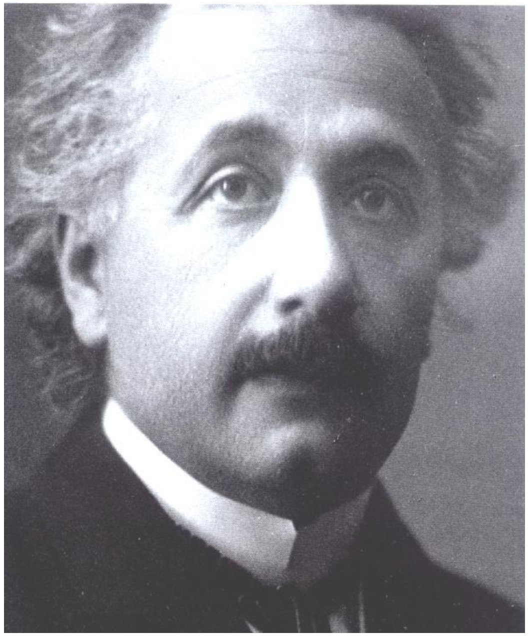
第十四章

狭义相对论力学基础

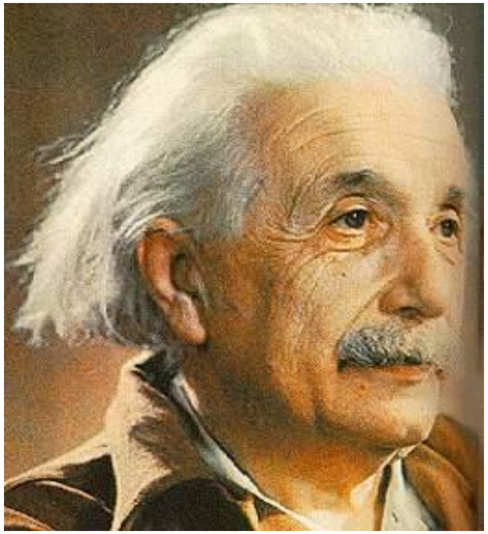


爱因斯坦简介

创立了狭义相对论

发展了量子理论

建立了广义相对论



Albert Einstein （1879 – 1955）

20世纪最伟大的物理学家，于1905年和1915年先后创立了狭义相对论和广义相对论，他于1905年提出了光量子假设，为此他于1921年获得诺贝尔物理学奖，他还在量子理论方面具有很多的重要的贡献。

爱因斯坦的哲学观念：自然界应当是和谐而简单的。

理论特色：出于简单而归于深奥。

1879年，爱因斯坦诞生于德国一个犹太小资本家的家庭。这个孩子很晚才会讲话，父母都有点怀疑他智力发育不健全。上学后，除数学外其它功课成绩平平。他沉默寡言，不受老师和同学的喜爱。他不喜欢学校那种常规呆板的学习方法，却喜欢看课外的科普读物和独立思考问题。父母对音乐的热爱，使爱因斯坦从小就与小提琴结下良缘。爱因斯坦的父亲是个不成功的企业家，他在德国的工厂面临倒闭，不得不到意大利去投亲靠友。他把爱因斯坦留在慕尼黑的一所优秀中学学习。犹太血统，怀疑主义和自由思想以及对学校教育的批评态度，使校方对爱因斯坦十分厌烦，认为他的存在有损学校的荣誉和尊严。爱因斯坦也对这所学校非常厌倦。

正当爱因斯坦设法找医生弄到一份神经衰弱的证明，打算申请因病休学半年的时候，校方已经迫不及待地采取了主动。他们要求爱因斯坦退学到意大利去找自己的父母，16岁的爱因斯坦愉快地接受了这一建议。他长途跋涉穿越阿尔卑斯山，一路欣赏那迷人的山水风光，幸福地回到父母的身边。年轻的爱因斯坦热爱数学和物理，决心到瑞士去求学。他第一次投考苏黎士工业大学没有考上。于是进入瑞士的阿劳州立中学补习。这所学校给学生以充分的自主和自由。爱因斯坦一生中对学校很少有好印象，只有阿劳中学是个例外。他晚年时回忆道，“这所学校用它的自由精神和那些毫不仰赖外界权威的教师的淳朴热情培养了我的独立精神和创造精神。正是阿劳中学才成为孕育相对论的土壤”。

经过一年的补习，爱因斯坦终于如愿以偿进入苏黎士工业大学教育系学习。这是一个培养数学、物理教师的系，所开课程主要是数学和物理。闵可夫斯基、韦伯等著名数学、物理教授在那里讲课。但爱因斯坦有他自己的一套学习方法，他愿意自己去读当时一些大科学家写的名著，而不愿去听课。幸亏他的女友米列娃·玛里奇帮他记笔记。米列娃相貌平常，而且脚有残疾，是一个善良、严肃、沉静具有自由思想的塞尔维亚姑娘，是充满活力的爱因斯坦的忠实听众。爱因斯坦的另一位好友格罗斯曼勤奋认真、成绩优秀，而且在考试前的关键时刻，乐于把自己的笔记借给他用。在他们二人的帮助下，爱因斯坦才没有补考留级，并有空读了不少有用的书籍，思考了许多物理学的基本问题。

但是，爱因斯坦却得不到老师的重视和喜爱。由于他不常去听课，闵可夫斯基教授对爱因斯坦没有什么印象。韦伯教授倒是对他有印象，但没有好印象。韦伯不但烦他不来听课，还认为他没有礼貌，居然称呼他“韦伯先生 ”，而不是“韦伯教授”。毕业时格罗斯曼等几个同学令人羡慕地留校工作，而爱因斯坦则不得不拿着文凭离开工大。米列娃连文凭都没有拿到，只拿到结业证书，因为文凭不发给妇女。离开校门的爱因斯坦在求职过程中尝尽了辛酸。犹太血统和无神论信仰，增加了他找工作的困难。经济的拮据使得爱因斯坦不得不在电线杆上张贴广告，试图讲授数学、物理和小提琴来赚钱糊口。他曾当过补习老师，也曾为老同学帮自己找到几个月的临时工作而喜出望外。好长一段时间，他没有固定的收入。

1902年，幸运之神开始敲响爱因斯坦的门户。“伯乐”式的朋友格罗斯曼设法把他推荐给伯尔尼的发明专利局局长。在那里，爱因斯坦终于得到一个固定的工作，虽然只是最低等的三级职员，但毕竟有了一份稳定的收入，使爱因斯坦有了结婚的经济基础。同米列娃结婚之后，两个儿子相继来到人间。家庭负担的加重，使他们的经济重新拮据起来，米列娃不得不在家中为大学生包午餐挣点工钱。但是，爱因斯坦是“一只快活的小鸟”，他在艰苦的条件下，继续思考着科学中最重要的问题。人们时常看到他用小车推着两个儿子在马路上散步，并不时停下来用笔记下思考的心得。

爱因斯坦经常审理发明“永动机”的申请，这虽然费去他一些时间，但荒唐而活跃的思想也多少给他输入新的灵感。重要的是，专利局的工作使他有充分的闲暇来研究自己喜爱的东西。他把想看的书摊开放在抽屉内，无事时便打开抽屉偷看，一旦上司出现，就赶快把抽屉关上。即使在今天看来，这件清闲的工作对爱因斯坦也是再合适不过了。他的大多数成就，都是在这个职位上做出的。最初他研究毛细现象，然后研究布朗运动、光电效应和时空理论，发表了一系列重要论文。应该说，他发表的论文总数并不算多，但质量非常高。

1901年，发表一篇；1902年，两篇；1903年一篇；1904年，一篇。1905年，除去博士论文外，爱因斯坦连续完成了4篇重要论文，其中任何一篇，都够得上拿诺贝尔奖。3月，完成解释光电效应的论文，提出光子说；5月，完成关于布朗运动的论文，间接证明了分子的存在；6月，完成题为“论运动媒质的电动力学”的论文，提出了相对论(即后来所称的狭义相对论)；9月完成有关质能关系式的论文，指出能量等于质量乘光速的平方$E=mc^2$，此关系式可以看作制造原子弹的理论基础。爱因斯坦在1905年26岁时做出的成就，在科学史上，只有牛顿23－25岁在乡下躲避瘟疫那段时间取得的成就可以与之相比。

爱因斯坦，犹太人，1879年出生于德国乌尔姆。爱因斯坦在学校里只是中等生，他对物理及数学很有兴趣并好奇，但语言和生物成绩不很好。1896年考入瑞士苏黎世联邦理工学院，读了四年师范物理及数学。大学毕业后，先在中学当临时教员或私人家教，1902年到瑞士专利局工作。他早期一系列最有创造性的研究工作，如相对论等，都是在专利局时利用业余时间进行的。1909年开始当教授。从1914年起任德国威廉皇家学会物理研究所所长。由于西特勒法西斯的迫害，他于1933年到美国定居，任普林斯顿大学的教授，在那个大学的高等研究所工作，直到1955年去世。

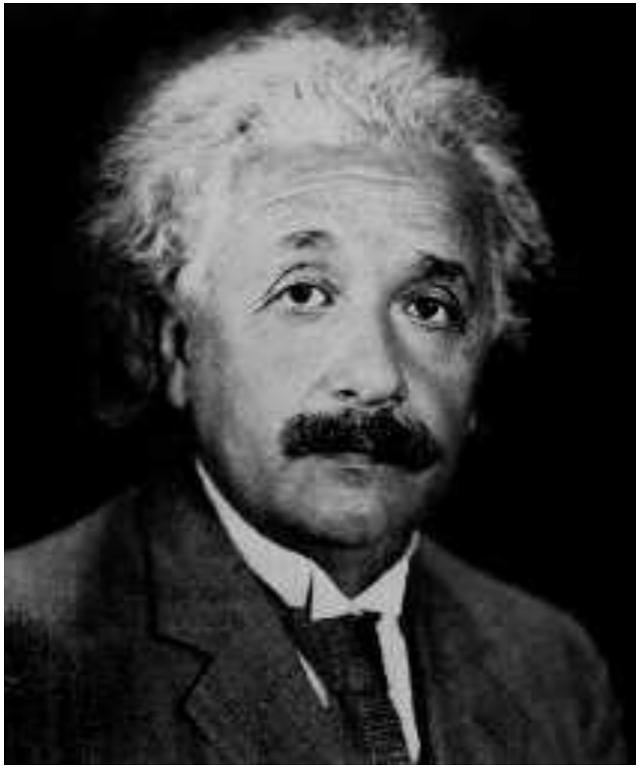
爱因斯坦的主要科学成就：

1.创立了狭义相对论　　他在1905年发表了题为《论动体的电动力学》的论文，完整地提出了狭义相对论，揭示了空间和时间的本质联系，引起了物理学的革命。同年又提出了质能相当性，在理论上为原子能时代开辟了道路。

2.发展了量子理论　　他在1905年发表了题为《关于光的产生和转化的一个启发性观点》的论文，提出了光的量子论。就是由于这篇论文 的观点使他获得了1921年的诺贝尔物理学奖。以后他又陆续发表文章提出受激辐射理论和发展了量子统计理论。

3.建立了广义相对论 他在1915年建立了广义相对论。它揭示了空间、时间、物质、运动的统一性，几何学和物理学的统一性，解释了引力的本质，也为现代天体物理学和宇宙学的发展打下了重要的基础。

此外，他对布朗运动的研究曾为分子运动论的最后胜利作出了贡献。他还开创了现代宇宙学，他努力探索的统一场论的思想指出了现代物理学发展的一个重要方向。



第七次：第十四章：6、8、9、11、12、14

爱因斯坦所以能取得这样伟大的科学成就，首先归因于他勇于接受物理上困难问题的挑战，努力研究并自我批评的结果。1953爱因斯坦74岁时说：“我现在很清楚我并没有特别高的才能，在好奇、求知欲、忍耐、固执与自我批评的带引下找到我的理论。”他还说到：“从事科学研究工作，要得到真有价值的好结果之机会是很少的，所以只有一条出路，花多半时间在实际工作上，用其余时间来学习研究。”他不迷信权威，敢于离经叛道。他舍弃经千百年生活经验形成的在人们头脑中根深蒂固的绝对时空观，令人惊奇。其次他的发现与他的哲学思想有关。他相信从奇妙的极微小的原子构造，到广大星河系的秩序，其中的规律都是单纯而优美的，并可以被我们发现了解的。他对宇宙物理现象及发现新公式一直非常有兴趣。

爱因斯坦精神境界高尚。在巨大的荣誉面前，他从不把自己的成就全部归于自己，总是强调前人的工作为他创造了条件。关于相对论的建立，他曾讲过："我想到的是牛顿给我们的物体运动和引力的理论，以及法拉第和麦克斯韦借以把物理学放到新基础上的电磁场概念。相对论实在可以说是对麦克斯韦和洛伦兹的伟大构思画了最后一笔。"美国艾森豪威尔总统评价爱因斯坦说得好："在20世纪知识突飞猛进的发展中，没有人比他贡献更大，然而也没有人比他更谦虚，更了解权威而没有智慧的危险。在这原子时代中，他是自由社会中个人创造力成就的模范。"爱因斯坦是一位和平主义者。他友善、富有同情心，常以自己的名气、时间和金钱帮助受害及穷困的人。他相信世界上的人们是可以和平相处的，只要人们互相尊敬。

爱因斯坦还关心学校的教育。在《论教育》一文中，他根据自己的经验说了下面十分有见解的话：“ 学校的目标应当是培养有独立行动和独立思考的个人，不过他们要把为社会服务看作是自己人生的最高目的。青年人在离开学校时，是作为一个和谐的人，而不是作为一个专家。如果一个人掌握了他的学科的基础理论，并且学会了独立思考和工作，比起那种主要以获得细节知识为主的人来，能更好地适应进步和变化。”

爱因斯坦在物理上开辟了一条重要的新路径，沿着这条道路，我们可以认识天体乃至宇宙的奥妙，享受其中的美景。他的哲学也有特殊的一面，值得我们学习。

§ 14-1 力学相对性原理 伽利略坐标变换式

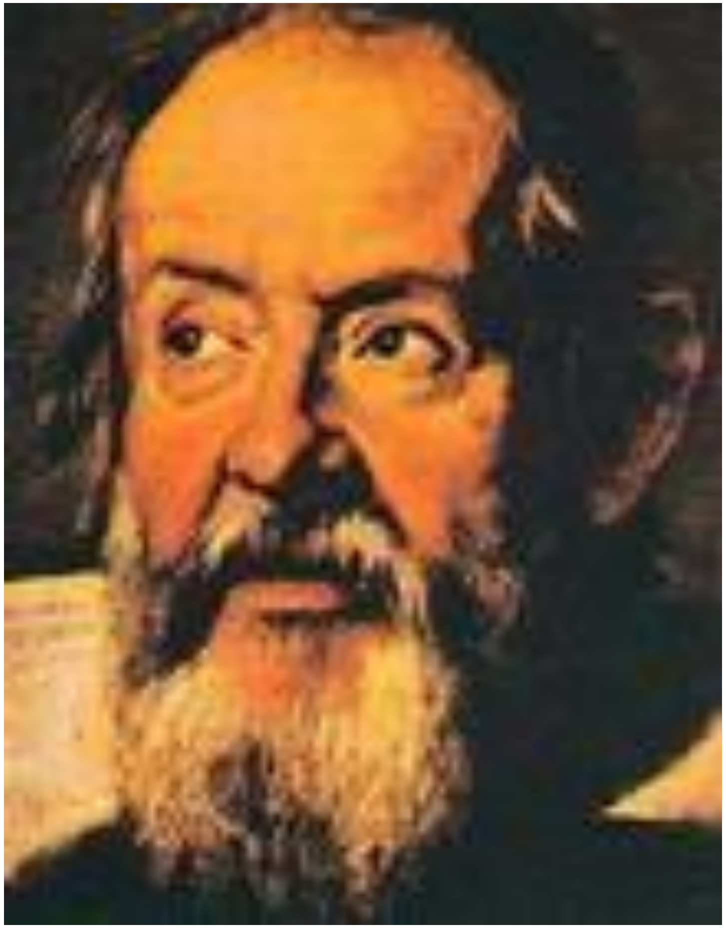
1. 力学相对性原理

在彼此作匀速直线运动的所有惯性系中，物体运动所遵循的力学规律是完全相同的，应具有相同的数学表达式。

对于描述力学现象而言，所有惯性系都是等价的。一切彼此作匀速直线运动的惯性系，对于描写机械运动的力学规律来说是完全等价的。

即：在一个惯性系内部所做的任何力学实验都不能够确定这一惯性系本身是在静止状态，还是在作匀速直线运动。这个原理叫做力学的相对性原理，或伽利略相对性原理。

Galileo Galilei (伽利略 •伽利雷)



1564—1642 (明 嘉靖43年—崇祯15年)

2．经典力学时空观（绝对时空观）

空间和时间

空间反映了物质的广延性，与物体的体积和位置的变化联系在一起。

时间反映物理事件的顺序性和持续性，与物理事件的变化发展过程联系在一起。

各个时代有代表性的时空观：

墨子：空间是一切不同位置的概括和抽象；时间是一切不同时刻的概括和抽象。

墨 子

莱布尼兹：空间和时间是物质上下左右的排列形式和先后久暂的持续形式，没有具体的物质和物质的运动就没有空间和时间。

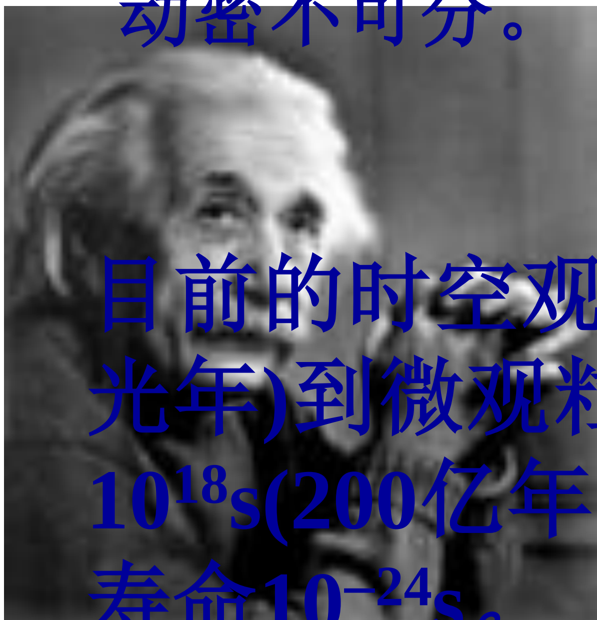
莱布尼兹

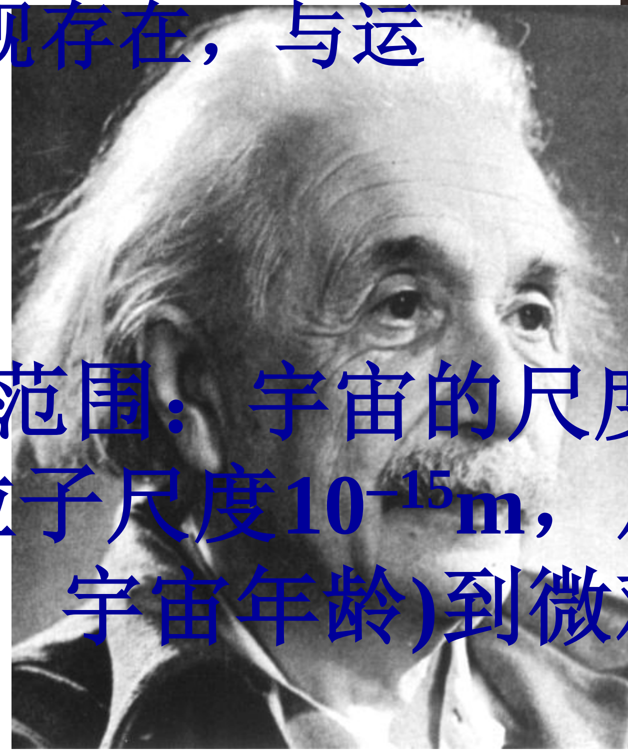
牛顿：空间和时间是不依赖于物质的独立的客观存在。

牛 顿

爱因斯坦：相对论时空观，时间与空间客观存在，与运动密不可分。

爱因





目前的时空观范围：宇宙的尺度10^{26}m(200亿光年)到微观粒子尺度10^{-15}m，从宇宙的年龄10^{18}s(200亿年，宇宙年龄)到微观粒子的最短寿命10^{-24}s。

物理理论指出，空间和时间都有下限：分别为普朗克长度10^{-35}m和普朗克时间10^{-43}s 。

经典力学的绝对时空观

时间是绝对的，绝对的、真正的和数学的时间自身在流逝着，而且由于其本性，在均匀地与任何其他外界事物无关地流逝着；

空间是绝对的，绝对空间就其本质而言，是与任何外界事物无关，而且永远是相同的和不动的；

时间和空间是彼此独立，没有任何联系。从而同时也是绝对的。

绝对空间是指长度的量度与参照系无关，绝对时间是指时间的量度与参照系无关。

同样两点的距离或同样的前后两个事件之间的时间间隔无论在哪个惯性系中测量都是一样的，而且时间和空间是彼此独立、没有任何联系的。

3．伽利略变换 牛顿运动定律的伽利略变换不变性

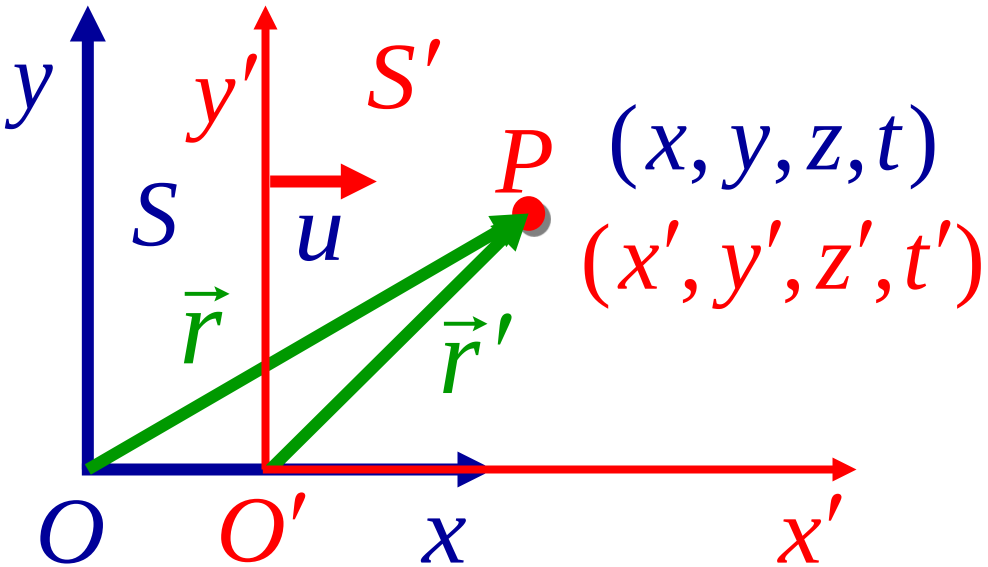
事件：某时刻发生在某一空间位置的事例。例如：车的出站、进站，火箭的发射。在坐标系中，一个事件对应于一组时空坐标。

明确研究的问题:

在两个惯性系（实验室参考系S与运动参考系S′）中考察同一物理事件。

两组时空坐标之间的关系称为坐标变换。

两个参考系（约定系统）

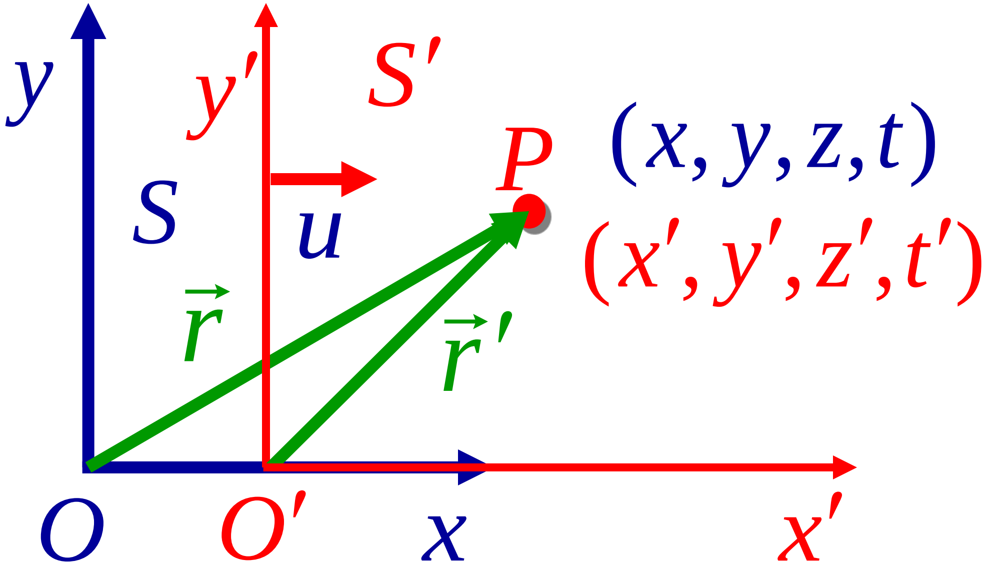


如图，S，S′相应坐标轴保持平行，x，x′轴重合，S′相对 S以速度u沿轴作匀速直线运动。

O，O′重合时，$t = t' = 0$计时开始。

伽利略变换

事件：t 时刻，物体到达 P 点



S $\quad \vec{r}(x, y, z, t) \quad \vec{v}(x, y, z, t) \quad \vec{a}$

S' $\quad \vec{r}\,'(x', y', z', t') \quad \vec{v}\,'(x', y', z', t') \quad \vec{a}\,'$

变换分量式

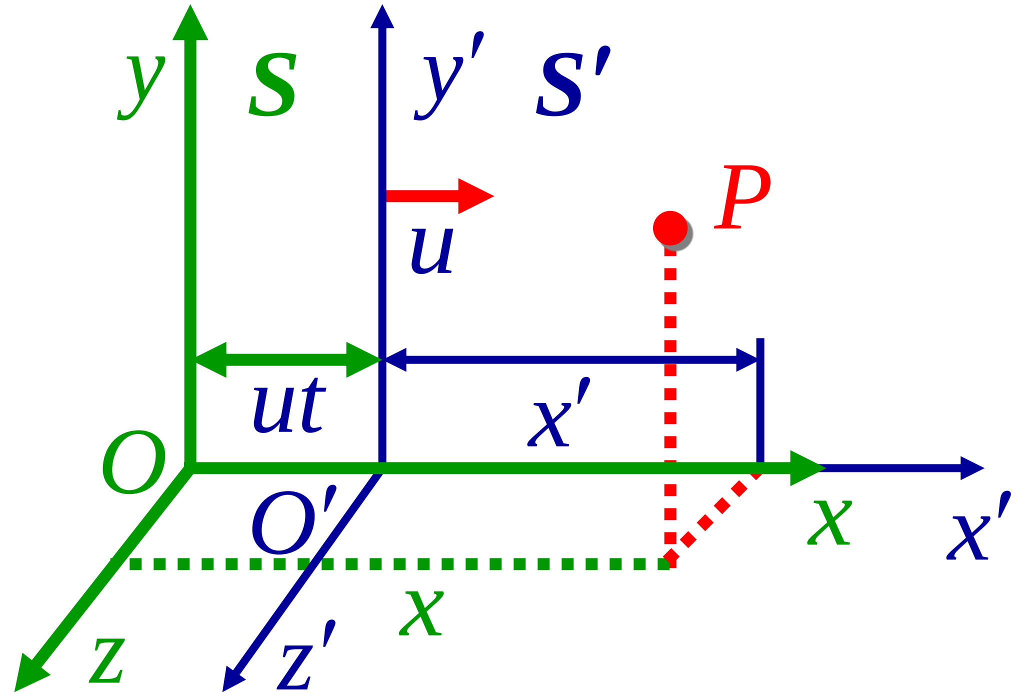
正变换 $S' \to S$

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$



逆变换 $S \to S'$

$$x = x' + ut'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

速度变换

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'}$$

加速度变换

正

$$v'_x = v_x - u$$
$$v'_y = v_y$$
$$v'_z = v_z$$

$$a'_x = a_x - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$a'_y = a_y$$
$$a'_z = a_z$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$a'_x = a_x$$
$$a'_y = a_y$$
$$a'_z = a_z$$

逆

$$v_x = v'_x + u$$
$$v_y = v'_y$$
$$v_z = v'_z$$

$$a_x = a'_x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'}$$
$$a_y = a'_y$$
$$a_z = a'_z$$

惯性系

$$a_x = a'_x$$
$$a_y = a'_y$$
$$a_z = a'_z$$

在两个惯性系中 $\vec{a}' = \vec{a}$

同一质点在两个不同惯性系中的加速度总是相同的。

伽利略相对性原理

$S \qquad \vec{F} \qquad m \qquad \vec{a} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$

$S' \qquad \vec{F}' \qquad m' \qquad \vec{a}' \qquad \vec{F}' = m'\vec{a}'$

牛顿力学中：

相互作用是客观的，力与参考系无关。

质量的测量与运动无关。

据伽利略变换 $\vec{a}' = \vec{a}$

宏观低速物体的力学规律在任何惯性系中形式相同

或 牛顿力学规律在伽利略变换下形式不变

或 牛顿力学规律是伽利略不变式

如：动量守恒定律

$$S:\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}$$

$$S':\ m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2' = m_1'\vec{v}_{10}' + m_2'\vec{v}_{20}'$$

伽利略变换与绝对时空观（经典力学时空观）

据伽利略变换，可得到经典时空观

（1）同时的绝对性

在同一参照系中，两个事件同时发生 $t_1 = t_2$

据伽利略变换，在另一参照系中， $t_1' = t_2'$

在其他惯性系中，两个事件也一定同时发生。

同时的绝对性。

（2）时间间隔的测量是绝对的

在同一参照系中，两个事件先后发生，其间隔为

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

据伽利略变换，$t = t'$，在另一参照系中，

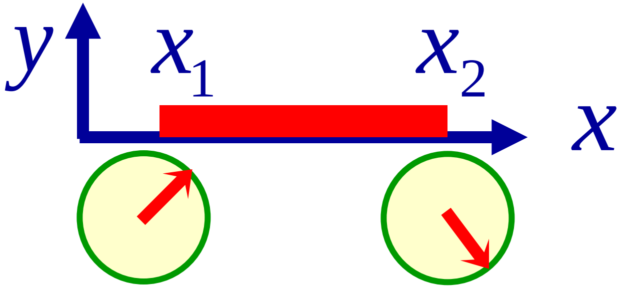
$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \Delta t$$

在其他惯性系中，两个事件的时间间隔不变。

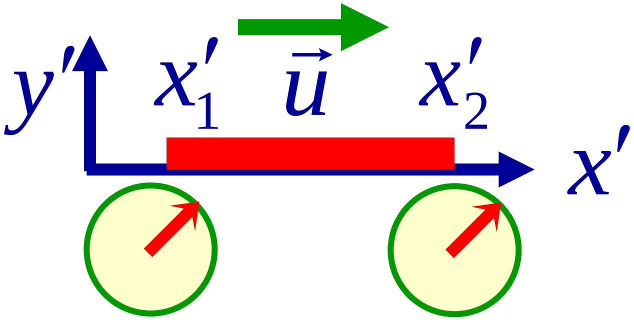
时间间隔的绝对性。

（3）长度测量的绝对性

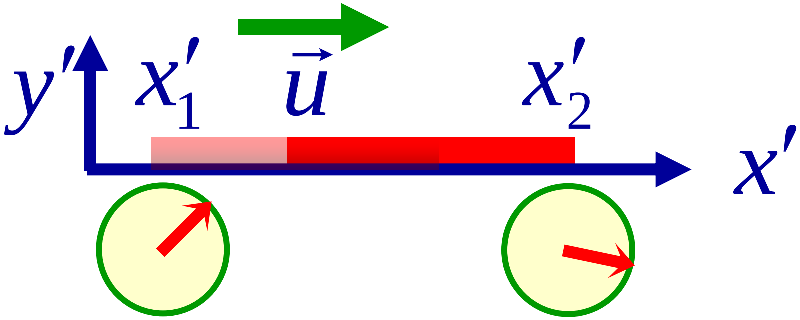
当杆的方向沿轴方向时，长度是杆的两端的坐标差，但必须同时测量。



静止系中可不同时测



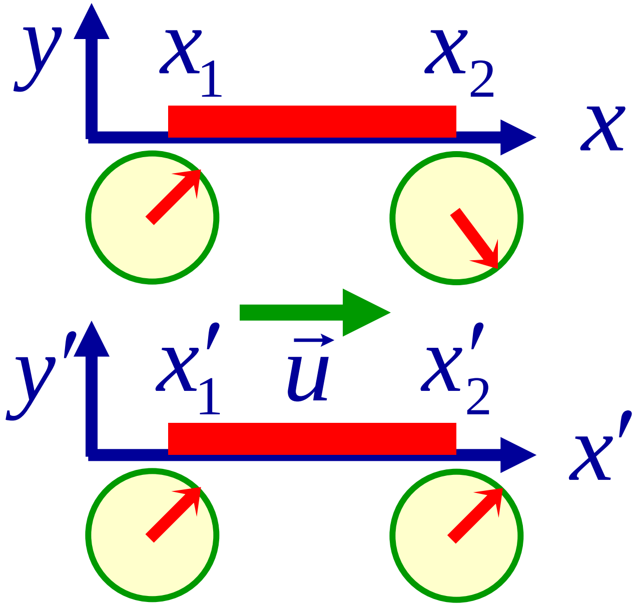
运动系中同时测



运动系中不同时测

静止系中，杆的长度为 $l = x_2 - x_1$

运动系中，杆的长度为 $l' = x_2' - x_1'$



杆静止系 $l = x_2 - x_1$

杆运动系 $l' = x_2' - x_1'$

据伽利略变换 $x_1' = x_1 - ut$ $x_2' = x_2 - ut$

长度测量是绝对的。 $l' = x_2' - x_1' = x_2 - x_1 = l$

§14-2 狭义相对论的两个基本假设

绝对静止参考系的寻找：

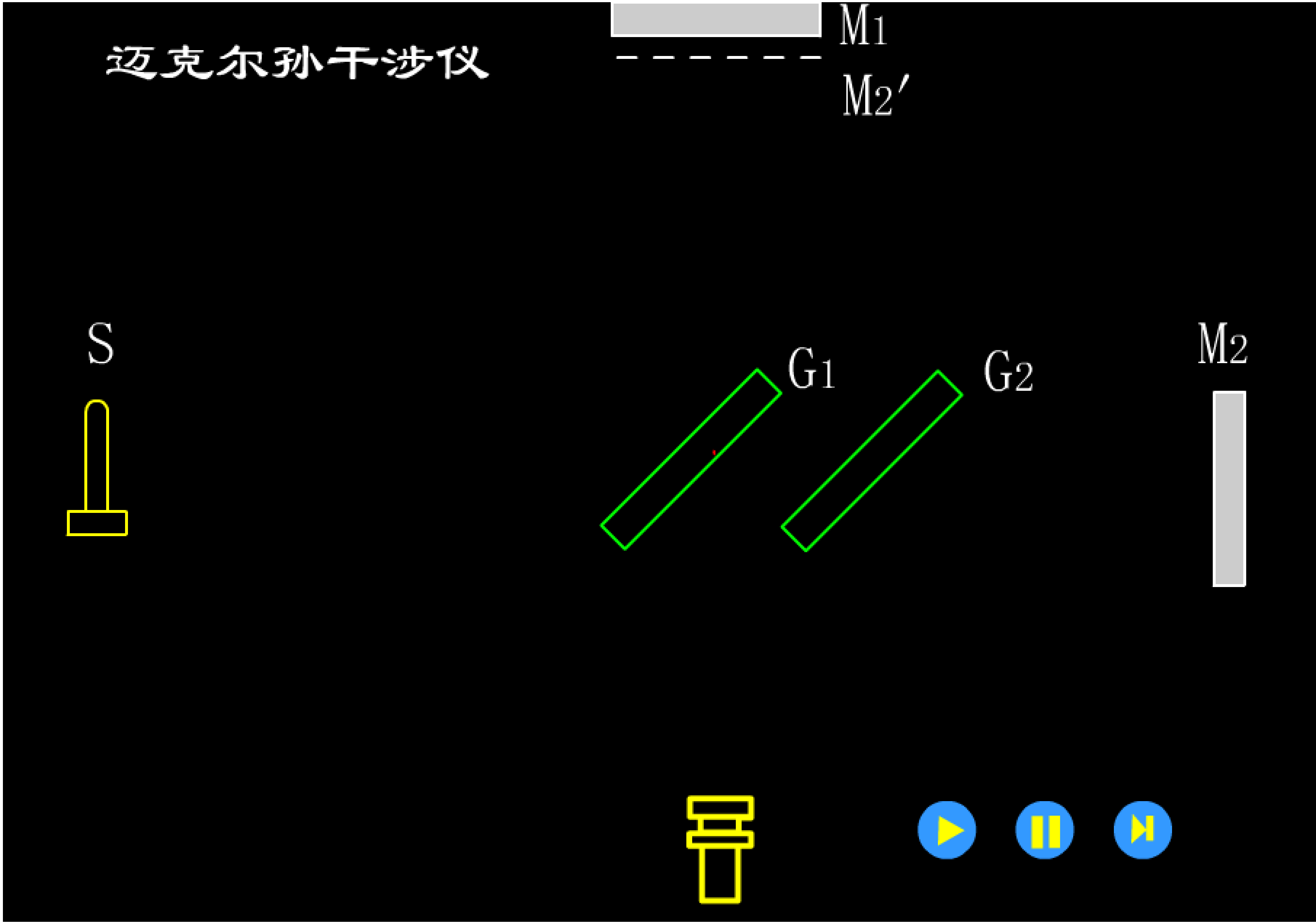
依据伽利略相对性原理，在某个惯性系内做的任何力学实验都无法确定这一惯性系本身是绝对静止，还是匀速直线运动。

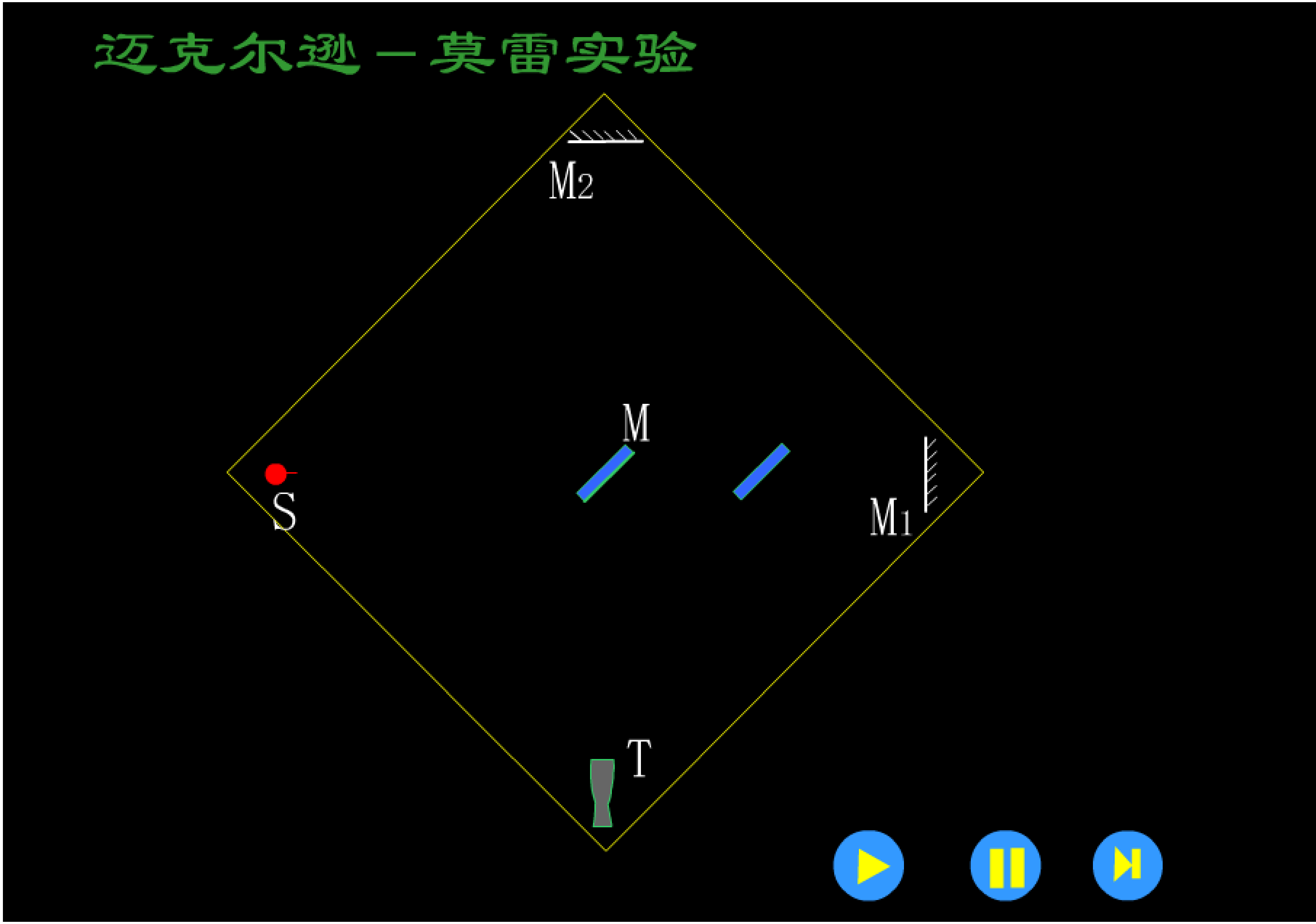
疑问：能不能利用电学、光学实验，来确定“绝对静止”的参考系？

迈克耳逊—莫雷（*Michelson—Morley*）实验

实验出发点：宇宙间存在“以太”介质（绝对静止系），光依靠以太得以传播，光只有在“以太”参考系中传播时速度才为*c*。

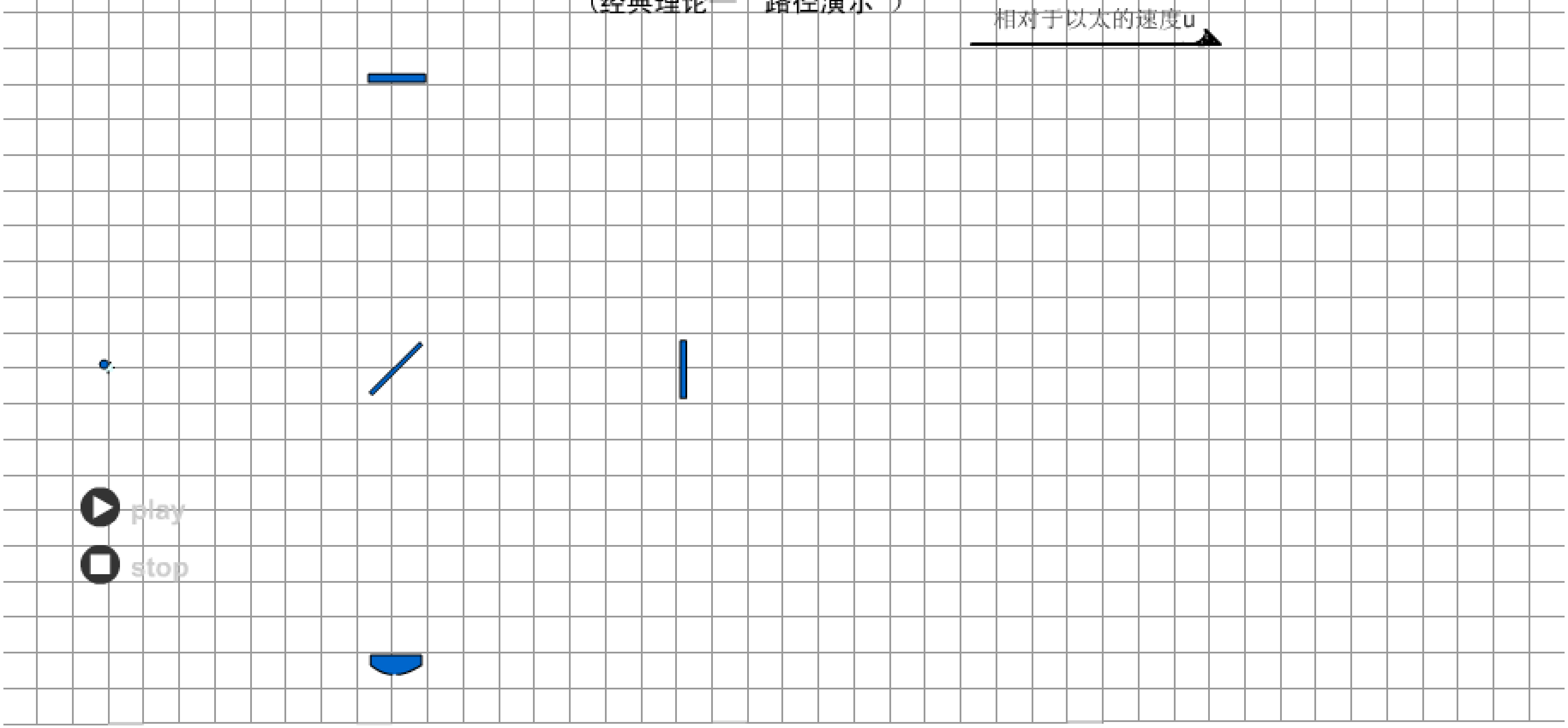
实验目的：验证绝对参考系“以太”参考系的存在。


迈克尔孙干涉仪
M1
M2′
S
G1
G2
M2


迈克尔逊－莫雷实验
M2
M
S
M1
T

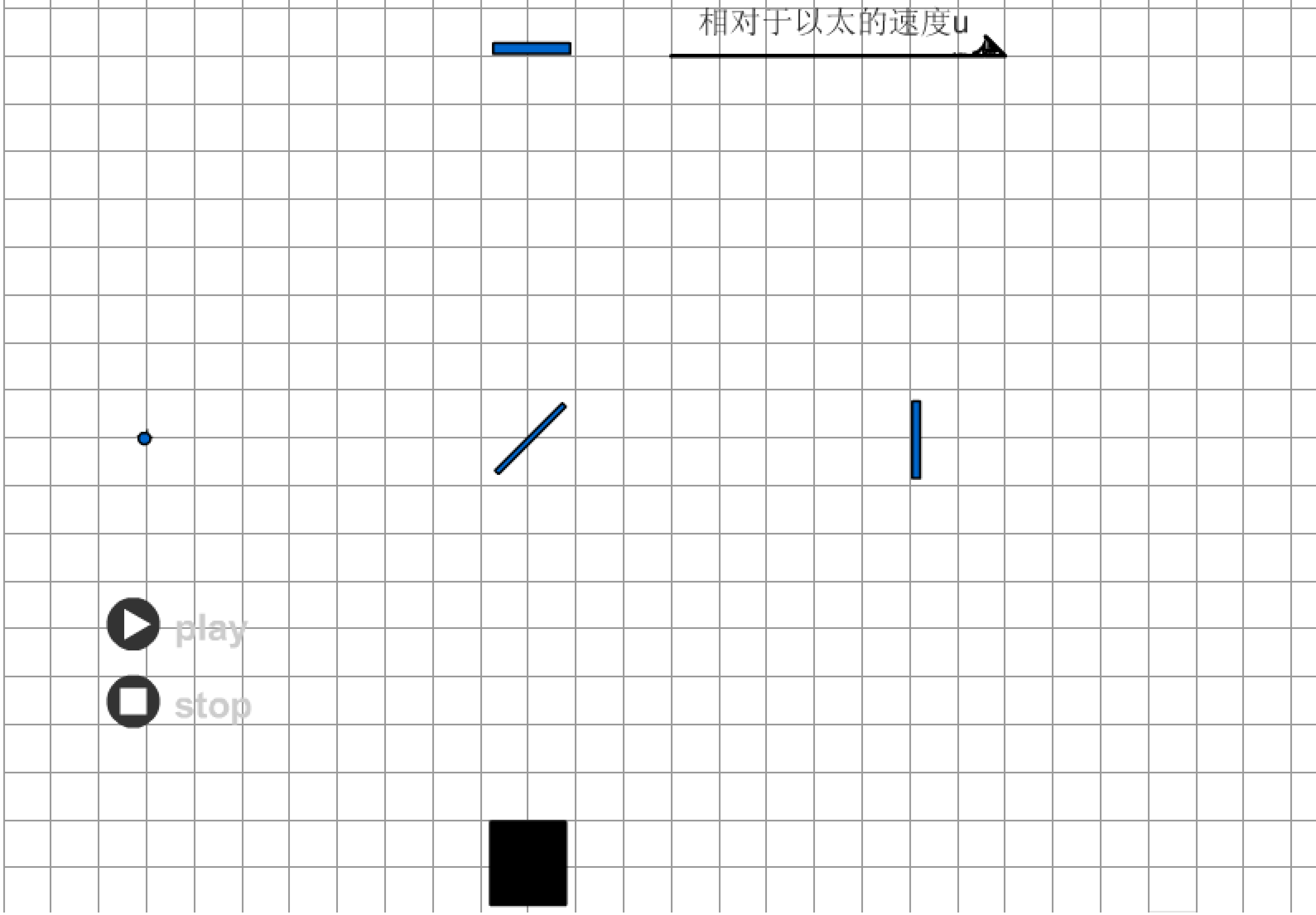
麦克尔逊——莫雷实验的演示

（经典理论— 路径演示 ）



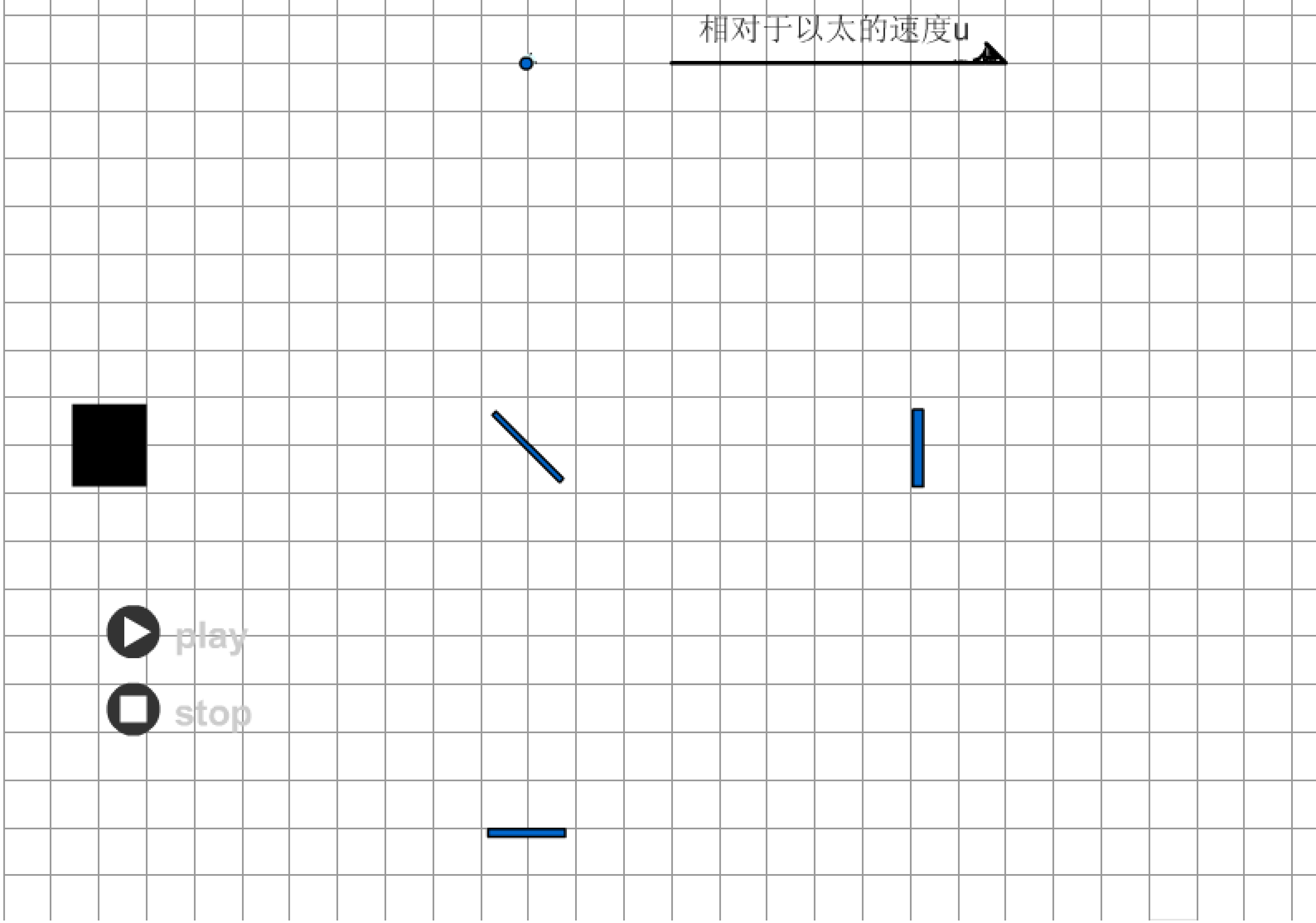
麦克尔逊—莫雷实验的演示

(经典理论—伽利略变换）



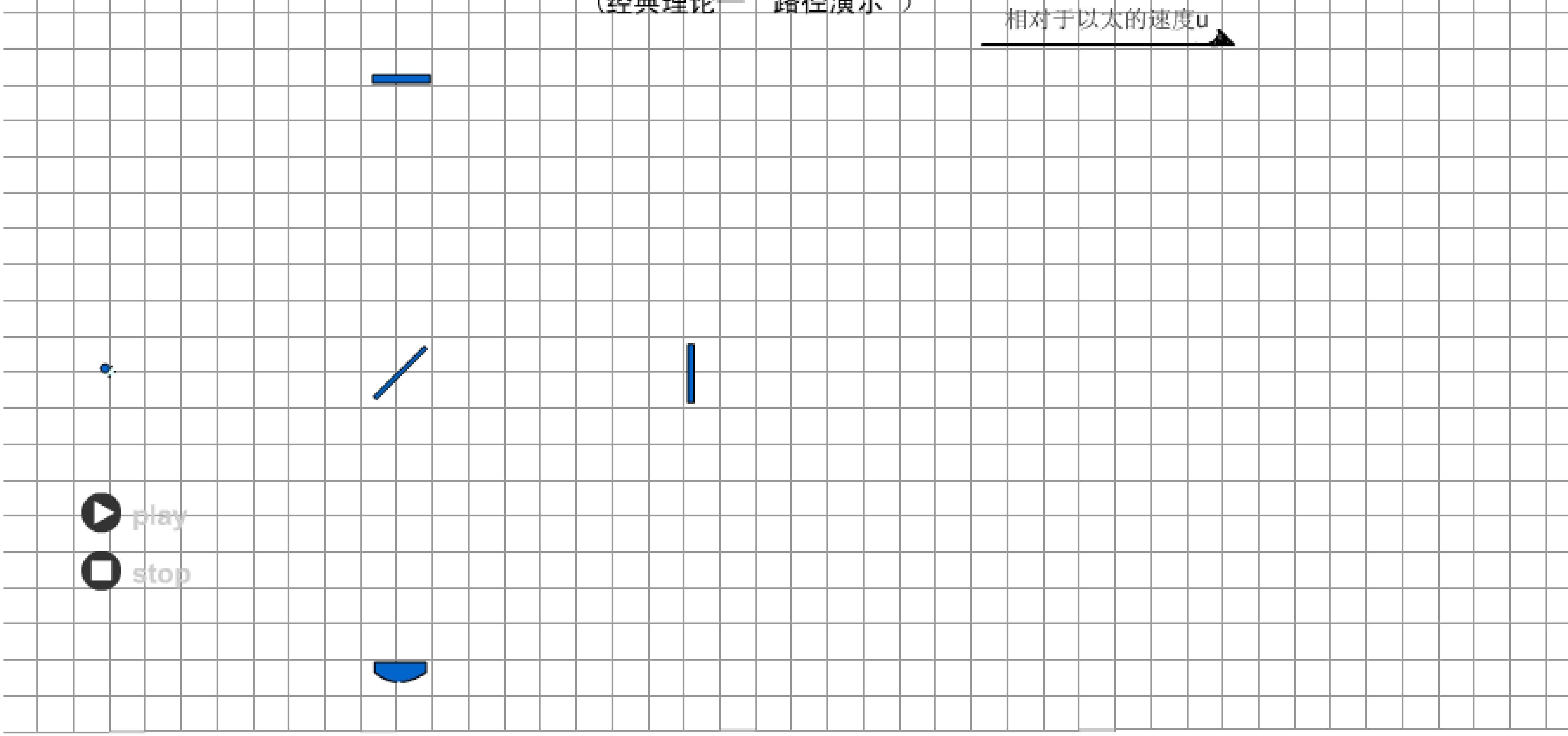
麦克尔逊——莫雷实验的演示

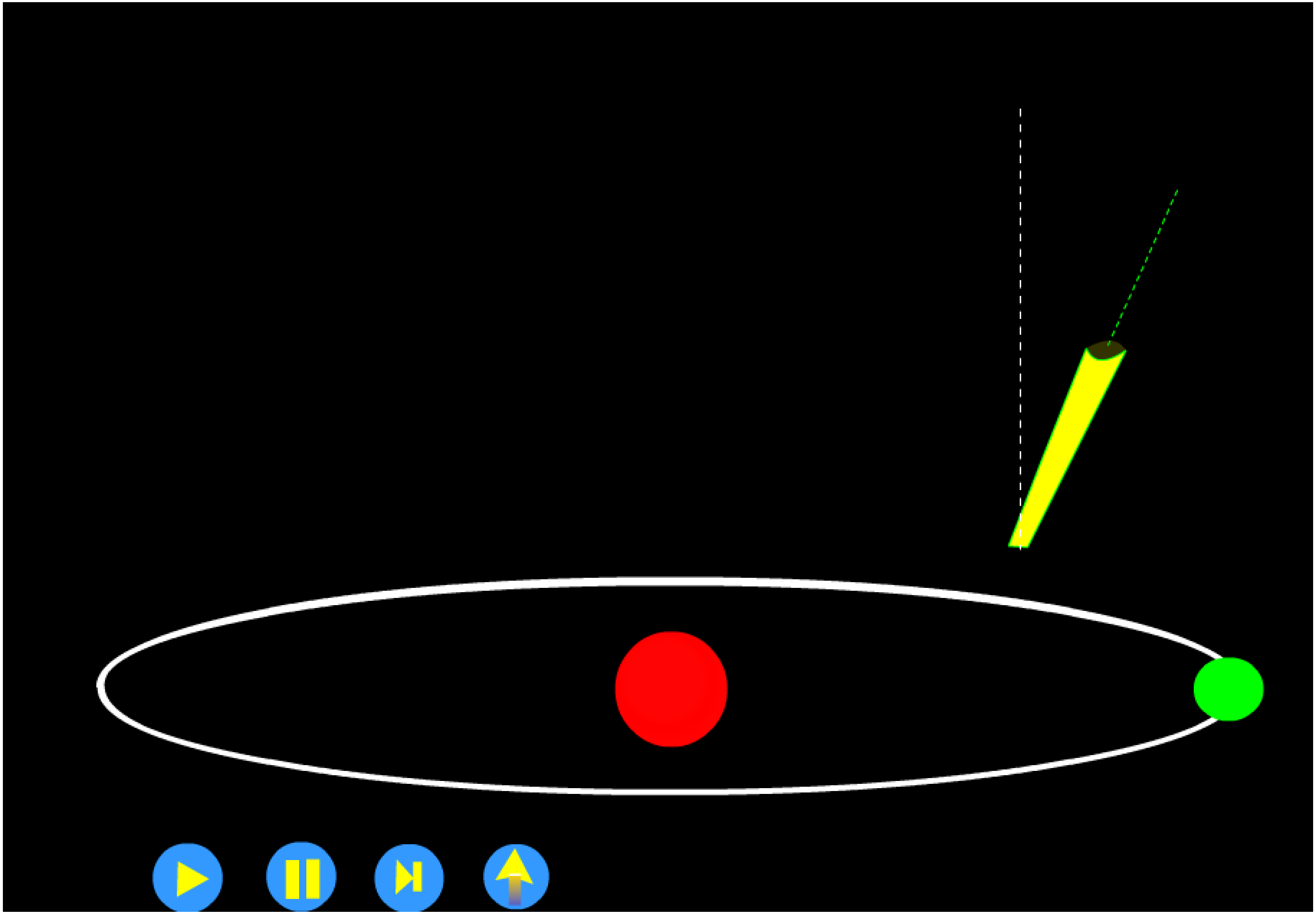
（旋转90度后的演示）



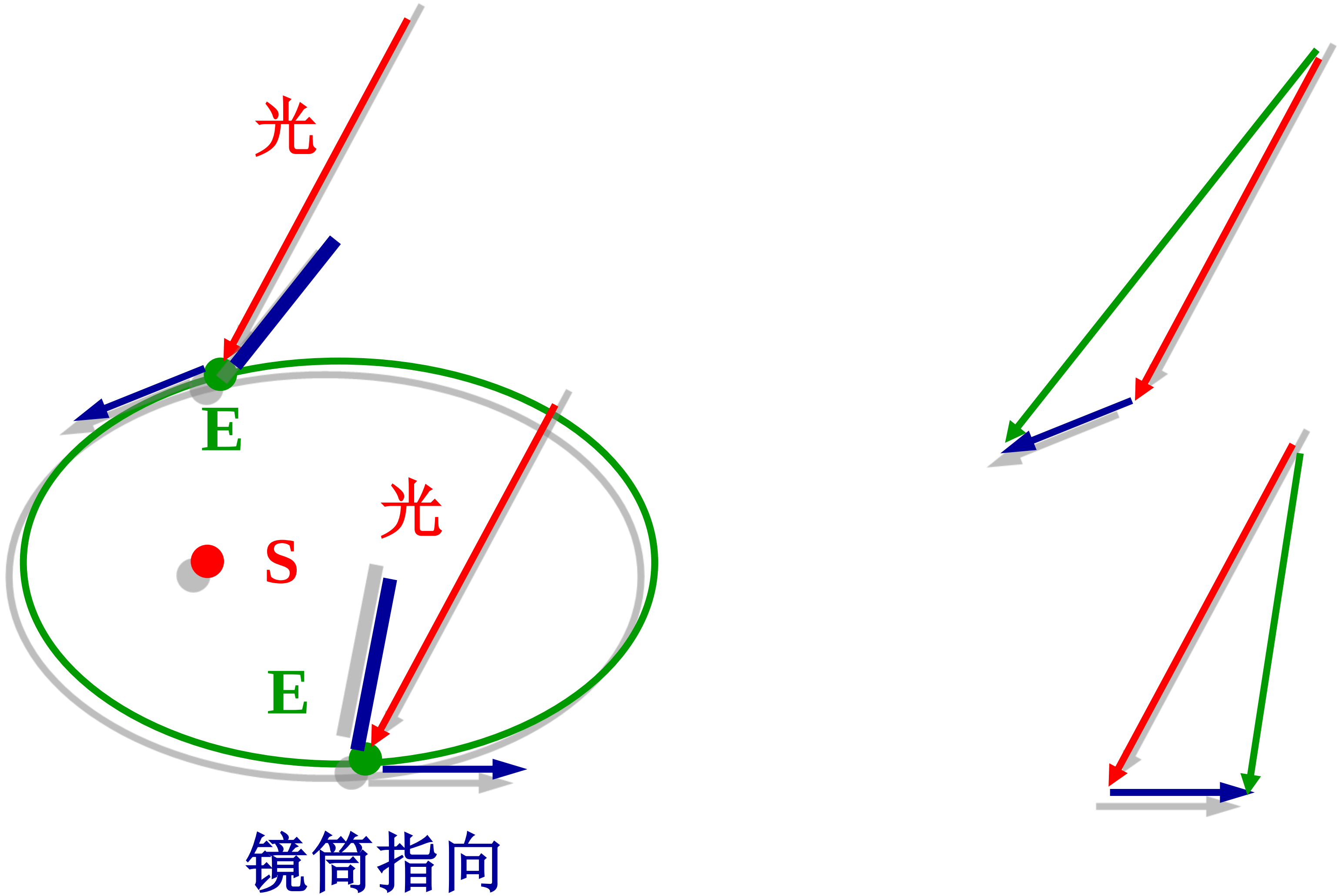
麦克尔逊——莫雷实验的演示

（经典理论—　路径演示　）





地球相对于以太运动吗？



1. 光速的伽利略变换未能被实验证实

迈克耳逊—莫雷（***Michelson—Morley***）实验是物理学史上最重要的实验之一，用来测量地球相对于以太的速度。以伽利略变换为基础来观测地球上各个方向上光速的差异。由于地球自转，据伽利略变换，地球上各个方向上光速是不同的，在随地球公转的干涉仪中应可观测到条纹的移动。

迈克耳逊—莫雷实验没有观测到预期的条纹移动，不支持以太假说。

2．狭义相对论的基本原理

牛顿时空观与以太假说的困难

1)麦克斯韦方程组在伽利略变换不是不变的，而在洛仑兹变换下保持不变！

2)光速*c*是常量—不论从哪个参考系中测量；诸多实验均不支持以太假说。

狭义相对论的基本原理

爱因斯坦提出：

（1）一切物理规律在任何惯性系中形式相同

——相对性原理

（2）任意惯性系中，真空中的光速都相等

——光速不变原理

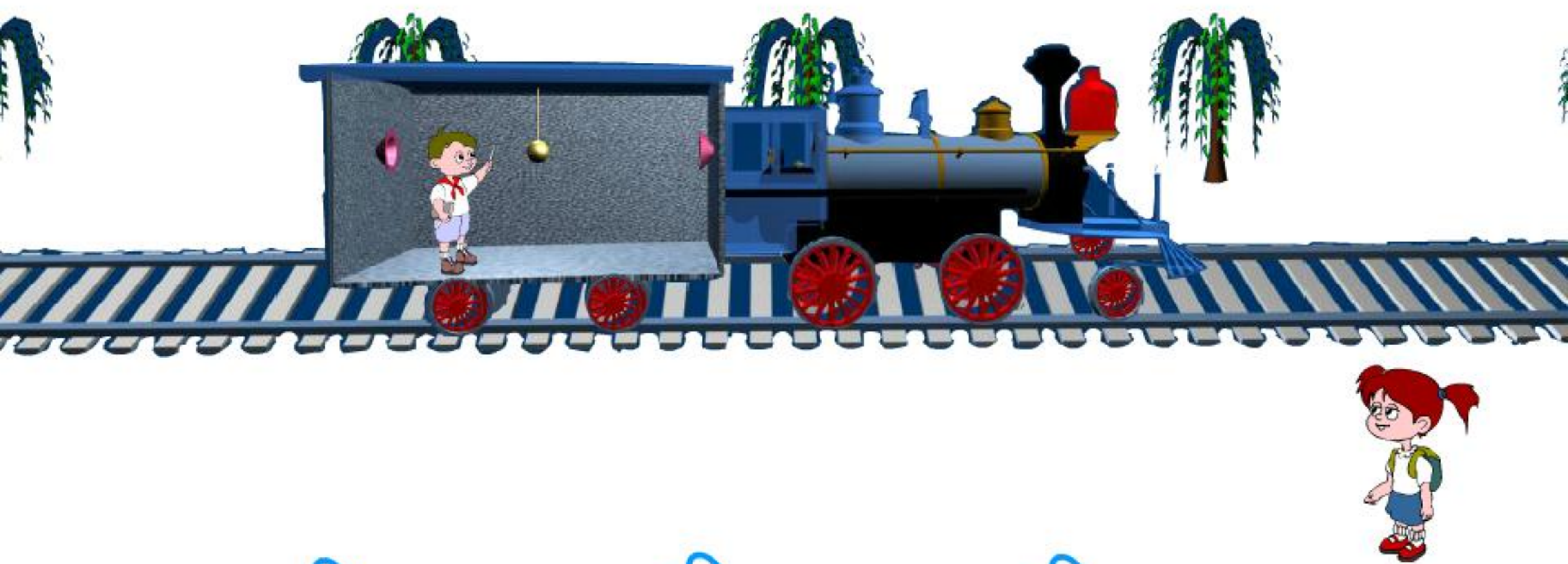
注意:1） 爱因斯坦的理论是牛顿理论的发展

爱因斯坦相对论适用于一切物理规律。

牛顿理论适用于力学规律，宏观低速。

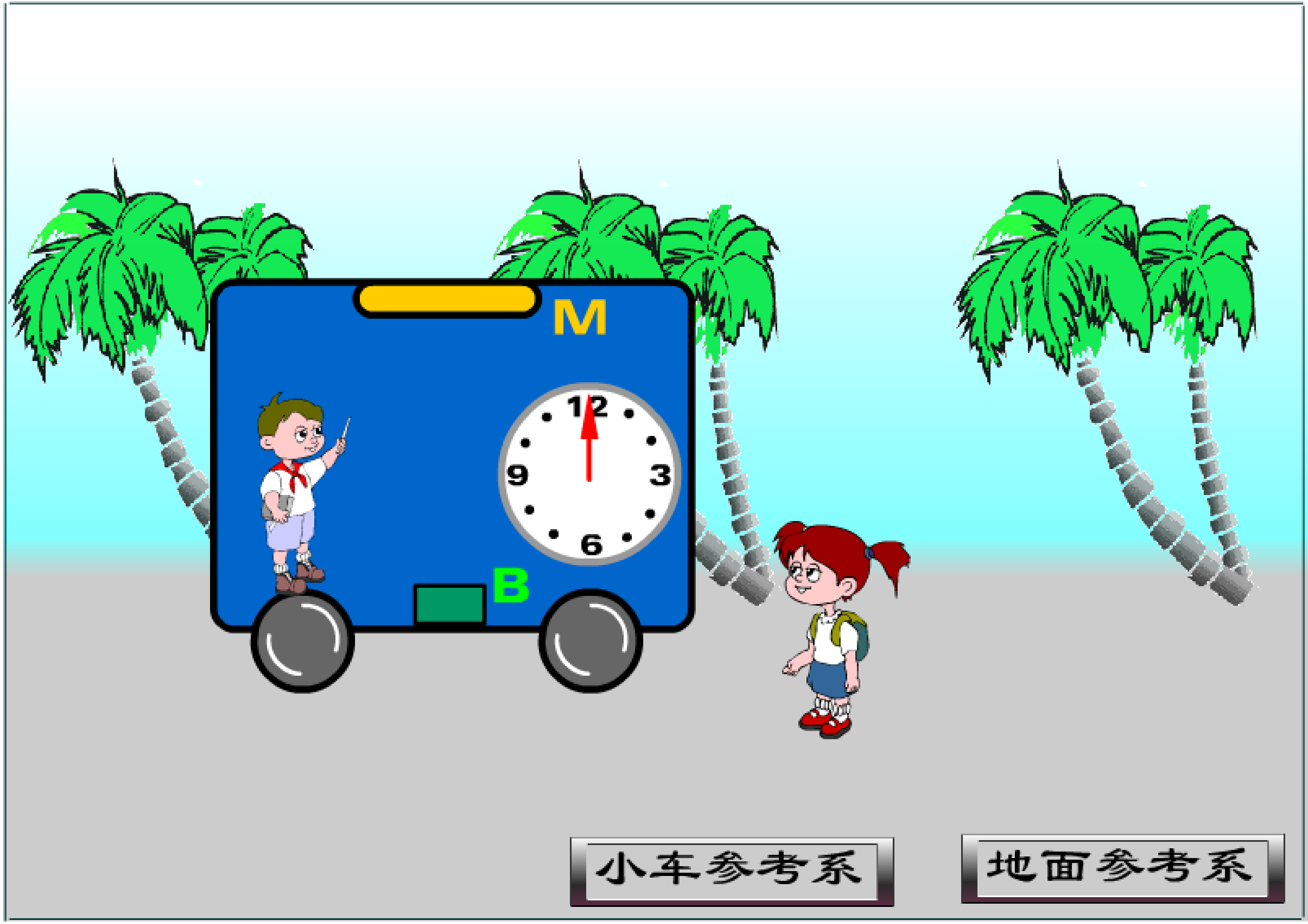
§14-3 狭义相对论的时空观

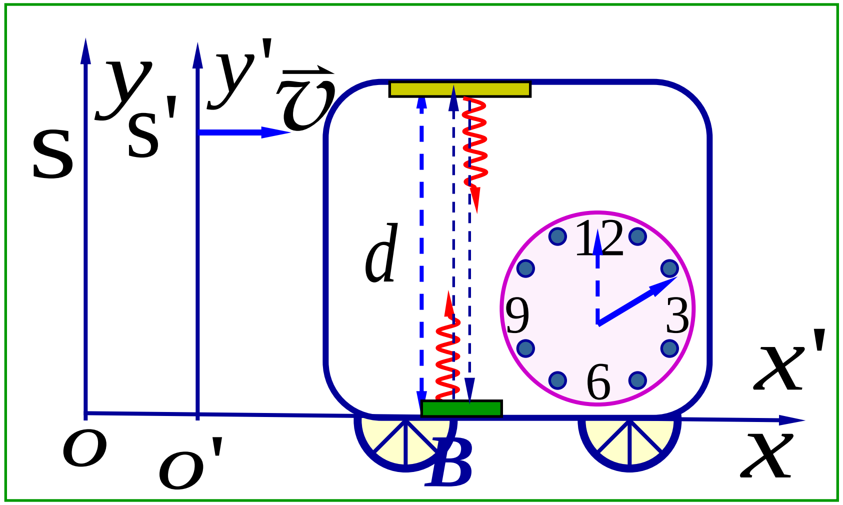
本节将以简单直观的方式形象的给出尺缩、钟慢效应



车厢　　地面　　开始

2. 时间延缓

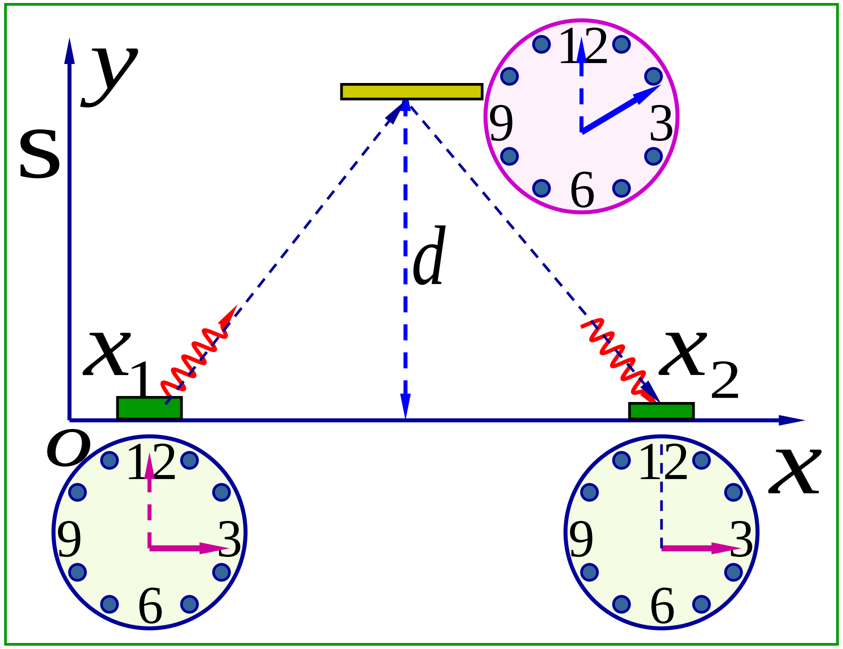




S'系同一地点 B 发生两事件

发射光信号(x', t_1')，接收光信号(x', t_2')

时间间隔$\Delta t' = t_2' - t_1' = 2d/c$



在 S 系中观测两事件

$$(x_1, t_1), (x_2, t_2)$$

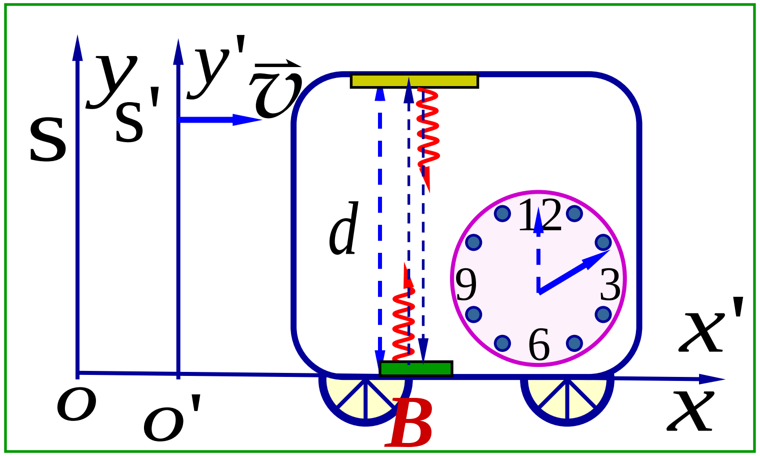
$$L = \sqrt{d^2 + \left[\frac{v(t_2 - t_1)}{2}\right]^2}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2L}{c}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

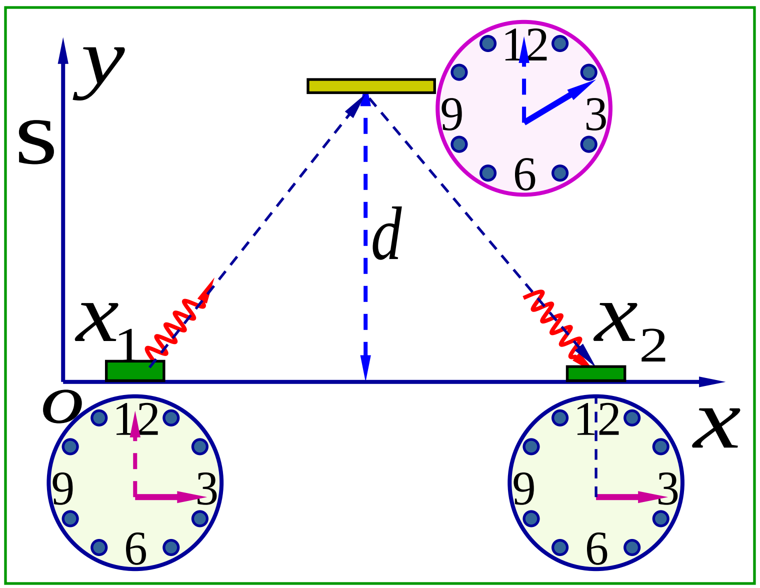
$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \beta^2 \Delta t^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

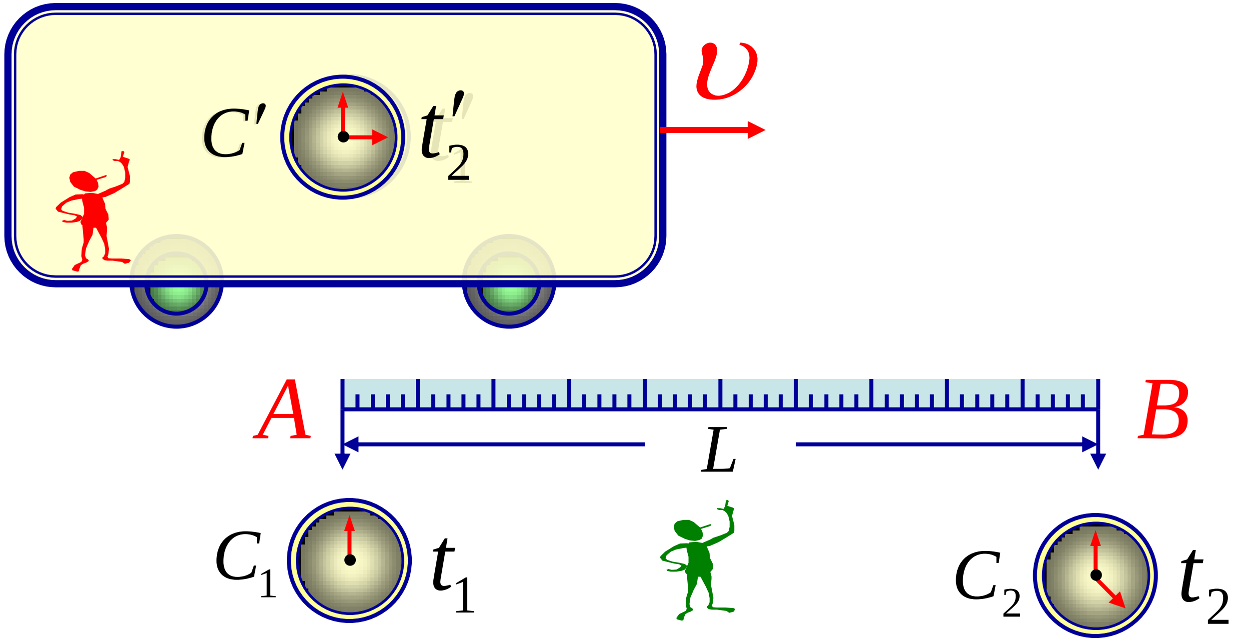
固有时间($\Delta t'$)：同一地点发生的两事件的时间间隔 。

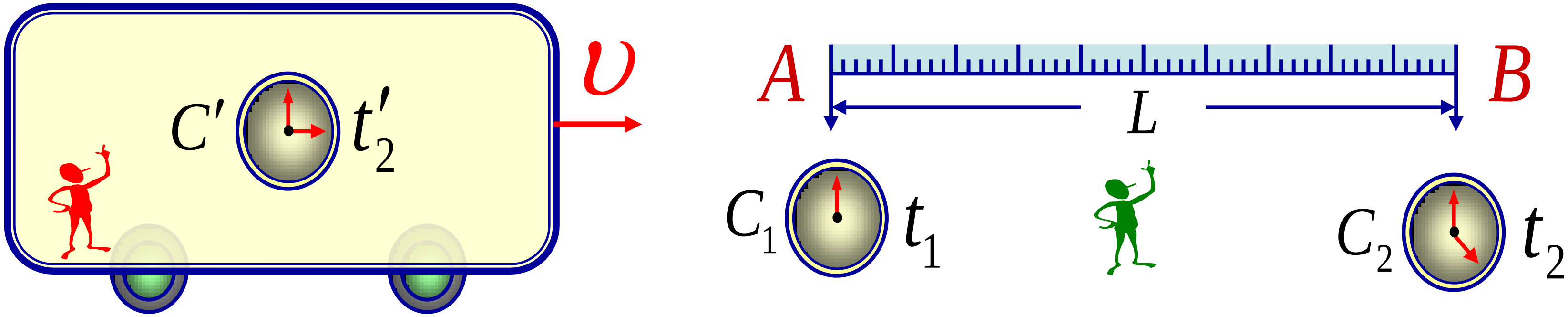


$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau_0$$

时间延缓：运动钟走得慢。

3．长度收缩





根据时间延缓效应 $$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

另外 $L = v\tau,\ L' = v\tau_0$

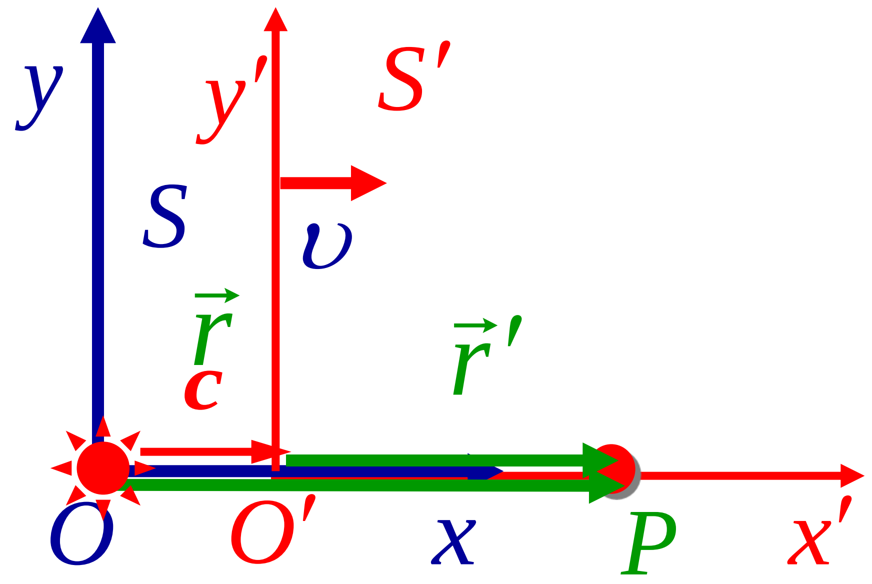
$$L' = L\sqrt{1-v^2/c^2} = L\sqrt{1-\beta^2}$$

§ 14-4 洛伦兹变换

*洛仑兹坐标变换式的推导

问题：

$t = t' = 0$时，O，O'重合，且在此发出闪光。经一段时间光传到 P 点（事件）



在S中 $P(x,y,z,t)$

在S'中 $P(x',y',z',t')$

寻找

对同一客观事件两个参考系中相应的坐标值之间的关系

由客观事实是确定的：

$$\left(x,y,z,t\right)\text{对应唯一的}\quad\left(x',y',z',t'\right)$$

Step 1：

时间和空间都是均匀的，因此它们之间的变换关系必须为线性关系（只含一次项）。

若非线性，则将导致对同一长度的测量结果将随空间位置的不同而不同，破坏了时空的均匀性。

$$x=k(x'+vt')\quad x'=k'(x-vt)$$

Step 2：

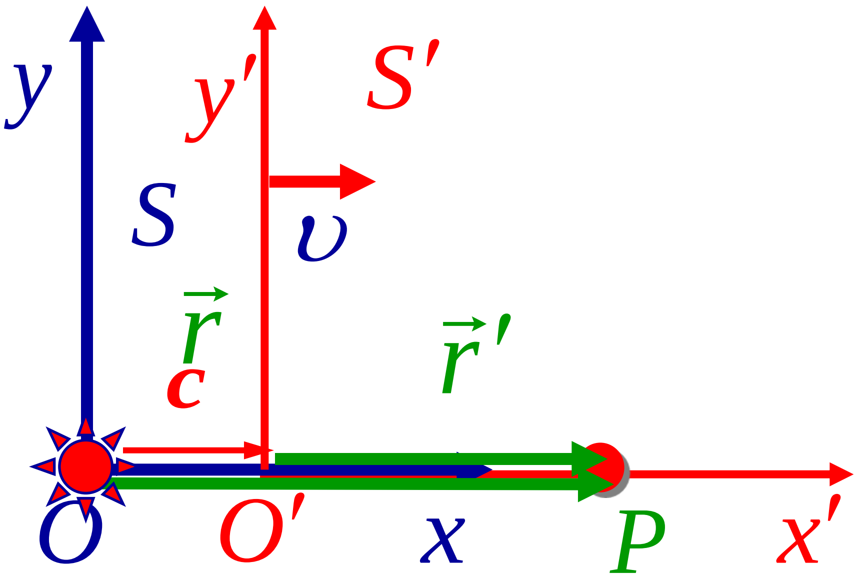
根据狭义相对论的相对性原理，**K**系和**K′**系等价。

$$\therefore\ k'=k$$

Step 3:

求出常数 k 。

假设光信号在 O 与 O' 重合的瞬时（$t=t'=0$）开始沿 Ox 轴传播，



在任意瞬时，光信号到达的坐标：x, x'

光速不变原理：$\therefore x = ct, \quad x' = ct'$ （3）

$$x = k(x' + vt') \ (1), \ x' = k'(x - vt) \ (2)$$

(1) (2) 相乘：

$$xx' = k^2 (x - vt)(x' + vt')$$

$$xx' = k^2(x - vt)(x' + vt')$$

将(3) $(x = ct,\ x' = ct')$ 代入

$$c^2tt' = k^2(ct - vt)(ct' + vt')$$

$$= k^2tt'(c - v)(c + v)$$

$$= k^2tt'(c^2 - v^2) \Rightarrow k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\therefore k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Step 4：

把k代入，得到洛仑兹坐标变换。

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

把上面两式中的*x*或*x'*消去，得到时间变换式：

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

1. 洛仑兹坐标变换式

令 $\beta \equiv \dfrac{v}{c}$， $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$， 则

洛仑兹正变换

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

洛仑兹逆变换

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{aligned}}$$

洛仑兹变换：反映了<u>同一物理事件</u>在不同的参考系中的<u>时空坐标</u>之间的关系。

第八次：第十四章：16、19、21

正变换

$$x' = \gamma\left(x - ut\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right)$$

讨论

1) 时间t'与x，u，t均有关，为时空坐标；

2) $u \ll c$，$\gamma \to 1$

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

伽利略变换

3) $u > c$

变换无意义　　速度有极限

例题：甲乙两人所乘飞行器沿x轴作相对运动。甲测得两个事件的时空坐标为$x_1 = 6 \times 10^4$ m，$y_1 = z_1 = 0$，$t_1 = 2 \times 10^{-4}$ s；$x_2 = 12 \times 10^4$ m，$y_2 = z_2 = 0$，$t_2 = 1\times10^{-4}$s，若乙测得这两个事件同时发生于t时刻，问：

（1）乙对于甲的运动速度是多少？

（2）乙所测得的两个事件的空间间隔是多少？

解：（1）设乙对甲的运动速度为u，由洛仑兹变换

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

可知，乙所测得的这两个事件的时间间隔是

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

按题意，$t_2' - t_1' = 0$，代入已知数据，有

$$0 = \frac{(1\times10^{-4} - 2\times10^{-4}) - \frac{u}{c^2}(12\times10^4 - 6\times10^4)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由此解得乙对甲的速度为 $u=-\dfrac{c}{2}$

根据洛仑兹变换 $x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-ut)$

可知，乙所测得的两个事件的空间间隔是

$$x_2'-x_1'=\frac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=5.20\times10^4\,\mathrm{m}$$

2．洛仑兹速度变换式

考虑一质点***P***在空间的运动，在S和S′系中，速度分别是：

$$v=(v_x,v_y,v_z)\qquad v'=(v'_x,v'_y,v'_z)$$

根据速度的定义：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$v'_x=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},v'_y=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'},v'_z=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

由洛仑兹坐标变换

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

上面两式之比

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}$$

由洛仑兹变换知

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\frac{1-\frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{aligned}}$$

由上两式得

同理

$$v'_y=\frac{v_y}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad v'_z=\frac{v_z}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

正变换 **洛仑兹速度变换式** 逆变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

说明

$v << c$ 时，上式即变为伽利略速度变换式。

在洛仑兹速度变换下光速不变，不会出现超光速。

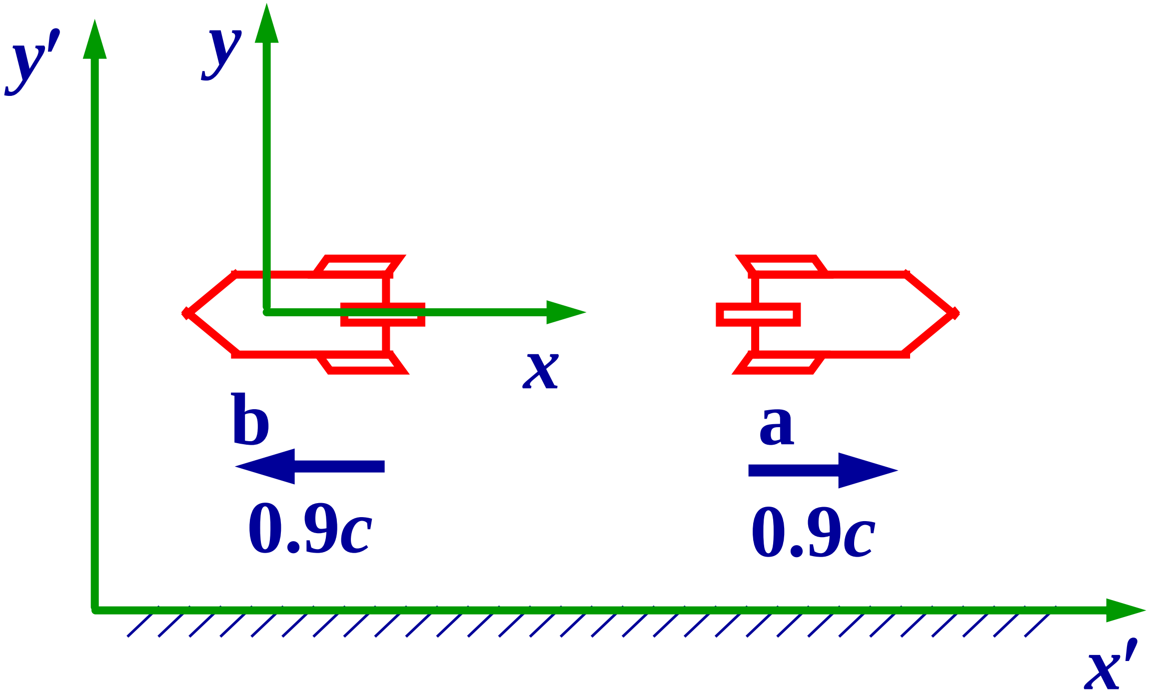
$$\because (c-u)(c-v) > 0$$

$$\therefore c^2 + uv - cu - cv > 0$$

$$\therefore 1 + \frac{uv}{c^2} > \frac{u+v}{c} \Rightarrow \therefore c > \frac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$$

$$c = \frac{u+c}{1+\dfrac{uc}{c^2}}$$

例题：在地面上测到有两个飞船a、b分别以$+0.9c$和$-0.9c$的速度沿相反的方向飞行，如图所示。求飞船a相对于飞船b的速度有多大。



解：设K系被固定在飞船b上，则飞船b在其中为静止，而地面对此参考系以$v = 0.9c$的速度运动。以地面为参考系K′，则飞船a相对于K′系的速度按题意为$u'_x = 0.9c$，可求得飞船a对K系的速度，亦即相对于飞船b的速度：

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9}$$

$$= \frac{1.80c}{1.81} = 0.994c$$

如用伽利略速度变换进行计算，结果为：

$$u_x = u'_x = 0.9c + 0.9c = 1.8c > c$$

两者大相径庭。相对论给出$\boldsymbol{u}_x < \boldsymbol{c}$。按相对论速度变换，在$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{u}'$都小$\boldsymbol{c}$的情况下，$\boldsymbol{u}$不可能大于$\boldsymbol{c}$。

3．洛伦兹变换与狭义相对论的时空观

（1） 同时的相对性

在牛顿力学中，时间是绝对的。两事件在惯性系S中观察是同时发生的，那么在另一惯性系S′中观察也是同时发生的。

狭义相对论则认为：这两个事件在惯性系S中观察是同时的，而在惯性系S′观察就不会再是同时的了。这就是狭义相对论的同时相对性。

设在惯性系S′中，不同地点x'_1和x'_2同时发生两个事件，即：

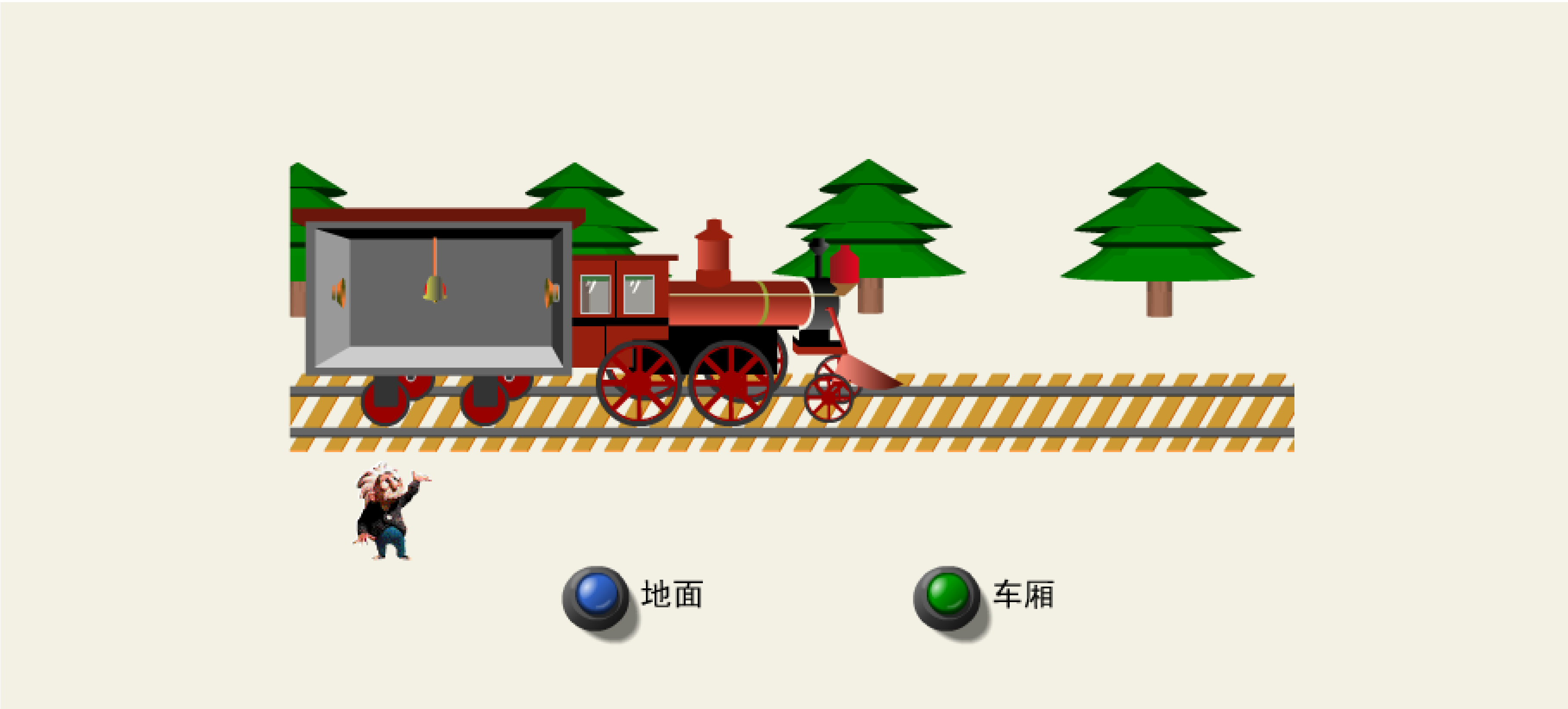
$$\Delta t' = 0, \Delta x' = x_2' - x_1'$$

由SS′洛伦兹变换式 $t_1 = \dfrac{t_1' + \dfrac{v}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$， $t_2 = \dfrac{t_2' + \dfrac{v}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \dfrac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \Delta t \neq 0$$

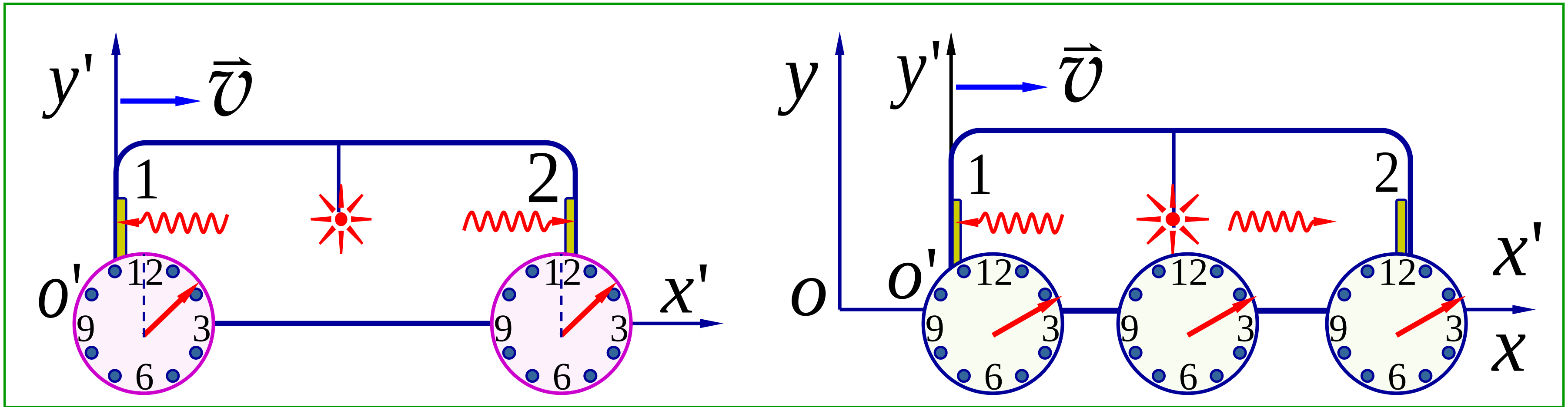
以上说明同时性是相对的。

和光速不变紧密联系在一起的是：在某一惯性系中同时发生的两个事件，在相对于此惯性系运动的另一惯性系中观察，并不一定是同时发生的。



事件 1： 车厢后壁接收器接收到光信号。

事件 2： 车厢前壁接收器接收到光信号。



	S 系 (地面参考系)	S′系 (车厢参考系)
事件 1	(x_1, y_1, z_1, t_1)	(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)
事件 2	(x_2, y_2, z_2, t_2)	(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)

同时不同地

$$\begin{cases} \Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0 \\ \Delta x' = x'_2 - x'_1 \neq 0 \end{cases}$$

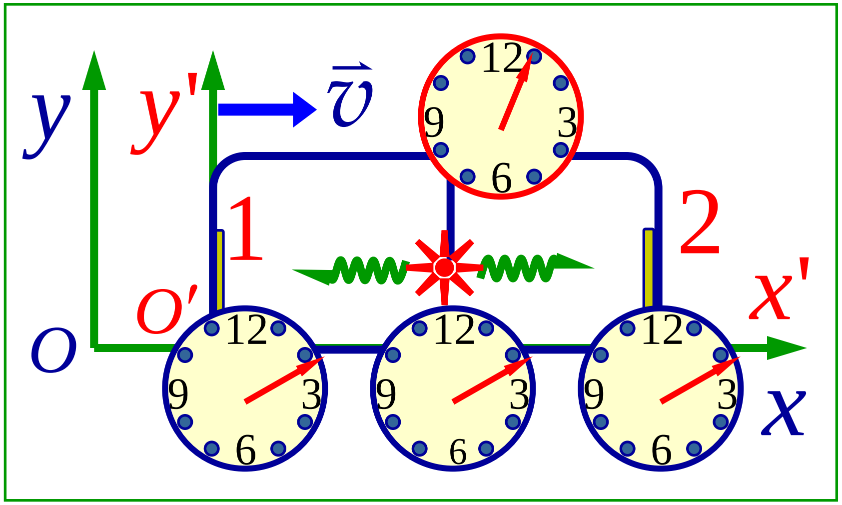
$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

在 S' 系**同时同地**发生的两事件

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = 0 \quad \Delta x' = x_2' - x_1' = 0$$

在S系

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$



注意

此结果反之亦然。

结论：沿两个惯性系运动方向，**不同地点**发生的两个事件，在其中一个惯性系中是**同时**的，在另一惯性系中观察则**不同时**，所以同时具有**相对**意义；只有在**同一地点**，**同一时刻**发生的两个事件，在其他惯性系中观察也是**同时**的。

物理学中的因果关系——物理学中承认两个事件存在因果关系，只有两种情况：

1）光速运行的粒子所经历的两个事件，物理信号不能超光速。比如发光与接收的顺序，不会颠倒。

2）低于光速情形，则必存在一个参考系，在这个参考系中，两个事件是发生在**同一地点**。同一地点就意味着该地点处的**固有时**。若固有时大于0，则由于运动钟变慢，在任何其它参考系中时间间隔均大于等于固有时，从而时序不会颠倒。

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau_0$$

物理学中的因果关系——物理学中承认两个事件存在因果关系，只有两种情况：

1）光速运行的粒子所经历的两个事件，物理信号不能超光速。比如发光与接收的顺序，不会颠倒。

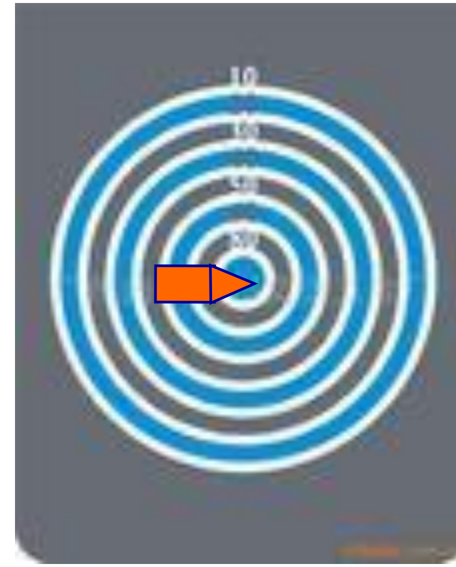
2）低于光速情形，则必存在一个参考系，在这个参考系中，两个事件是发生在**同一地点**。同一地点就意味着该地点处的**固有时**。若固有时大于0，则由于运动钟变慢，在任何其它参考系中时间间隔均大于等于固有时，从而时序不会颠倒。

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau_0$$

在任意惯性系S中考察两个事件：

事件1：出膛；事件2：中靶。问 $\tau = t_2 - t_1$ >or< 0？

$v_{子弹}$=1000m/s



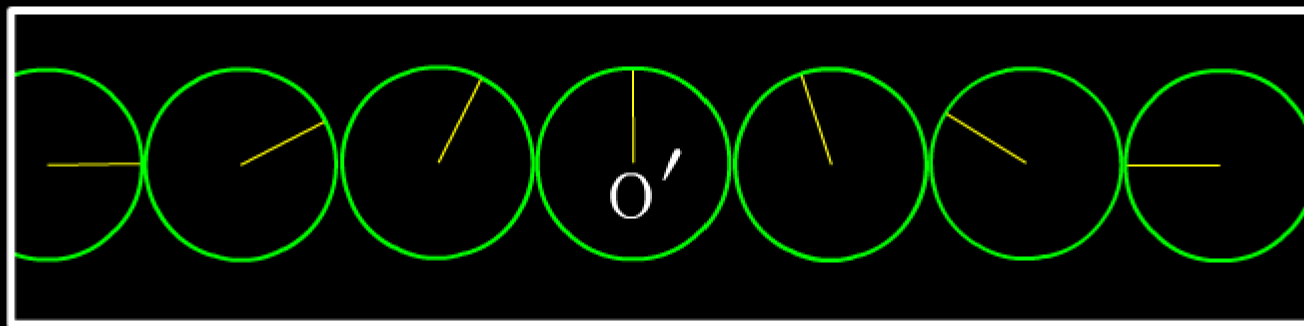
先　　　　任意参考系S系　　　　后

对于子弹参考系，事件1和事件2的时间间隔是子弹的固有时 τ_0，$\tau_0 > 0$，因此

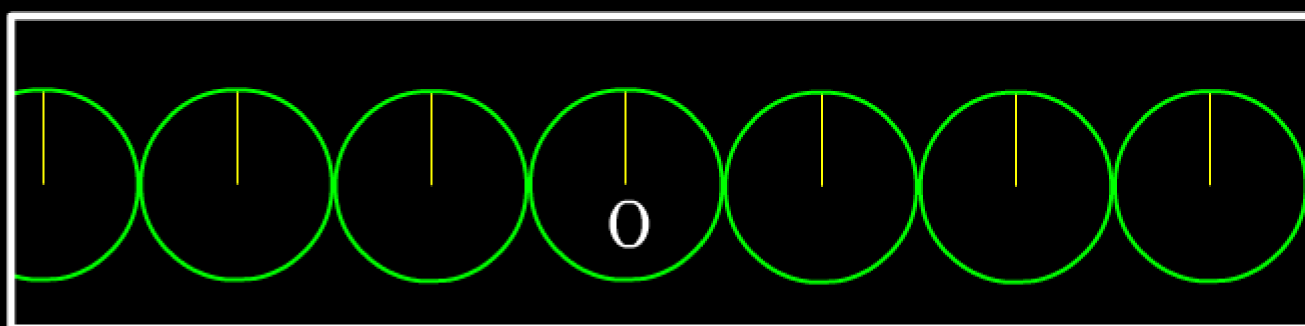
$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau_0$$

同时的相对性

S′系上的时钟



S系上的时钟



在S系上观察，当观察者认为S系上的时钟校准时，
S’上时时钟并没有校准，顺着运动方向，一个比一个慢

注意：

a. 发生在同一地点的两个事件，同时性是绝对的，只有对发生在不同地点的事件同时性才是相对的。

b. 只有对没有因果关系的各个事件之间，先后次序才有可能颠倒。

c. 在低速运动的情况下，$v/c \ll 1$时得$\Delta t \approx \Delta t'$

（2）长度缩短

在S′系观察者测棒两端的坐标，棒长为两坐标的差。即

$$L' = x_2' - x_1'$$

在S系中的观测者认为棒相对S系运动，测得长度应该为

$$L = x_2 - x_1$$

利用洛仑兹变换式有：

$$x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

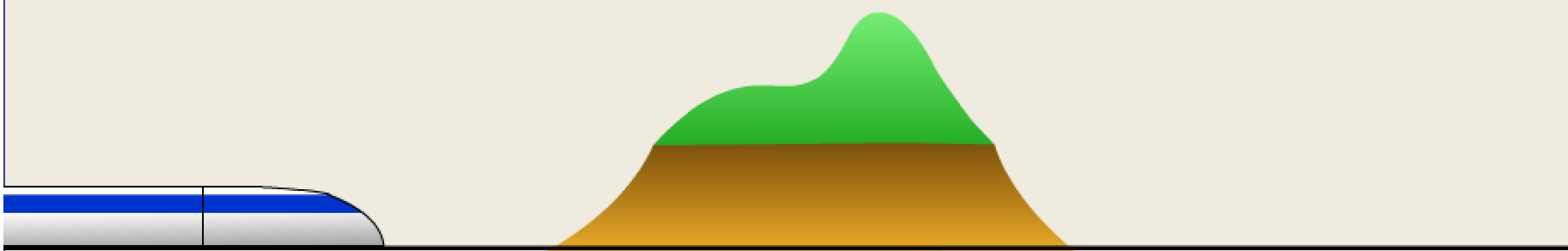
$$\therefore x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\therefore L = L'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow L < L'$$

$$\therefore x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \therefore L = L'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow L < L'$$

结论：从对物体有相对速度的参考系中所测得的沿速度方向的物体长度，总比与物体相对静止的参考系中测得的固有长度为短。

长 度 收 缩 演 示



v/c | L | L_0

以地面为参考系

以火车为参考系

（3） 时间的膨胀

同长度不是绝对的一样，时间也不是绝对的。设在S′系中一固定坐标处有一只静止的钟，记录在该处前后发生的两个事件，两事件的时间间隔为：

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

而有S系中的钟所记录两时间的时间间隔为：

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

由于S′以一定的速度运动。根据洛仑兹变换式有：

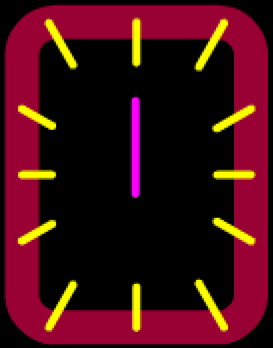
$$t_1=\frac{(t_1'+\frac{x'u}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\qquad t_2=\frac{(t_2'+\frac{x'u}{c^2})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow\Delta t>\Delta t'$$

钟慢效应

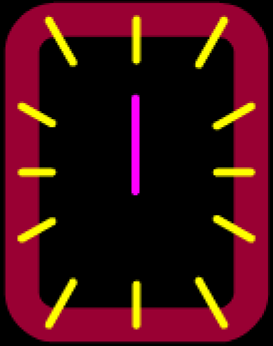
S'

时钟1



S

时钟2



在s系中观察
发现时钟1变慢

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \Delta t > \Delta t'$$

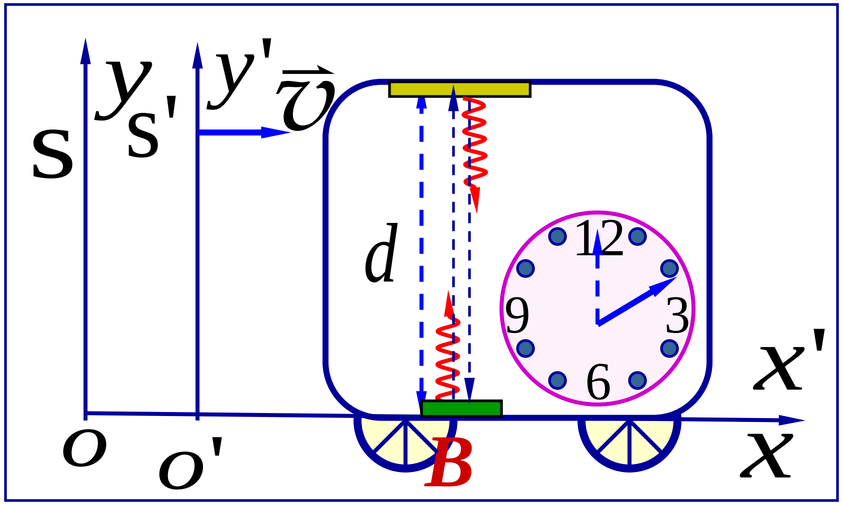
τ_0称为固有时。

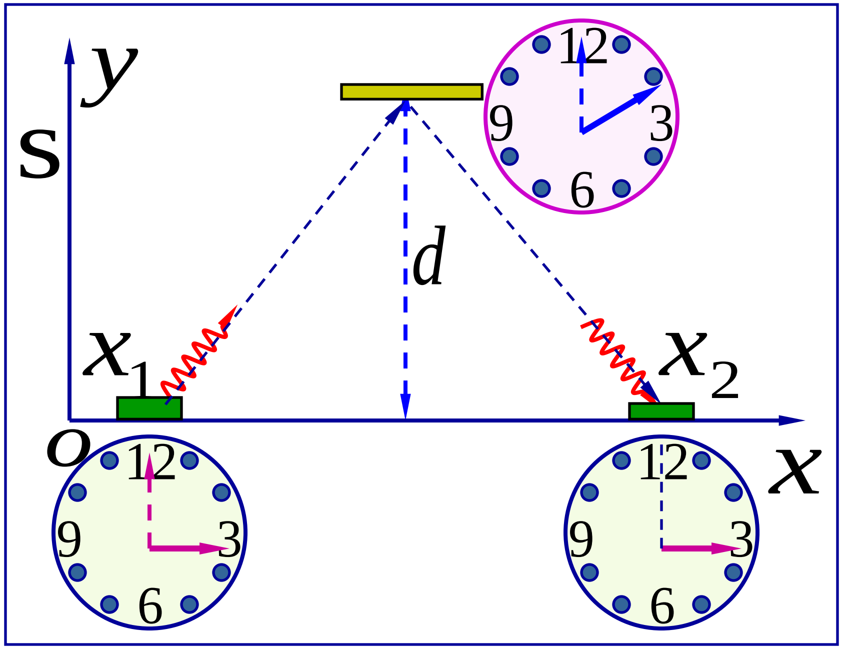
说明：（1）运动时钟的变慢完全是相对论的时空效应，与钟的具体结构和其他外界因素无关。

（2）运动时钟变慢在粒子物理学中有大量的实验证明。

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

运动的钟走得慢





S'系同一地点 B 发生两事件

发射光信号(x', t_1')

接收光信号(x', t_2')

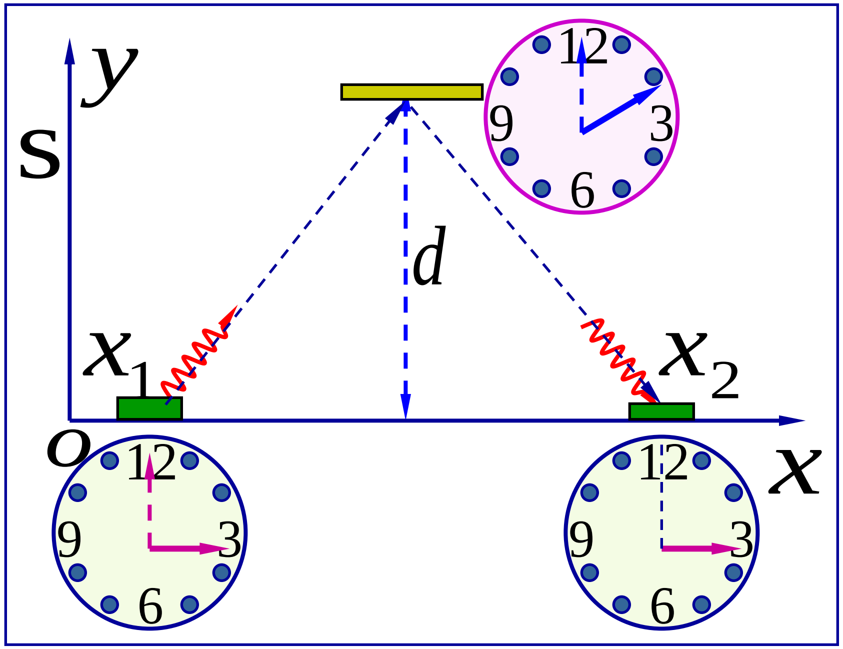
时间间隔$\Delta t' = t_2' - t_1' = 2d/c$

在S系中观测两事件

$$(x_1, t_1),\ (x_2, t_2)$$

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{vx'}{c^2})$$

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{vx'}{c^2})$$



$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

$$\boxed{\because \Delta x' = 0}$$

$$\therefore \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta t'$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

固有时间：同一地点发生的两事件的时间间隔。

$$\Delta t > \Delta t' = \Delta t_0$$ 固有时间

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

时间延缓：运动的钟走得慢。

注意

1）时间延缓是一种相对效应。

2）时间的流逝不是绝对的，运动将改变时间的进程。（例如新陈代谢、放射性的衰变、寿命等。）

3）$v << c$时，$\Delta t \approx \Delta t'$

狭义相对论的时空观

1） 两个事件在不同的惯性系看来，它们的空间关系是相对的，时间关系也是相对的，只有将空间和时间联系在一起才有意义。

2）时—空不互相独立，而是不可分割的整体。

3）光速 c 是建立不同惯性系间时空变换的纽带。

例：π介子固有寿命实验值为(2.603±0.002)×10^{-8}s。现代物理实验测出以0.91*c*高速飞行的π介子，平均飞行距离为17.135m。试分析这个结果。

解：由飞行距离可得实验室系中π介子的平均寿命

$$\tau = \frac{l_0}{v} = \frac{17.135}{0.91 \times 3 \times 10^8} \cong 6.276 \times 10^{-8}\mathrm{s}$$

运动钟变慢，可算出π介子的固有寿命τ_0为：

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \tau\sqrt{1-0.91^2} \cong 2.602 \times 10^{-8}\mathrm{s}$$

计算值与实验值只相差 0.001×10^{-8}s。说明相对论的时间膨胀预言是正确的。

实验室系中π介子的运动寿命：

$$\tau = \frac{l_0}{v} \cong 6.276 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

π介子的固有寿命τ_0

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1 - v^2 / c^2} \cong 2.602 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

此外，在π介子看来，实验室系以0.91c高速飞来，π介子经历的长度与l_0的关系，按照运动尺变短为：

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l\sqrt{1 - 0.91^2} \cong 7.104\,\mathrm{m}$$

当然，这个长度同样可以用速度算得：

$$l = v\tau_0 \cong 7.104\,\mathrm{m}$$

（4）两种时空观对照

经典时空观：

空间是绝对的，时间是绝对的，空间、时间和物质运动三者没有联系。

相对论时空观：

a. 时间、空间有着密切联系，时间、空间与物质运动是不可分割的。

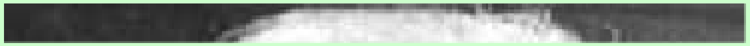
b. 不同惯性系各有自己的时间坐标，并相互发现对方的钟走慢了。

c. 不同惯性系各有自己的空间坐标，并相互发现对方的“尺”缩短了。

d. 作相对运动的两个惯性系中所测得的运动物体的速度，不仅在相对运动的方向上的分量不同，而且在垂直于相对运动方向上的分量也不同。

e. 光在任何惯性系中传播速度都等于c，并且是任何物体运动速度的最高极限。

f. 在一个惯性系中同时发生的两事件，在另一惯性系中可能是不同时的。



同时性-1

尺缩效应2

同时性-2

钟慢效应-1

钟慢效应-2

尺缩效应

§14-5 狭义相对论动力学基础

1. 相对论力学的基本方程

牛顿力学中，动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

m：不随物体运动状态而改变的恒量。

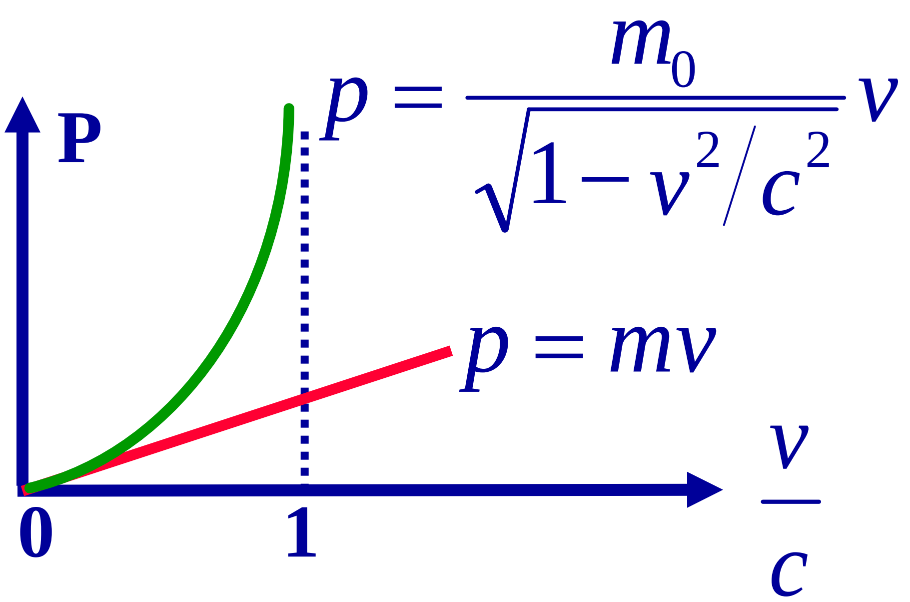
相对论动量必须满足以下两个条件：

a. 在洛仑兹变换下保持不变；

b. 在$v/c \to 0$的条件下，还原为牛顿力学的动量形式。

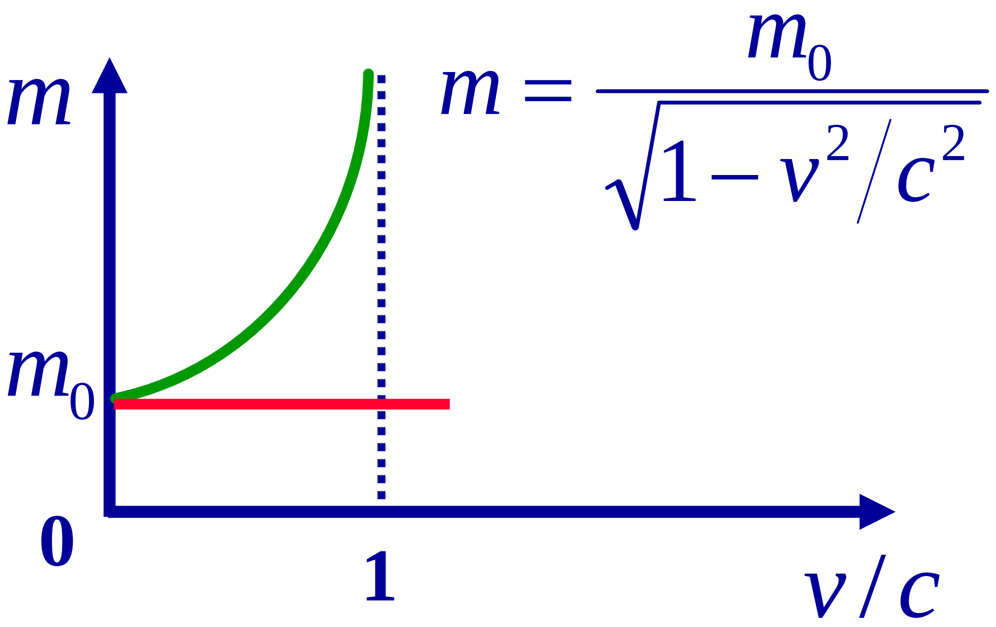
由此，得相对论动量：

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}$$



相对论性质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



$\boldsymbol{m_0}$——静止质量

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

说明：

a. 在$v \ll c$时，$m \approx m_0$。

b. 当$v \to c$时，$m \to \infty$，即不论对物体加多大的力，也不可能再使它的速度增加。

c. 当$v = c$时，必须$m_0 = 0$，即以光速运动的物体是没有静止质量的。

d. 相对论力学基本方程

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}\right) = \vec{F}$$

上式满足相对性原理

在$v << c$的条件下： ➡ $\vec{F} = m_0\vec{a}$

2．质量与能量的关系

2.1 相对论动能

质点在变力作用下由静止开始沿x轴作一维运动：

$$E_k=\int F_x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=\int v\mathrm{d}p=pv-\int p\mathrm{d}v$$

$$=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\int_0^v\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathrm{d}v$$

$$=\frac{m_0v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+m_0c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\Big|_0^v$$

$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2=mc^2-m_0c^2$$

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

上式表明：质点以速率v运动时所具有的能量mc^2，与质点静止时所具有的能量m_0c^2之差，等于质点相对论性的动能。

$$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$= m_0c^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \cdots - 1\right)$$

在$v << c$的条件下：

$$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x, \alpha = -1/2, x = -v^2/c^2$$

2.2 相对论总能量

$$mc^2 = E_k + m_0c^2 \quad \Rightarrow \quad E = E_k + E_0$$

$$E = mc^2$$

说明：

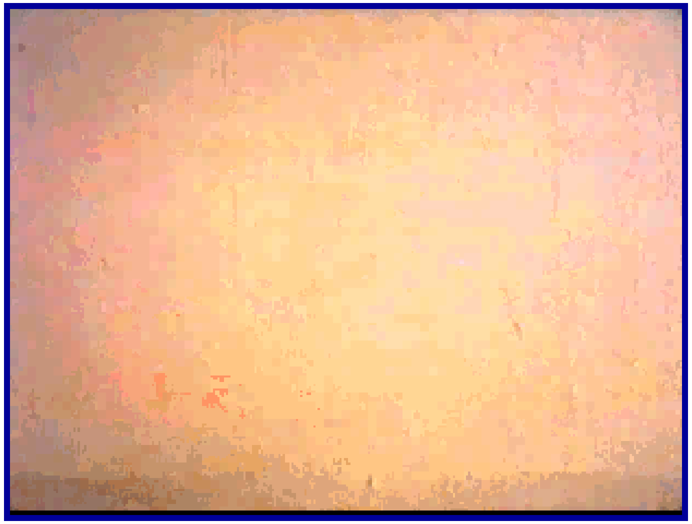
a. 物体处于静止状态时，物体也蕴涵着相当可观的静能量。

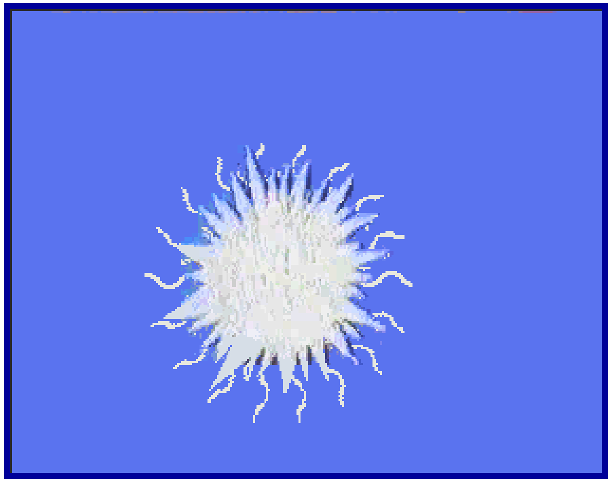
b. 相对论中的质量不仅是惯性的量度，而且还是总能量的量度。

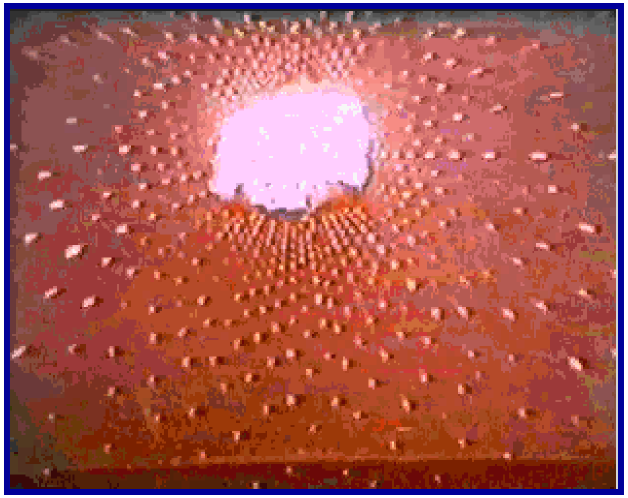
c. 如果一个系统的质量发生变化，能量必有相应的变化。

d. 对一个孤立系统而言，总能量守恒，总质量也守恒。

相对论质能关系在军事上的应用：核武器







3．动量与能量的关系

在相对论中：

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

由以上两式消去v可得：

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + m^2v^2c^2$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$$

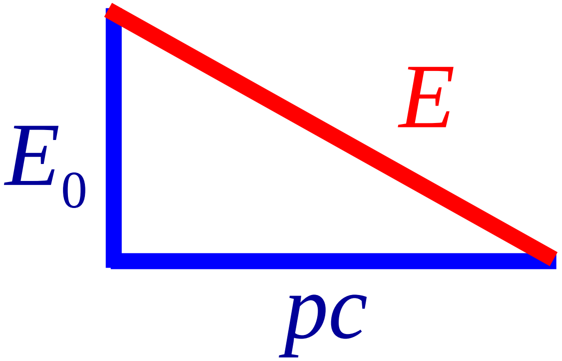
对于以光速运动的物体：

光子：

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc$$

$$E = h\nu \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$



例题：原子核的结合能。已知质子和中子的质量分别为：$M_p = 1.0007\,28$ u，$M_n = 1.0008\,66$ u。两个质子和两个中子组成一氦核${}^4_2\mathrm{He}$，实验测得它的质量为$M_A = 4.0001\ 50$u，试计算形成一个氦核时放出的能量。(1u = 1.660 × 10^{-27}kg)

解: 两个质子和两个中子组成氦核之前，总质量为

$$M = 2M_p + 2M_n = 4.003188\,\mathrm{u}$$

而从实验测得氦核质量M_A小于质子和中子的总质量M，这差额称$\Delta M = M - M_A$为原子核的质量亏损。对于${}^4_2\mathrm{He}$核

$$\Delta M = M - M_A = 0.030\,38\,\mathrm{u}$$

$$= 0.030\,38 \times 1.660 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

根据质能关系式得到的结论：物质的质量和能量之间有一定的关系，当系统质量改变ΔM时，一定有相应的能量改变

$$\Delta E = \Delta M c^2$$

由此可知，当质子和中子组成原子核时，将有大量的能量放出，该能量就是原子核的结合能。所以形成一个氦核时所放出的能量为

$$\Delta E = 0.030\,38 \times 1.660 \times 10^{-27} \times \left(3 \times 10^{8}\right)^2 \mathrm{J}$$

$$= 0.453\,9 \times 10^{-11} \mathrm{J}$$

例题：设有两个静止质量都是 m_0 的粒子，以大小相同、方向相反的速度相撞，反应合成一个复合粒子。试求这个复合粒子的静止质量和速度。

解：设两个粒子的速率都是v，由动量守恒和能量守恒定律得

$$\frac{m_0 v - m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{M_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \qquad Mc^2 = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

M和V分别是复合粒子的质量和速度。显然$V=0$，这样

$$M = M_0$$

而

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

这表明复合粒子的静止质量M_0大于$2m_0$，两者的差值

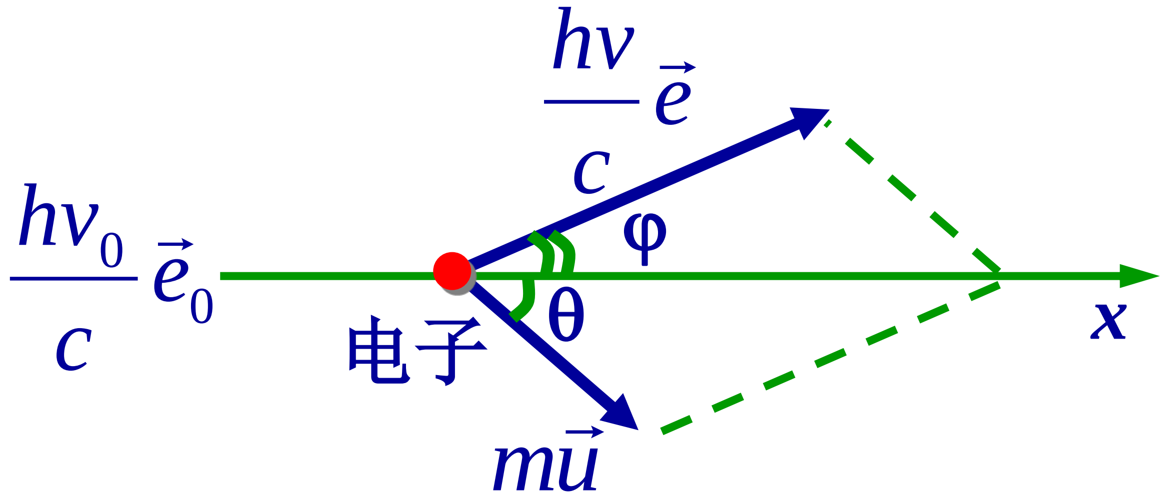
$$M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2m_0 = \frac{2E_K}{c^2}$$

式中E_k为两粒子碰撞前的动能。由此可见，与动能相应的这部分质量转化为静止质量，从而使碰撞后复合粒子的静止质量增大了。

例题：能量为$h\nu_0$、动量为$h\nu_0/c$的光子，与一个静止的电子作弹性碰撞，散射光子的能量为$h\nu$，动量为$h\nu/c$。试证光子的散射角φ满足下式：

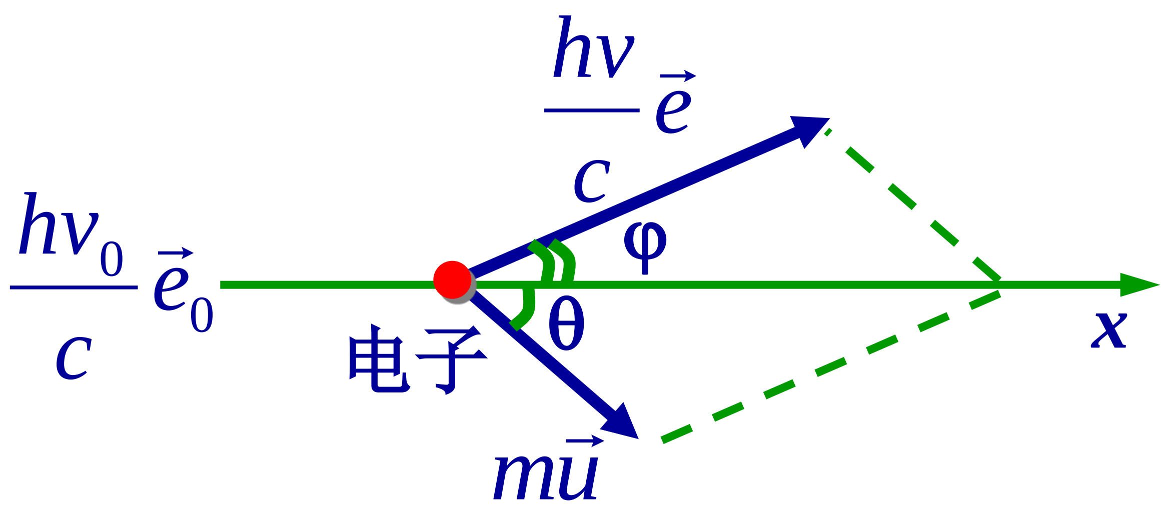
$$\frac{c}{\nu}-\frac{c}{\nu_0}=\frac{h}{m_0c}\left(1-\cos\varphi\right)$$

此处 m_0 是电子的静止质量，h 为普朗克常量。



证明：如图所示，入射光子的能量和动量分别为$h\nu_0$和$h\nu_0\,\vec{e}_0\,/c$，与物质中质量为m_0的静止自由电子发生碰撞。碰撞后，设光子散射方向和入射方向成φ角，这时它的能量和动量分别变为$h\nu$和$h\nu\,\vec{e}\,/c$，$\vec{e}_0$和$\vec{e}$代表在光子运动方向的单位矢量。

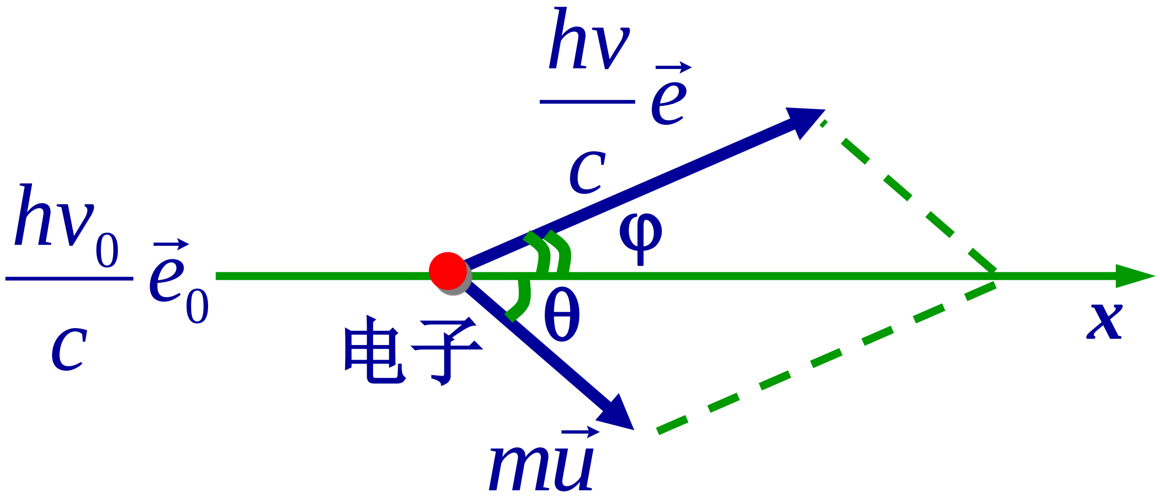
与此同时电子向着某一角度θ的方向飞去，它的能量和动量分别变为mc^2和$m\vec{u}$



故在二者作弹性碰撞时，应满足能量守恒和动量守恒两个定律，

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \qquad (1)$$

$$m\vec{u} = \frac{h\nu_0}{c}\vec{e}_0 - \frac{h\nu}{c}\vec{e} \qquad (2)$$



由图可见，矢量$m\vec{u}$是矢量$(h\nu/c)\vec{e}$和$(h\nu_0/c)\vec{e}_0$所组成平行四边形的对角线，所以

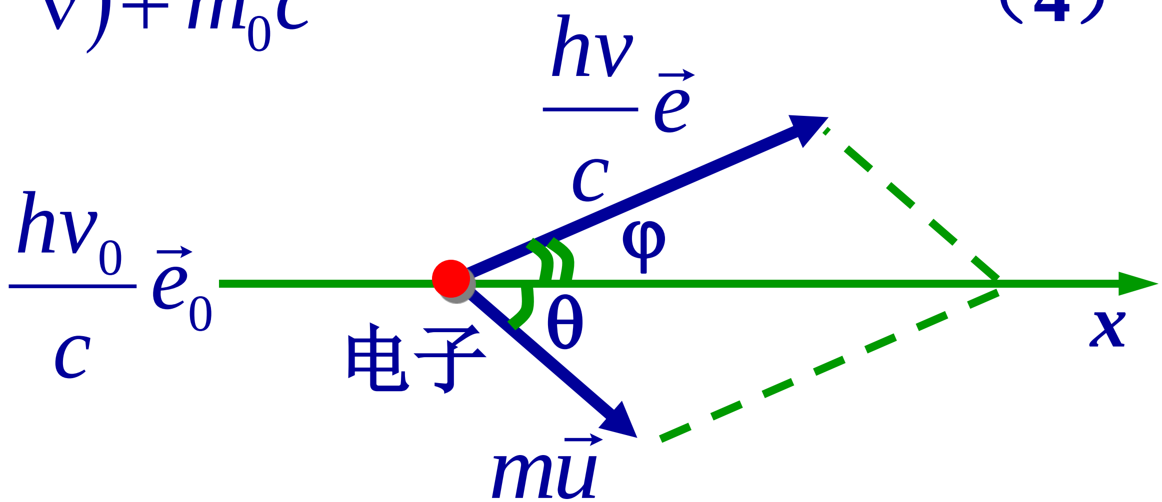
$$(mu)^2=\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2-2\frac{h\nu_0}{c}\frac{h\nu}{c}\cos\varphi$$

或

$$m^2u^2c^2=h^2\nu_0^2+h^2\nu^2-2h^2\nu_0\nu\cos\varphi \qquad （3）$$

（1）可改写为

$$mc^2=h(\nu_0-\nu)+m_0c^2 \qquad （4）$$



将式（4）平方再减去式（3），得到

$$m^2c^4\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=m_0^2c^4-2h^2\nu_0\nu(1-\cos\varphi)+2m_0c^2h(\nu_0-\nu)$$

上式可写成

$$m_0^2c^4=m_0^2c^4-2h^2\nu_0\nu(1-\cos\varphi)+2m_0c^2h(\nu_0-\nu)$$

由此可得

$$\frac{c(\nu_0-\nu)}{\nu_0\nu}=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$$

亦即 $$\frac{c}{\nu}-\frac{c}{\nu_0}=\frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi)$$