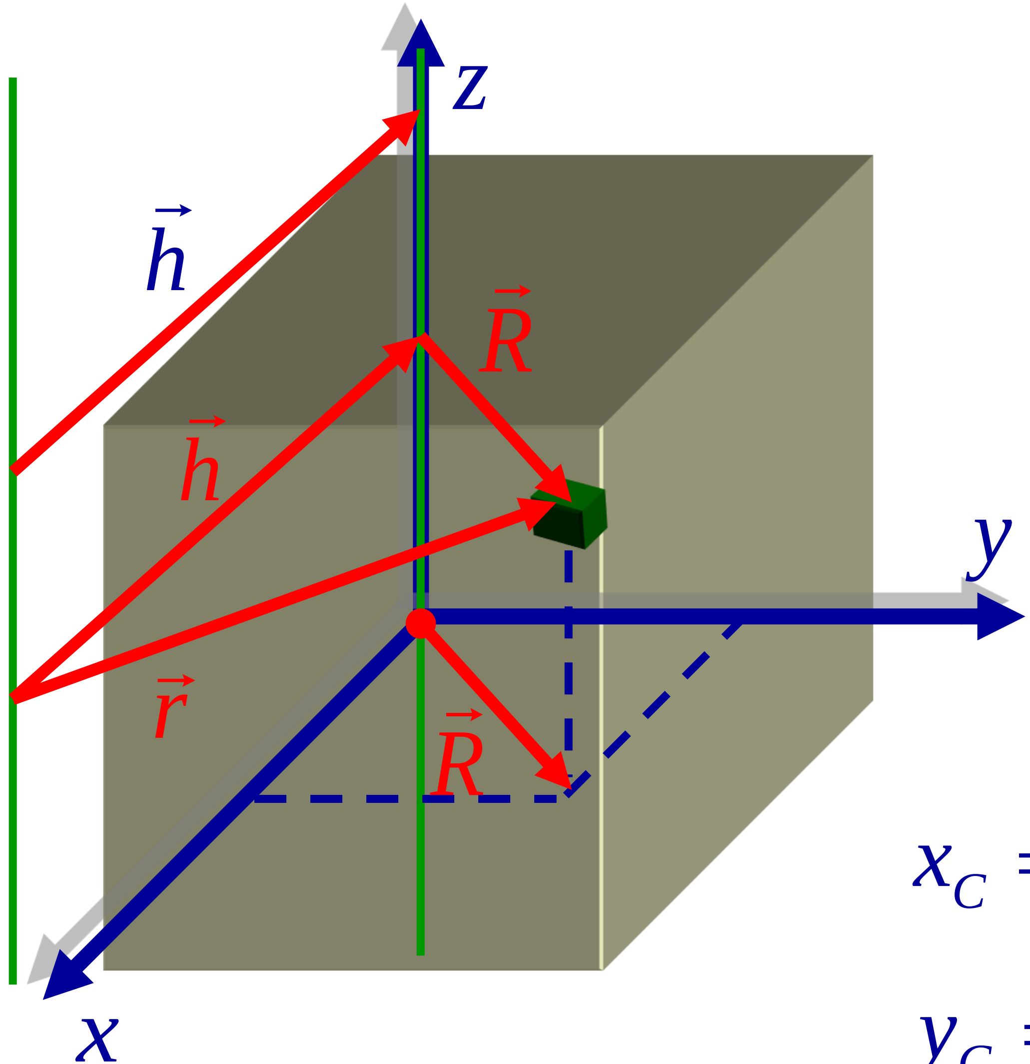
$$J_B = \int r^2 dm = \int \vec{r}^{\,2} dm = \int (\vec{R} + \vec{h})^2 dm$$

$$= \int \vec{R}^2 dm + \int \vec{h}^2 dm + 2\vec{h} \bullet \int \vec{R} dm$$

$$= \int R^2 dm + h^2 \int dm + 2\vec{h} \bullet \vec{0}$$

$$= J_C + mh^2$$





$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{h}$$

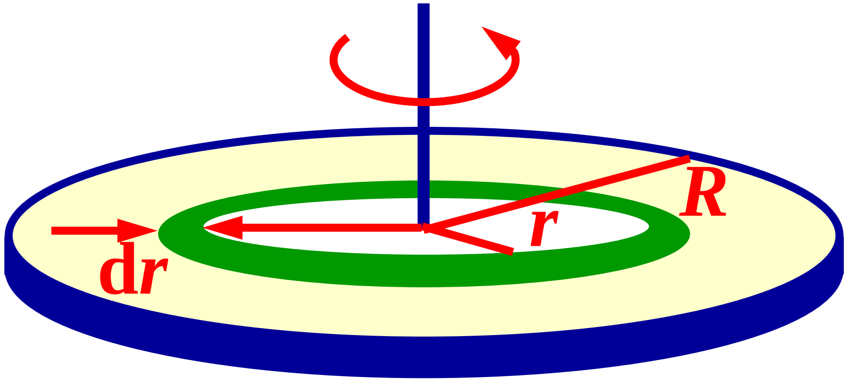
$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\int \vec{R}\,dm = 0$$

$$x_C = \int x\,dm \Big/ \int dm = 0$$

$$y_C = 0$$

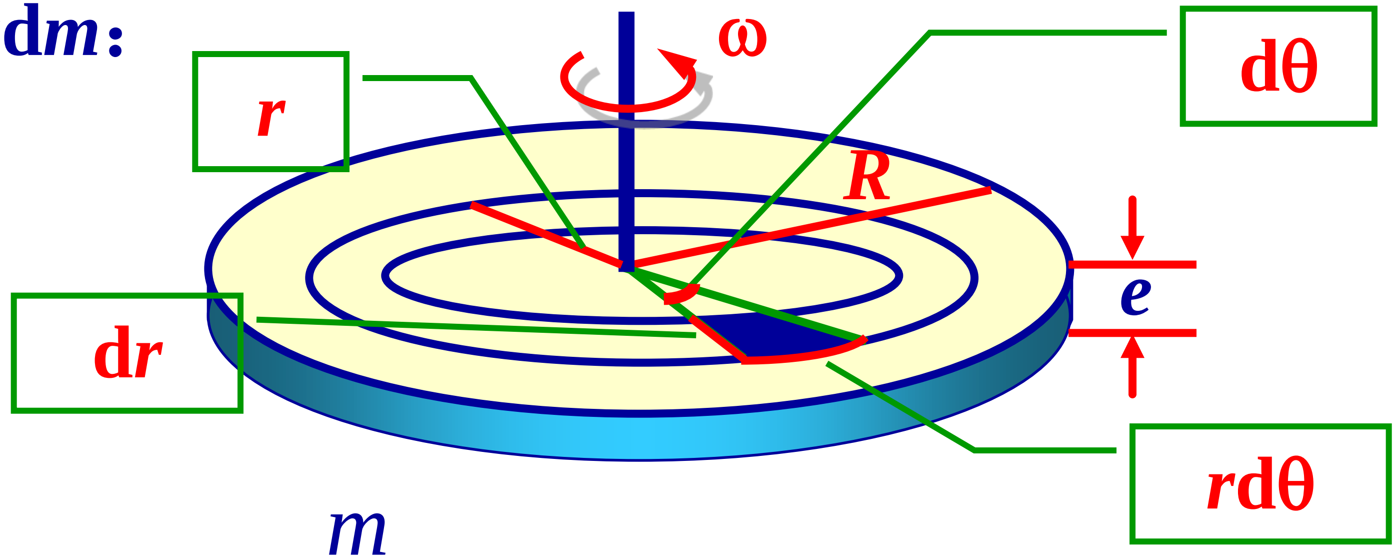
例题：求圆盘对通过中心并与盘面垂直的转轴的转动惯量。设圆盘半径为R，质量为m，密度均匀。



解：　设圆盘质量面密度为σ，在圆盘上取一半径为r、宽度为dr的圆环（如图），环的面积为2πrdr，环的质量d$m=\sigma 2\pi r$dr 。可得

$$J=\int r^2 dm=\int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr=\frac{\pi\sigma R^4}{2}=\frac{1}{2}mR^2$$

微元质量dm:



$$\rho e=\sigma \qquad \rho=\frac{m}{e\pi R^2}$$

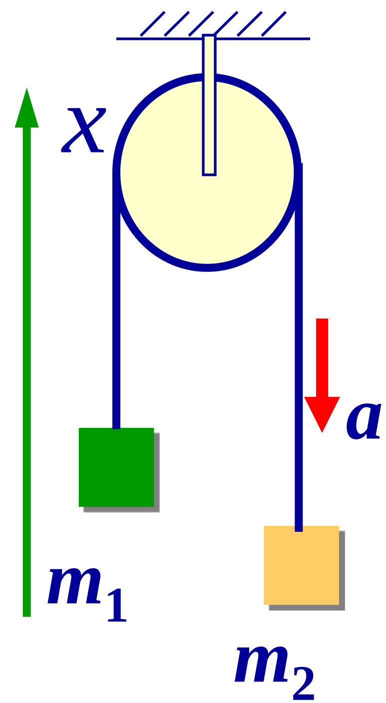
$$dm=\rho dV=\rho e dS=\rho e r d\theta dr$$

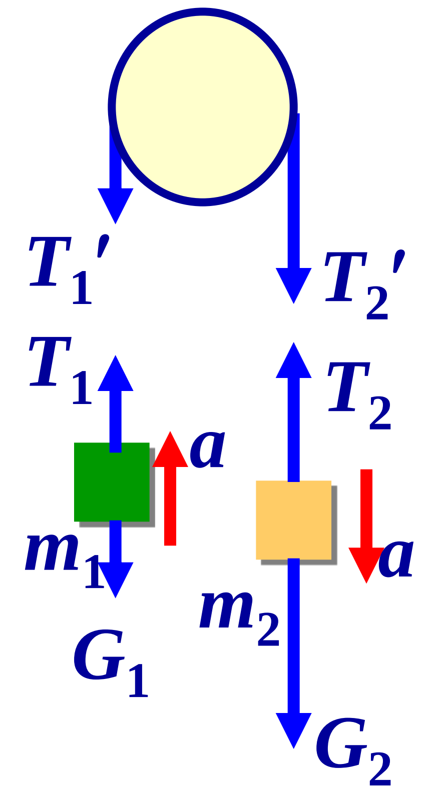
$$J=\int r^2 dm=\int_0^R dr\int_0^{2\pi}\rho e r^3 d\theta=\frac{\pi\rho e R^4}{2}=\frac{1}{2}mR^2$$

第六次： **第五章：14、16、17、20、21、22、24、25、26**

例题：如图所示，一轻绳跨过一定滑轮，滑轮视为圆盘，绳的两端分别悬有质量为m_1和m_2的物体1和2，$m_1 < m_2$。设滑轮的质量为m，半径为r，所受的摩擦阻力矩为M_r。绳与滑轮之间无相对滑动。试求物体的加速度和绳的张力。

解：滑轮具有一定的转动惯量。注意绳子两边的张力不相等（为什么？）设物体1这边绳的张力为T_1、T_1'($T_1' = T_1$)，物体2这边的张力为T_2、T_2' ($T_2' = T_2$)





因$m_2>m_1$，物体1向上运动，物体2向下运动，滑轮以顺时针方向旋转，M_r指向纸面外。可列出下列方程

$$T_1 - G_1 = m_1 a$$

$$T_2 - G_2 = -m_2 a$$

$$T_2' r - T_1' r - M_r = J\alpha$$

式中α是滑轮的角加速度，a是物体的加速度。滑轮边缘上的切向加速度和物体的加速度相等，即

$$a = r\alpha$$

从以上各式即可解得

$$a=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{m_2+m_1+\frac{J}{r^2}}=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{m_2+m_1+\frac{1}{2}m}$$

而

$$T_1=m_1(g+a)=\frac{m_1\left[\left(2m_2+\frac{1}{2}m\right)g-M_r/r\right]}{m_2+m_1+\frac{1}{2}m}$$

$$T_2=m_1(g-a)=\frac{m_2\left[\left(2m_1+\frac{1}{2}m\right)g+M_r/r\right]}{m_2+m_1+\frac{1}{2}m}$$

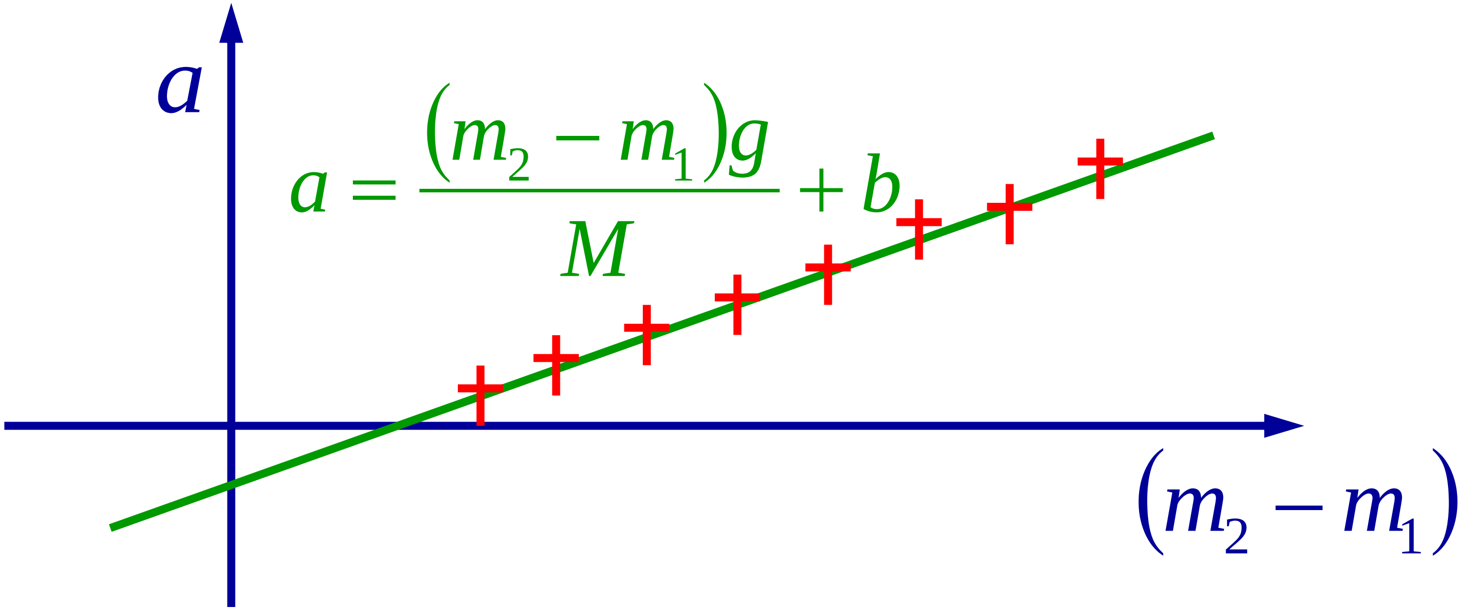
$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r / r}{\left(m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

不计滑轮质量及摩擦阻力矩，即$\boldsymbol{m}$=0、$\boldsymbol{M_r}$=0时，有

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

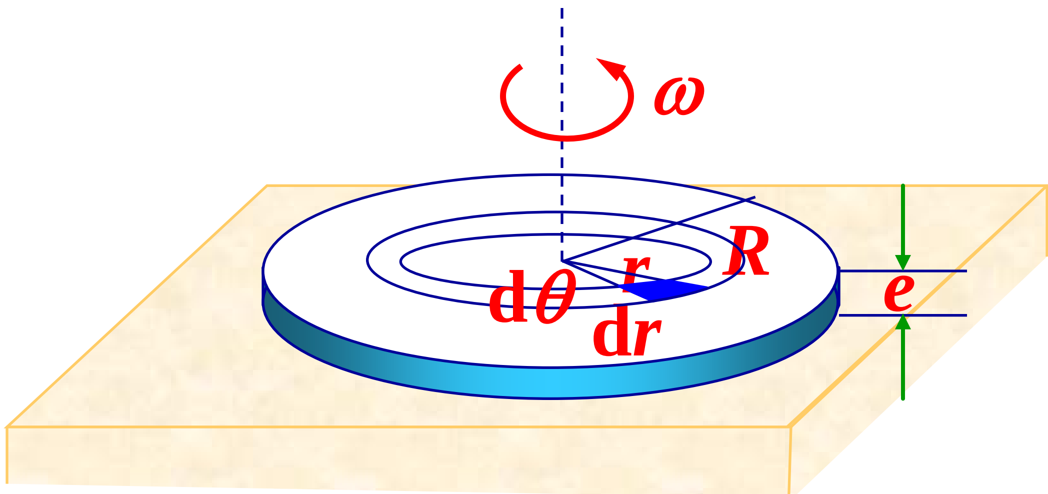
上题中的装置叫阿特伍德机，是一种可用来测量重力加速度g的简单装置。因为在已知*m*$_1$、*m*$_2$、*r*和*J*的情况下，能通过实验测出物体1和2的加速度*a*，再通过加速度把g算出来。在实验中可使两物体的*m*$_1$和*m*$_2$相近，从而使它们的加速度*a*和速度*v*都较小，这样就能精确地测出*a*来。

$$a=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{m_2+m_1+\frac{J}{r^2}}=\frac{(m_2-m_1)g-M_r/r}{m_2+m_1+\frac{1}{2}m}$$

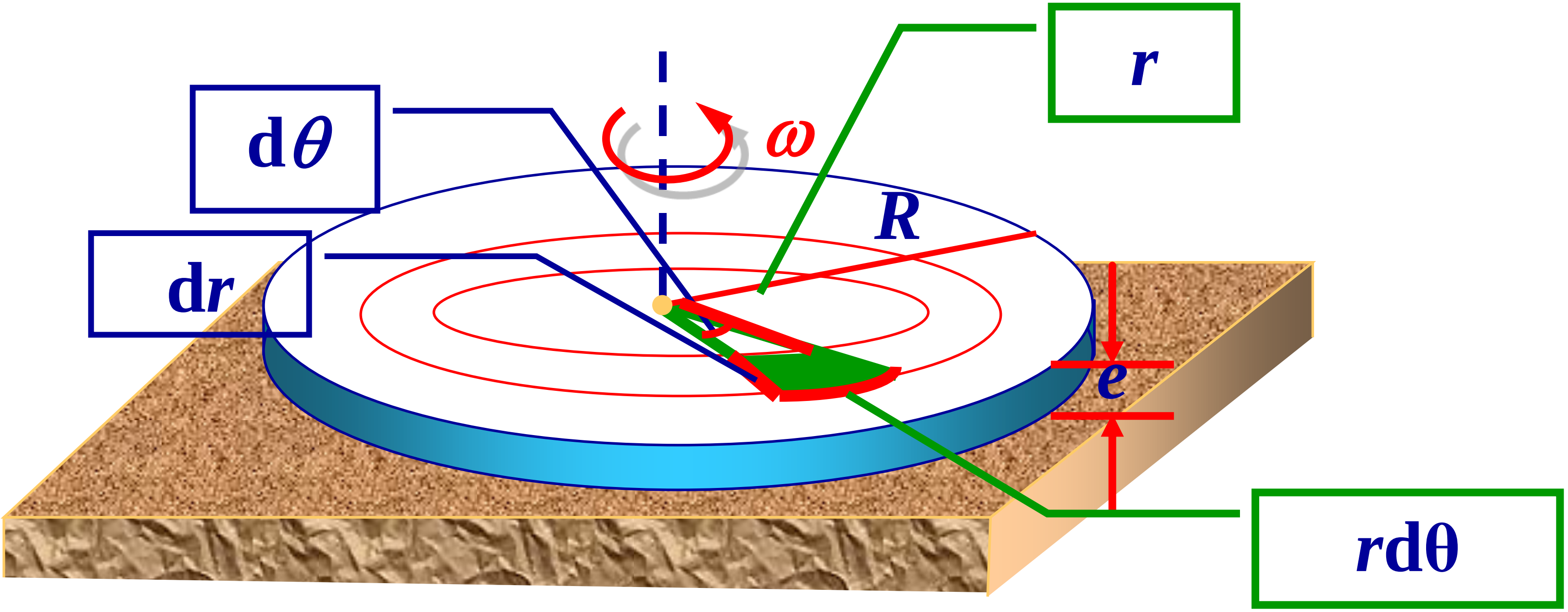


比如，保持总质量**M**恒定，$M=m_2+m_1+\frac{1}{2}m$
改变**1**和**2**的质量差，测量加速度。

例题：一半径为R，质量为m匀质圆盘，平放在粗糙的水平桌面上。设盘与桌面间摩擦系数为μ，令圆盘最初以角速度ω_0绕通过中心且垂直盘面的轴旋转，问它经过多少时间才停止转动？



解：由于摩擦力不是集中作用于一点，而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上，力矩的计算要用积分法。在图中，把圆盘分成许多环形质元，每个质元的质量$dm = \rho r d\theta dr e$，所受到的阻力矩是$r\mu dm g$。



解：摩擦力不集中于一点，而是分布在整个盘与桌子接触面上，力矩的计算要用积分法。把圆盘分成许多环形质元，每个质元的质量$dm = \rho e r d\theta dr$，所受到的阻力矩是 $r\mu g dm$。

圆盘所受阻力矩就是

$$M_r = \int r\mu dmg = \mu g \int r\rho re d\theta dr$$

$$= \mu g\rho e \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{2}{3}\mu g\rho e\pi R^3$$

因$\boldsymbol{m = \rho e\pi R^2}$，代入得 $M_r = \frac{2}{3}\mu mgR$

根据定轴转动定律，阻力矩使圆盘减速，即获得负的角加速度。

$$-\frac{2}{3}\mu mgR = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt}$$

设圆盘经过时间t停止转动，则有

$$-\frac{2}{3}\mu g\int_0^t dt = \frac{1}{2}R\int_{\omega_0}^0 d\omega$$

由此求得

$$t = \frac{3}{4}\frac{R}{\mu g}\omega_0$$

§5-3 绕定轴转动刚体的动能 动能定理

1. 绕定轴转动刚体动能

刚体的转动动能是组成刚体的各质点的动能之和。
设刚体中第i个质点的质量为Δm_i，速度为$\vec{v}_i$，则该质点的动能为：

$$\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

刚体做定轴转动时，各质点的角速度ω相同。
设质点Δm_i离轴的垂直距离为r_i，则它的线速度

$$v_i = \omega r_i$$

刚体总动能 $$E_K = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

刚体总动能

$$E_K = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

式中 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 是刚体对转轴的转动惯量***J***，

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

所以上式写为

$$E_K = \frac{1}{2}J\omega^2$$

记住！

上式中的动能是刚体因转动而具有的动能，因此叫刚体的转动动能。

2．力矩的功

力矩的功：当刚体在外力矩作用下绕定轴转动而发生角位移时，就称力矩对刚体做功。

力 $\vec{F}$ 对 P 点作功：

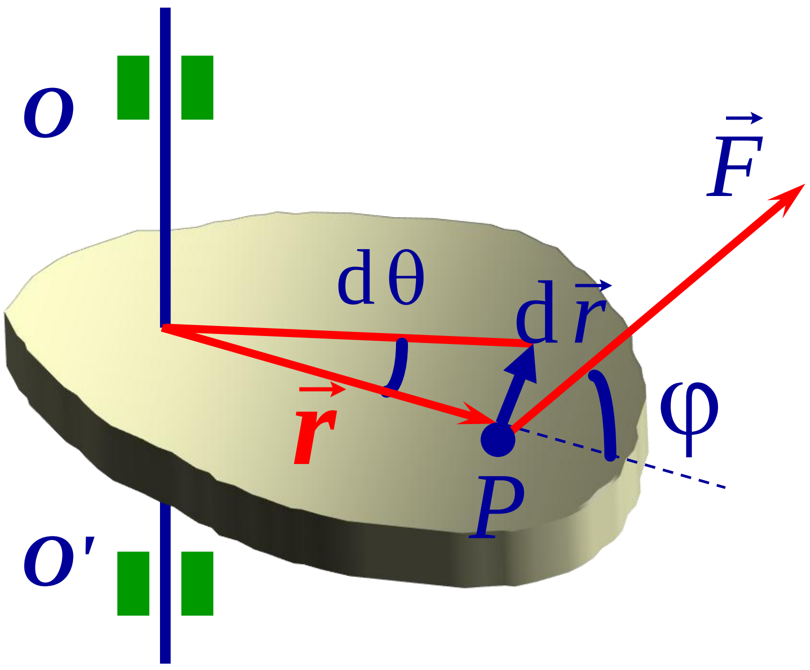
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= F\,\mathrm{d}s\cos(\pi/2-\varphi)$$

$$= F\,\mathrm{d}s\sin\varphi$$

$$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}A = Fr\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

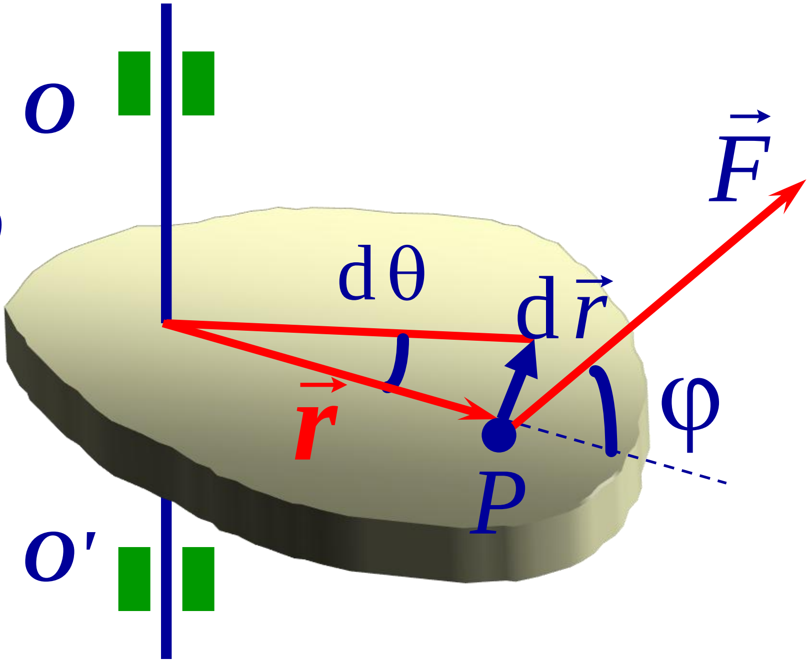


因 $Fr\sin\varphi = M_z$ $\quad \mathrm{d}A = Fr\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$\therefore \mathrm{d}A = M_z\,\mathrm{d}\theta$$

力矩作功：

$$A = \int M_z\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z\,\mathrm{d}\theta$$



对于刚体定轴转动情形，任何一对内力作功为零。

3．绕定轴转动刚体的动能定理

根据定轴转动定理 $$M_z = \frac{d}{dt}(J\omega)$$

则物体在的dt时间内转过角位移d$\theta = \omega$dt时，外力矩所做元功为：

$$dA = M_z d\theta = \frac{d}{dt}(J\omega)d\theta = Jd\omega\frac{d\theta}{dt} = J\omega d\omega$$

总外力矩对刚体所作的功为：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^{\ 2} - \frac{1}{2}J\omega_1^{\ 2}$$

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta=\frac{1}{2} J\omega_2{}^2-\frac{1}{2} J\omega_1{}^2$$

刚体定轴转动的动能定理：总外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

补充： 刚体的重力势能

对于一个不太大的质量为**m**的物体，它的重力势能应是组成刚体的各个质点的重力势能之和。

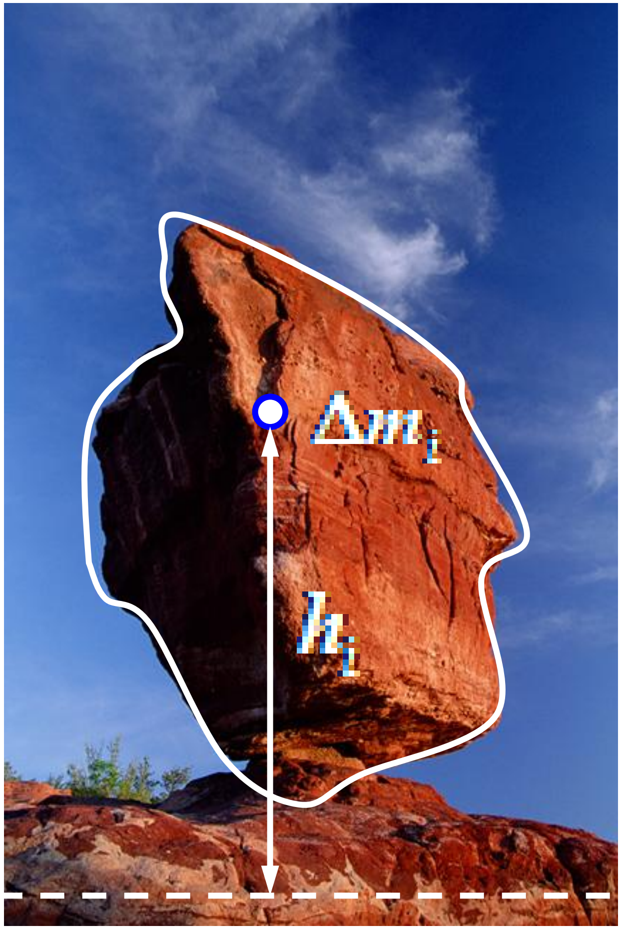
即： $E_p = \sum \Delta m_i g h_i = g \sum \Delta m_i h_i$

质心高度为：

$$h_c = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

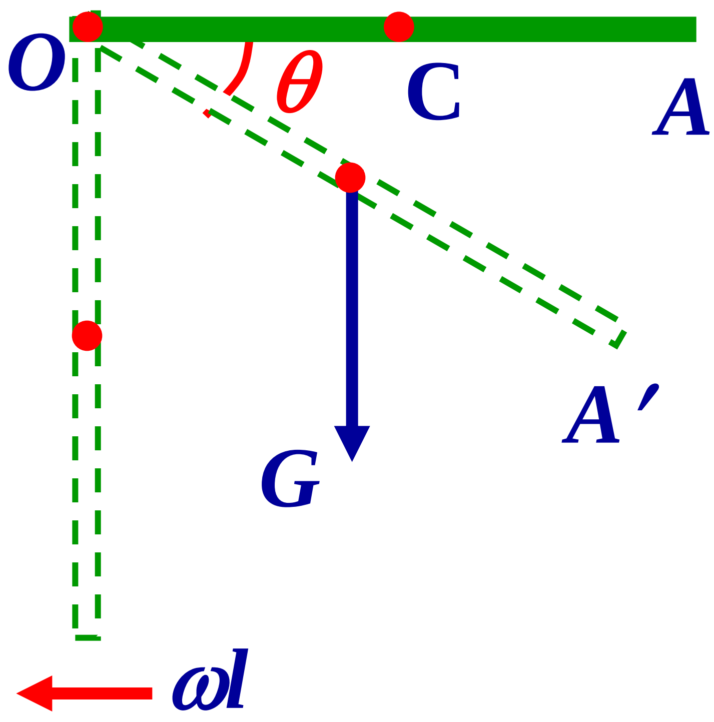
$$\therefore E_p = mgh_c$$

表明：一个不太大的刚体的重力势能与它的质量集中在质心时所具有的势能一样。



例题：一根质量为m、长为 l 的均匀细棒OA（如图），可绕通过其一端的光滑轴O在竖直平面内转动，今使棒从水平位置开始自由下摆，求细棒摆到竖直位置时其中点C和端点A的速度。

解：细棒受力分析，重力$\vec{G}$作用在棒的中心点C，方向竖直向下；轴和棒之间无摩擦力，轴对棒的支承力 垂直于棒和轴的接触面且通过O点，下摆过程中，此力的方向和大小是变化的。



棒的下摆过程中，对转轴*O*而言，支撑力N通过*O*点，所以N的力矩等于零，重力G的力矩则是变力矩，大小等于$mg(l/2)\cos\theta$，棒转过一极小的角位移$d\theta$时，重力矩所作的元功是

$$dA = mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta$$

棒从水平位置下摆到竖直位置过程中，重力矩作的功

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{l}{2}\cos\theta d\theta = mg\frac{l}{2}$$

应该指出：重力矩作的功就是重力作的功，也可用重力势能的差值来表示。棒在水平位置时的角速度$\omega_0 = 0$，下摆到竖直位置时的角速度为ω，按力矩的功和转动动能增量的关系式得

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2$$

因此 $\omega=\sqrt{mgl/J}$

因 $J=\frac{1}{3}ml^2$ 代入上式得 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

故在竖直位置时，端点A和中心点C的速度分别为

$$v_A=l\omega=\sqrt{3gl}$$

$$v_C=\frac{l}{2}\omega=\frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

方法二：

细棒＋地球　系统机械能守恒

质心最低位置为重力势能零点。

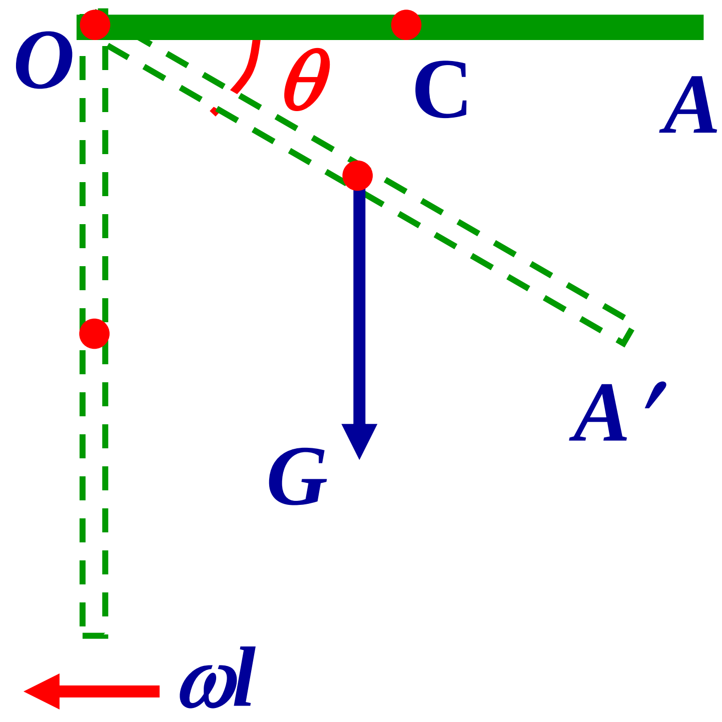
水平位置：

$$E_1 = E_{P1} + E_{k1} = \frac{1}{2}mgl$$

竖直位置：

$$E_2 = E_{P2} + E_{k2} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\therefore mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

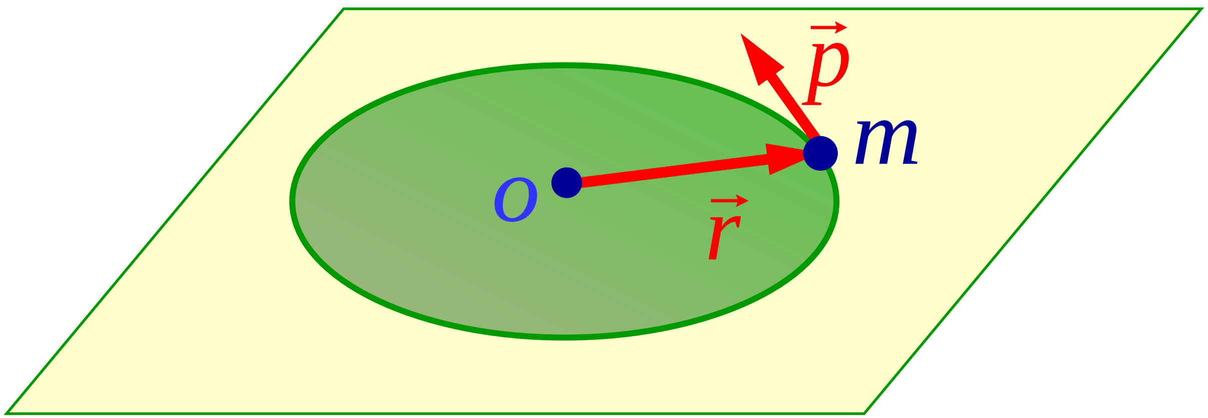


§5-4 动量矩和动量矩守恒定律

1. 质点的动量矩

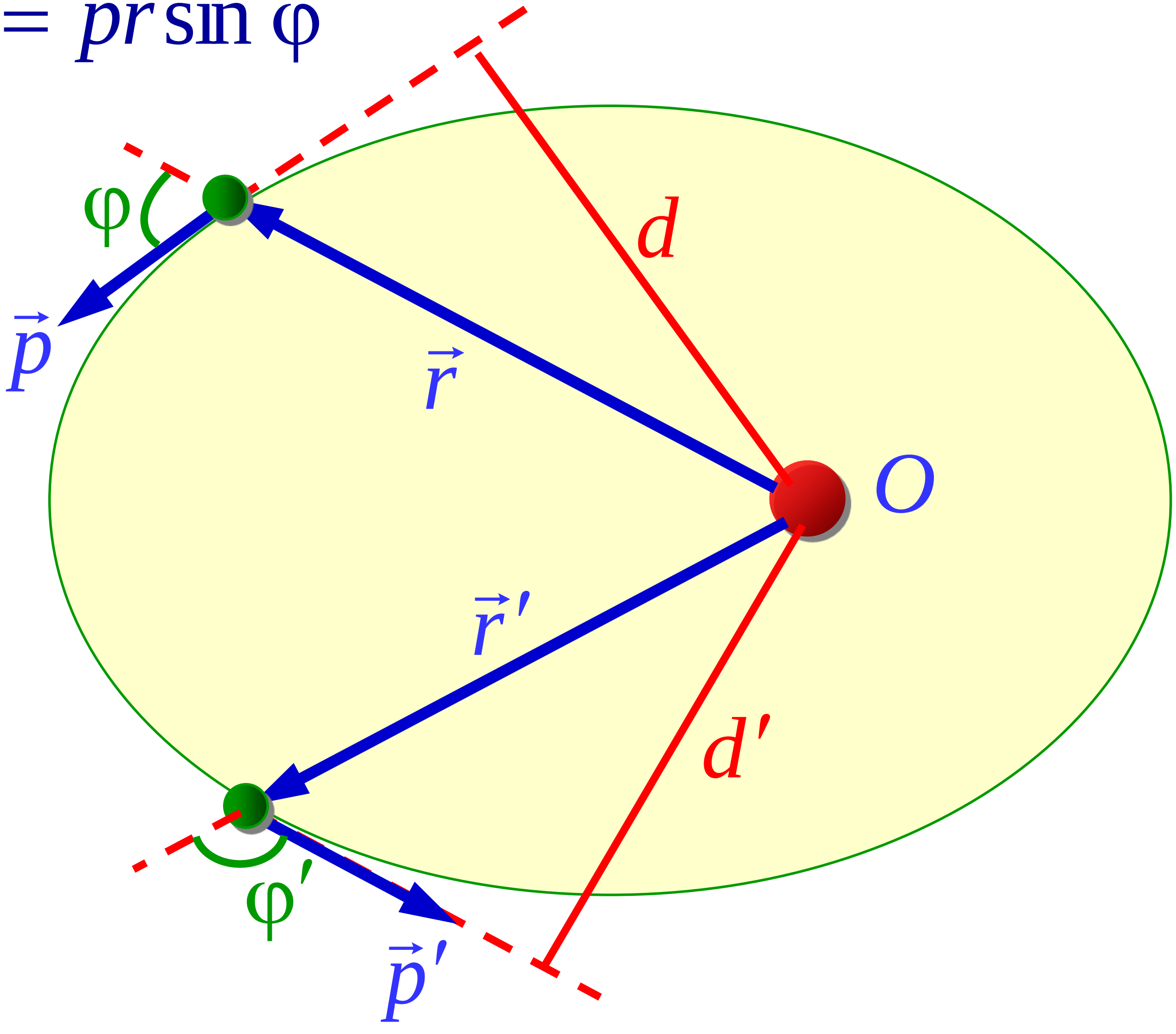
质点对圆心的角动量（动量矩）

$$L = pr = mvr$$



行星在公转轨道上的角动量

$$L = pd = pr\sin\varphi$$

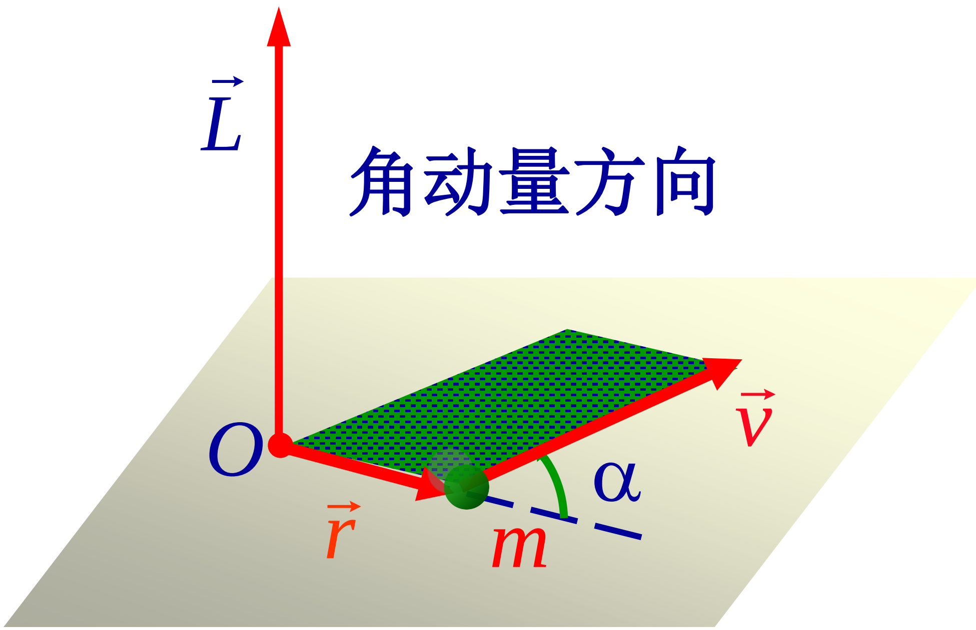


定义：质点对点的角动量为

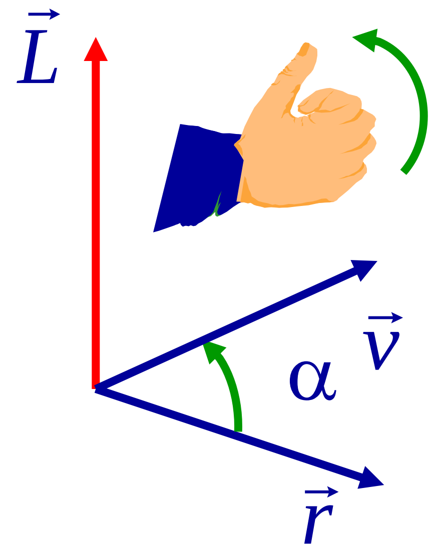
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

角动量大小$L = rmv\sin\alpha =$平行四边形面积

角动量方向



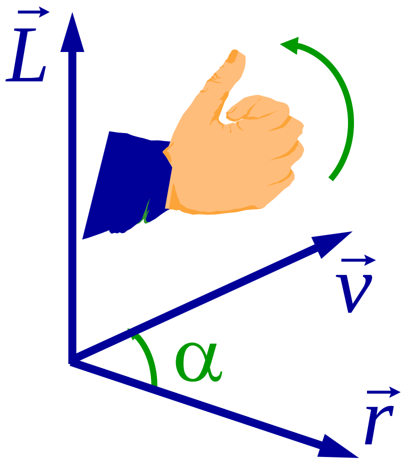
$L = rmv\sin\alpha$

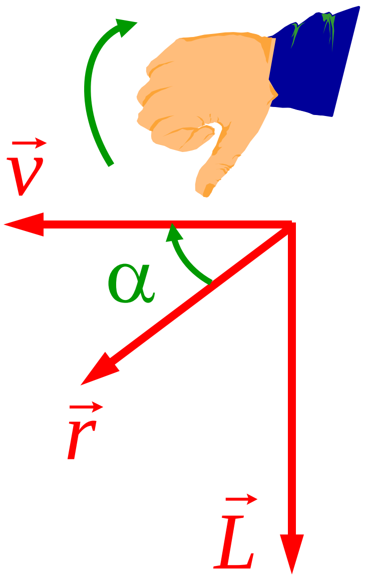


讨论

（1）质点对点的角动量，不但与质点运动有关，且与参考点位置有关。

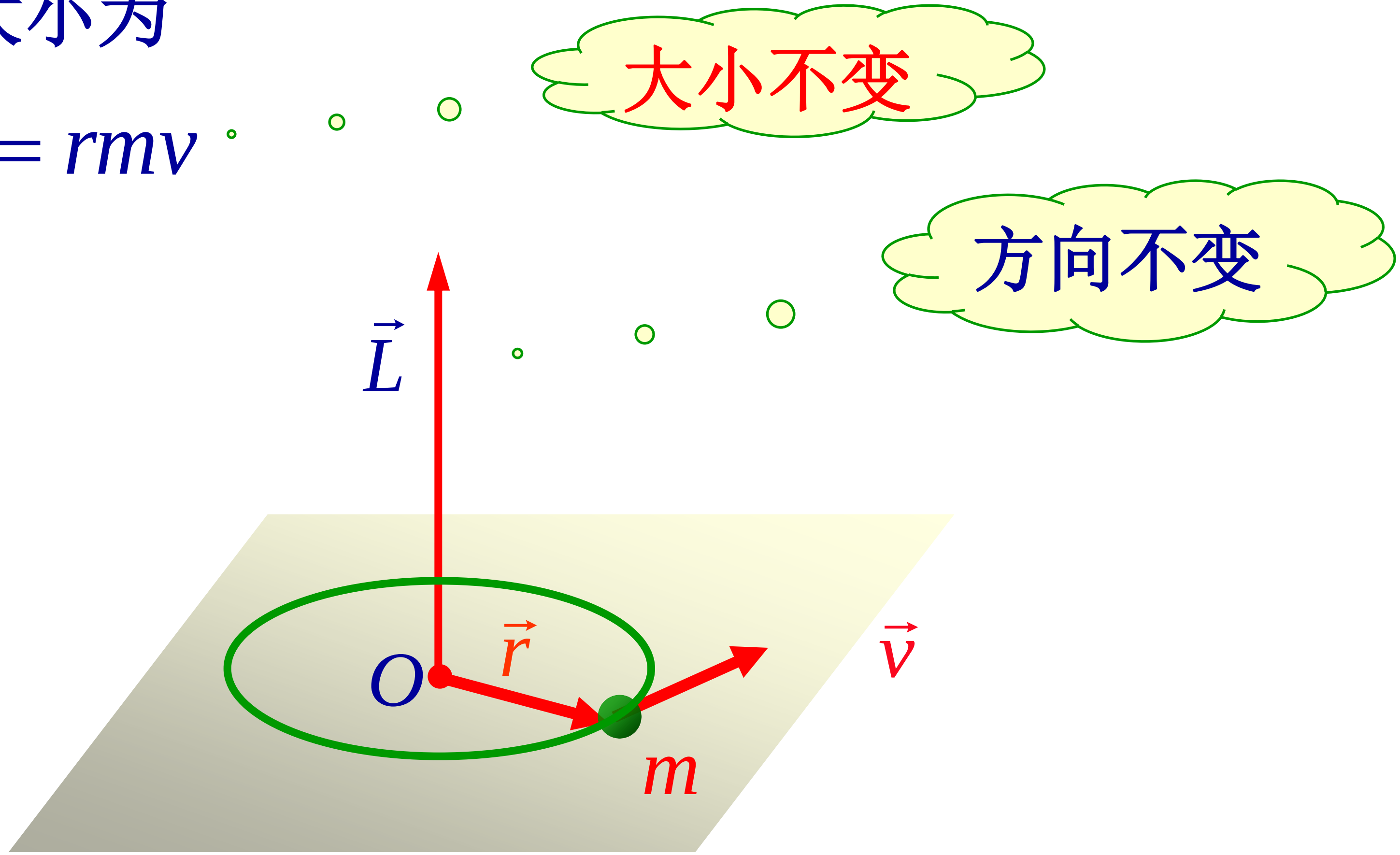
（2）$\vec{L}$ 方向的确定





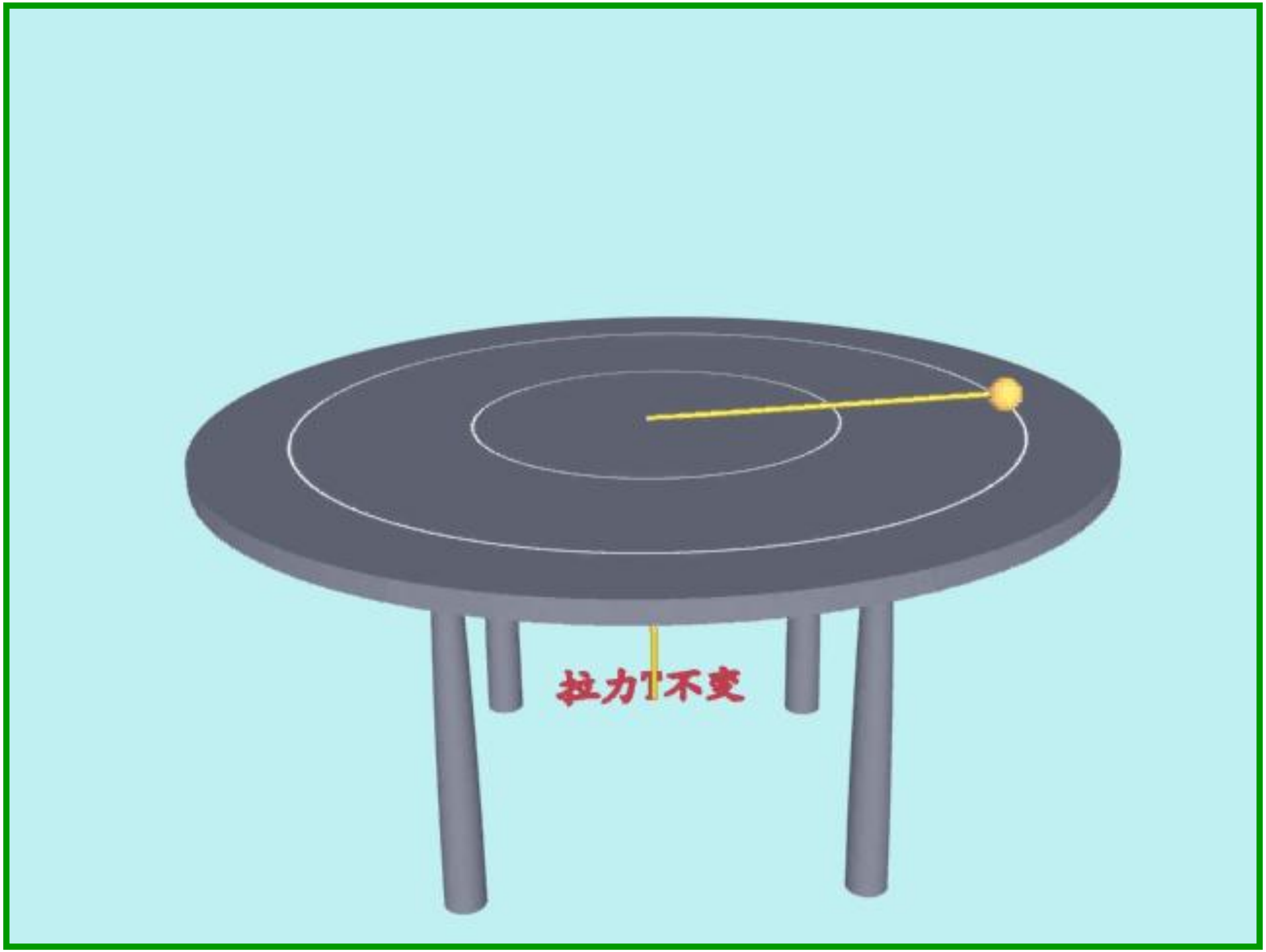
（3）做匀速圆周运动时，由于$\vec{r} \perp \vec{v}$，质点对圆心的角动量大小为

$$L = rmv$$

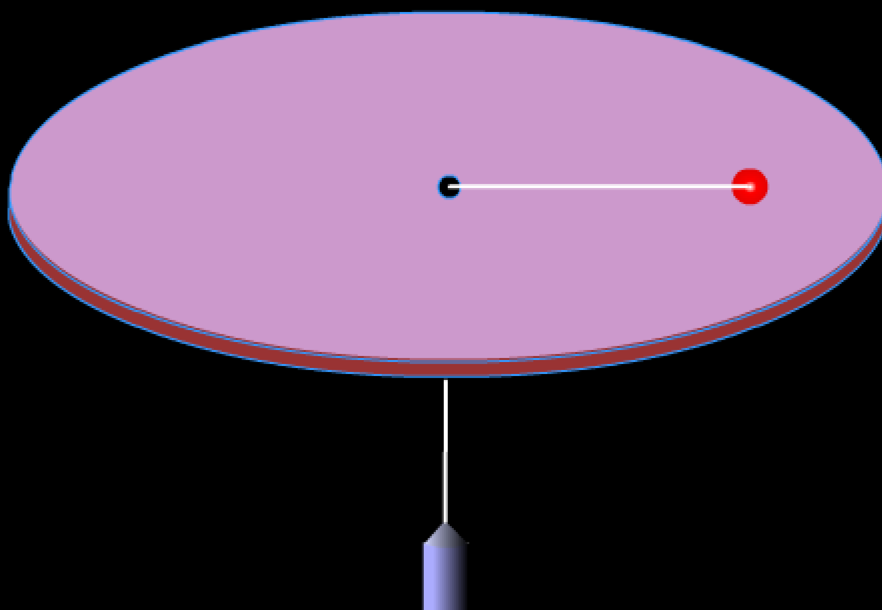


质点对圆心O的角动量为恒量

角动量守恒定律



角动量守恒

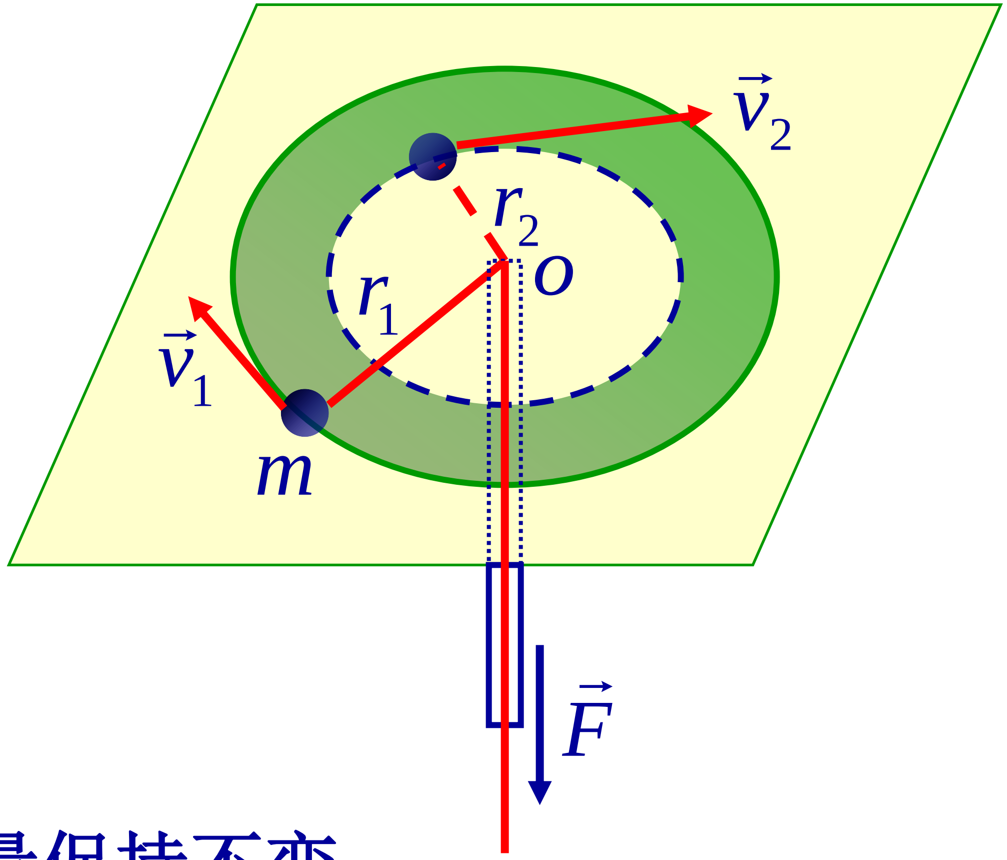


$mr^2\omega$ =常量

实验中发现

$$v_2 r_2 = v_1 r_1$$

$$m v_2 r_2 = m v_1 r_1$$

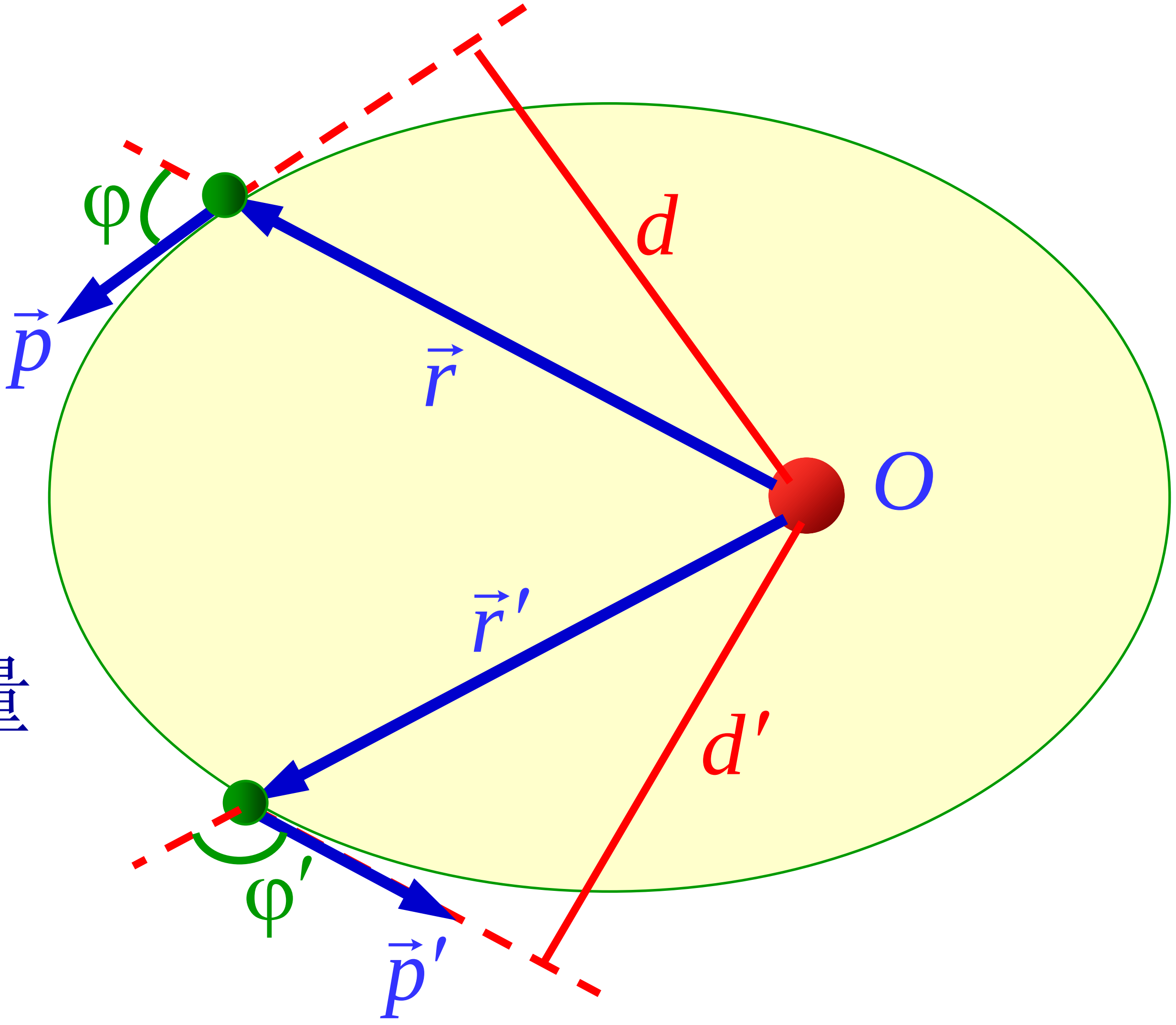


表明小球对圆心的角动量保持不变

行星绕太阳的运动

$pd =$ 常量

$\vec{r} \times \vec{p} =$ 常矢量



行星在运动过程中，对太阳的角动量保持不变。

行星在公转轨道上的角动量与开普勒第二定律

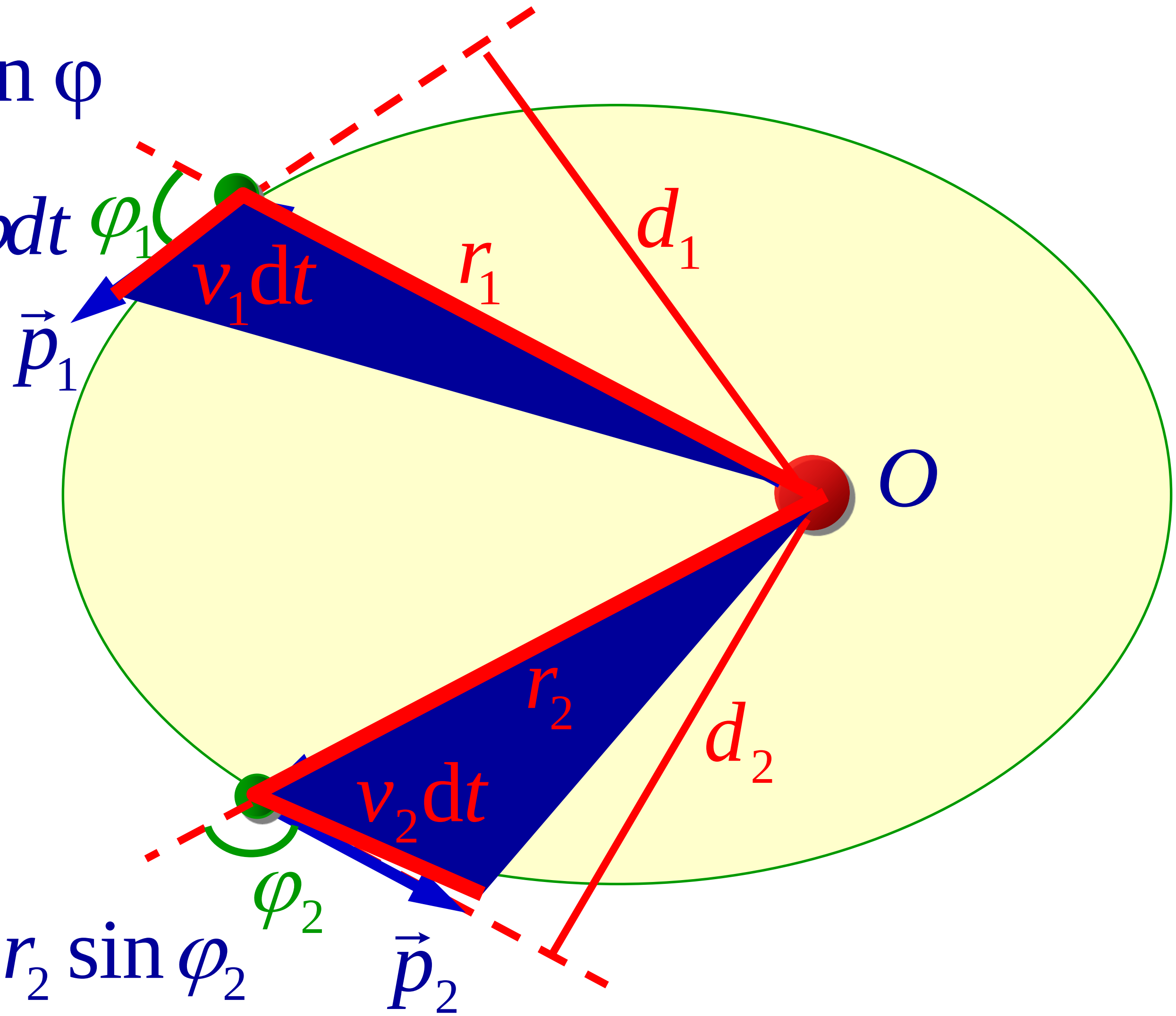
$$L = pd = pr\sin\varphi$$

$$dS = \frac{1}{2}vr\sin\varphi dt$$

$$dS_1 = dS_2$$

$$v_1 r_1 \sin\varphi_1 dt$$

$$= v_2 r_2 \sin\varphi_2 dt$$



$$p_1 r_1 \sin\varphi_1 = p_2 r_2 \sin\varphi_2$$

d*t*时间扫过面积dS_1与dS_2，边长v_1d*t*、r_1； v_2d*t*、r_2

$$\because \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{\mathbf{v}}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v} + m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}g + f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{A}\times\vec{B})_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_yB_z-A_zB_y)$$

$$=\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}B_z+A_y\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}B_y-A_z\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{i}$$

$$+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{k}$$

$$\therefore\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

对t求导

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} = \vec{v} \times (m\vec{v}) = 0 \qquad \vec{v} \times \vec{v} = 0$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

质点对某给定点的角动量随时间的变化率等于对该点的力矩。

质点的角动量守恒定律：若作用在质点上的外力对某给定点**O**的力矩 $(\vec{r} \times \vec{F})$ 为零，则质点对**O**点的角动量在运动过程中保持不变。此即角动量守恒定律。

评论：类比于牛顿第二定律与动量守恒定律。

牛顿第二定律：动量随时间的变化率是力。

质点对某点的角动量随时间的变化率即力矩。

动量守恒定律：合外力为零，则动量守恒。

角动量守恒定律：合力矩为零，则角动量守恒。

类比于动量定理，预见以后的角动量定理！

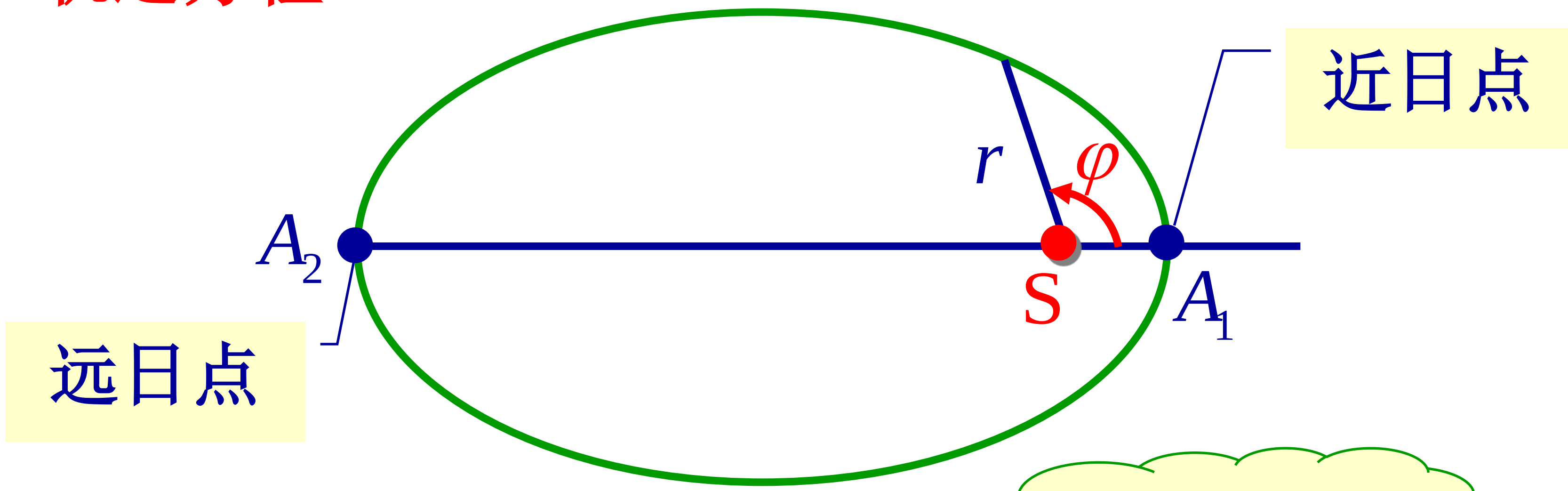
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{I}$$

动量定理：冲量等于动量的增量。

角动量定理：冲量矩等于角动量的增量。

轨迹方程



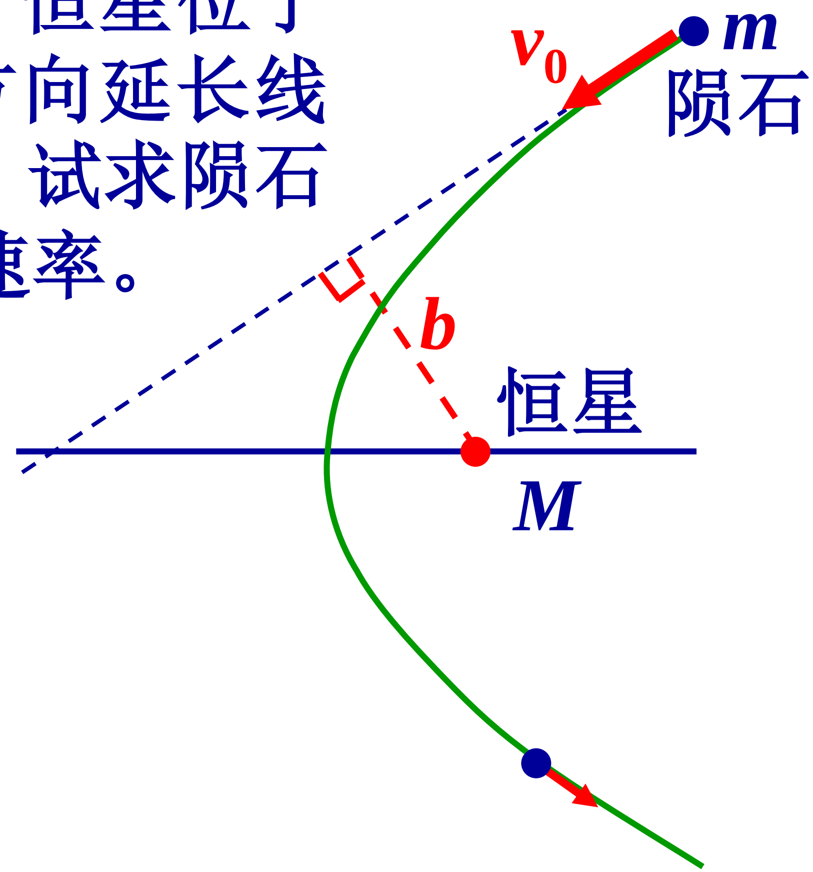
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

圆锥曲线

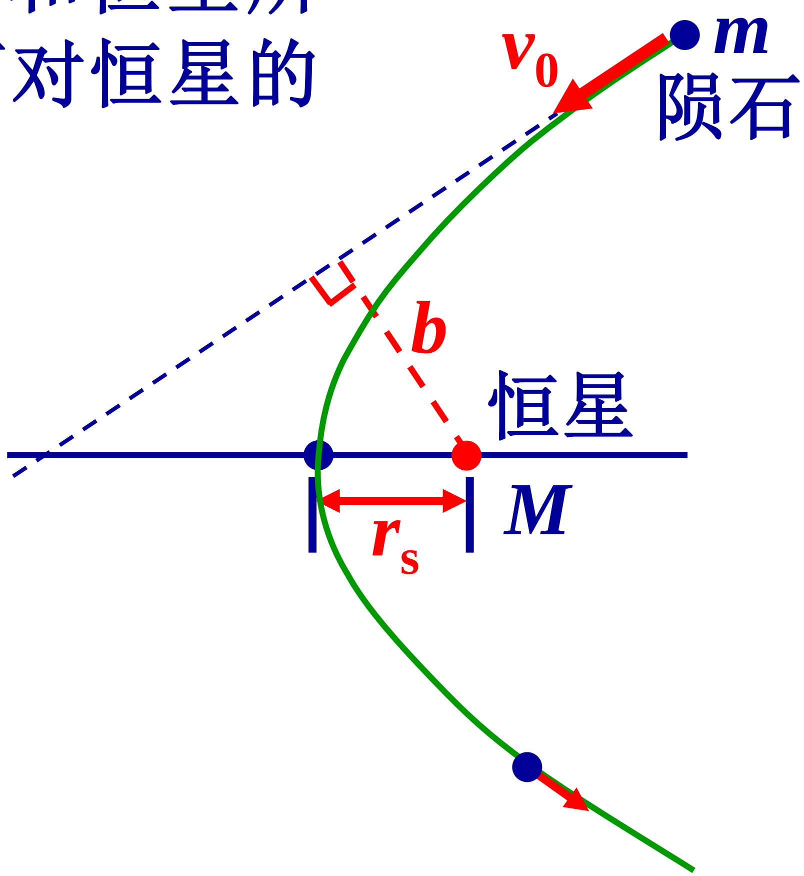
p是半正焦弦，**ε**是偏心率

$\varepsilon<1$	$\varepsilon>1$	$\varepsilon=1$
圆或椭圆	双曲线	抛物线

例题：如图，一粒质量为m的陨石以初速度v_0从无穷远处出发。当陨石接近质量为M的一颗恒星时，在万有引力的作用下发生散射。恒星可视为不受扰动的质点，陨石的轨迹是双曲线，恒星位于焦点。若恒星到陨石初速度方向延长线（双曲线渐近线）的距离为b，试求陨石和恒星最接近的距离r_s和最大速率。



解：将恒星位置取为坐标原点O，陨石最接近恒星的位置为双曲线的顶点，设经过该位置时速率为v_s。陨石和恒星所组成的系统机械能守恒；陨石对恒星的角动量守恒。



角动量守恒：

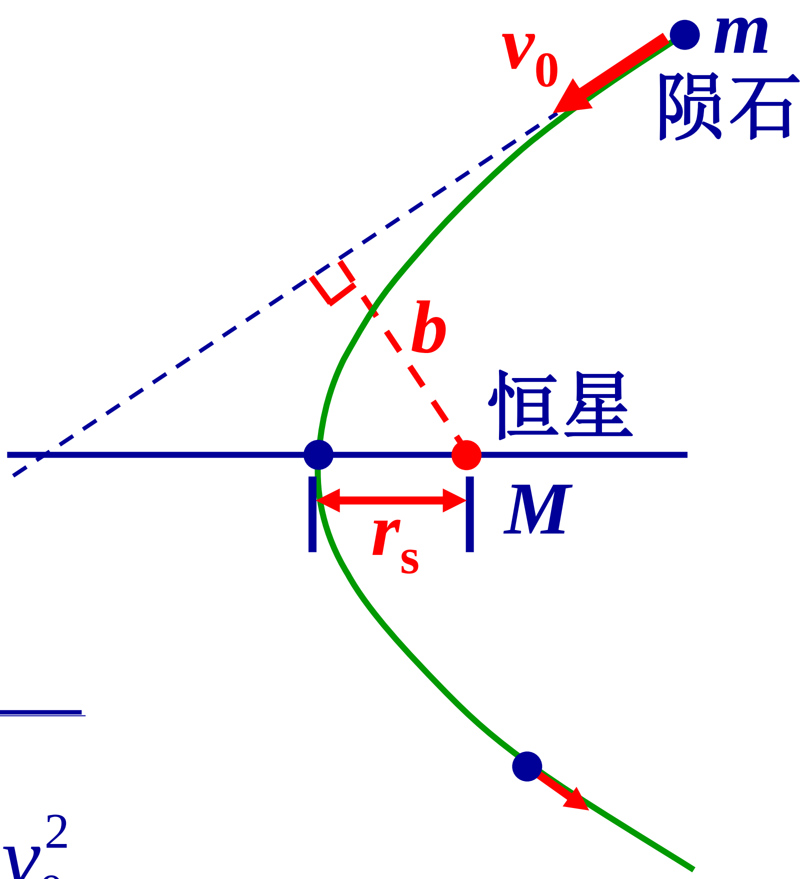
$$mv_0 b = mv_s r_s$$

取无限远为势能零点，则

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GMm}{r_s}$$

$$mv_0 b = mv_s r_s$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{GMm}{r_s}$$



消元可得：

$$v_0^2 = v_s^2 - \frac{2GM}{v_0 b} v_s$$

舍去负根，得到

$$v_s = \frac{GM}{v_0 b} + \sqrt{\left(\frac{GM}{v_0 b}\right)^2 + v_0^2}$$

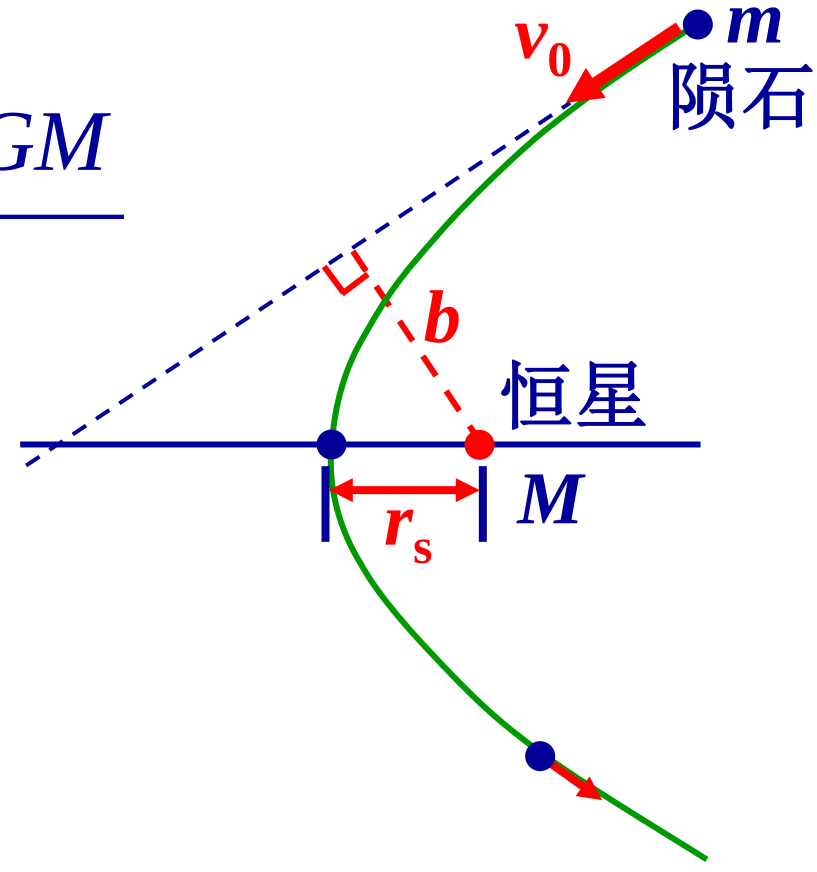
$$= \frac{1}{v_0 b}\left(\sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2} + GM\right)$$

$$mv_0 b = mv_s r_s \qquad v_s = \frac{1}{v_0 b}\left(\sqrt{G^2M^2 + v_0^4 b^2} + GM\right)$$

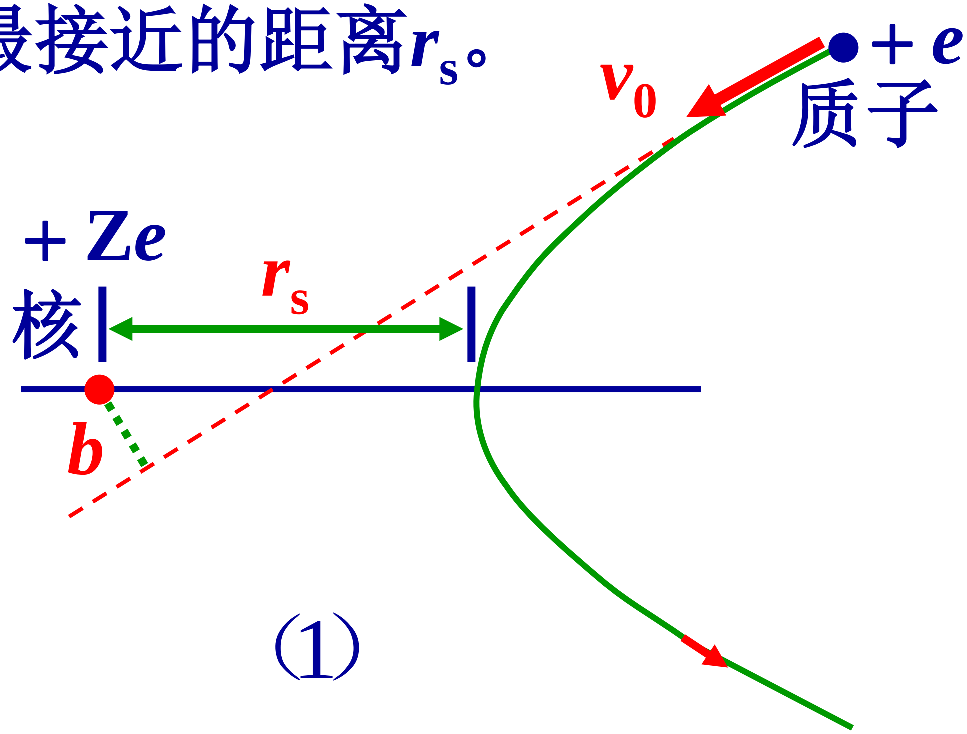
于是

$$r_s = \frac{v_0 b}{v_s} = \frac{v_0^2 b^2}{\sqrt{G^2M^2 + v_0^4 b^2} + GM}$$

$$= \frac{\sqrt{(GM)^2 + v_0^4 b^2} - GM}{v_0^2}$$



例题：当质子以初速v_0通过质量较大的原子核时，原子核可看作不动，质子受到原子核斥力的作用引起了散射，它运行的轨迹将是一双曲线，如图所示。试求质子和原子核最接近的距离r_s。



(1)

解：将质量比质子大得多的原子核看作不动，并取原子核所在处为坐标的原点O。由角动量守恒，得

$$mv_0 b = mv_s r_s$$

式中m是质子的质量；v_0是质子在无限远处的初速；v_s是质子在离原子核最近处的速度；b是初速度的方向线与原子核间的垂直距离。

当在无限远处，质子的动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$

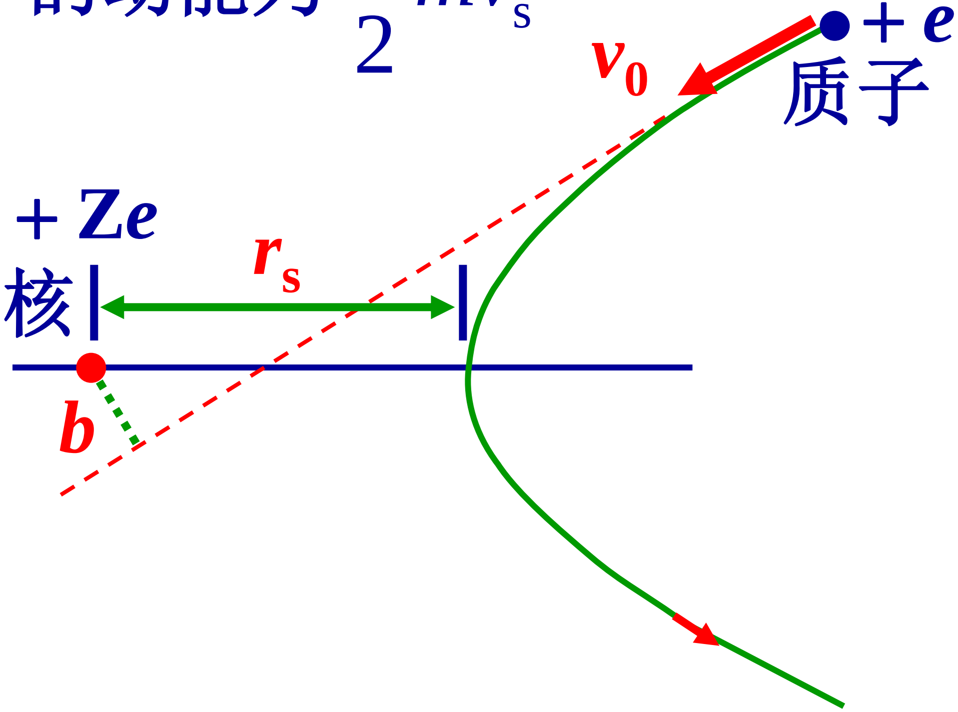
而电势能取为零，所以，这时的总能量为 $\frac{1}{2}mv_0^2$

在离原子核最近处，质子的动能为 $\frac{1}{2}mv_s^2$

而电势能为 $k\frac{Ze^2}{r_s}$

所以，这时的总能量为

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s}$$



由于质子在飞行过程中没有能量损失，因此总能量也守恒，即

$$\frac{1}{2}mv_s^2 + k\frac{Ze^2}{r_s} = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (2)$$

从式(1)和式(2)中消去v_s，得

$$k\frac{Ze^2}{r_s} = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1-\left(\frac{b}{r_s}\right)^2\right]$$

由此可求得

$$r_s = 2k\frac{Ze^2}{mv_0} + \sqrt{\left(2k\frac{Ze^2}{mv_0}\right)^2 + 4b^2}$$

2．刚体绕定轴转动情况下的动量矩定理和动量矩守恒定律

动量矩又名角动量。

刚体：特殊质点体系，质点间距不变，不变形。

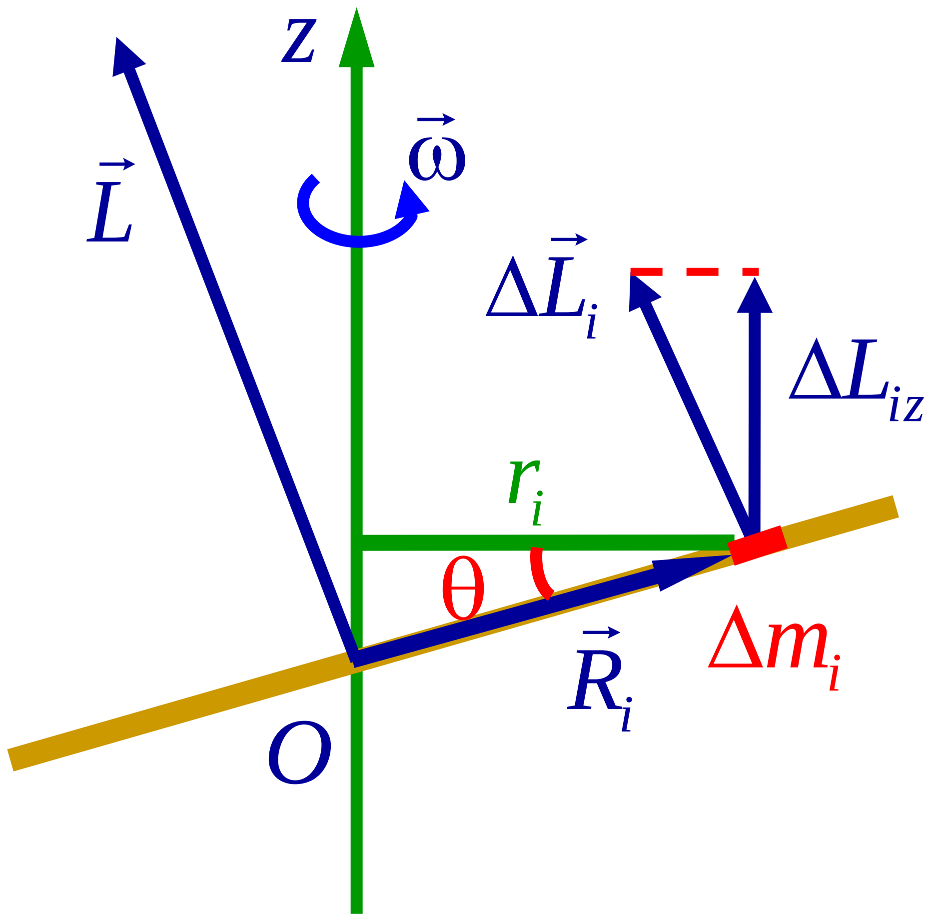
定轴转动：各质点作圆周运动，圆心不变，圆心的集合是固定直线段。

注意：在定轴转动中，刚体任意一质元对其圆周运动的圆心的角动量的方向——都在固定轴的直线上！

刚体质点系的动量矩（角动量）

图为以角速度ω绕定轴*Oz*转动的一根均匀细棒。

把细棒分成许多质点，其中第*i*个质点的质量为Δm_i。当细棒以ω转动时，该质点绕轴的半径为r_i。它相对于*O*点的位矢为$\vec{R}_i$



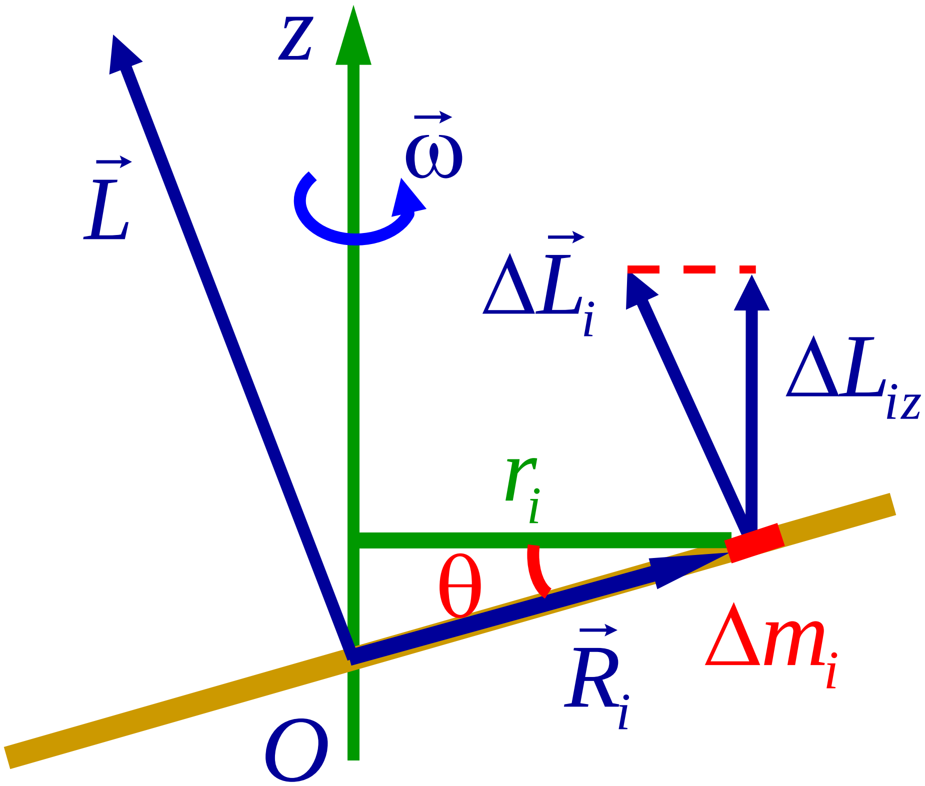
Δm_i 对O点的角动量为：

$$\Delta \vec{L}_i = \vec{R}_i \times (\Delta m_i \vec{v}_i)$$

$$\because \vec{v}_i \perp \vec{R}_i$$

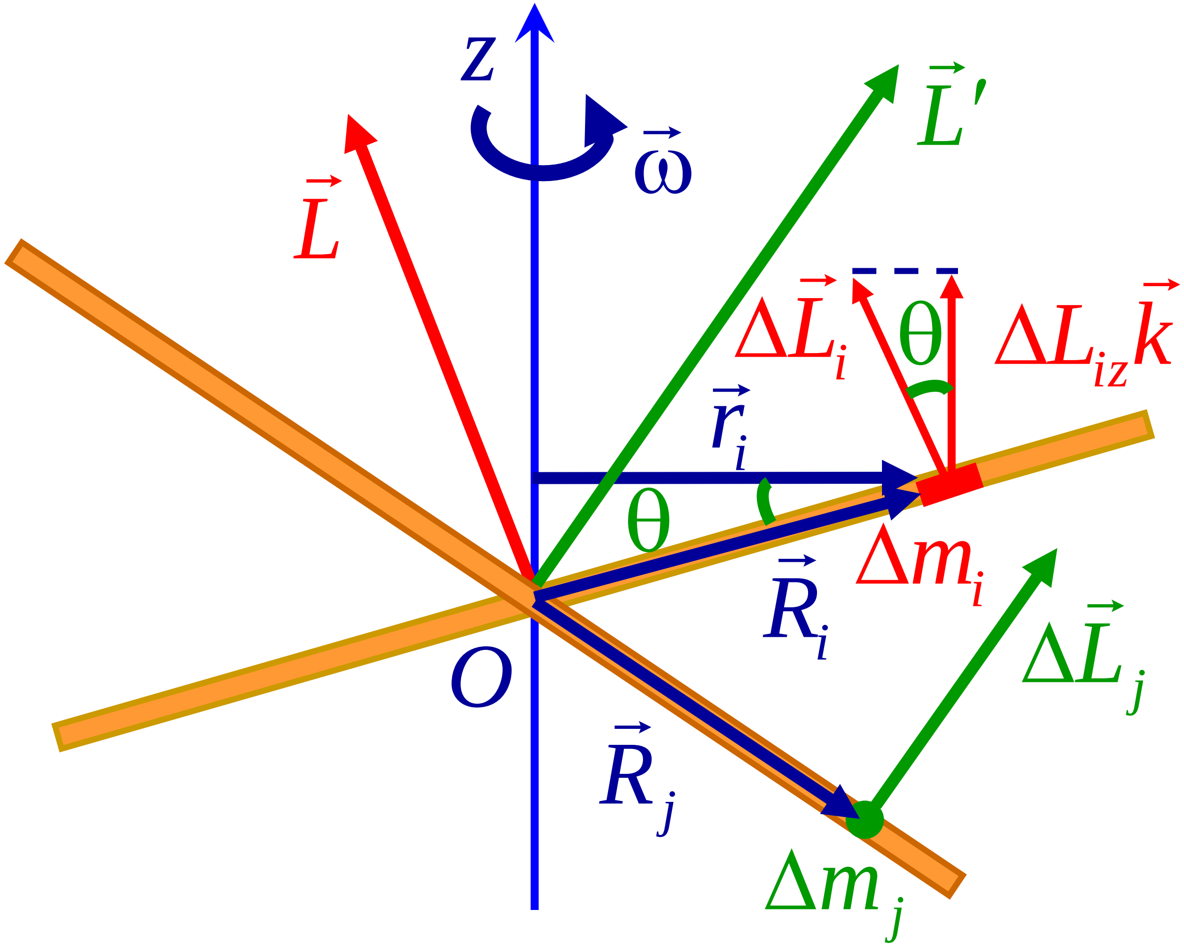
$$\therefore \left|\Delta \vec{L}_i\right| = \Delta m_i R_i v_i$$

方向如图所示。



刚体对O点的角动量等于各质点角动量的矢量和。

对于定轴转动，我们感兴趣的只是 $\vec{L}$ 沿Oz轴的分量L_z，叫做刚体绕定轴转动的角动量。



$$\Delta L_{iz} = \Delta L_i \cos\theta$$

$$\Delta\vec{L}_j = \vec{R}_j \times \left(\Delta m_j \vec{v}_j\right)$$

对于定轴转动，我们感兴趣的只是 $\vec{L}$ 沿**Oz**轴的分量**L_z**，叫做刚体绕定轴转动的角动量。

对于定轴转动，我们感兴趣的只是 $\vec{L}$ 沿***Oz***轴的分量L_z，叫做刚体绕定轴转动的角动量。

这个分量 L_z 实际上就是各质点的角动量沿***Oz***轴的分量ΔL_{iz}之和。

从图中可以看出：

$$\Delta L_{iz} = \Delta L_i \cos\theta$$

因此

$$L_z = \sum \Delta L_i \cos\theta = \sum \Delta m_i R_i v_i \cos\theta$$

$$= \sum \Delta m_i r_i v_i = \left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega$$

刚体的角动量

$\sum \Delta m_i r_i^2$ 叫做刚体对***Oz***轴的转动惯量，用***J***表示。

刚体转动惯量：

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

刚体绕定轴的角动量表达式：

$$L_z = J\omega$$

定轴转动刚体的动量矩（角动量）定理

刚体定轴转动定理： $M_z = \frac{d}{dt}(J\omega)$

由几个物体组成的系统，如果它们对同一给定轴的角动量分别为$J_1\omega_1$、$J_2\omega_2$、…

则该系统对该轴的角动量为：

$$L_z = \sum_i J_i \omega_i \qquad i = 1,2,\cdots$$

对于该系统还有

$$M_Z = \frac{\mathrm{d}L_Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i J_i \omega_i\right)$$

在外力矩作用下，从 $t_0 \to t$

角动量$L_{z0} = (J\omega)_0$ 变为 $L_Z = J\omega$

则由 $M_z = \frac{d}{dt}(J\omega)$

可得角动量定理的积分形式：

$$\int_{t_0}^{t} M_z \, \mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$$

$\int_{t_0}^{t} M_z \, \mathrm{d}t$为$\Delta t = t - t_0$时间内力矩$M$对给定轴的冲量矩。

定轴转动刚体的角动量守恒定律

角动量守恒定律：若一个系统一段时间内所受合外力矩$\boldsymbol{M}$恒为零，则此系统的总角动量$\boldsymbol{L}$为一恒量。

$$当M_z = 0时，\qquad L_z = J\omega = 恒量$$

讨论：

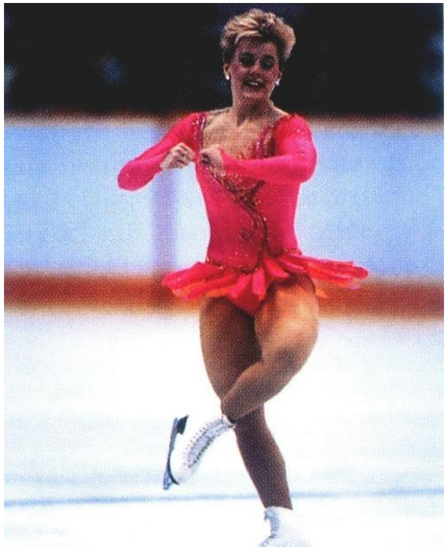
a. 对于绕固定转轴转动的刚体，因$\boldsymbol{J}$保持不变，当合外力矩为零时，其角速度恒定。

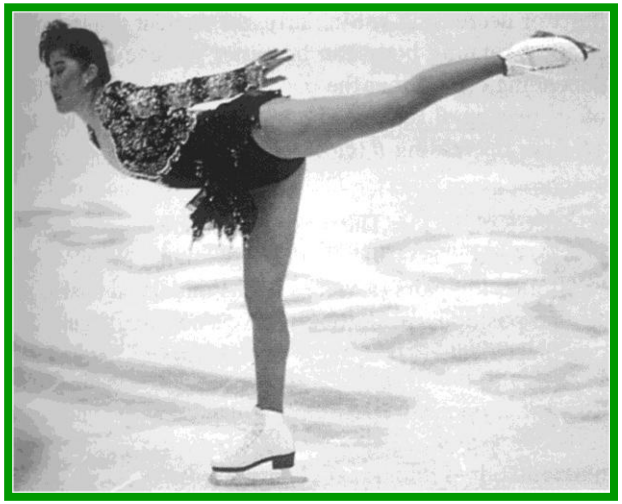
$$当M_z = 0时，\qquad \boldsymbol{J} = 恒量 \qquad \boldsymbol{\omega} = 恒量$$

b. 若系统由若干个刚体构成,当合外力矩为零时，系统的角动量依然守恒。J大→ω小，J小→ω大。

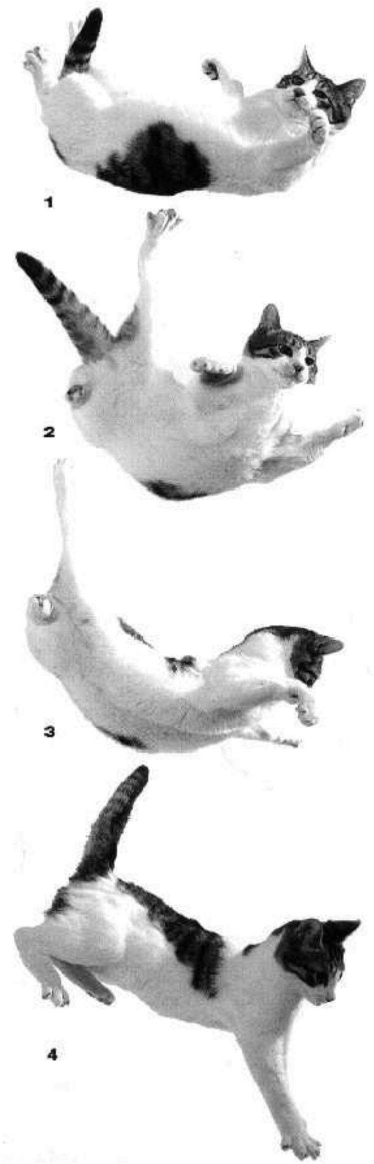
$$\text{当}M_z = 0\text{时，}\quad L_z = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{恒量}$$

c. 若系统内既有平动也有转动现象发生，若对某一定轴的合外力矩为零，则系统对该轴的角动量守恒。



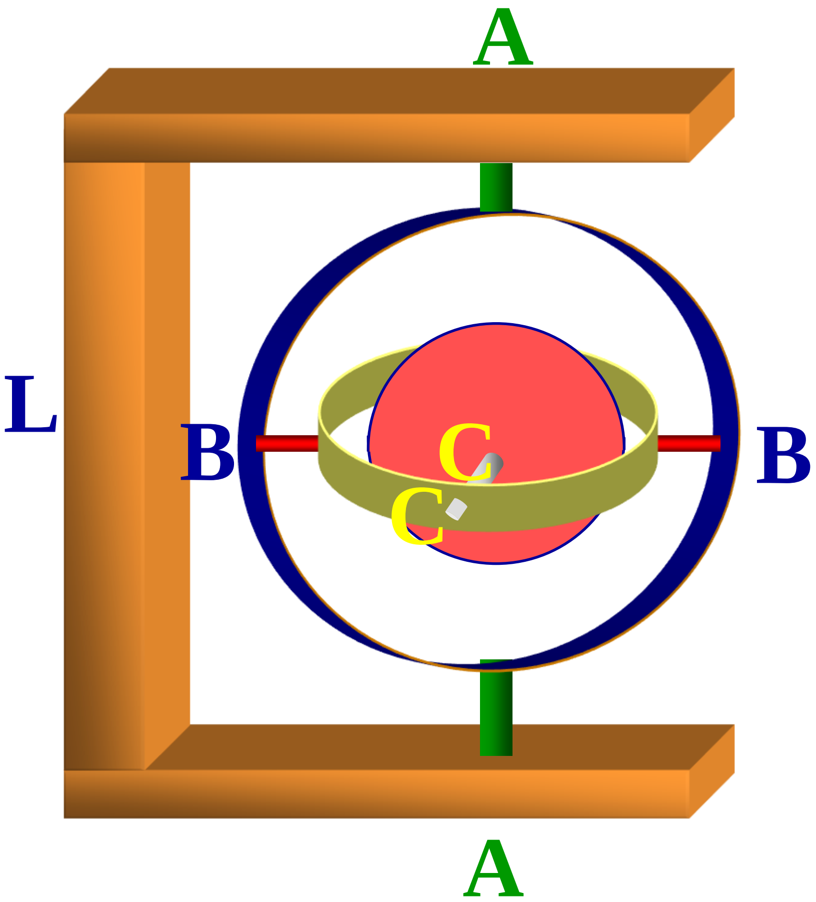


擅长高空作业的猫



应用事例：

常平架上的回转仪



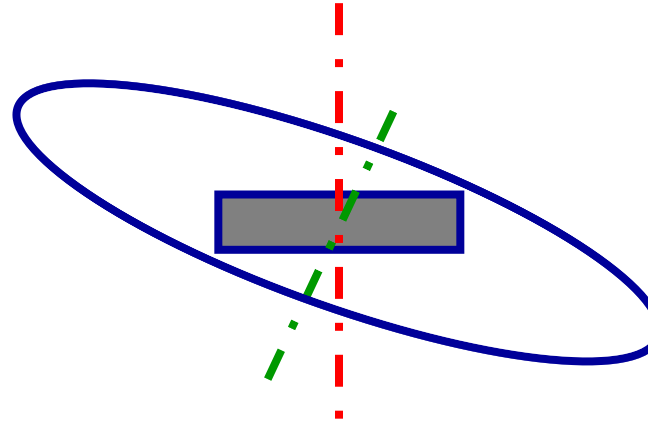
精确制导

应用事例：

陀螺仪的始祖——被中香炉（唐朝）

“枕障熏炉隔绣帏，二年终日两相思，杏花明月始应知…”

长孙皇后的一件精美工艺品-----鎏金香囊

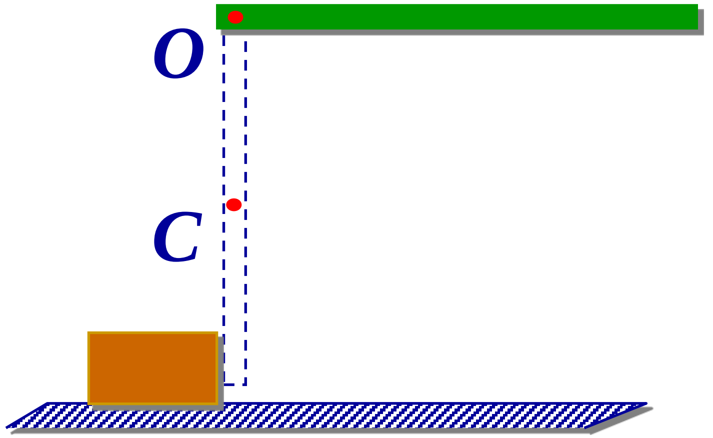


国产某型号导弹
陀螺仪

直线运动与定轴转动规律对照

质点的直线运动		刚体的定轴转动	
$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
$P=mv$	$E_K=\dfrac{1}{2}mv^2$	$L=J\omega$	$E_K=\dfrac{1}{2}J\omega^2$
F	m	M	J
$\mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}x$	$F\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$	$M\,\mathrm{d}t$
$F=ma$		$M=J\beta$	
$\int F\,\mathrm{d}t=P-P_0$		$\int M\,\mathrm{d}t=L-L_0$	
$\int F\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$		$\int M\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$	

例题：如图，匀质细棒长为l，质量为m，可绕通过其端点O的水平轴转动。当棒从水平位置自由释放后，在竖直位置上与放在地面上的物体相撞。该物体的质量也为m，与地面的摩擦系数为μ。相撞后物体沿地面滑行一距离s而停止（s在物理范围内）。求相撞后棒的质心C离地面的最大高度h。



解：分为三个阶段进行分析。

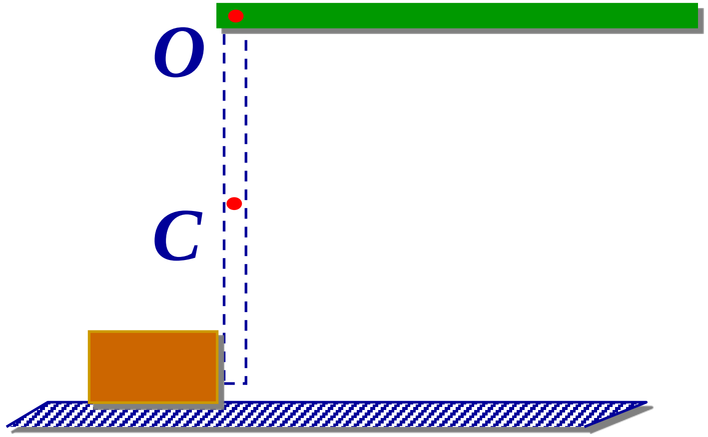
第一阶段是棒自由摆落，机械能守恒。把棒在竖直位置时质心所在处取为势能零点

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \qquad (1)$$

第二阶段是碰撞过程。因碰撞时间极短，自由的冲力极大，物体虽然受到地面的摩擦力，但可以忽略，系统所受的对转轴*O*的外力矩为零，系统对*O*轴的角动量守恒。我们用*v*表示物体碰撞后的速度

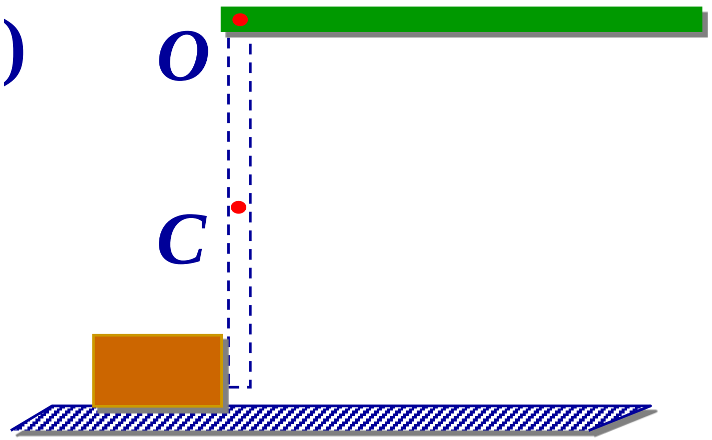
$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega = mvl + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega' \qquad \textbf{(2)}$$

式中ω′为棒在碰撞后的角速度，它可正可负。ω′取正值，表示碰后棒向左摆；反之，表示向右摆。



第三阶段是物体在碰撞后的滑行过程。物体作匀减速直线运动，加速度由牛顿第二定律求得为

$$-\mu mg = ma \tag{3}$$



由匀减速直线运动的公式得

$$0 = v^2 + 2as$$

亦即 $v^2 = 2\mu gs$ (4)

由式(1)、(2)与(4)联合求解，即得

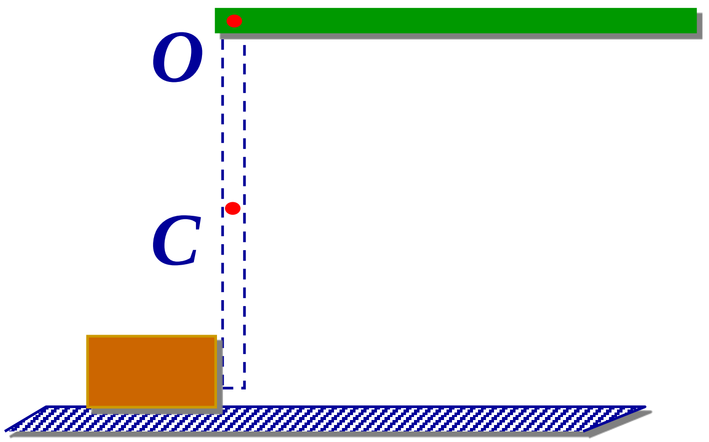
$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu gs}}{l} \tag{5}$$

棒的质心*C*上升的最大高度，与第一阶段情况相似，也可由机械能守恒定律求得：

$$mgh=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2 \qquad (6)$$

把式(5)代入上式，所求结果为

$$h=\frac{l}{2}+3\mu s-\sqrt{6\mu sl}$$

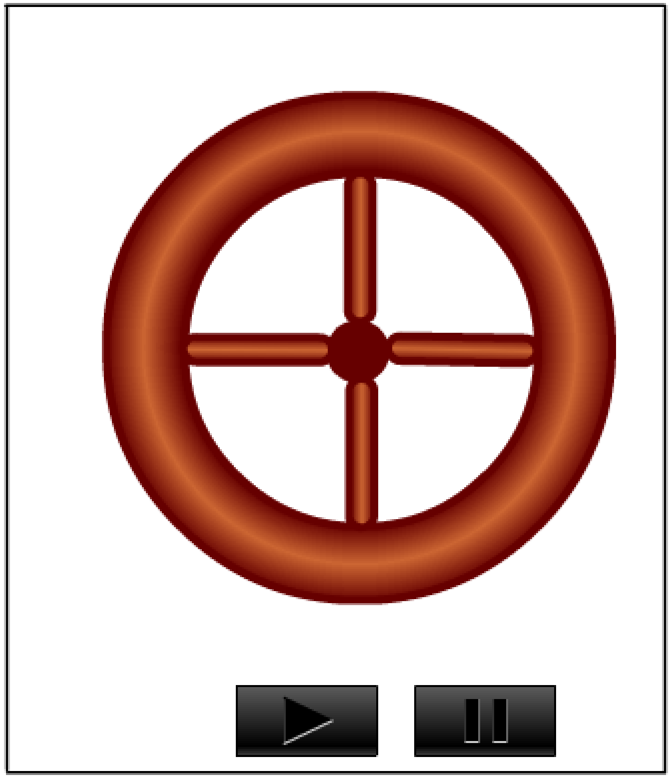


棒的质心C上升的最大高度，与第一阶段情况相似，也可由机械能守恒定律求得：

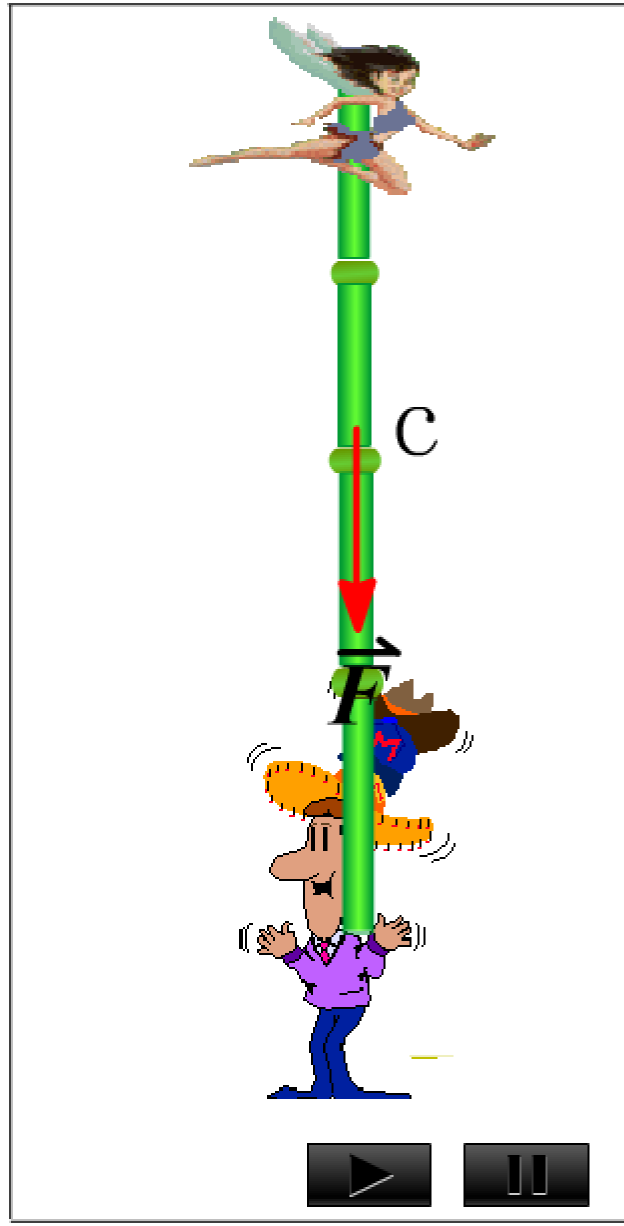
$$mgh=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega'^2 \qquad \textbf{(6)}$$

把式**(5)**代入上式，所求结果为

$$h=\frac{l}{2}+3\mu s-\sqrt{6\mu sl}$$



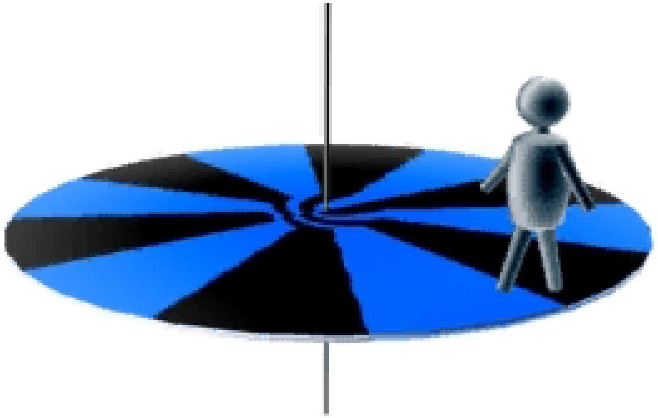
飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

例题：如图所示，质量为M、半径为R的转盘，可绕铅直轴无摩擦转动。一质量为m的人，在转盘上从静止开始沿半径为r的圆周相对转盘走动，转盘的初角速度为零。求当人在转盘上走一周回到盘上的原位置时，转盘相对于地面转过了多少角度。

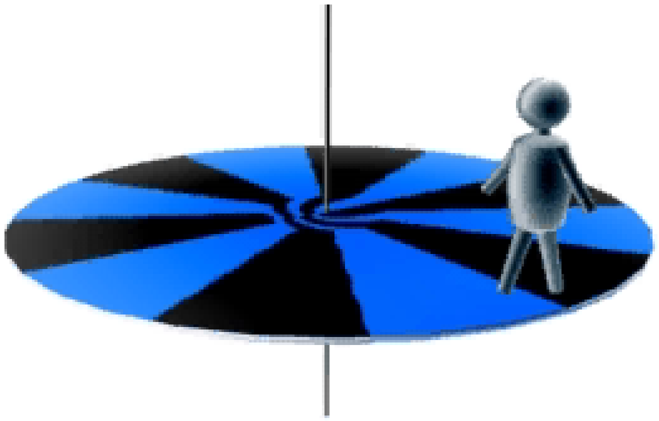
解：人对转盘的速度为v_r，转盘对固定轴的角速度为ω，则人相对地面的速度为 $v_r + r\omega$。因此人对转轴的角速度为：



$$\frac{v_r}{r} + \omega$$

系统对轴的动量矩守恒，即

$$mr^2\left(\frac{v_r}{r}+\omega\right)+\frac{1}{2}MR^2\omega=0$$



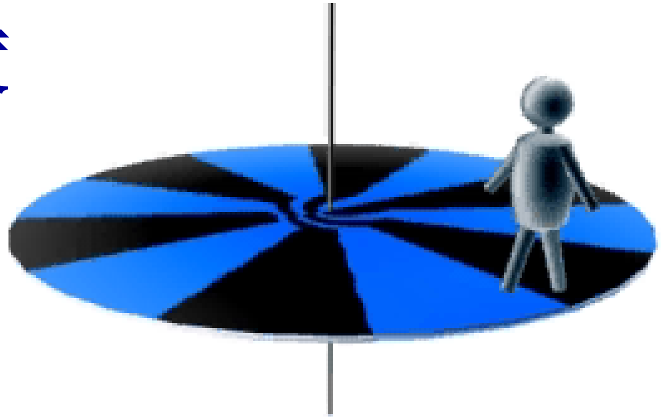
$$\omega=-\frac{mrv_r}{mr^2+\frac{1}{2}MR^2}$$

在时间dt内，盘相对于地面转过的角度为dθ，则

$$\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t=-\frac{mrv_r}{mr^2+\frac{1}{2}MR^2}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{mrv_r}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}\mathrm{d}t = -\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}\frac{v_r}{r}\mathrm{d}t$$

其中 $\frac{v_r}{r}\mathrm{d}t$ 为人相对转盘转过的角度



所以，盘相对于地面转过的角度为

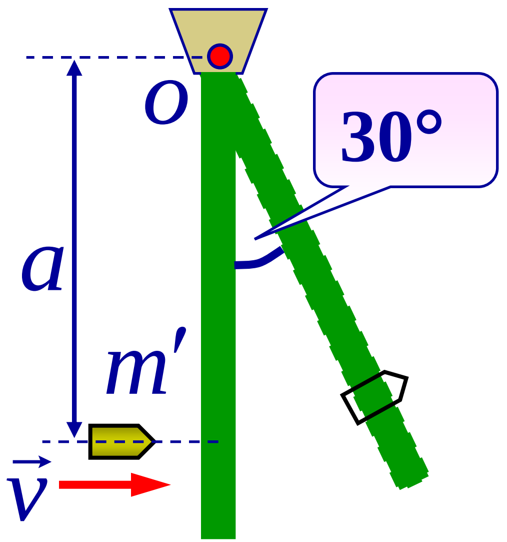
$$\int \mathrm{d}\theta = -\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}\int \frac{v_r}{r}dt = -\frac{mr^2}{mr^2 + \frac{1}{2}MR^2}2\pi$$

例：一长为*l*, 质量为*m′*的竿可绕支点*O*自由转动。一质量为*m*、速率为*v*的子弹射入竿内距支点为*a*处，使竿的偏转角为30 °。问子弹的初速率为多少？

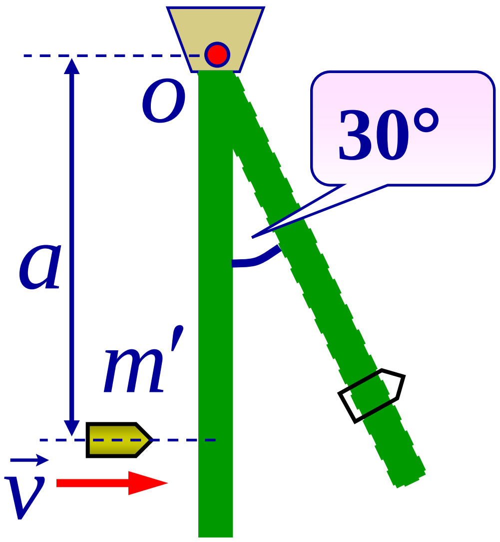
解：把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒

$$mva=(\frac{1}{3}m'l^2+ma^2)\omega$$

$$\omega=\frac{3mva}{m'l^2+3ma^2}$$



$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$

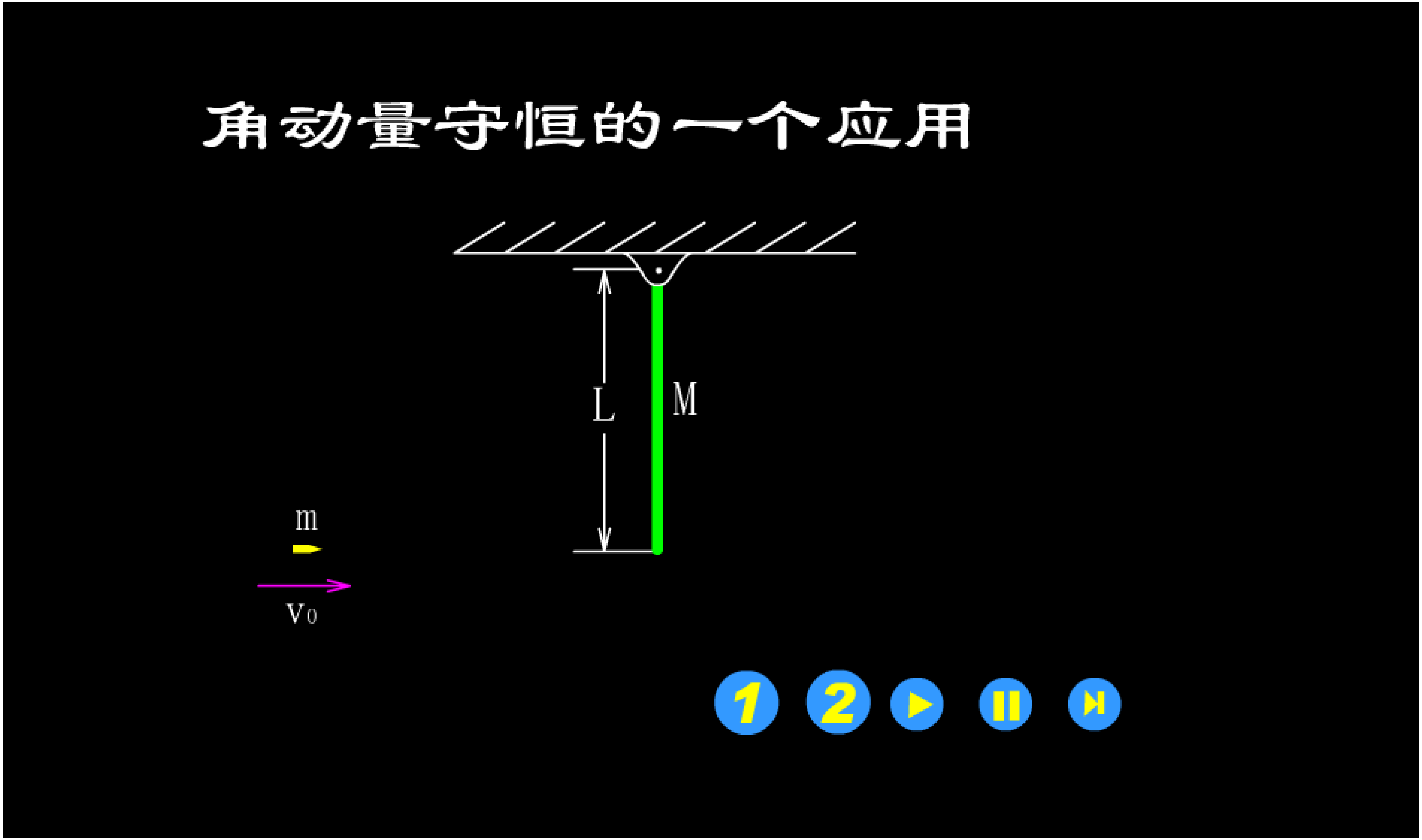


射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒 。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega^2 =$$

$$mga(1-\cos 30^\circ) + m'g\frac{l}{2}(1-\cos 30^\circ)$$

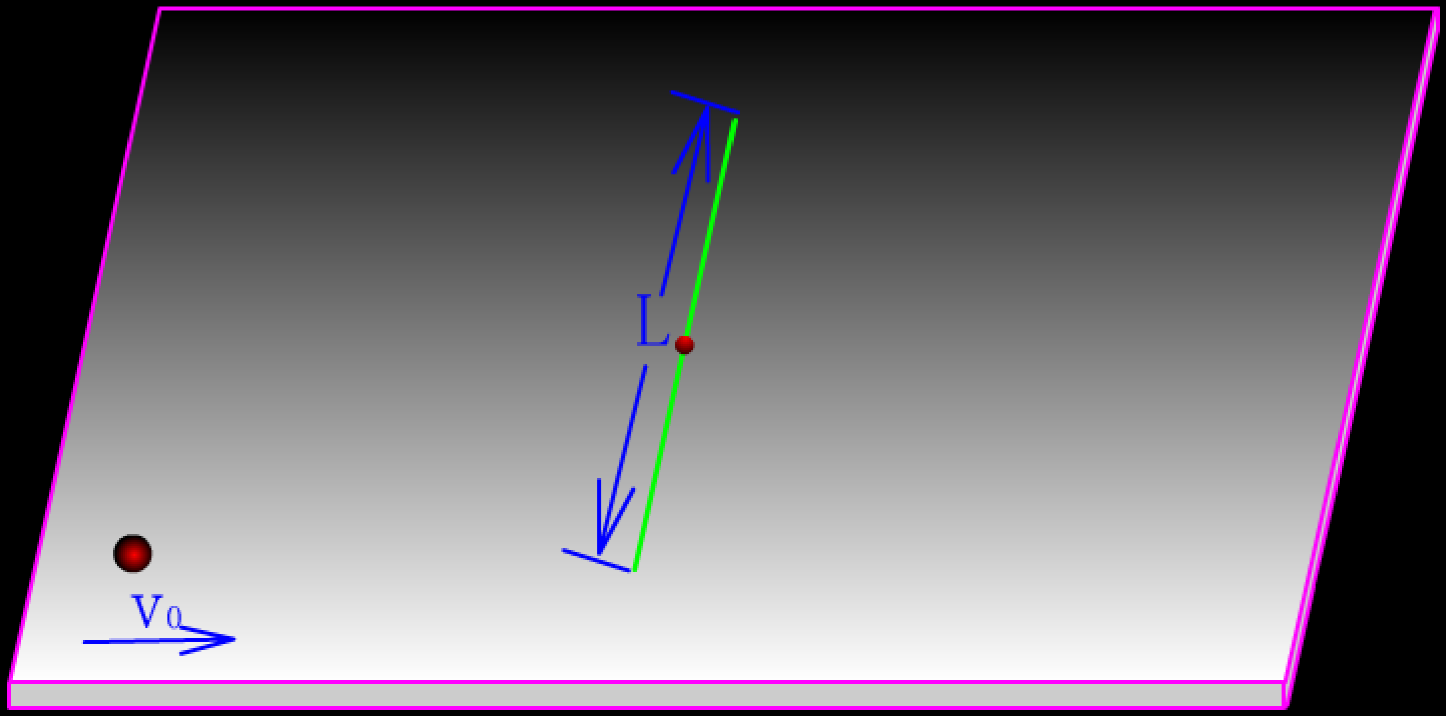
$$v = \sqrt{g(2-\sqrt{3})(m'l+2ma)(m'l^2+3ma^2)/6} \Big/ ma$$



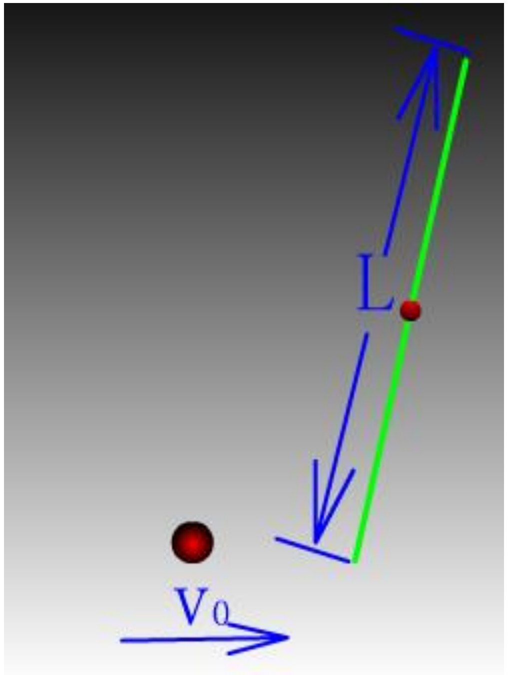
角动量守恒

例题：一根长为L质量为M的均匀直棒，静止在一光滑水平面上。它的中点有一竖直光滑固定轴。一个质量为m的小球以速度v_0垂直棒冲击其一端发生弹性碰撞。求碰撞后球的速度v和棒的角速度ω。

角动量守恒和动能守恒应用



解：由题意，碰撞时系统角动量守恒、能量守恒（弹性碰撞）。作用力和小球运动方向相反，故小球在碰撞后仍在原运动直线上运动。



$$mv_0\frac{L}{2}=\frac{1}{12}ML^2\omega+mv\frac{L}{2}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \omega=\frac{12mv_0}{(3m+M)L}\qquad v=\frac{(3m-M)v_0}{3m+M}$$

$$mv_0 L/2 = ML^2\omega/12 + mvL/2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mv_0 = ML\omega/6 + mv$$

扔掉ω = 0

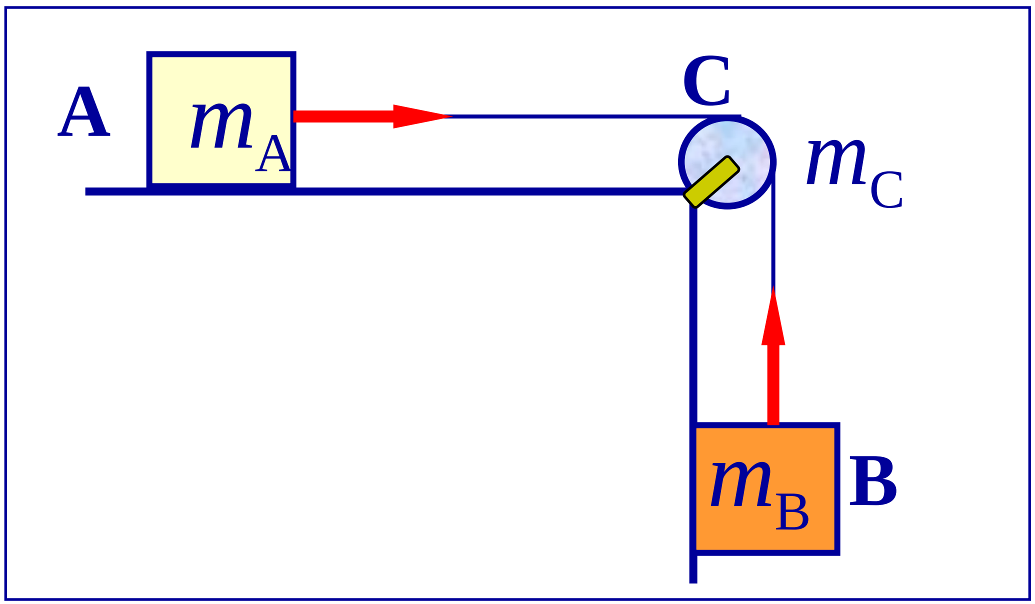
$$m^2v_0^2 = ML^2\omega^2/12 + m^2v^2$$

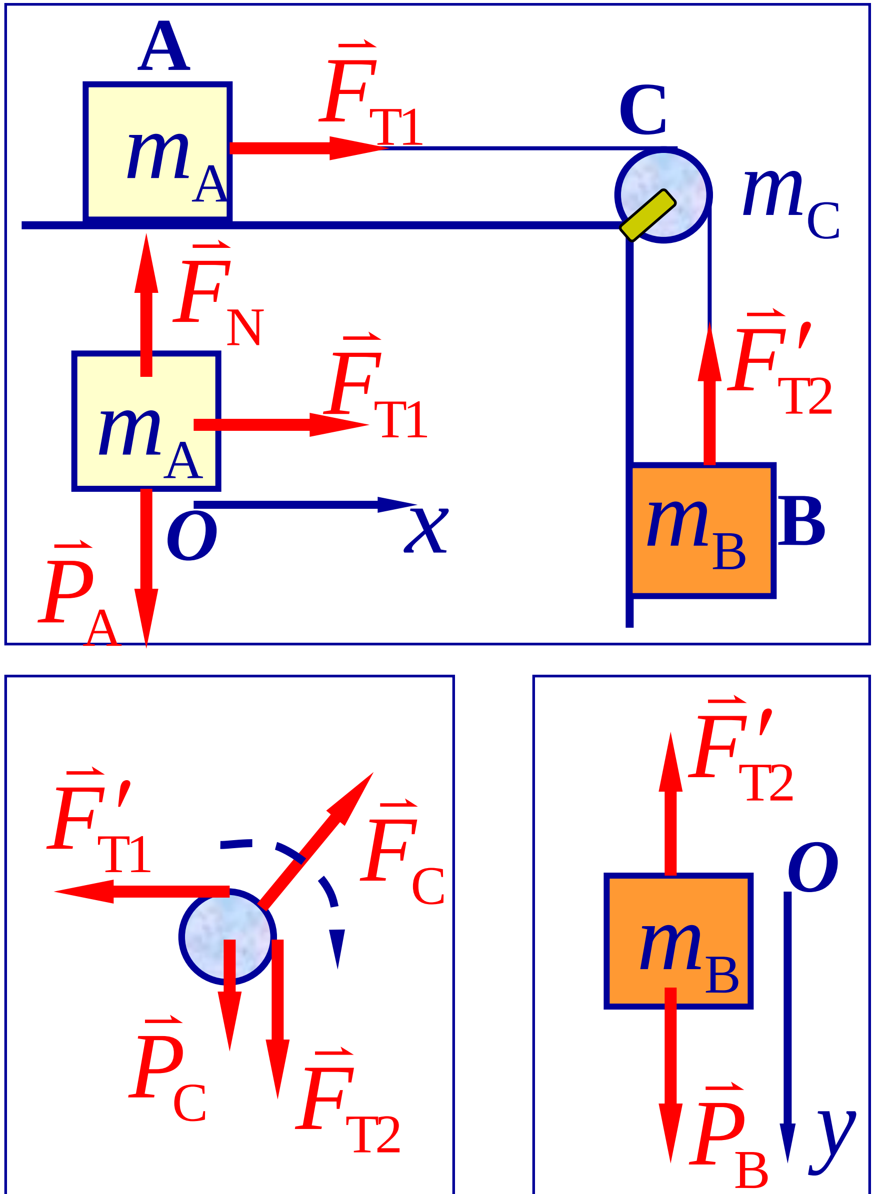
$$= ML^2\omega^2/12 + \left(mv_0 - ML\omega/6\right)^2$$

$$\frac{m}{12}ML^2\omega^2 + \frac{1}{36}M^2L^2\omega^2 - \frac{mv_0}{3}ML\omega = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{12mv_0}{(3m+M)L} \qquad v = \frac{(3m-M)v_0}{3m+M}$$

例　质量为m_A的物体A静止在光滑水平面上，和一质量不计的绳索相连接，绳索跨过一半径为R、质量为m_C的圆柱形滑轮C，并系在另一质量为m_B的物体B上。滑轮与绳索间没有滑动，且滑轮与轴承间的摩擦力可略去不计。问：（1）两物体的线加速度为多少？水平和竖直两段绳索的张力各为多少？（2）物体B从静止落下距离y时，其速率是多少？（3）若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为M_f再求线加速度及绳的张力。

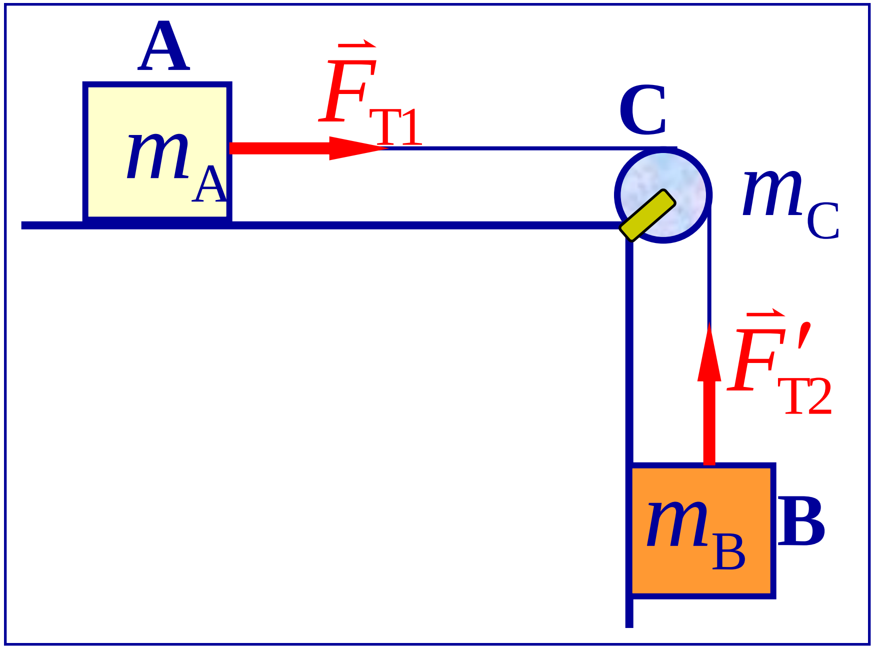




解 （1）隔离物体分别对物体A、B 及滑轮作受力分析，取坐标如图，运用牛顿第二定律 、转动定律列方程。

$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ R F_{T2} - R F_{T1} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\ F_{T1} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \\ F_{T2} = \dfrac{(m_A + m_C/2) m_B g}{m_A + m_B + m_C/2} \end{cases}$$



如令$m_C = 0$，可得 $F_{T1} = F_{T2} = \dfrac{m_A m_B g}{m_A + m_B}$

（2）B由静止出发作匀加速直线运动，下落的速率

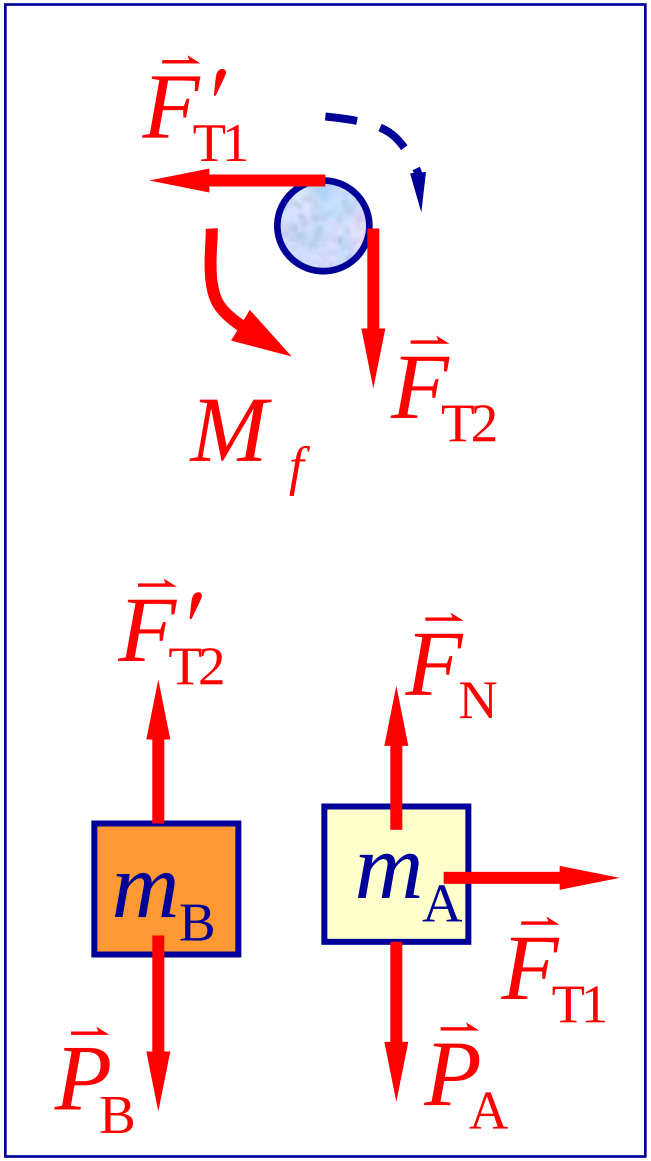
$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{\frac{2 m_B g y}{m_A + m_B + m_C/2}}$$

（3） 考虑滑轮与轴承间的摩擦力矩 M_f，转动定律

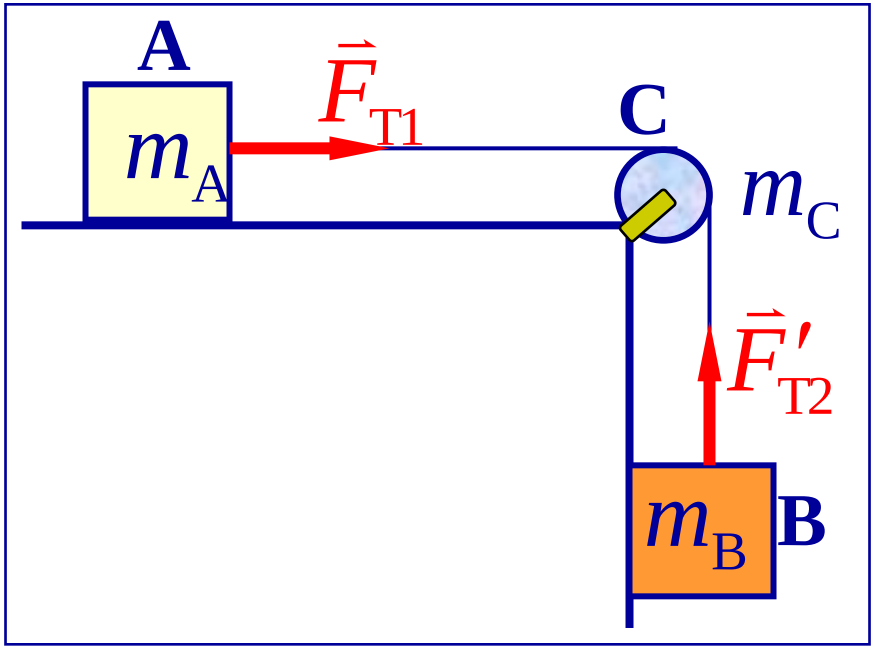
$$RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\alpha$$

结合（1）中其它方程

$$\begin{cases} F_{T1} = m_A a \\ m_B g - F_{T2} = m_B a \\ RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



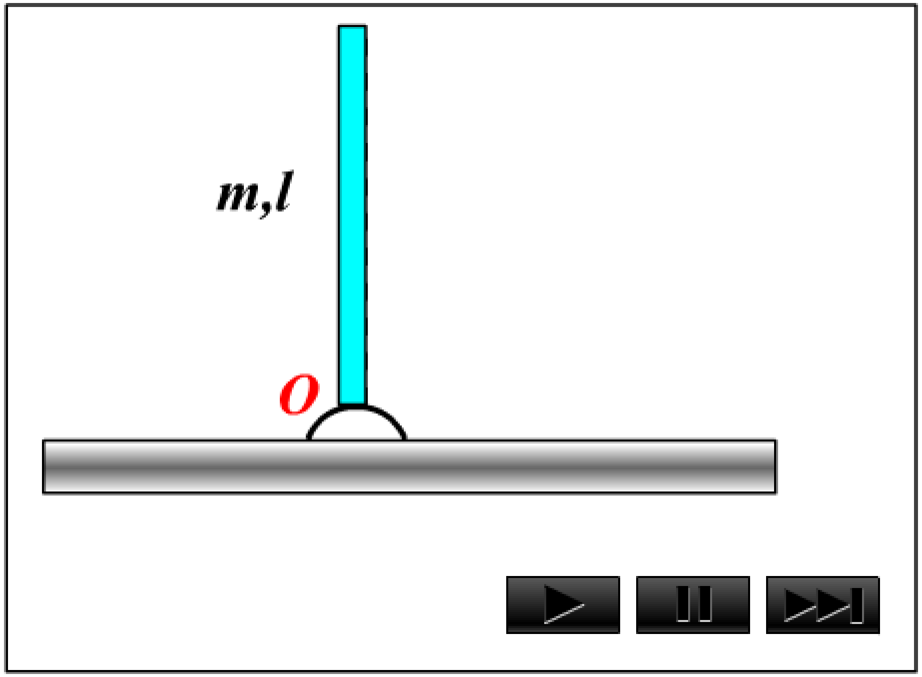
$$\begin{cases} F_{\mathrm{T1}} = m_{\mathrm{A}} a \\ m_{\mathrm{B}} g - F_{\mathrm{T2}} = m_{\mathrm{B}} a \\ R F_{\mathrm{T2}} - R F_{\mathrm{T1}} - M_{\mathrm{f}} = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$



$$a = \frac{m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}} / R}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2} \qquad F_{\mathrm{T1}} = \frac{m_{\mathrm{A}} (m_{\mathrm{B}} g - M_{\mathrm{f}} / R)}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2}$$

$$F_{\mathrm{T2}} = \frac{m_{\mathrm{B}} \left[(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{C}} / 2) g + M_{\mathrm{f}} / R \right]}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}} / 2}$$

例　一长为*l* 质量为*m*匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链*O*相接，并可绕其转动。由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链*O* 转动。试计算细杆转动到与竖直线成θ角时的角加速度和角速度。



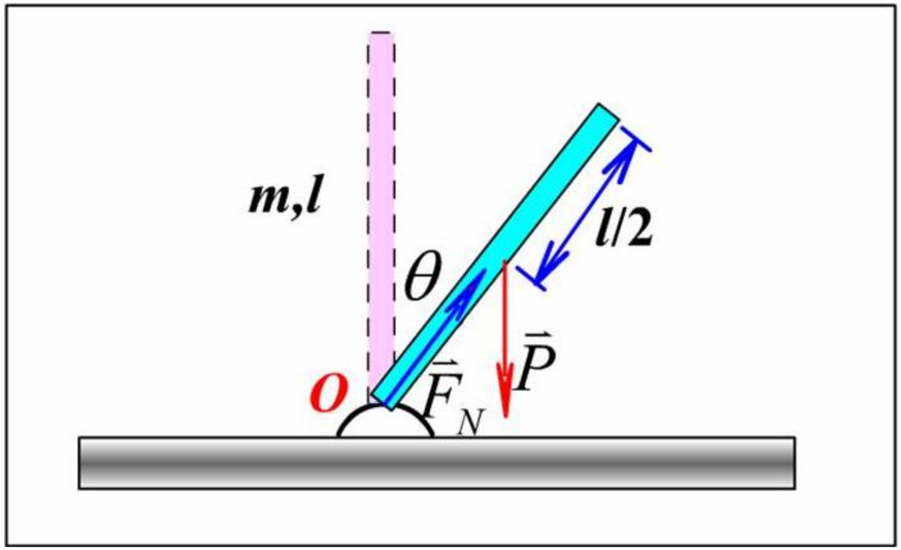
解　　细杆受重力和铰链对细杆的约束力$\vec{F}_N$作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha$$

式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$

得 $\alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$



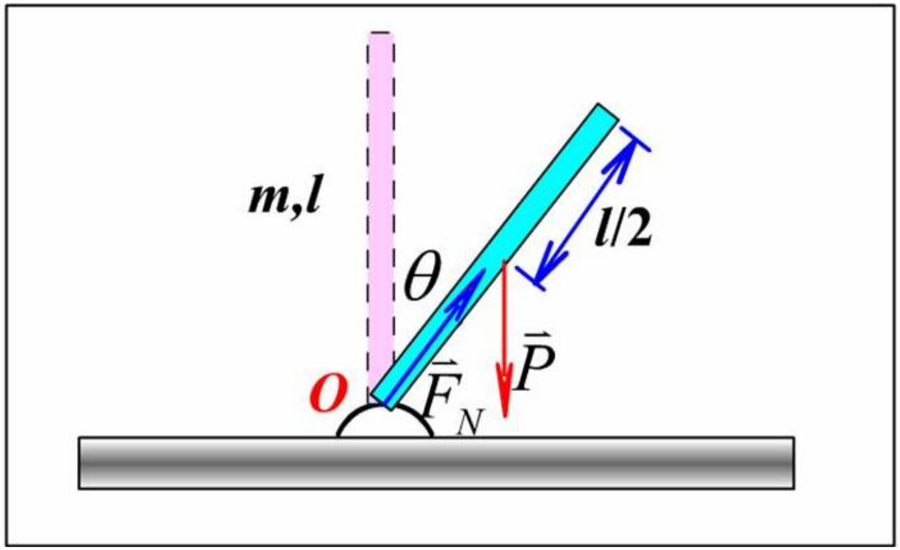
由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \qquad \omega\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分 得 $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

本题也可用能量守恒求解。

能量守恒的解法：



$$\frac{1}{2}mgl\cos\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

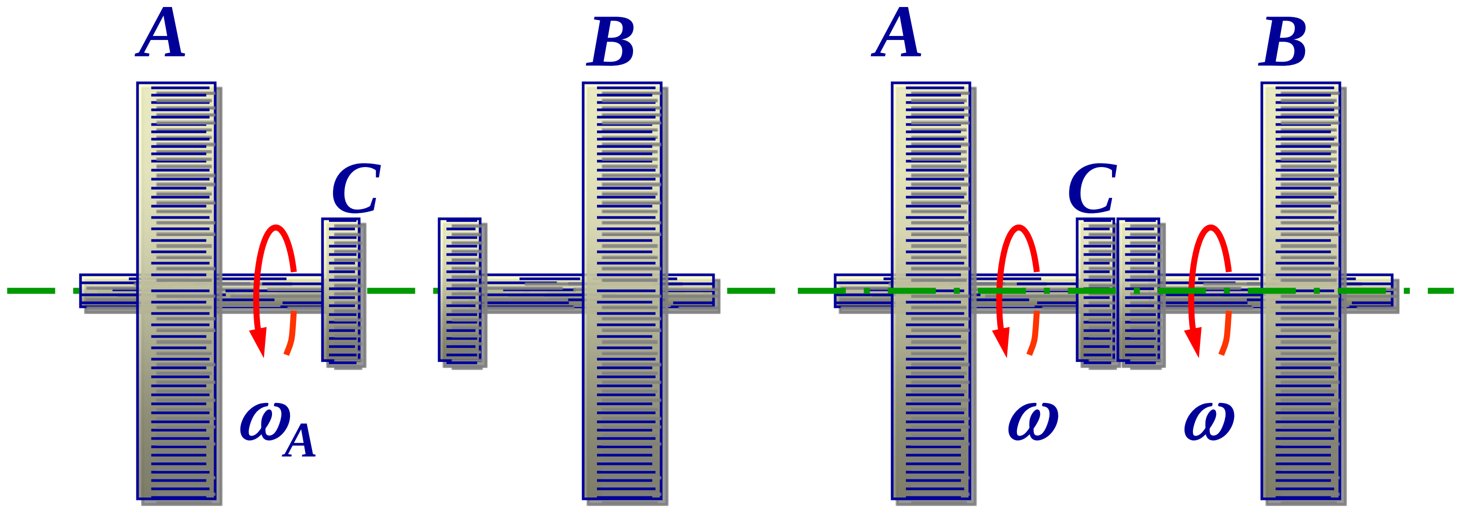
得 $$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$

由角加速度的定义

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \omega\times\frac{1}{2\omega}\times\frac{3g\sin\theta}{l}$$

$$\alpha = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

例题：工程上，两飞轮常用摩擦啮合器使它们以相同的转速一起转动。如图所示，*A*和*B*两飞轮的轴杆在同一中心线上，*A*轮的转动惯量为$J_A = 10\mathrm{kg \cdot m^2}$，B的转动惯量为$J_B = 20\mathrm{kg \cdot m^2}$ 。开始时*A*轮的转速为600r/min，*B*轮静止。*C*为摩擦啮合器。求两轮啮合后的转速；在啮合过程中，两轮的机械能有何变化？

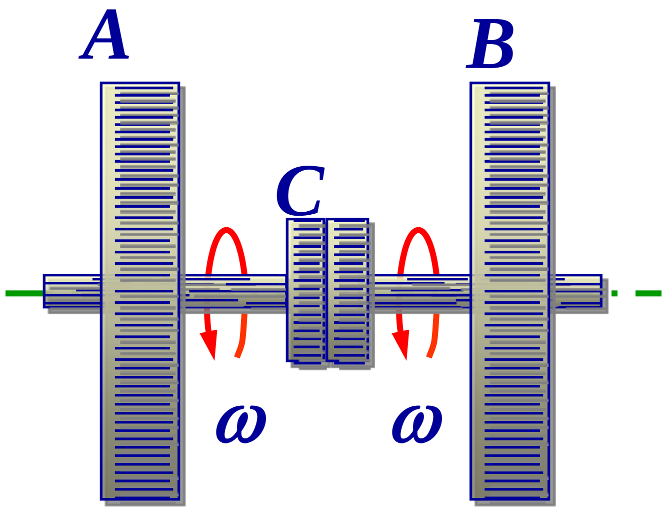


解： 以飞轮A、B和啮合器C作为一系统来考虑，在啮合过程中，系统没有受到其他外力矩，所以系统的角动量守恒。

$$J_A\omega_A + J_B\omega_B = (J_A + J_B)\omega$$

ω为两轮啮合后共同转动的角速度，于是

$$\omega = \frac{J_A\omega_A + J_B\omega_B}{J_A + J_B}$$



以各量的数值代入得

$$\omega = 20.9\text{rad/s}$$

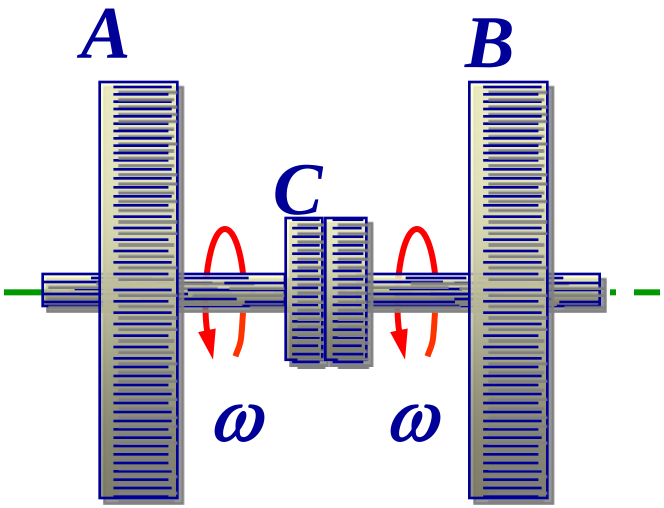
或共同转速为

$$n = 200\mathrm{r/min}$$

在啮合过程中，摩擦力矩作功，所以机械能不守恒，部分机械能将转化为热量，损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}J_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 - \frac{1}{2}(J_A + J_B)\omega^2$$

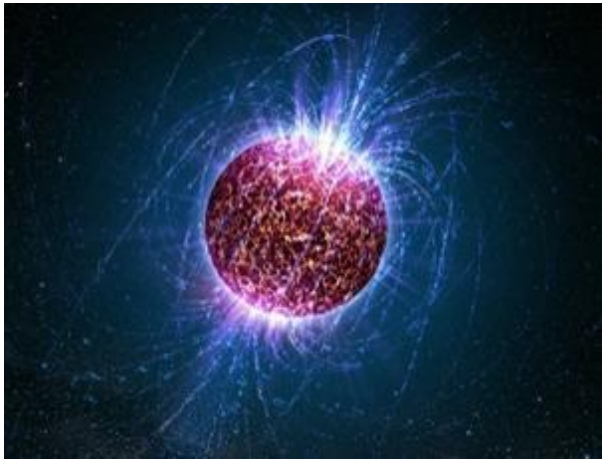
$$= 1.32\times10^4\,\mathrm{J}$$



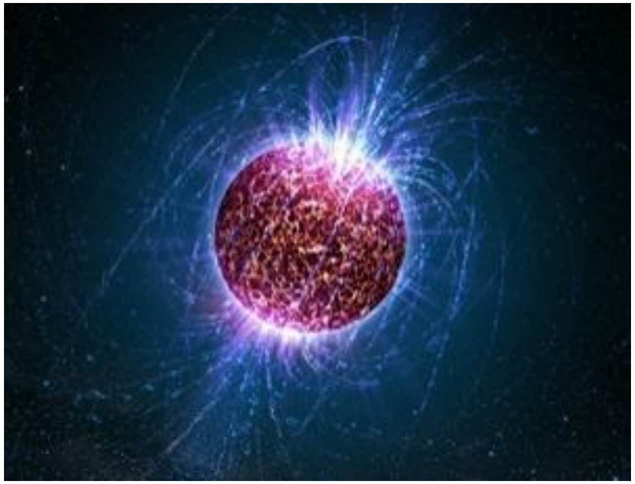
例题：恒星晚期在一定条件下，会发生超新星爆发，这时星体中有大量物质喷入星际空间，同时星的内核却向内坍缩，成为体积很小的中子星。中子星是一种异常致密的星体，一汤匙中子星物体就有几亿吨质量！设某恒星绕自转轴每45天转一周，它的内核半径R_0约为2×10^7m，坍缩成半径R仅为6×10^3m的中子星。试求中子星的角速度。坍缩前后的星体内核均看作是匀质圆球。

解　在星际空间中，恒星不会受到显著的外力矩，因此恒星的角动量应该守恒，则它的内核在坍缩前后的角动量$J_0\omega_0$和$J\omega$应相等。因

$$J_0=\frac{2}{5}mR_0^2,\quad J=\frac{2}{5}mR^2$$



代入$J_0\omega_0 = J\omega$中，整理后得



$$\omega = \omega_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

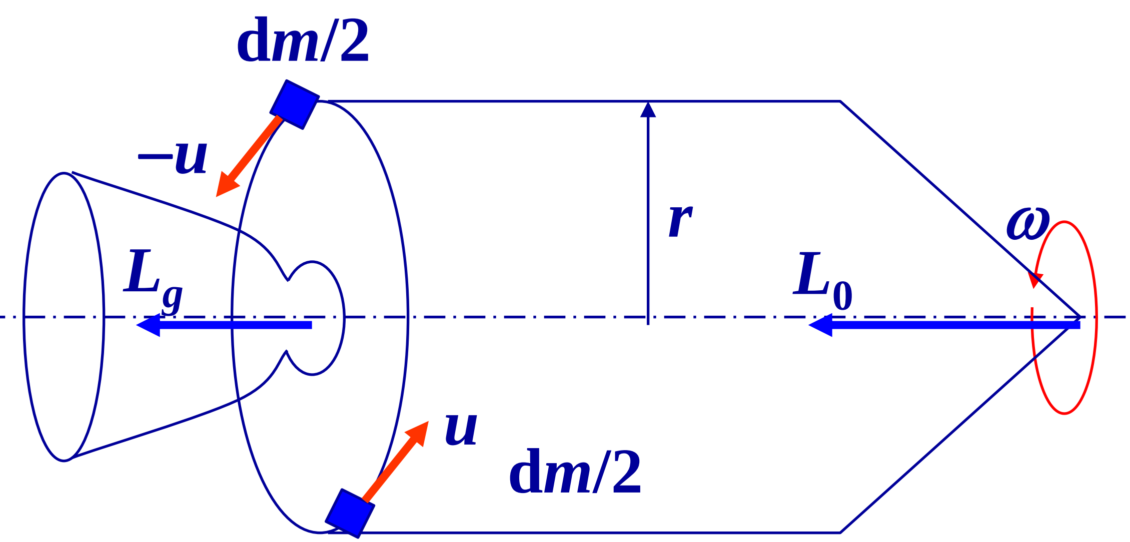
$$= \frac{1}{45}\left(\frac{2\times10^7}{6\times10^3}\right)^2\left(\frac{1}{24\times60\times60}\right)\text{r/s}$$

$$= 3\text{r/s}$$

由于中子星的致密性和极快的自转角速度，在星体周围形成极强的磁场，并沿着磁轴的方向发出很强的无线电波、光或X射线。当这个辐射束扫过地球时，就能检测到脉冲信号，由此，中子星又叫脉冲星。目前已探测到的脉冲星超过300个。

例题：图中的宇宙飞船对其中心轴的转动惯量为J = 2×10^3kg·m^2，它以ω = 0.2rad/s的角速度绕中心轴旋转。宇航员用两个切向的控制喷管使飞船停止旋转。每个喷管的位置与轴线距离都是r = 1.5m。两喷管的喷气流量恒定，共是α = 2kg/s。废气的喷射速率（相对于飞船周边）u = 50m/s，并且恒定。问喷管应喷射多长时间才能使飞船停止旋转。

解 把飞船和排出的废气看作一个系统，废气质量为m。可以认为废气质量远小于飞船的质量，

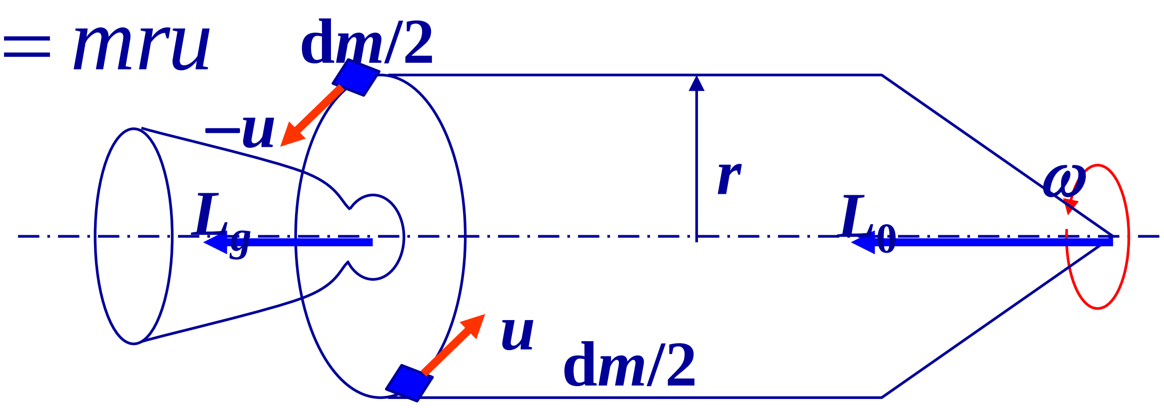


所以原来系统对于飞船中心轴的角动量近似地等于飞船自身的角动量，即

$$L_0 = J\omega$$

在喷气过程中，以dm表示dt时间内喷出的气体，这些气体对中心轴的角动量为$dm \cdot r(u+v)$，方向与飞船的角动量相同。因$u = 50$ m/s远大于飞船的速率$v(=\omega r)$，所以此角动量近似地等于$dm \cdot ru$。在整个喷气过程中喷出废气的总的角动量L_g应为

$$L_g = \int_0^m dm \cdot ru = mru$$



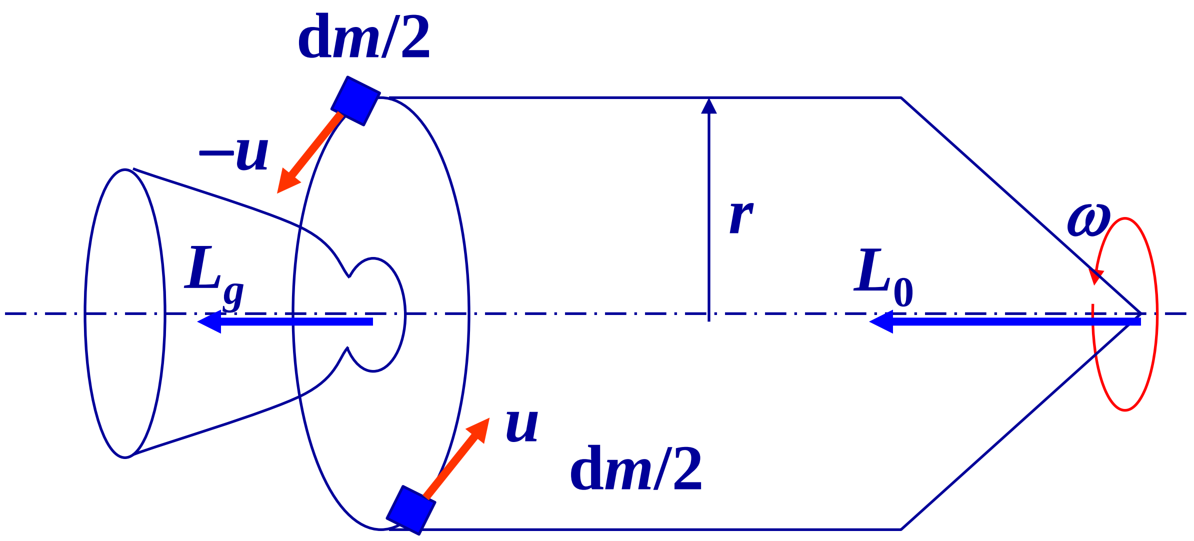
当宇宙飞船停止旋转时，其角动量为零。系统这时的总角动量L_1就是全部排出的废气的总角动量，即为

$$L_1 = L_g = mru$$

在整个喷射过程中，系统所受的对于飞船中心轴的外力矩为零，所以系统对于此轴的角动量守恒，即$L_0 = L_1$，由此得

$$J\omega = mru$$

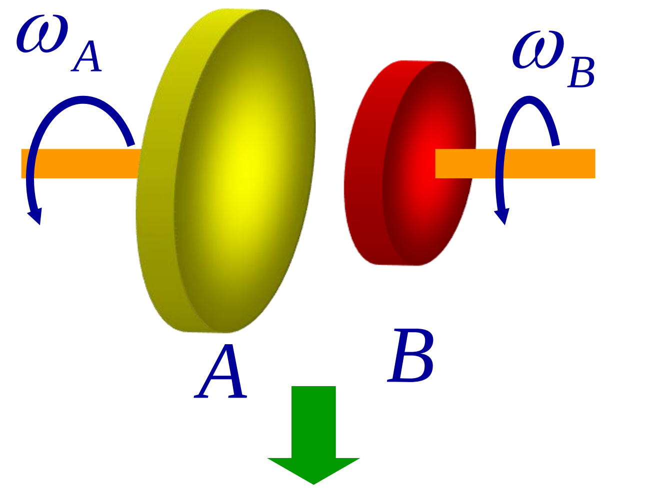
即 $$m = \frac{J\omega}{ru}$$



于是所需的时间为

$$t = \frac{m}{\alpha} = \frac{J\omega}{\alpha r u} = \frac{2\times 10^3 \times 0.2}{2\times 1.5\times 50}\mathrm{s} = 2.67\mathrm{s}$$

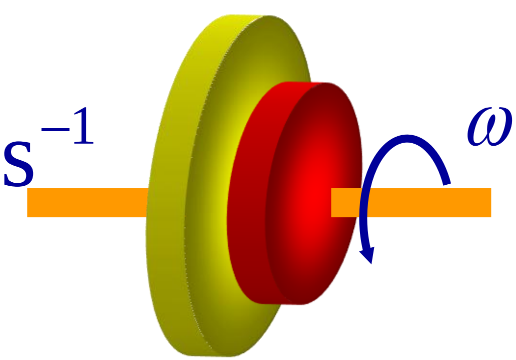
例：*A*、*B*两圆盘绕各自的中心轴转动，角速度分别为：$\omega_A = 50\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，$\omega_B = 200\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$。已知*A*圆盘半径$R_A = 0.2\mathrm{m}$，质量$m_A = 2\mathrm{kg}$, *B* 圆盘的半径$R_B = 0.1\mathrm{m}$，质量$m_B = 4\mathrm{kg}$。试求两圆盘对心衔接后的角速度ω。



解：以两圆盘为系统，系统角动量守恒，

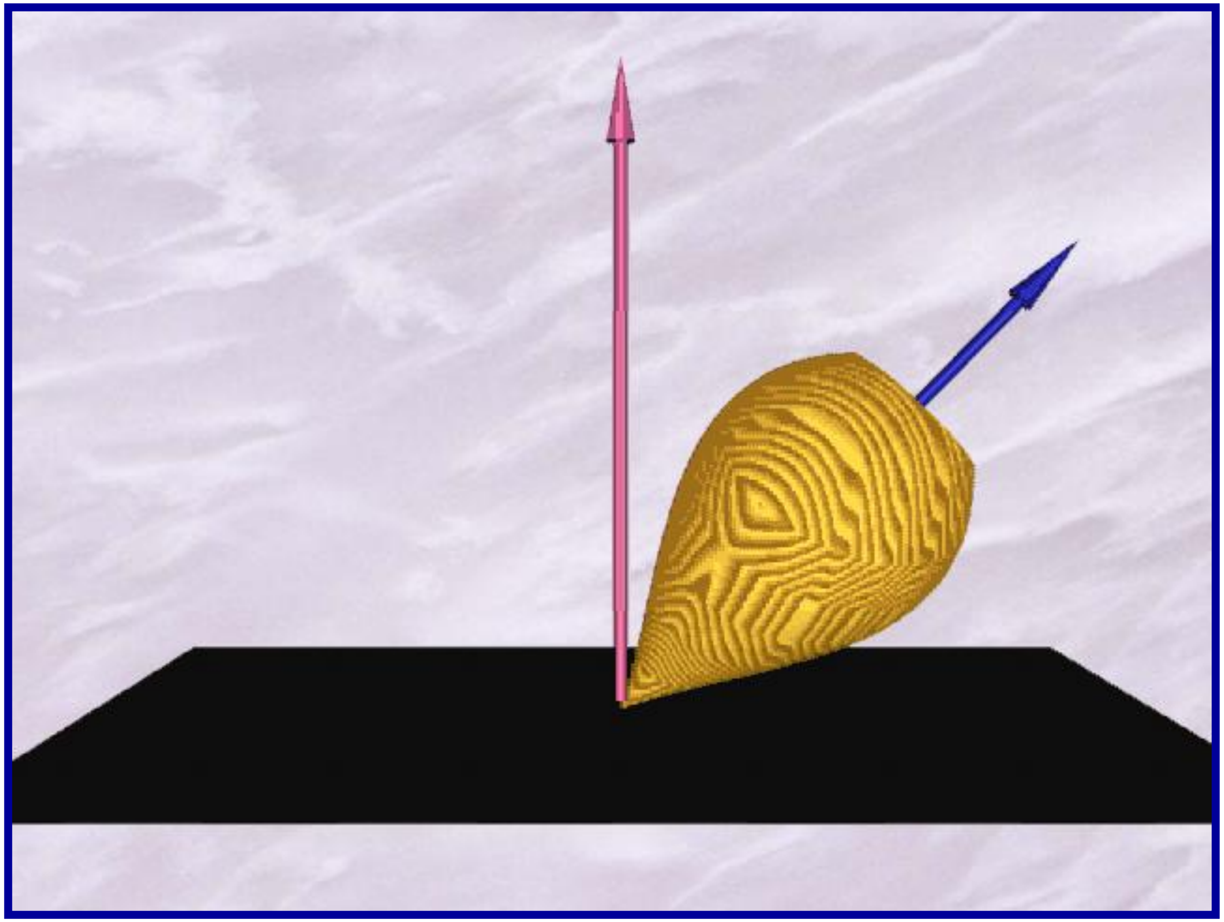
$$\begin{cases} J_A\omega_A + J_B\omega_B = (J_A + J_B)\omega \\ J_A = m_A R_A^2/2, \quad J_B = m_B R_B^2/2 \end{cases}$$

$$\omega = \frac{m_A R_A^2 \omega_A + m_B R_B^2 \omega_B}{m_A R_A^2 + m_B R_B^2} = 100\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$



* 进 动

进动：高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动的现象。



进动原因

刚体受重力矩

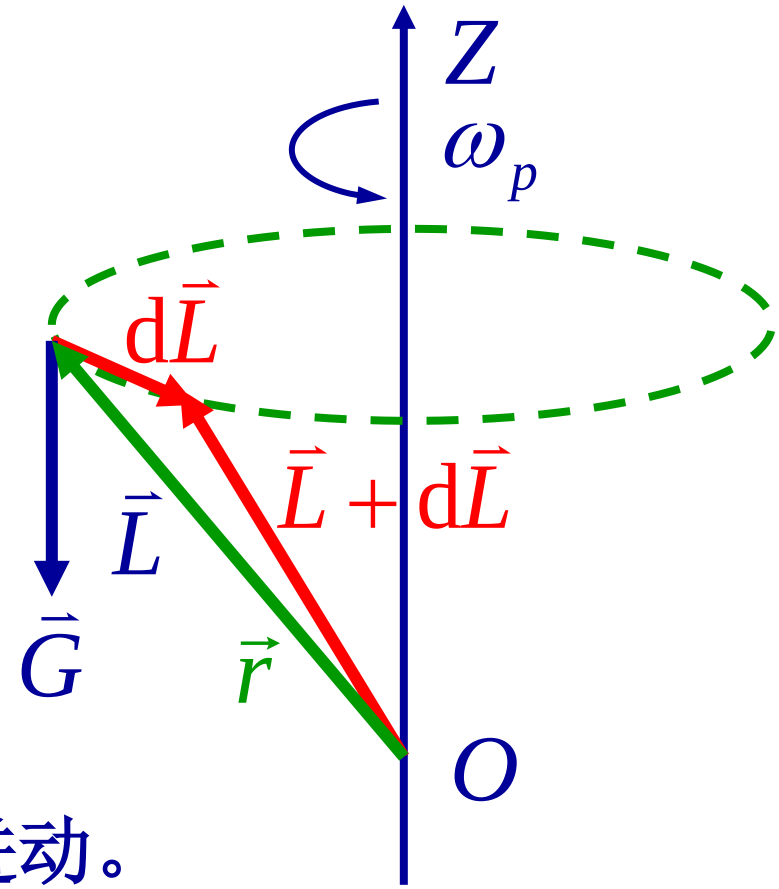
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$$

d*t* 时间内角动量增量

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot \mathrm{d}t$$

因 $\mathrm{d}\vec{L} \perp \vec{L}$

所以自转轴发生转动，产生进动。



用角动量定理研究进动

$$\mathrm{d}L = L\sin\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$= J\omega\sin\theta \mathrm{d}\varphi$$

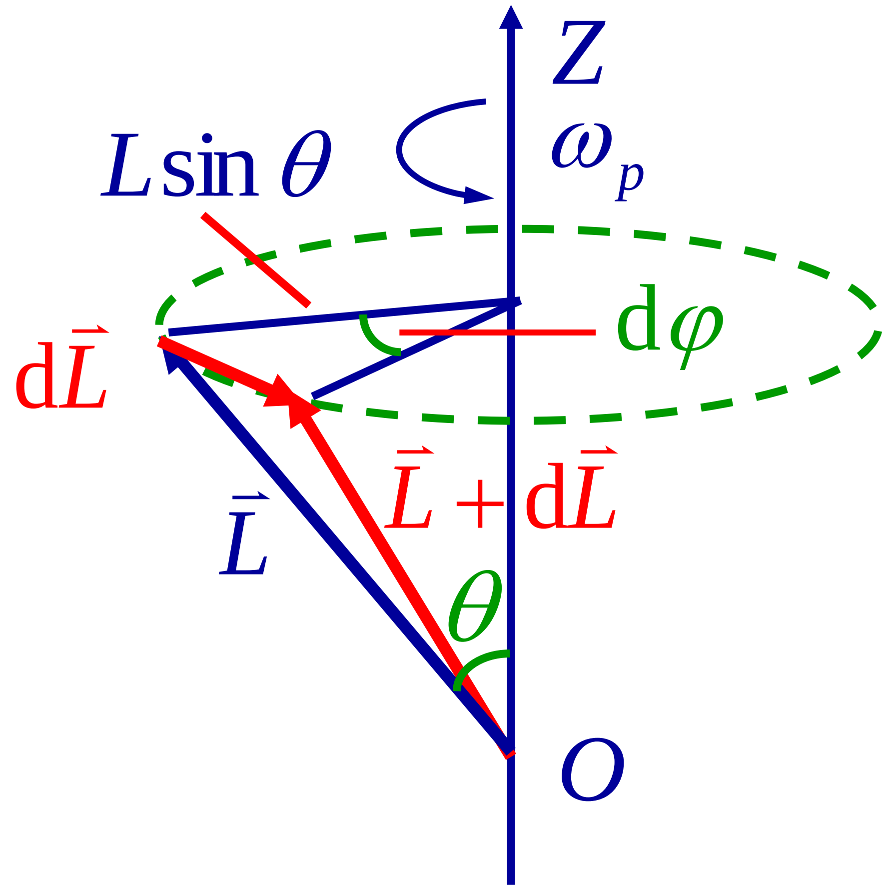
由角动量定理

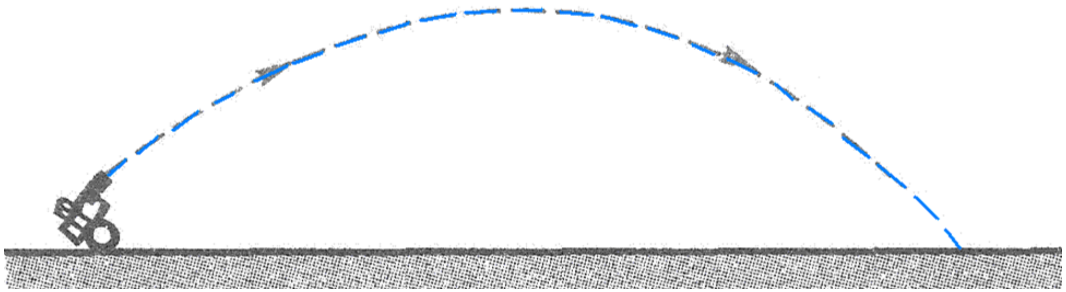
$$\mathrm{d}L = M\mathrm{d}t$$

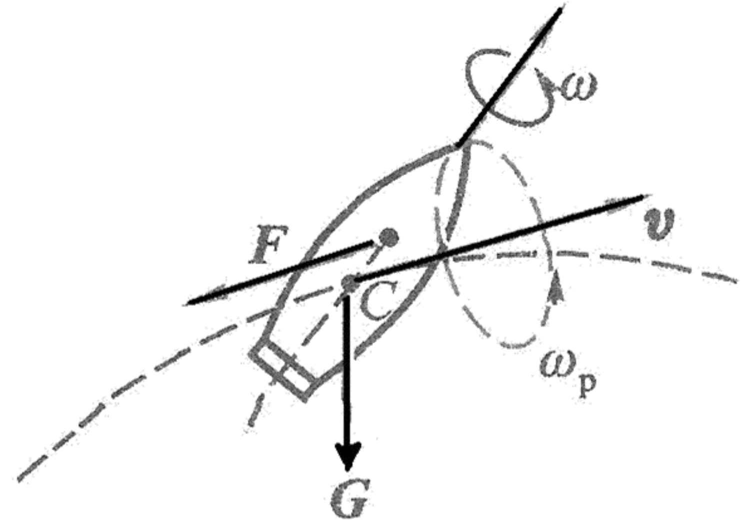
所以 $M\mathrm{d}t = J\omega\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

进动角速度

$$\omega_p = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}$$







回转效应有时也引起有害的作用。例如在轮船转弯时，由于回转效应，涡轮机的轴承将受到附加的力，这在设计和使用中是必须考虑的。

进动的概念在微观世界中也常用到。例如，原子中的电子同时参与绕核运动与电子本身的自旋，都具有角动量，在外磁场中，电子将以外磁场方向为轴线作进动。这导致了电子自旋的发现。