

第二章

牛顿运动定律

§ 2-1 牛顿运动三定律

牛顿的生平与主要科学活动



伟大的科学家——牛顿



1642~1727
明崇祯15年~清雍正5年



牛顿 Issac Newton
(1642—1727)

英国物理学家，经典物理学的奠基人。他对力学、光学、热学、天文学和数学等学科都有重大发现，其代表作《自然哲学的数学原理》是力学的经典著作。牛顿是近代自然科学奠基时期具有集前人之大成的贡献的伟大科学家。

少年时代的牛顿，天资平常，但很喜欢制作各种机械模型，他有一种把自然现象、语言等进行分类、整理、归纳的强烈嗜好，对自然现象极感兴趣。

青年牛顿

- 1661年考入剑桥大学三一学院
- 1665年获学士学位
- 1666年6月22日至1667年3月25日，两度回到乡间的老家。

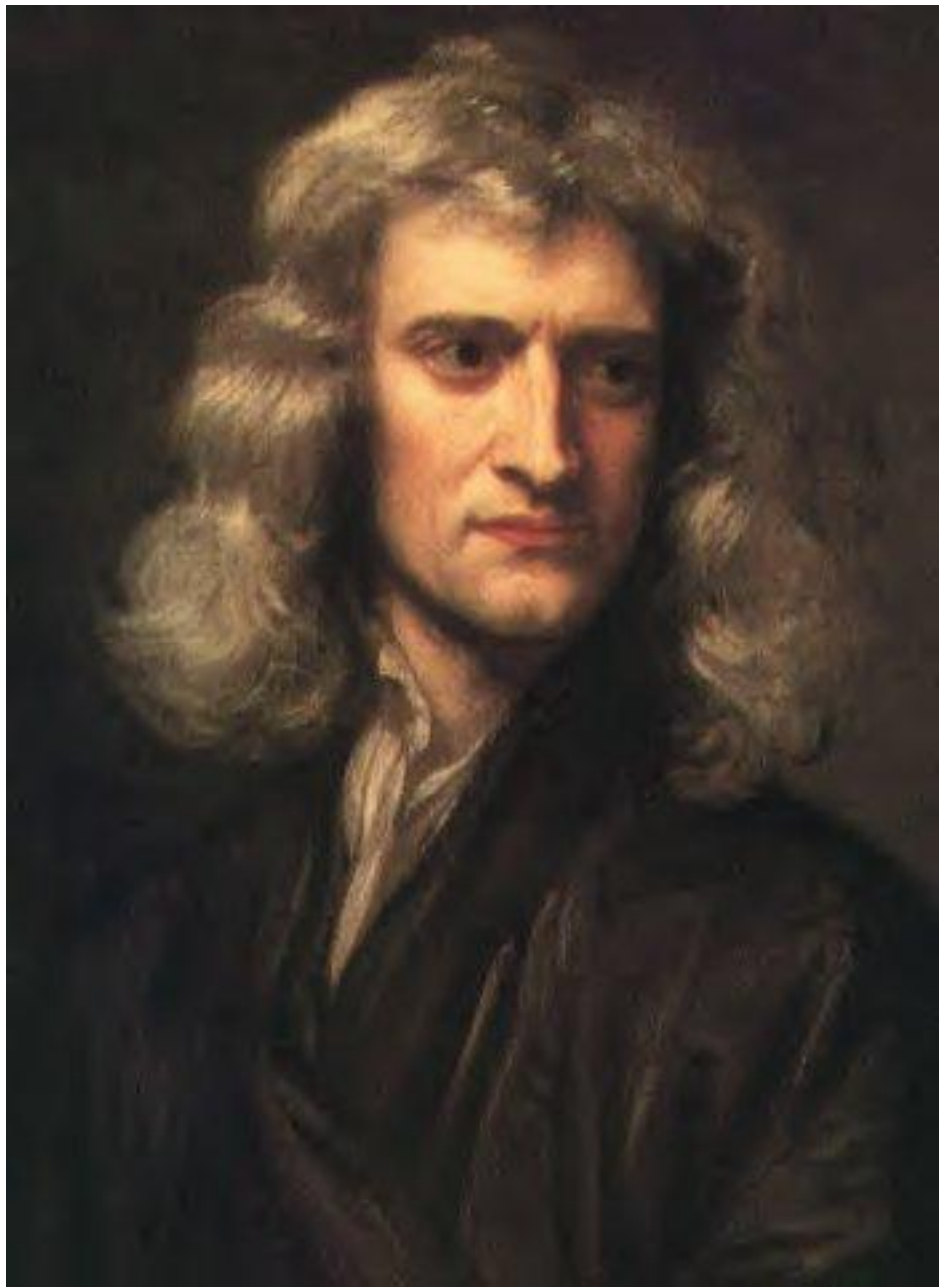


全面丰收的时期

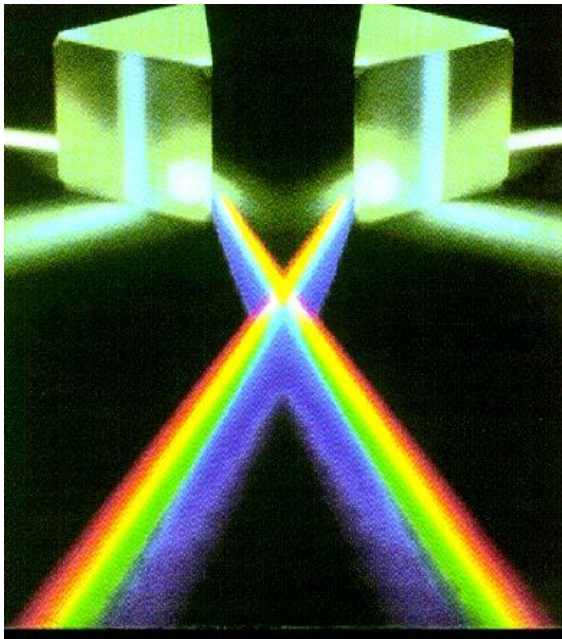
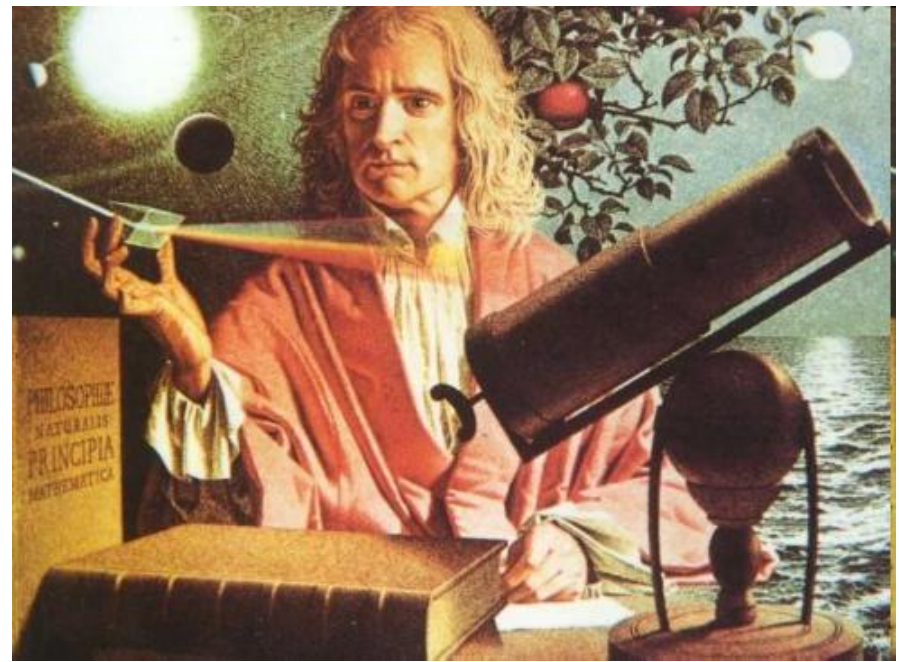
1667年牛顿返回剑桥大学当研究生，次年获得硕士学位

1669年由于巴洛的推荐，接受了“卢卡斯数学讲座”的职务

1669年发现了二项式定理

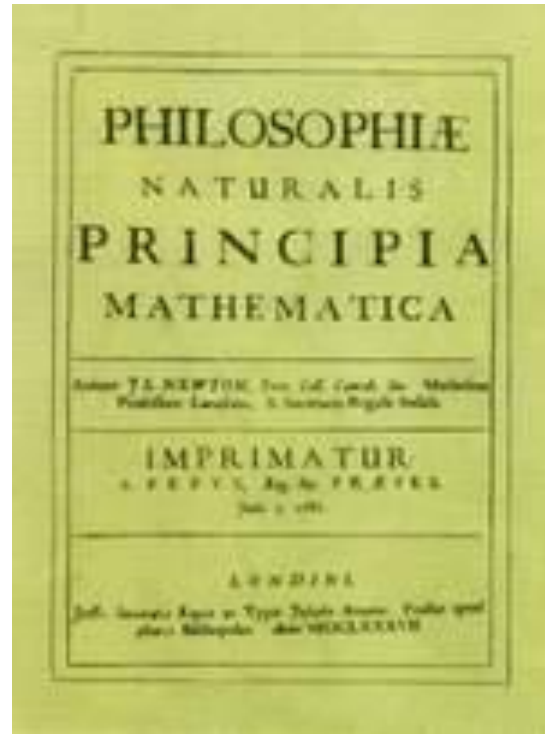
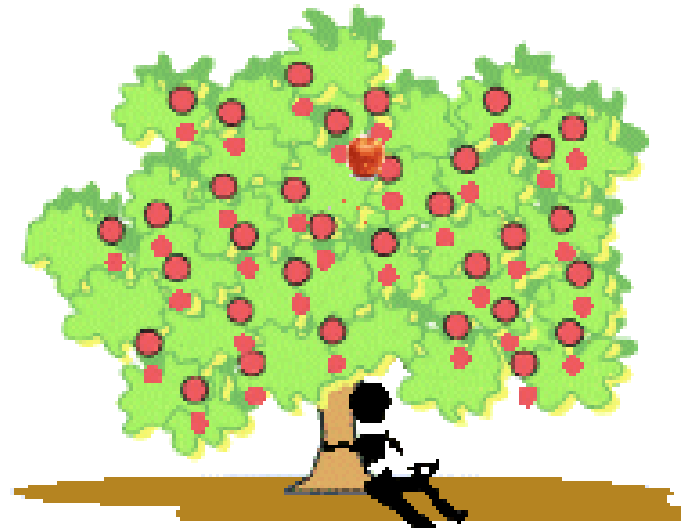


1672年，发表了三棱镜实验的结果，并且由于制造反射望远镜的成就被接纳为伦敦皇家学会会员。



1680年前后提出万有引力理论

1687年出版了《自然哲学的数学原理》



1696年，约翰·伯努利(Bernoulli-Johannes)和莱布尼茨(Leibniz)提出了两个向全欧洲的数学家挑战的难题。头一个至今仍很重要，后一个则不然。设在垂直平面上有任意两点，一个质点受地心引力的作用自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问沿着怎样的曲线，时间最短？这是个最速降线问题。这个问题迷惑了欧洲的科学家达6个月之久以后，再次被提了出来。牛顿第一次听说它是在1696年1月29日，是一个朋友告诉他的。那天他刚从造币厂回家，非常疲倦，晚饭后就解决了这个问题(后一问题也同时解决了)。

第二天他就把结果匿名地送到皇家学会。尽管他非常谨慎，他还是暴露了自己的身份。在造币厂的牛顿，怨恨数学家和科学家怂恿他参与科学讨论的努力。伯努利看到这个解答，立即惊叫道：“呵！我从狮子的利爪中认出了它！”(这不是伯努利说的拉丁语的精确译文。)他们都了解牛顿，即便是他头上罩着钱袋，不告诉他的名字，他们也认识他。

牛顿充满活力的第二个例子是1716年当他74岁时反映的。莱布尼茨(Leibniz)轻率地提出了一个在他看来是很困难的问题，同欧洲的数学家们挑战，而且这挑战还主要是指向牛顿。下午5点多钟，牛顿从造币厂精疲力尽地回到家中时收到了题目，他当晚就解决了。而这时，莱布尼茨(Leibniz)正幸灾乐祸地想到他使那头狮子陷入了困境。他能在一刹那间集中他的全部智慧于一个困难的问题上，在这方面，整个数学史上都找不出超过他的人(恐怕连匹敌者也没有)。

在生命的最后两、三年中，疼痛时时袭击着他。他忍受“结石”的痛苦而毫不畏缩，虽然汗珠滚滚，他还总是用一两句话来安慰那些守候在他身边的人。最后，他被“不停地咳嗽”弄得严重地衰弱了。终于在疼痛减轻了几天之后，于1727年3月20日凌晨1—2时之间，静静地在睡眠中死去，享年85岁。他被埋葬在威斯敏斯特大教堂里。



威斯敏斯特教堂的
牛顿之墓

In 1727, the year of Newton's death, the English poet Alexander Pope (1688-1744) composed an epitaph for Newton's grave at Westminster Abbey. His epitaph was short and precise and illustrates the importance of this solitary genius. Pope wrote:

Nature and Nature's laws lay hid in night;
God said, Let Newton be! and all was light.

天地自然律，暗夜万年藏。
神招牛顿来，一切显光芒。
——王道余 译

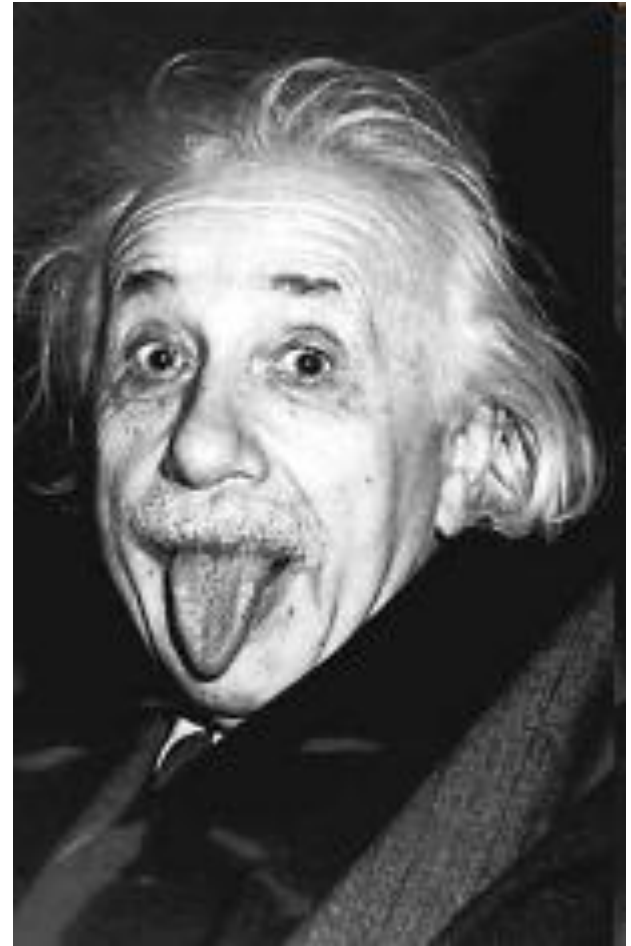
自然，和它的法则，隐匿于黑夜，
上帝说，让牛顿去吧！于是一片光明。
牛顿的墓志铭



John Collings Squire (2 April 1884 – 20 December 1958) was a British poet, writer, historian, and influential literary editor of the post-World War I period. He wrote:

**It did not last,
the devil howling,
‘Ho, let Einstein be!’,
restored the status quo.**

这没有持续，
魔鬼叫道，
“哦，让爱因斯坦去！”
于是重归于旧。





1727年逝世

Westminster Abbey
(London, UK) £ 6.0



1. 牛顿第一定律

牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其它物体对它作用的力迫使它改变这种状态为止。

几点说明：任何物体都具有惯性，牛顿第一定律又名惯性定律。

当物体受到其他物体作用时才会改变其运动状态，即力是改变物体运动状态的原因。

牛顿第一定律是理想化抽象思维的产物，不能用实验严格验证；牛顿定律仅适用于惯性系。

惯性系：在一个参考系观察，一个不受力作用或处于平衡状态的物体，将保持静止或匀速直线运动的状态，这个参考系叫惯性系。

2. 牛顿第二定律

牛顿第二定律：物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，并与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同。

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

国际单位制对应单位：N，kg，m/s²

牛顿第二定律的微分形式

牛顿第二定律原文意思：运动的变化与所加的动力成正比，并且发生在这力所沿直线方向上。这里的“运动”指物体的质量和速度矢量的乘积。

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

即牛顿第二定律原意为：

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \text{ or } d\vec{p} = \vec{F}dt$$



牛顿第二定律
的微分形式

牛顿第二定律的微分形式的适用范围更广，对于接近光速的高速运动情形与变质量问题均适用。

当速度远低于光速时，自然过渡为熟知的形式：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

知识拓展与讨论：

(1)质量：质量是物体惯性大小的量度。不受外力保持运动状态不变；相同外力作用下，质量越大，加速度越小，运动状态越难改变；质量越小，加速度越大，运动状态容易改变。因此，牛顿第二定律中的质量称为惯性质量。若严格从物理的角度考察，这和万有引力定律中出现的质量，在起源上是不一样的。其一由运动学实验导出，而另一个源于自然界的一种基本相互作用。不过迄今为止的实验表明，我们可以认为它们没有区别。

(2)瞬时性：定律中的力和加速度都是瞬时的，同时存在，同时消失。在牛顿的时代，还没有形成场的概念，相互作用的传播不需要时间。而爱因斯坦改变了这一观念！

(3)矢量性与叠加原理：矢量表达式，力与加速度都是矢量，二者方向相同，满足叠加原理。

叠加原理：几个力同时作用在一个物体上，物体产生的加速度等于每个力单独作用时产生的加速度的叠加。实质上是因为物理规律的数学表示，满足数学上的线性叠加原理。比如大家熟悉的矢量合成的运算，就可归结为线性代数的知识。而赋予特定的物理含义后，我们可能称之为“力的叠加原理”、“运动的叠加原理” ...。

力 \vec{F}_1 、 \vec{F}_2 、 \cdots 、 \vec{F}_i 同时作用在物体上， \vec{F} 、 \vec{a} 分别表示合力、合加速度， \vec{a}_1 、 \vec{a}_2 、 \cdots 、 \vec{a}_i 分别表示各个力产生的加速度，力的叠加原理表示为

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i \\ &= m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \cdots + m\vec{a}_i \\ &= m\vec{a}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

直角坐标系中的分量形式（应试中重要）

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad F_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

自然坐标系中的分量形式（了解）

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} \quad F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

其中 ρ 为该点处的曲率半径。对于圆运动来说，就是圆的半径。

3. 牛顿第三定律

两个物体之间的作用力 \vec{F} 和反作用力 \vec{F}' 沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

两点说明：

(1) 作用力、反作用力，分别作用于二物体，各产生其效果；

(2) 作用力和反作用力是性质相同的力。

§ 2-2 力学中常见的几种力

1. 万有引力

万有引力：存在于一切物体间的相互吸引力。

牛顿万有引力定律：

$$F = G_0 \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

其中 m_1 和 m_2 为两个质点的质量， r 为两个质点的距离， G_0 叫做万有引力常量。

$$G_0 = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

引力质量与惯性质量在物理意义上不同，但是二者相等，因此不必区分。

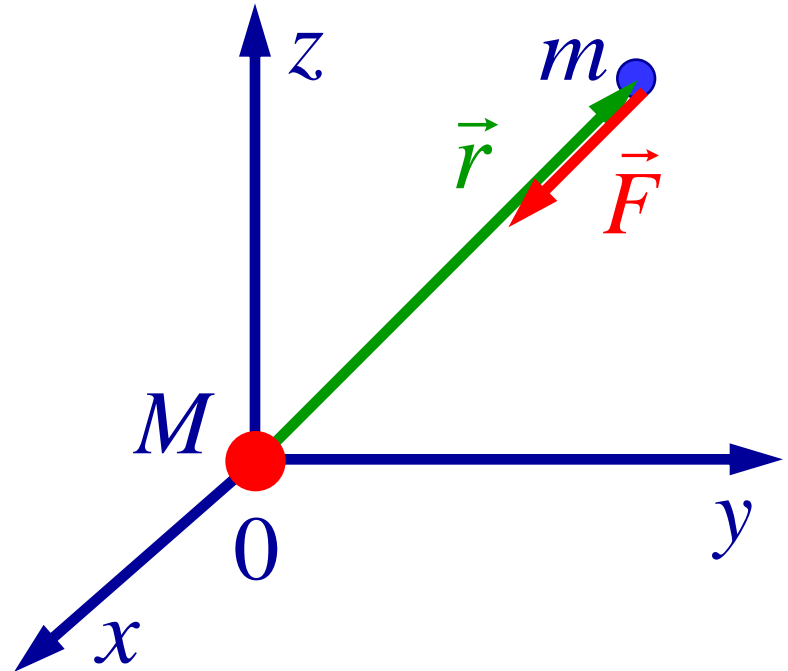
万有引力的表示

矢量表示：以某质点 M 为坐标原点建立坐标系，则 M 作用于 m 的万有引力为

$$\vec{F} = -G_0 \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

$$= -G_0 \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

其中 $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$



是 \vec{r} 方向上的单位矢量。

注意，由于地球自转，重力并不是地球的引力，而是引力沿竖直方向的一个分力，地球引力的另一个分力提供向心力。

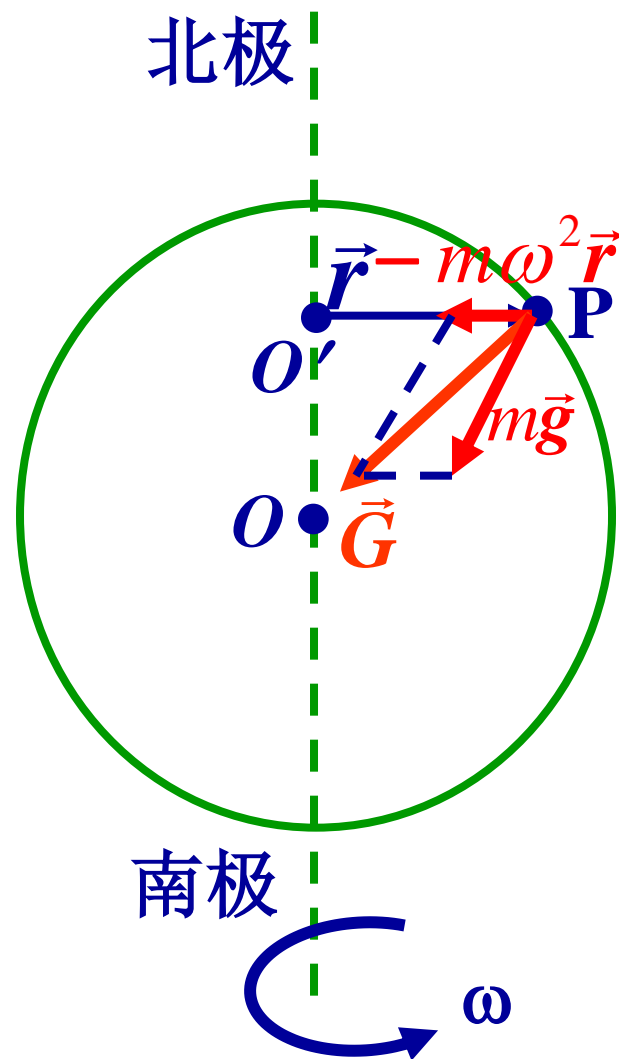
重力

重力：在地球表面的物体，受到地球的吸引而使物体受到的力。

注意，由于地球自转，重力并不是地球的引力，而是引力沿竖直方向的一个分力，地球引力的另一个分力提供向心力。

重力与重力加速度的方向都是竖直向下。

忽略地球自转：
$$g = \frac{G_0 M}{R^2}$$



万有引力的坐标分量表示

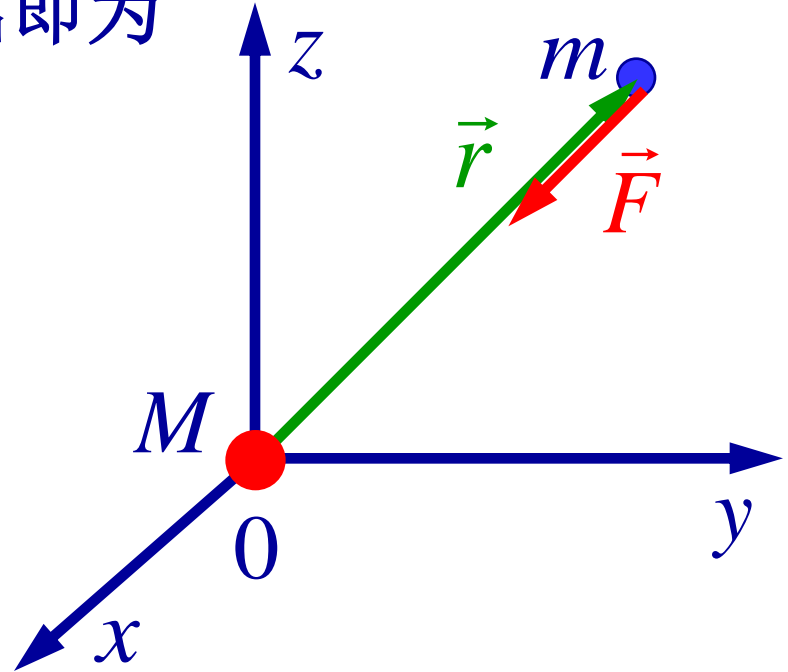
$$\vec{F} = -G_0 \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

将矢量表示用坐标分量写出即为

$$F_x = -G_0 \frac{mMx}{r^3}$$

$$F_y = -G_0 \frac{mMy}{r^3}$$

$$F_z = -G_0 \frac{mMz}{r^3}$$



由于地球自转，重力并不是地球的引力，而是引力沿竖直方向的一个分力，另一个分力提供向心力。

2. 弹性力

弹性力：两个相互接触并产生形变的物体企图恢复原状而彼此互施作用力。

条 件：物体间接触，物体的形变。

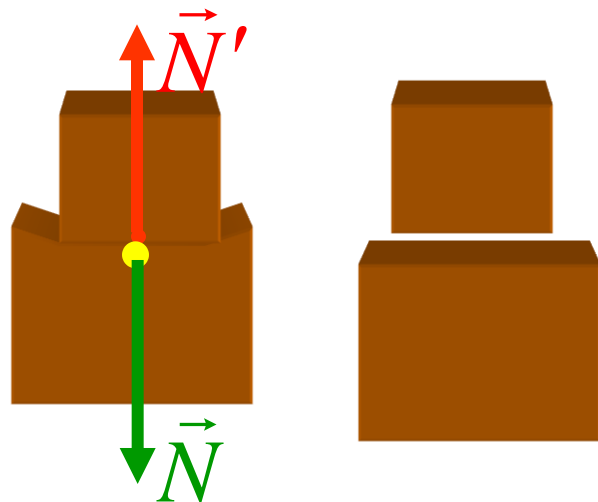
方 向：始终与使物体发生形变的外力方向相反。

三种表现形式：

(1)两个物体通过一定面积相互挤压；

大小：取决于挤压程度。

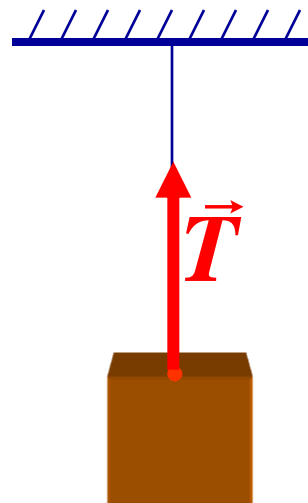
方向：垂直于接触面指向对方。



(2)绳对物体的拉力；

大小：取决于绳的收紧程度。

方向：沿着绳指向绳收紧的方向。

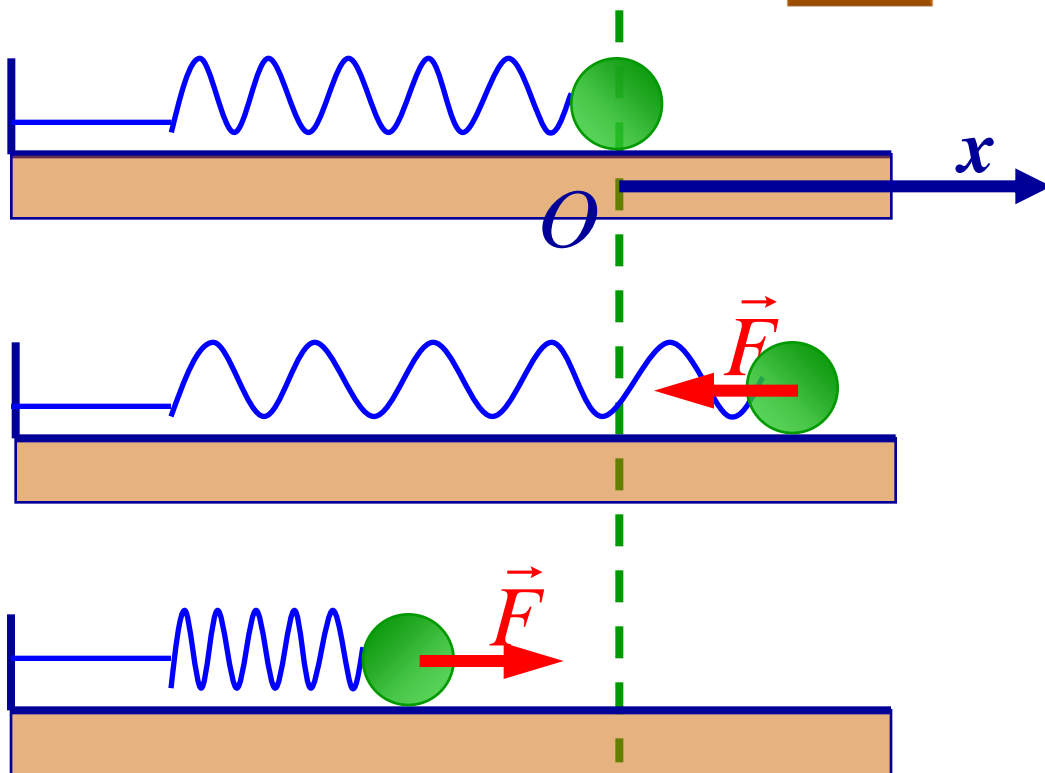


(3)弹簧的弹力；

弹性限度内，以弹簧原长端点为坐标原点建立坐标系

$$F = -kx$$

方向：指向要恢复弹簧原长的方向。



3. 摩擦力

摩擦力：两个相互接触的物体在沿接触面相对运动时，或者有相对运动趋势时，在它们的接触面间所产生的一对阻碍相对运动或相对运动趋势的力。

条件：表面接触挤压；相对运动或相对运动趋势。

方向：与物体相对运动或相对运动趋势方向相反。

最大静摩擦力

$$f_s = \mu_s N$$

滑动摩擦力

$$f_k = \mu_k N$$

其中 μ_s 为静摩擦系数， μ_k 为滑动摩擦系数。它们与接触面的材料和表面粗糙程度有关。

$$\mu_k < \mu_s < 1$$

假設光滑的表面摩擦力一定較小是不正確的



火車打光的輪子在打光的鐵軌上一樣行駛



有些賽車所用的輪胎是
全部光滑的沒有齒狀



對一般車用輪胎而言
齒溝的重要作用：排水

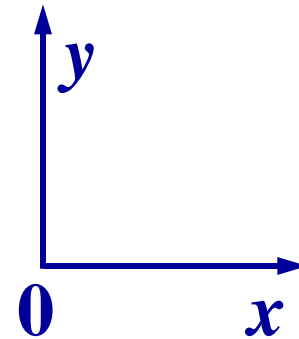
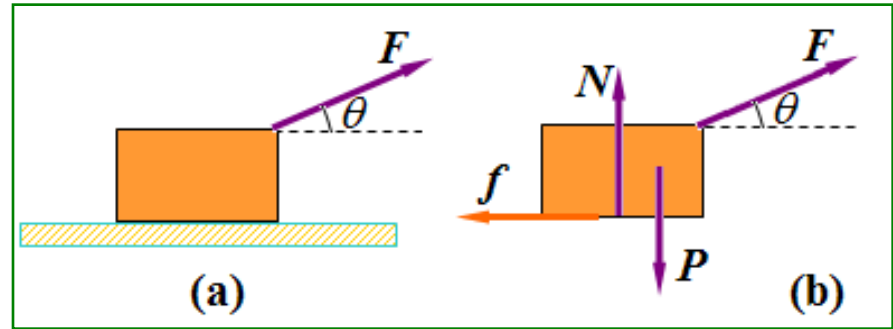
例2 一物体置于水平面上，物体与平面之间的滑动摩擦系数为 μ ，如图 (a)。试求作用于物体上的拉力 F 与水平面之间的夹角 θ 为多大时，该力能使物体获得最大的加速度？

解：建立直角坐标系如图，根据牛顿第二定律，有

$$F \cos \theta - f = ma$$

$$N + F \sin \theta - P = 0$$

$$f = \mu N$$



解上面三式，得

$$f = \mu(mg - F \sin \theta)$$

$$a = \frac{F}{m}(\cos \theta + \mu \sin \theta) - \mu g$$

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{F}{m}(\mu \cos \theta - \sin \theta) = 0$$

$$\mu \cos \theta - \sin \theta = 0$$

$$\tan \theta = \mu$$

当 $\theta = \arctan \mu$ 时物体获得最大的加速度。

4. 流体阻力

当物体穿过液体或气体运动时，会受到流体阻力。

(1) 当物体速度不太大时，流体为层流，阻力主要由流体的粘滞性产生。

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

(2) 当物体速率超过某限度时（低于声速），流体出现旋涡，这时流体阻力与物体速率的平方成正比。

$$F = cv^2$$

(3) 当物体与流体的相对速度提高到接近空气中的声速时，这时流体阻力将迅速增大。

$$F \propto v^3$$

5. 电磁力

分子或原子都是由电荷系统组成，它们之间的作用力本质上是电磁力。例如：物体间的弹力、摩擦力，气体的压力、浮力、粘滞阻力。

6. 强力

强力：亚微观领域，存在于核子、介子和超子之间的、把原子内的一些质子和中子紧紧束缚在一起的一种力。

作用范围：

$$< 10^{-15} \text{ m} \begin{cases} 10^{-15} \sim 0.4 \times 10^{-15} \text{ m} & \text{引力} \\ < 0.4 \times 10^{-15} \text{ m} & \text{斥力} \end{cases}$$

7. 弱力

弱力：亚微观领域内的另一种短程力，导致 β 衰变放出电子和中微子的重要作用力。

四种基本相互作用的比较

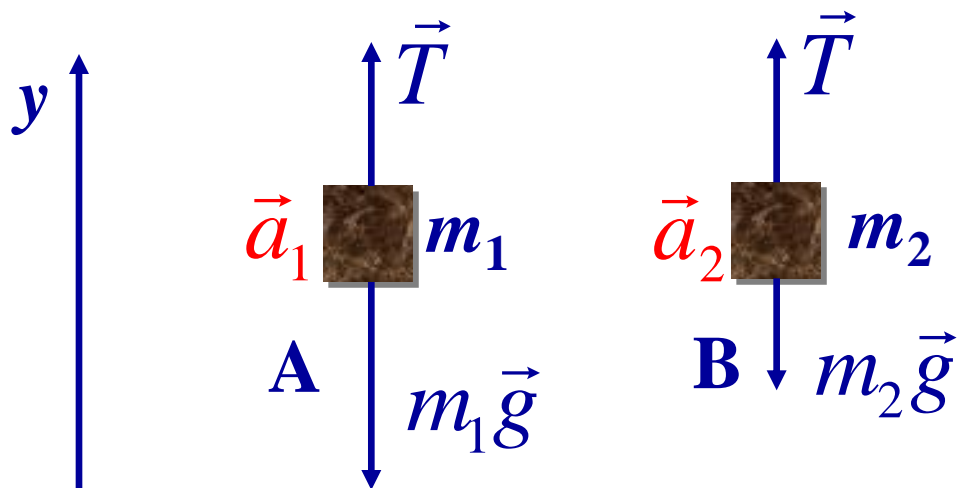
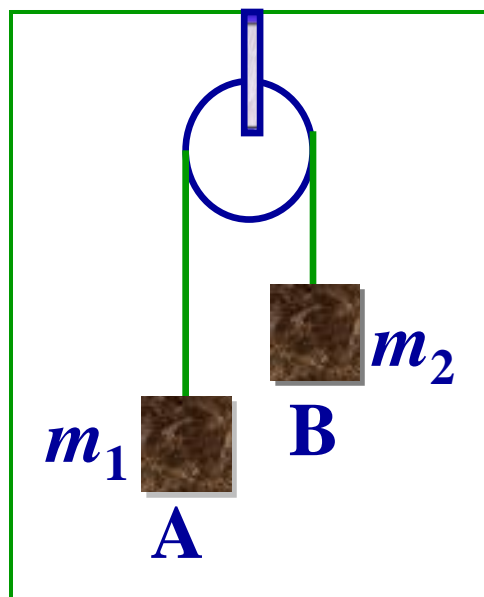
特征 \ 类型	万有引力	电磁相互作用	强相互作用	弱相互作用
力 程	长程	长程	短程	短程
作用 范 围	$0\sim\infty$	$0\sim\infty$	$<10^{-15}\text{m}$	$<10^{-15}\text{m}$
相邻质子间力的 大 小	10^{-34}N	10^2N	10^4N	10^{-2}N

§ 2-3 牛顿定律应用举例

例题：电梯中有一质量可以忽略的滑轮，轮轴无摩擦，两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的重物A和B。当电梯(1)匀速上升，(2)加速上升时，求绳中张力和物体A相对于地面的加速度。

解：以A和B为研究对象，分别进行受力分析。

已经应用条件轻绳、理想滑轮，推出： $T_1 = T_2 = T$



在竖直方向建立坐标系oy

(1) 电梯匀速运动，物体对电梯的加速度等于对地面的加速度。在坐标系中写出牛顿第二定律，有：

$$T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

在坐标系中表述绳子不可伸长的约束：

$$a_2 = -a_1$$

解上述三式，得到：

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

(2) 电梯加速度仅有y分量，设为 a_r （**取实数值！**），地面依旧是惯性系，对A、B在y方向上写牛二：

$$T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

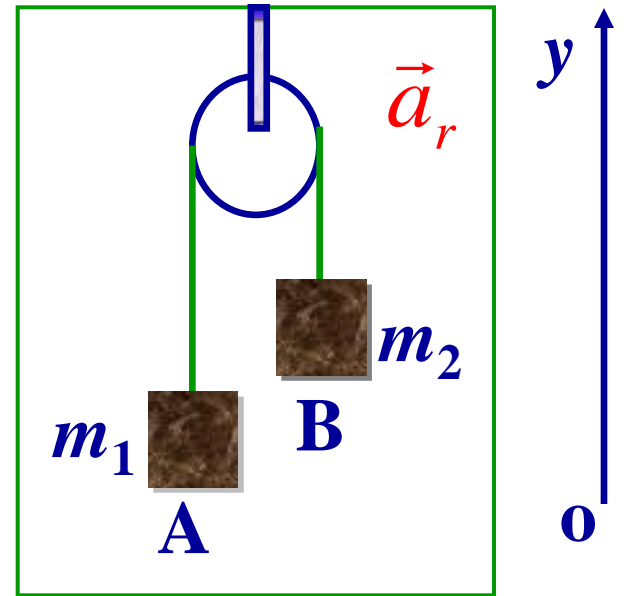
绳子不可伸长的约束如何表述？

以电梯为参照系的观察者看来，A、B两质点的加速度大小相等，方向相反！

$$a_{2r} = -a_{1r}$$

还有矢量的加法（合成法则）

$$a_1 = a_{1r} + a_r, \quad a_2 = a_{2r} + a_r$$



清点手中的方程，然后化简求解：

$$T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

$$a_{2r} = -a_{1r}$$

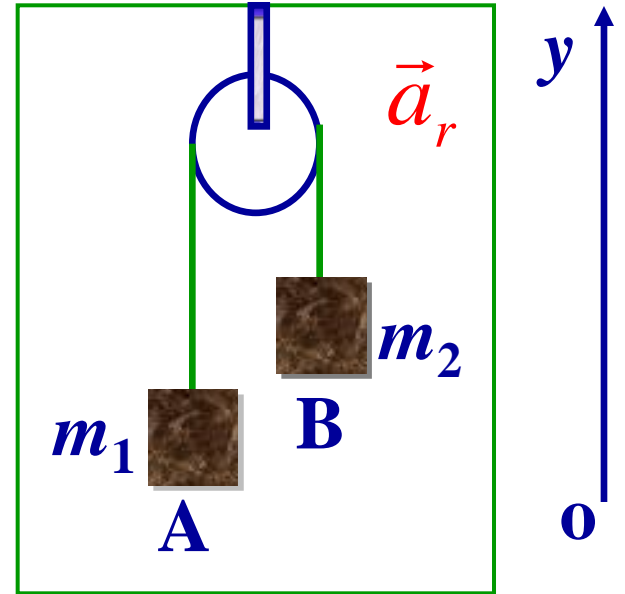
$$a_1 = a_{1r} + a_r, \quad a_2 = a_{2r} + a_r$$

因此：

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 (-a_1 + 2a_r) \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + \frac{2m_2 a_r}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (a_r + g)$$



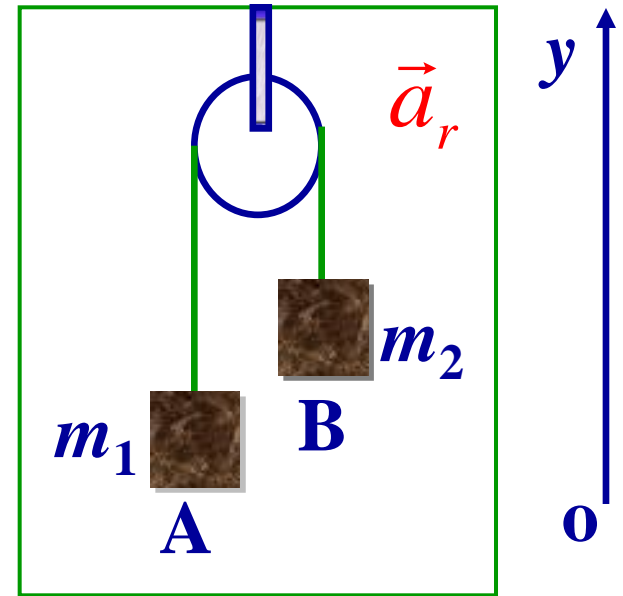
讨论：

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + \frac{2m_2 a_r}{m_1 + m_2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (a_r + g)$$

由于 m_1 和 m_2 在方程中具有同等的地位，交换指标立即可得：

$$a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g + \frac{2m_1 a_r}{m_1 + m_2}$$



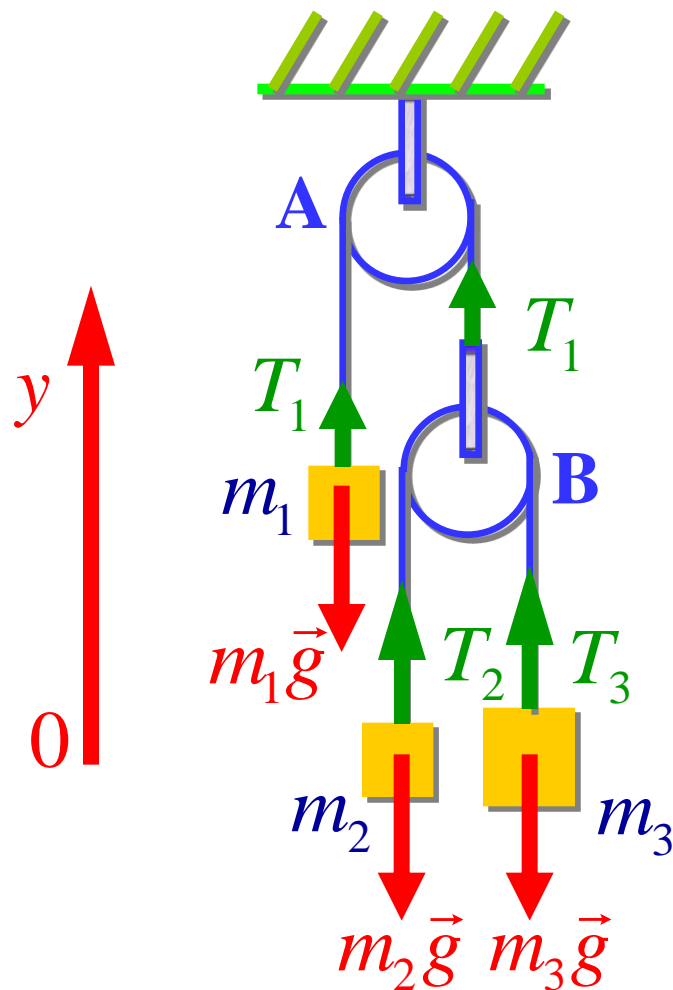
在坐标系中求解，结果即为相应的坐标分量，取实数值，大于0时和正向一致，小于0时和坐标轴的方向相反。矢量的所有性质（大小、方向）均已用坐标明确表达。不需要知道 m_1 和 m_2 孰大孰小，然则，结果之正确性毋庸置疑。

例题：设图中A为定滑轮，B为动滑轮，三个物体质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 ，求：(1)每个物体的加速度；
(2)两根绳子中的张力 T_1 与 T_2 。

解：第一步：画草图作受力分析；

关键的第二步：建立坐标系；

关键的第三步：在该坐标系内
写出各个质点牛顿第二定律的
方程



第三步：牛顿第二定律方程

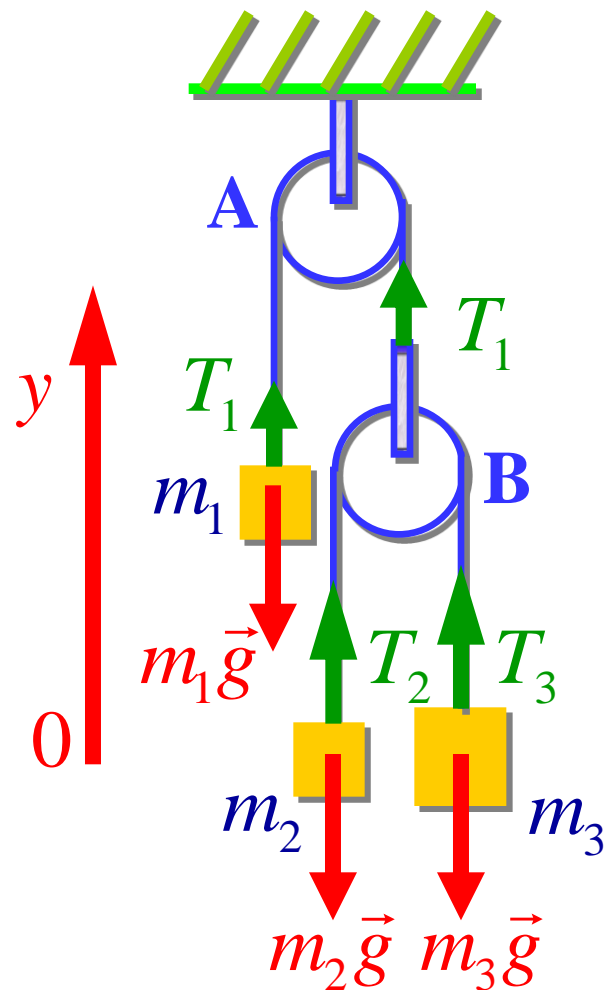
$T_2 = T_3$, $T_1 = 2T_2$, 因为无摩擦且绳子与滑轮质量均可忽略。

$$\begin{cases} 2T_2 - m_1g = m_1a_1 \\ T_2 - m_2g = m_2a_2 \\ T_2 - m_3g = m_3a_3 \end{cases}$$

一锤定音的第四步：写出约束方程

这个问题中存在哪些约束？

如何用数学语言表达这些约束？



一锤定音的第四步：约束方程

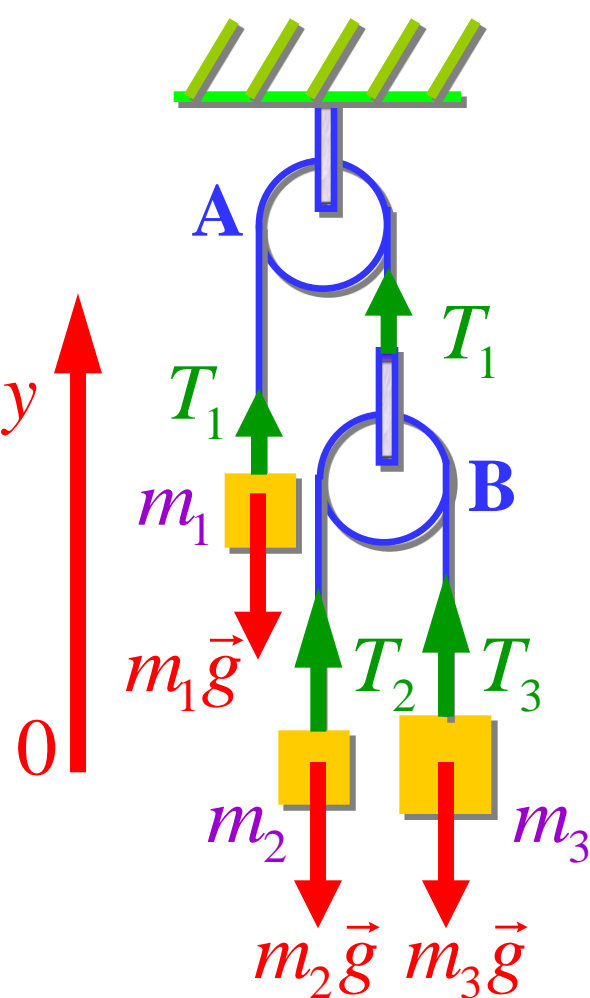
绳子不可伸长的约束：

文字表达如下：

以B为参照系的观察者看来，2、3两质点的加速度大小相等，方向相反！

以A为参照系的观察者看来，质点1与滑轮B的加速度大小相等，方向相反！

在坐标系中把它们用数学语言写下来，就得到了足够多的方程！！！！



一锤定音的第四步：约束方程

$$\begin{cases} a_B = -a_1 \\ a_{2B} = -a_{3B} \\ a_2 = a_{2B} + a_B \\ a_3 = a_{3B} + a_B \end{cases} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}(a_2 + a_3)$$

代入牛二方程求解：

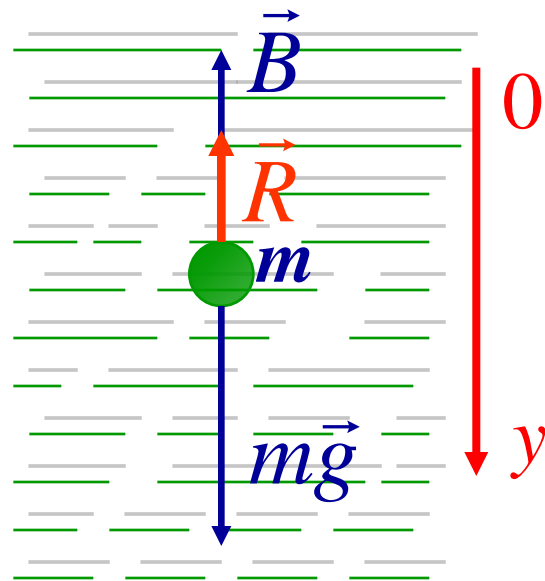
$$\begin{cases} 2T_2 - m_1 g = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_2 - m_3 g = m_3 a_3 \end{cases}$$

例题：计算一小球在水中竖直沉降的速度。已知小球的质量为 m ，水对小球的浮力为大小 B ，水对小球的粘性力大小为 $R = Kv$ ，式中 K 是和水的粘性、小球的半径有关的一个常量。

解：以小球为研究对象，分析受力：

小球的运动在竖直方向，以向下为正方向，根据牛顿第二定律，列出小球运动方程：

$$mg - B - R = ma$$



加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{mg - B - Kv}{m}$$

最大加速度

$$a_{\max} = \frac{mg - B}{m}$$

极限速度

$$v_T = \frac{mg - B}{K}$$

牛二方程变为：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K(v_T - v)}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K(v_T - v)}{m}$$

分离变量:

$$\frac{dv}{v_T - v} = \frac{K}{m} dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{v_T - v} = \int_0^t \frac{K}{m} dt$$

$$\ln \frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{K}{m} t$$

$$\ln \frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{K}{m}t$$

$$v = v_T(1 - e^{-Kt/m})$$

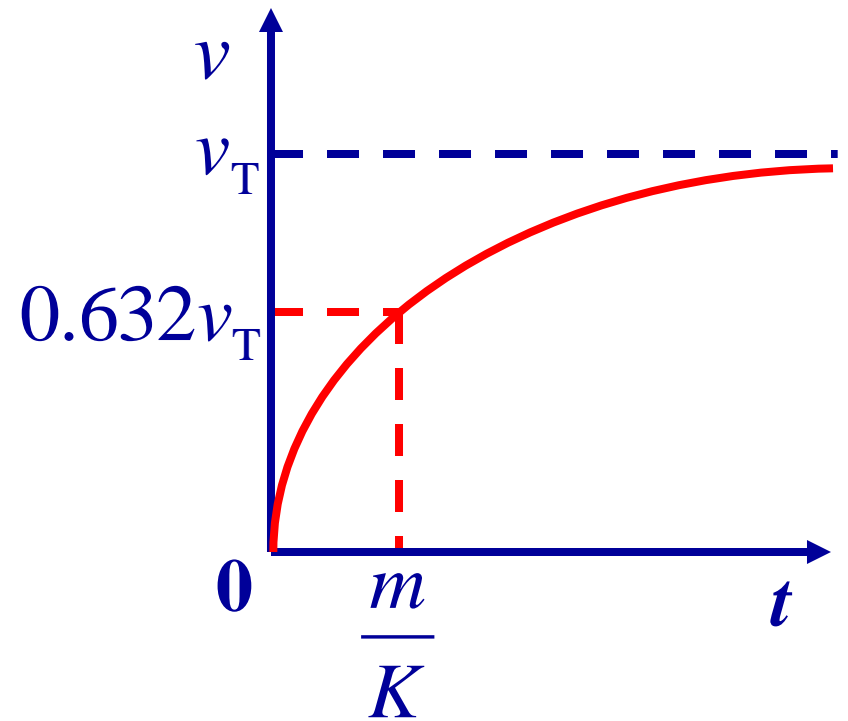
作出速度-时间函数曲线：

$$t \rightarrow \infty, v = v_T$$

物体在气体或液体中的沉降都存在极限速度。

$$t = m/K,$$

$$v = v_T(1 - e^{-1}) = 0.632v_T$$



阻力的经验公式

速度比较小时的阻力

$$R \propto v$$

速度比较大时的阻力

$$R \propto v^2$$

自由落体运动

$$v = \sqrt{2gh}$$

取 $g \approx 10 \text{m/s}^2$, $h \sim 500 \text{m}$

$$v \sim 100 \text{m/s}$$

粉笔头的速度量级

$$v \sim 10 \text{m/s}$$

我们经常不喜欢阻力

没有阻力更加可怕！

取相对合理且保守的云层高度 $h \sim 500\text{m}$ ，而雨滴的质量和粉笔头同一量级。

流弹的速度 $\sim 100\text{m/s}$

如果大自然真的发生了自由落体运动，必将是枪林弹雨！



阻力对生命有着致命的重要性

雨滴的收尾速度，与雨滴的大小有较强的相关性。一般而言，毛毛雨（直径 0.5mm ）的收尾速度为2米/秒，而暴雨（雨滴最大直径 5.5mm 左右）的雨滴最大收尾速度为8~9米/秒

如果没有空气阻力，当天上的云变成雨之后落下来，在经过一路的加速运动之后，到达地面时的速度会达到**300米/秒**，这样的速度相当于子弹速度的一半。



一般情况下，雨滴的直径介于**0.5mm~6mm**之间，极少数情况下，雨滴的直径会达到**8mm**甚至**10mm**（在夏威夷群岛曾观测到）。如果小于**0.5mm**，由于大气层上升气流的作用，足以能够让这般尺寸的水粒留在空中。而雨滴的大小，一般又不会超过**6mm**。由于空气阻力的存在，大个雨滴在下落过程中往往就会分解成许多体积骤减的细小雨滴。

例题：有一密度为 ρ 的细棒，长度为 l ，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为 ρ' 的液体表面。现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。

解：对棒作受力分析，如图所示：

在竖直方向建立坐标系如图，

当棒的最下端距水面距离为 x 时，浮力大小为：

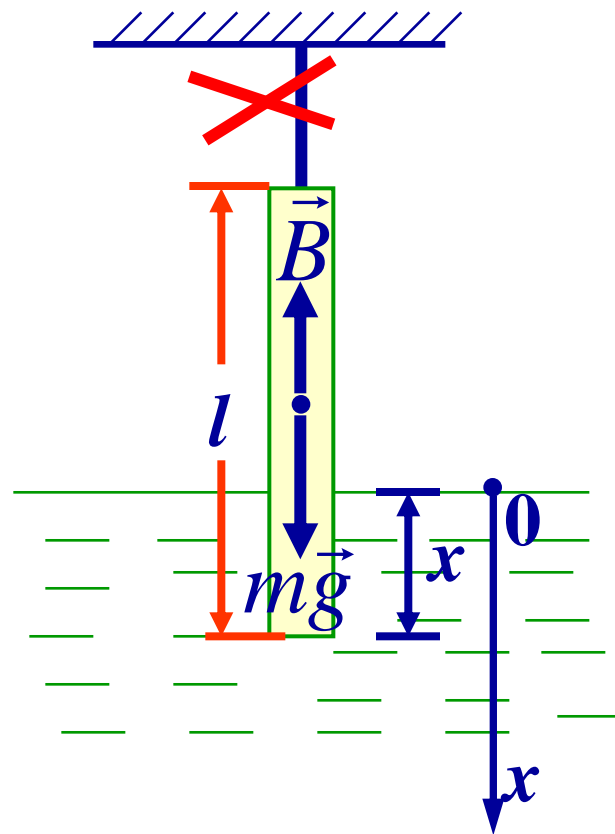
$$B = \rho' x g$$

此时棒受到的合外力为：

$$F = mg - \rho' x g = g(\rho l - \rho' x)$$

即

$$m \frac{dv}{dt} = g(\rho l - \rho' x)$$



$$m \frac{dv}{dt} = g(\rho l - \rho' x)$$

作变量替换，消去时间

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = g(\rho l - \rho' x) \rightarrow \rho l v \frac{dv}{dx} = g(\rho l - \rho' x)$$

即

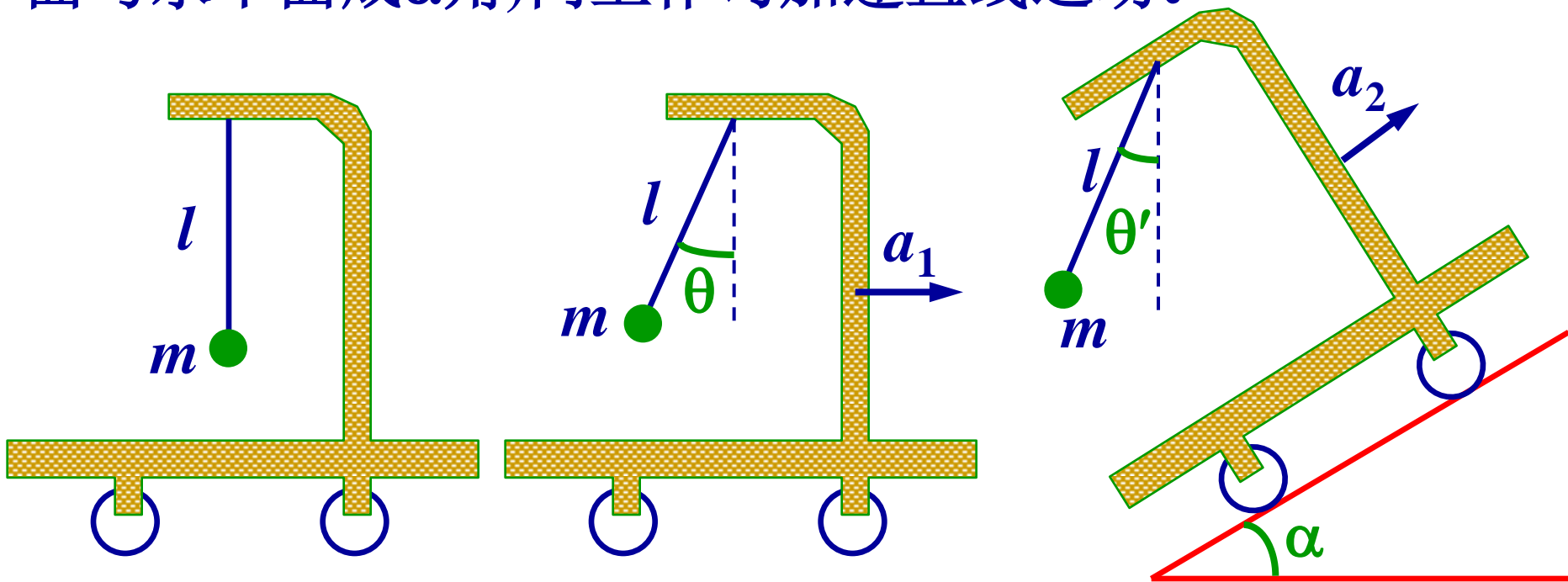
$$\rho l v dv = g(\rho l - \rho' x) dx$$

$$\rho l \int_0^v v dv = g \int_0^l (\rho l - \rho' x) dx$$

$$\rho l v^2 = 2\rho g l^2 - \rho' g l^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g l - \rho' g l}{\rho}}$$

例题：一个质量为 m 、悬线长度为 l 的摆锤，挂在架子上，架子固定在小车上，如图所示。求在下列情况下悬线的方向(用摆的悬线与竖直方向所成的角 θ 表示)和线中的张力：(1) 小车沿水平方向以加速度 a_1 作匀加速直线运动。(2) 当小车以加速度 a_2 沿斜面(斜面与水平面成 α 角)向上作匀加速直线运动。



解：(1)以小球为研究对象，当小车沿水平方向作匀加速运动时，分析受力：

竖直方向小球加速度为零，水平方向加速度为 a 。建立坐标系：

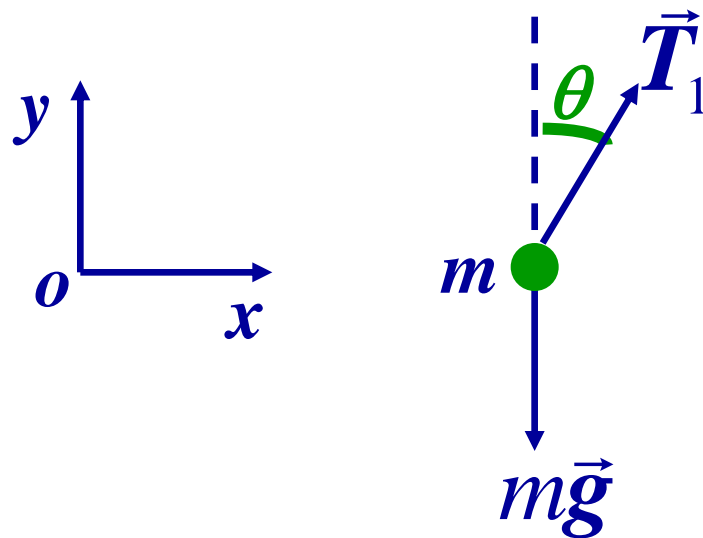
利用牛顿第二定律，列方程：

x 方向： $T_1 \sin \theta = ma_1$

y 方向： $T_1 \cos \theta - mg = 0$

解方程组，得到：

$$T_1 = m\sqrt{g^2 + a_1^2} \quad \text{tg } \theta = \frac{a_1}{g}, \quad \theta = \text{arctg } \frac{a_1}{g}$$



(2)以小球为研究对象，当小车沿斜面作匀加速运动时，分析受力：

小球的加速度沿斜面向上，垂直于斜面处于平衡状态，建立图示坐标系，重力与轴的夹角为 α 。

利用牛顿第二定律，列方程：

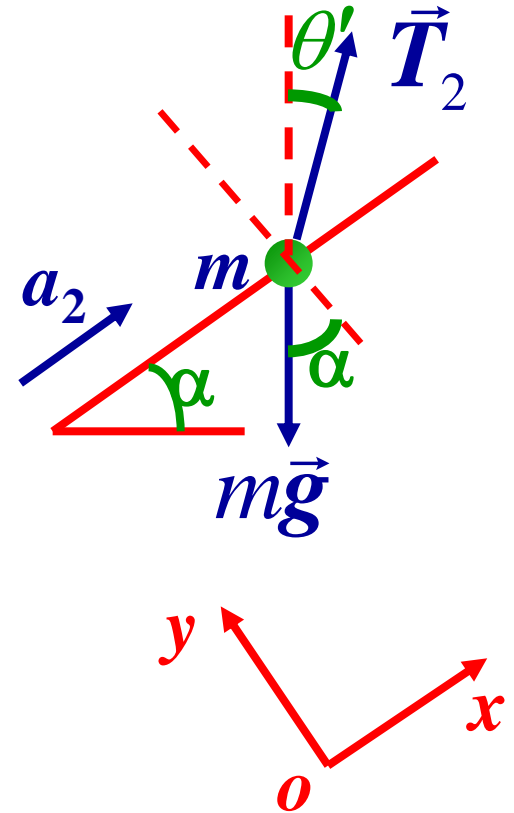
x方向：

$$T_2 \sin(\alpha + \theta') - mg \sin \alpha = ma_2$$

y方向：

$$T_2 \cos(\alpha + \theta') - mg \cos \alpha = 0$$

求解上面方程组，得到：



$$\begin{aligned} T_2 &= m\sqrt{(g \sin \alpha + a_2)^2 + g^2 \cos^2 \alpha} \\ &= m\sqrt{2ga_2^2 \sin \alpha + a_2^2 + g^2} \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \theta') = \frac{g \sin \alpha + a_2}{g \cos \alpha}$$

$$\theta' = \arctan \frac{g \sin \alpha + a_2}{g \cos \alpha} - \alpha$$

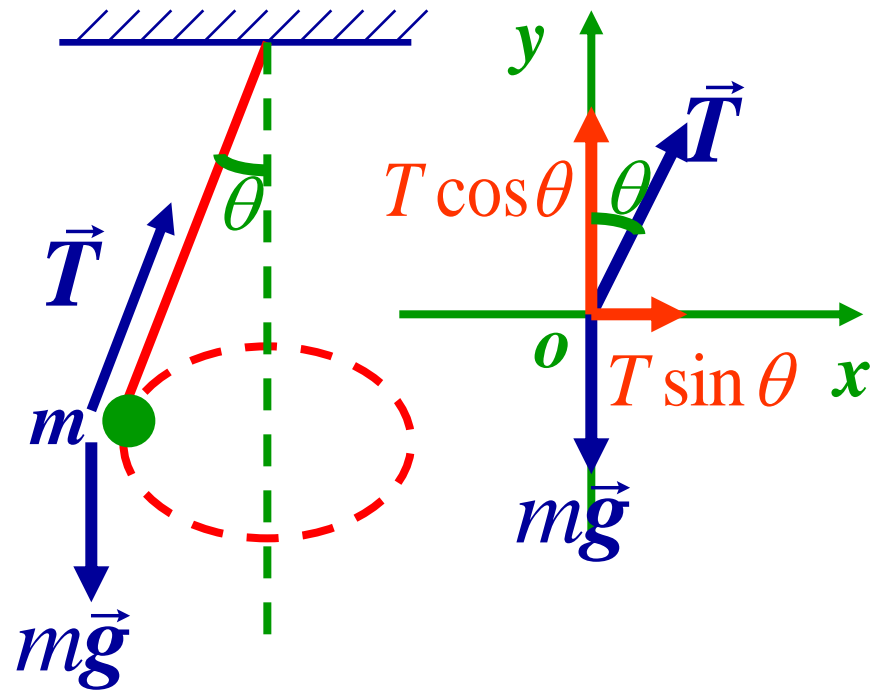
讨论：如果 $\alpha = 0$ ， $a_1 = a_2$ ，则小车是在水平方向作匀加速直线运动；如果加速度为零，悬线保持在竖直方向。

例题：一重物 m 用绳悬起，绳的另一端系在天花板上，绳长 $l = 0.5m$ ，重物经推动后，在一水平面内作匀速率圆周运动，转速 $n = 1\text{r/s}$ 。这种装置叫做圆锥摆。求这时绳和竖直方向所成的角度。

解：以小球为研究对象，进行受力分析：

小球：竖直方向平衡，水平方向作匀速圆周运动，建立坐标系如图：

拉力沿两轴分解，竖直方向分量与重力平衡，水平方向分力提供向心力。利用牛顿定律，列方程：



x方向 牛二:

$$T \sin \theta = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin \theta$$

y方向牛二:

$$T \cos \theta = mg$$

角速度:

$$\omega = 2\pi n$$

拉力: $T = m\omega^2 l = 4\pi^2 n^2 ml$

$$\cos \theta = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l} = \frac{9.8}{4\pi^2 \times 0.5} = 0.497$$

$$\theta = 60^\circ 13'$$

可见, 转速 n 愈大, θ 也愈大, 与物体质量 m 无关。

例题：图为船上使用的绞盘，将绳索绕在绞盘的固定圆柱上。如绳子与圆柱的静摩擦因数为 μ_s ，绳子绕圆柱的张角为 θ_0 。当绳在柱面上将要滑动时，求绳子两端张力 F_{TA} 与 F_{TB} 大小之比。

解：取一段绳元为研究对象，受力如图所示：

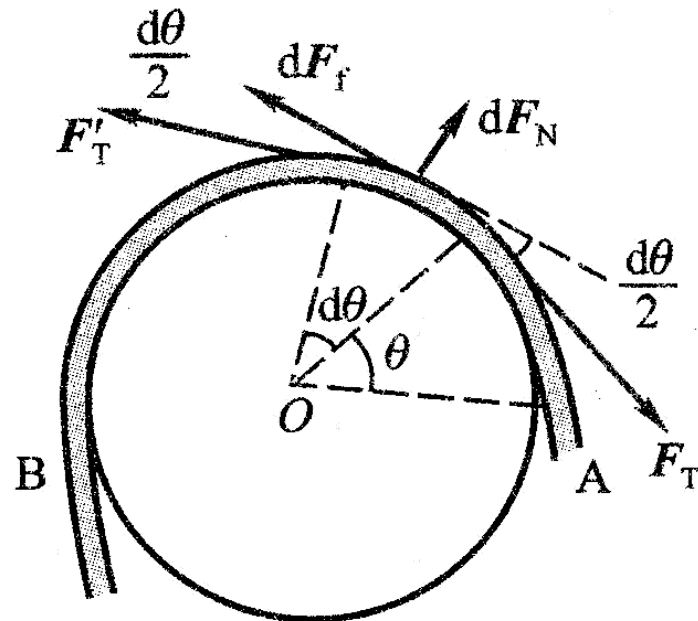
列出绳元的运动方程：

$$F_T \cos \frac{d\theta}{2} - F'_T \cos \frac{d\theta}{2} - \mu_s dF_N = 0$$

$$F_T \sin \frac{d\theta}{2} + F'_T \sin \frac{d\theta}{2} - dF_N = 0$$

因为 $d\theta$ 很小：

$$dF_T = -\mu_s dF_N, \quad F_T d\theta = dF_N$$



消去 dF_N ，积分

$$\int_{F_{TA}}^{F_{TB}} \frac{dF_T}{F_T} = \int_0^{\theta_0} -\mu_s d\theta$$

$$F_{TB} = F_{TA} e^{-\mu_s \theta_0}$$

张力随角度而指数减小！

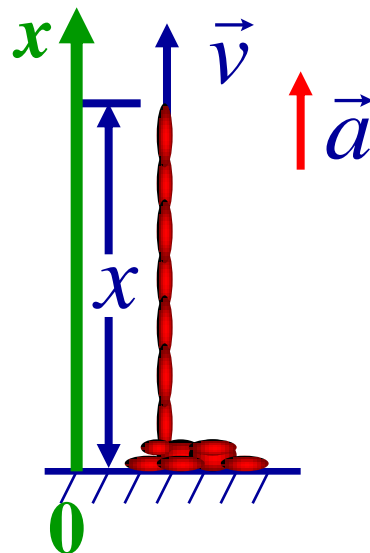
例题：一长为 l ，密度均匀的柔软链条，单位长度的质量为 λ ，将其卷成一堆放在地面上，如图所示。若用手握住链条一端，以加速度 a 从静止匀加速上提。当链条端点离地面的高度为 x 时，求手提力的大小。

解：以链条为系统，向上为 x 正向，地面为原点建立坐标系。

解： t 时刻，系统总动量

$$P = \lambda x v$$

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{d(\lambda x v)}{dt} = \lambda v \frac{dx}{dt} + \lambda x \frac{dv}{dt} \\ &= \lambda v^2 + \lambda a x = 2\lambda a x + \lambda a x \\ &= 3\lambda a x\end{aligned}$$



系统动量对时间的变化率为：

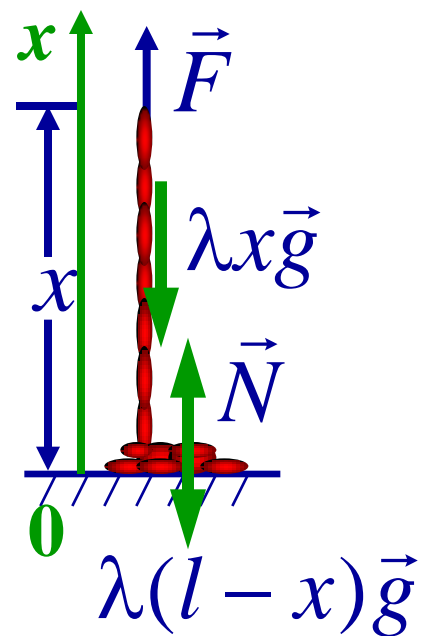
$$\frac{dP}{dt} = 3\lambda ax$$

t 时刻，系统受合外力

$$\begin{aligned} & F - \lambda xg + N - \lambda(l - x)g \\ &= F - \lambda xg \end{aligned}$$

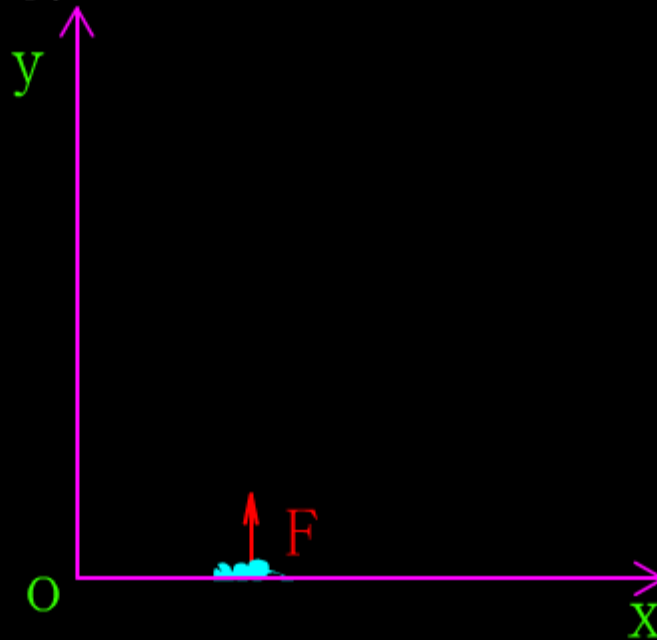
根据动量定理，得到

$$\begin{aligned} F - \lambda xg &= \frac{dP}{dt} = 3\lambda ax \\ F &= \lambda xg + 3\lambda xa \end{aligned}$$



链条的下落

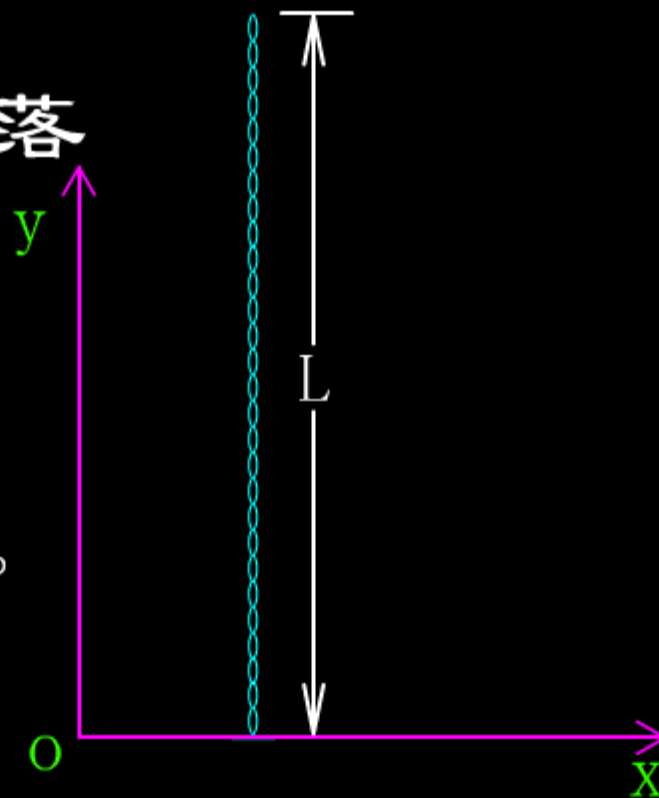
链条匀速上提



链条的上提

链条的下落

铁链下端触地，
然后自由下落。



链条的下落

例题：质量为 m 的匀质链条，全长为 L ，手持其上端，使下端离地面为 h 。然后放手让它自由下落到地面上，如图所示。求链条落到地上的长度为 l 时，地面所受链条作用力的大小。

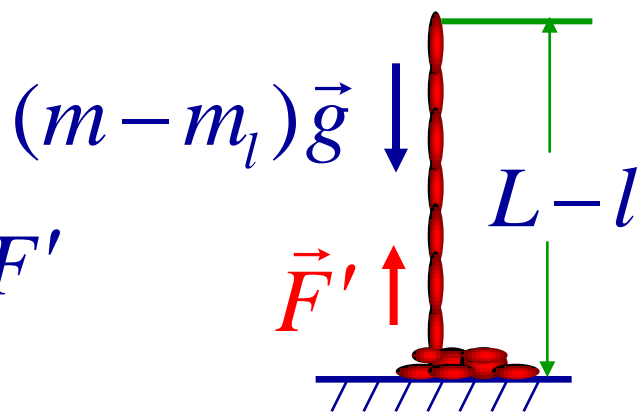
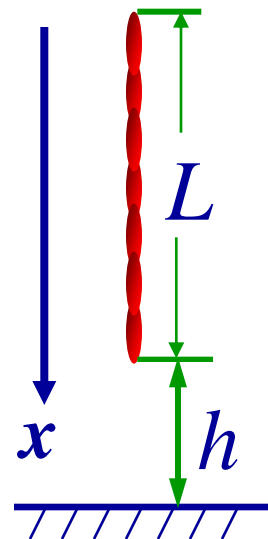
解：应用变质量物体运动方程。

以链条为系统，向下为 x 正向。

t 时刻，已落地面链段 m_l 速度为零，空中链段 $(m - m_l)$ 速度为 v ，受力如图。

对空中链段写变质量物体的牛二

$$\frac{d[(m - m_l)v]}{dt} = (m - m_l)g - F'$$



$$v \frac{d}{dt} (m - m_l) + (m - m_l) \frac{dv}{dt} = (m - m_l)g - F'$$

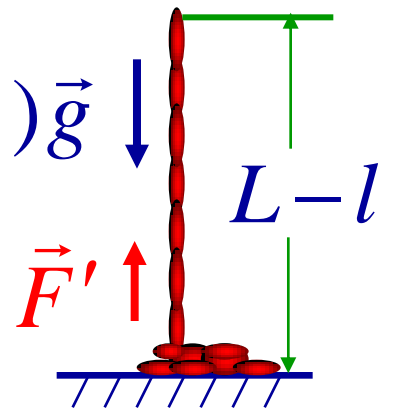
$$\therefore \frac{dv}{dt} = g, \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\therefore -v \frac{dm_l}{dt} = -F'$$

$$\therefore m_l = \frac{m}{L} l, v = \frac{dl}{dt}, v^2 = 2g(l + h)$$

$$F' = v \frac{dm_l}{dt} = v \frac{m}{L} \frac{dl}{dt} = \frac{m}{L} v^2 \quad (m - m_l) \vec{g} \downarrow$$

$$= \frac{2m(l + h)}{L} g$$

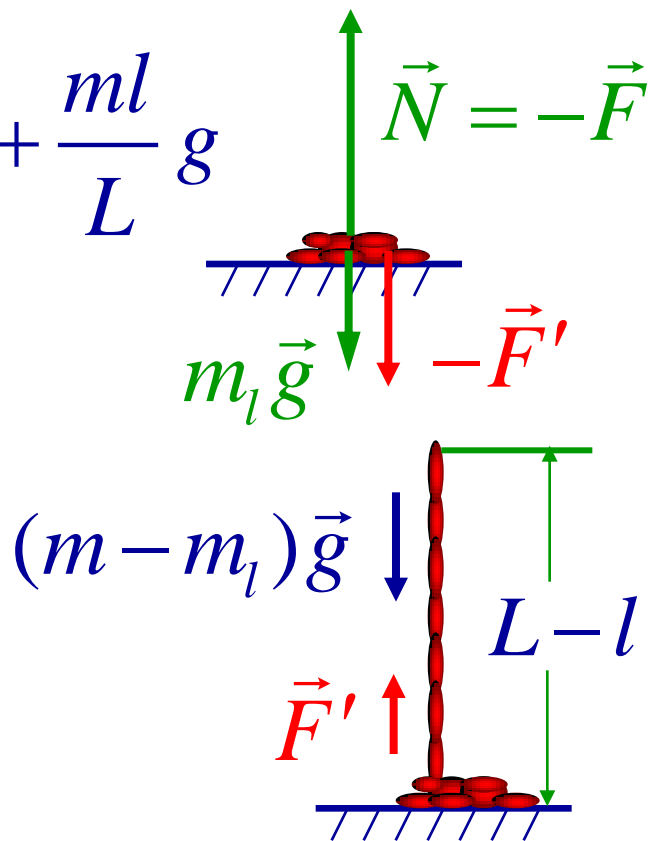


$$F' = \frac{2m(l+h)}{L} g$$

地面所受链条的作用力的大小等于 F' 的反作用力与已经落地的链条的重力之和。

$$F = F' + m_l g = \frac{2m(l+h)}{L} g + \frac{ml}{L} g$$

$$= \frac{m}{L} (3l + 2h) g$$



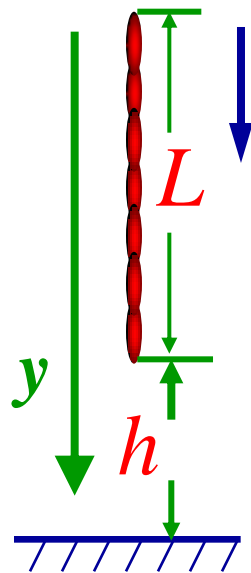
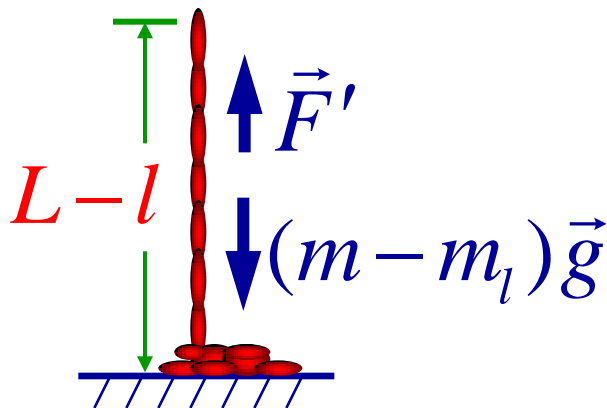
例题：质量为 m 的匀质链条，全长为 L ，手持其上端，使下端离地面为 h 。然后放手让它自由下落到地面上，如图所示。求链条落到地上的长度为 l 时，地面所受链条作用力的大小。

解：取链条为系统，向下为 x 正向。

t 时刻落地链段 m_l 速度为零， $u = 0$ ；空中 $(m - m_l)$ 链段速度为 v ，受力如图。

由变质量物体运动微分方程可得

$$\frac{d}{dt}[(m - m_l)v] = (m - m_l)g - F'$$



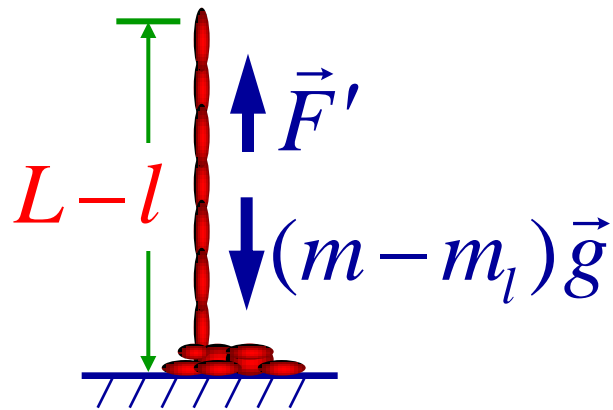
$$\frac{d}{dt}[(m - m_l)v] = (m - m_l)g - F'$$

或 $v \frac{d}{dt}(m - m_l) + (m - m_l) \frac{dv}{dt} = (m - m_l)g - F'$

自由下落，有

$$\frac{dv}{dt} = g$$

所以 $v \frac{d}{dt}(m - m_l) = -F'$



$$v \frac{d}{dt} (m - m_l) = -F'$$

因为 $m_l = \frac{m}{L} l$, $v = \frac{dl}{dt}$

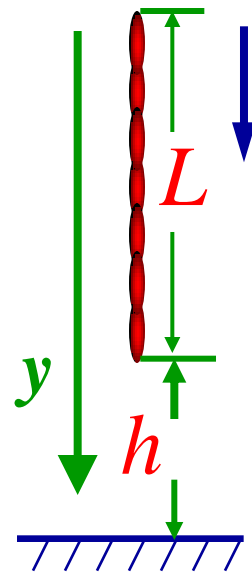
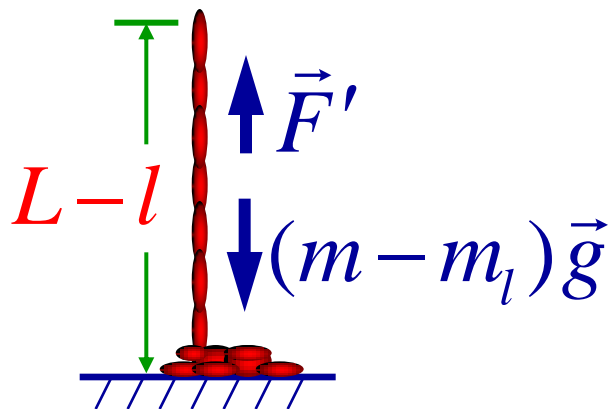
并且 $v^2 = 2g(l + h)$

所以 $F' = \frac{m}{L} v^2 = \frac{2m(l + h)}{L} g$

地面受链条作用力的大小

$$F = F' + m_l g$$

$$= \frac{2m(l + h)}{L} g + \frac{ml}{L} g = \frac{m}{L} (3l + 2h) g$$



§ 2-4 牛顿运动定律的适用范围

1. 惯性系与非惯性系

牛顿定律适用的参考系，称为惯性系。

这大概就是我们大多数人从中学开始就接触到的惯性系的定义。另一个较客观的版本是：

惯性系：相对地球静止或作匀速直线运动的物体。

非惯性系：相对地面惯性系做加速运动的物体。

同时我们还说：相对于惯性系作匀速直线运动的参照系是惯性系。不过，这需要存在**第一个惯性系**！

牛顿定律是如何导出的？来自于惯性系中的实验，而非相对于地面加速运动的马车中（非惯性系）的实验。于是我们先要有惯性系的定义。可是这里又说：牛顿定律成立的参考系称为惯性系！此即标准的循环论证！

惯性系存在吗？

看来只有借助于相对地球静止或作匀速直线运动的参照系这一概念。可惜这一说法也太没谱儿了，人们说这世界离了谁，地球都照转。

Ok！ 那么，谁能给出一个惯性系的例子？

哪怕我们不能回答，也应该把问题摆出来，说清楚，而不要选择糊弄。

令人遗憾的是，这样的论述比比皆是。我们的教科书...我们的教育...

牛顿，前无古人，后无来者，难道对此没有疑问吗？！他老人家怎么解释的？

2. 牛顿运动定律的适用范围

惯性系、宏观、低速。

微观——原子、分子尺度，量子力学。

高速——接近光速，狭义相对论。

惯性系与非惯性系——等效原理，广义相对论。

在牛顿力学框架内，看起来惯性系这块基石找不到。虽然如此，实事求是的说，牛顿定律工作得很好，不用担心！原因在于，实验是在地面做的，而我们也生长在这里。牛顿定律说的正是我们所在的参照系——地球——中的物理规律。

3. 惯性力简介

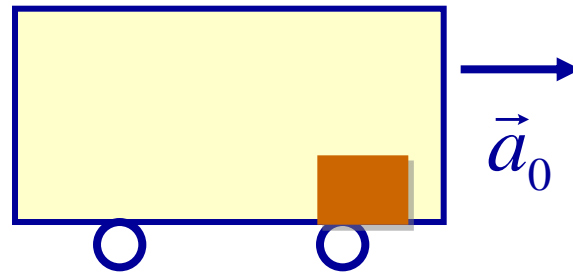
在平动加速系中对牛顿第二定律推广。

S——惯性系

S'——非惯性系

\vec{a}_0 ——S'系相对S系的加速度

\vec{a} 和 \vec{a}' 分别表示一质量为 m 的质点在S系和S'系中的加速度




据加速度的变换关系有 $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$

在S系中，牛顿定律成立 $\vec{F} = m\vec{a}$

在S'系中 $\vec{F} = m\vec{a}_0 + m\vec{a}' \neq m\vec{a}'$

牛顿定律在S'系中不成立

惯性力

$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$  大小 $F_i = ma_0$
方向与 \vec{a}_0 的方向相反

在非惯性系中

$$\vec{F} + \vec{F}' = m\vec{a}'$$

在转动参考系中，
对牛顿第二定律进
行推广。

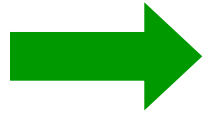
如图所示系统：



在地球上观察，小球加速运动；在转盘上观察，小球静止。而小球受力情况完全一样，这样出现两个运动规律，产生矛盾。

惯性离心力

$$\vec{F}_i = -mR\omega^2 \vec{n}$$



大小

$$F_i = mR\omega^2$$

方向

沿着圆的半径向外

注意：惯性力不是作用力，没有施力物体，它是虚拟力，在非惯性系中来自参考系本身的加速效应。只有非惯性系中才能观察到惯性力。

在地球上观察，小球加速运动；在转盘上观察，小球静止。而小球受力情况完全一样，这样出现两个运动规律，产生矛盾。



5. 惯性力的应用

(1) 加速度计

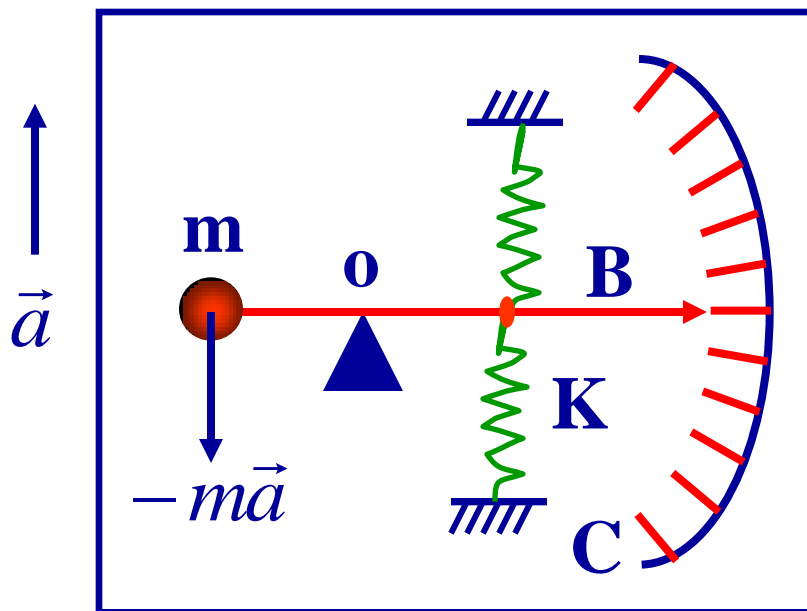
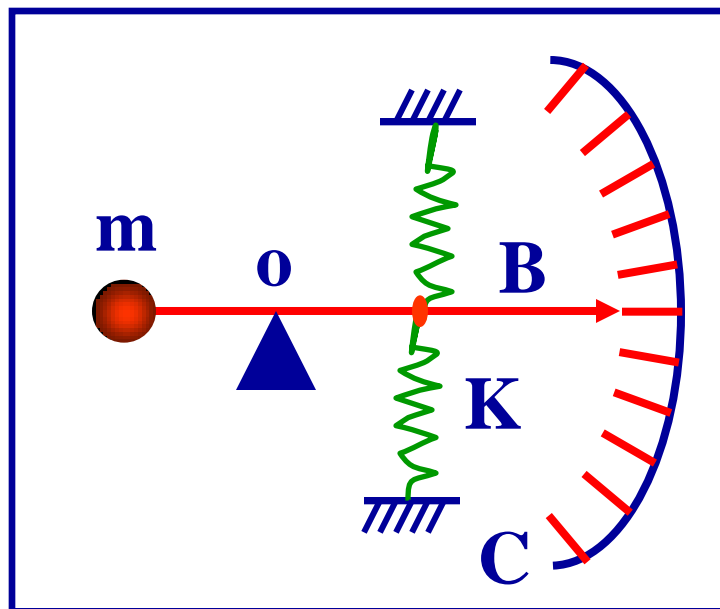
a. 结构

B — 指针

K — 平衡弹簧

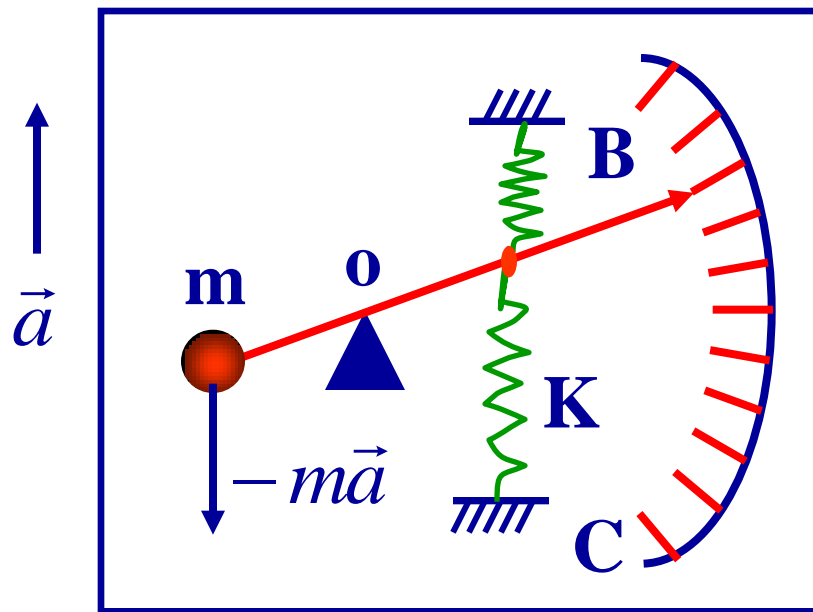
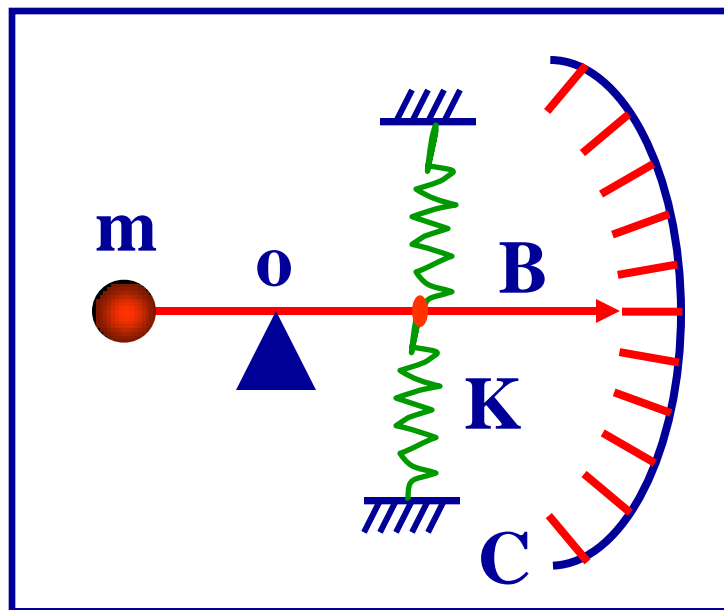
C — 表盘

o — 支点



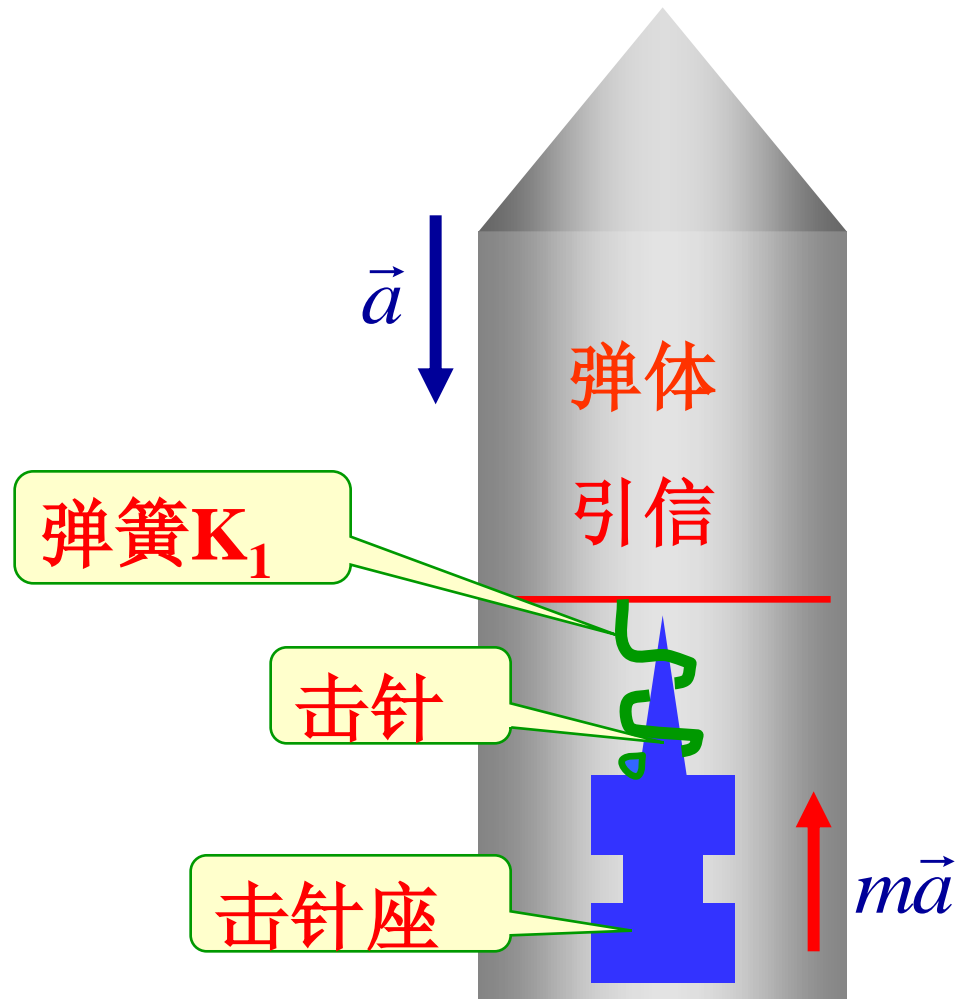
b. 工作原理

加速度计以加速度 \vec{a} 运动时， m 受惯性力作用引起指针B偏转。



(2) 炮弹引爆

a. 引爆原理



b. 保险装置

