第三章

功和能

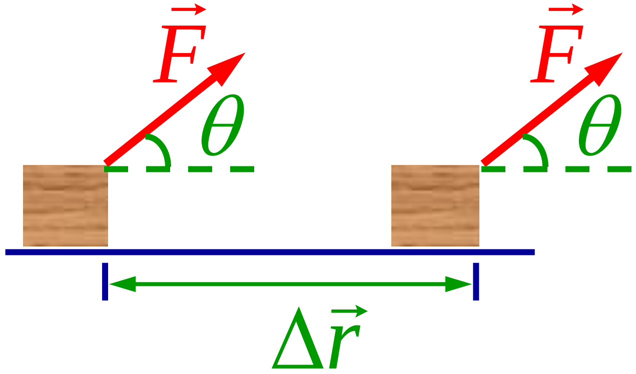
§ 3-1 功

功是表示力对空间累积效应的物理量。

1．恒力的功

等于恒力在位移上的投影与位移的乘积。

$$A = F\Delta r\cos\theta$$
$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$



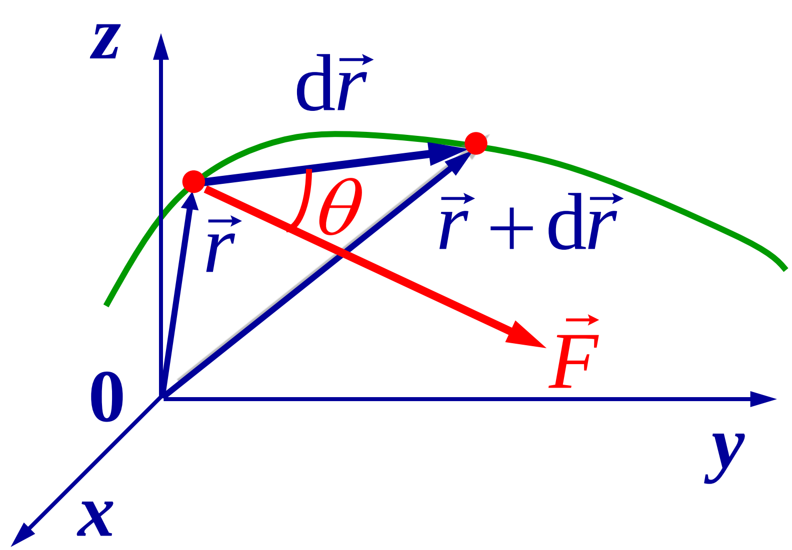
2．变力的功

物体在力 $\vec{F}$ 的作用下发生一无限小的位移 $\mathrm{d}\vec{r}$（元位移）时（时间无限短，力可看作恒力），此力对它做的功定义为：力在力的位移上的投影和此元位移大小的乘积。

即力 $\vec{F}$ 在微元位移 $\mathrm{d}\,\vec{r}$ 上所做的功为：

$$\mathrm{d}\,A = (F\cos\theta)\left|\mathrm{d}\,\vec{r}\right|$$

$$= \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

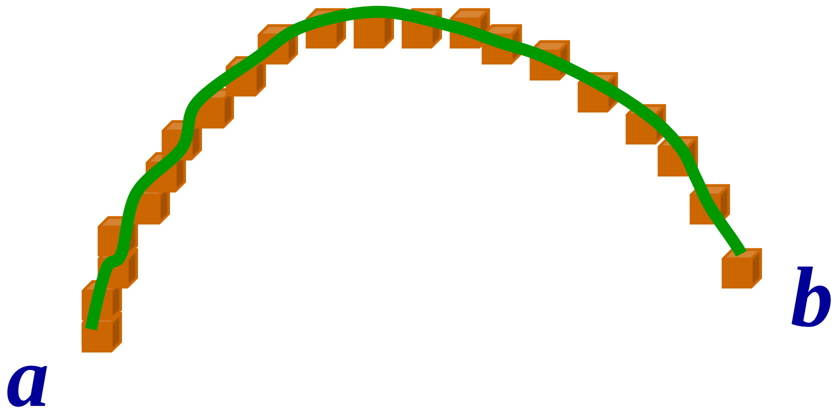


其中 θ 为力与位移的夹角。

物体在变力的作用下从 a 运动到 b。

怎样计算这个力的功呢？

采用微元分割法



第1段近似功：

$$\Delta A_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{r}_1$$

第2段近似功：

$$\Delta A_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{r}_2$$

……

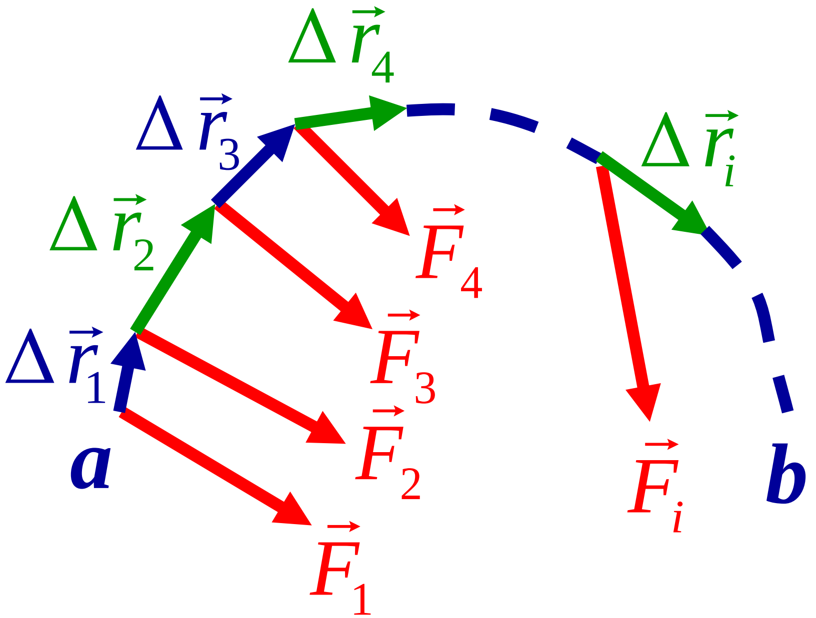
第*i* 段近似功：

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

……

总功近似：

$$A_{ab} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$



当 $\Delta\vec{r}_i \to 0$ 时，用 $\mathrm{d}\vec{r}$ 表示，称为元位移；$\boldsymbol{\Delta A_i}$，用 $\mathbf{d}\boldsymbol{A}$ 表示，称为元功。

微分形式：

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

总功精确值：

$$A_{ab} = \lim_{\Delta\vec{r}\to 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力的功等于力 $\vec{F}$ 沿路径 $\boldsymbol{L}$ 从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的线积分。

积分形式：

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

当夹角 $\mathbf{0} \le \varphi < \pi/2$ 时，$\mathbf{d}A > \mathbf{0}$，力对物体做正功。

当夹角 $\varphi = \pi/2$ 时，$\mathbf{d}A = \mathbf{0}$，力对物体不做功。

当夹角 $\pi/2 < \varphi < \pi$ 时，$\mathbf{d}A < \mathbf{0}$，力对物体做负功。

3．功率

功率：力在单位时间内做的功，用$\boldsymbol{P}$表示

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

功率是反映力做功快慢的物理量。功率越大，做同样的功花费的时间就越少。

在国际单位制中，功的单位是N m，叫做焦(J)，功率的单位是J/s，叫做W(瓦)。

4. 质点动能定理

根据功的积分形式

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b F_\tau \,\mathrm{d}s=\int_a^b ma_\tau \,\mathrm{d}s$$

$$=\int_a^b m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s=\int_{v_a}^{v_b} mv\,\mathrm{d}v$$

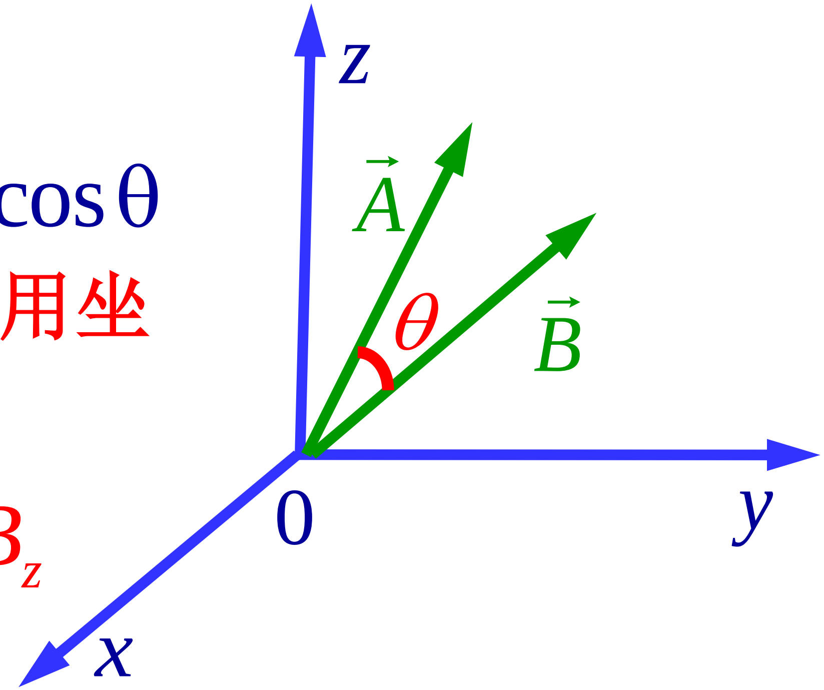
$$=\frac{1}{2}mv_b^2-\frac{1}{2}mv_a^2$$

定义质点的动能为：

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

矢量点乘

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=AB\cos\theta$$



改变中学习惯，建立坐标系，用坐标分量计算矢量点乘！

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

速度矢量也有类似关系：

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}d(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}dv^2=vdv$$

一般说来：

$$\vec{A}\cdot d\vec{A}=AdA$$

根据前述矢量点乘知识：

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_a}^{t_b} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \int_{v_a}^{v_b} mv \mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

质点动能定理：合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$A_{ab} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$$

几点注意：

a．合力做正功时，质点动能增大；反之，质点动能减小。

b．动能的量值与参考系有关。

c．动能定理只适用于惯性系。

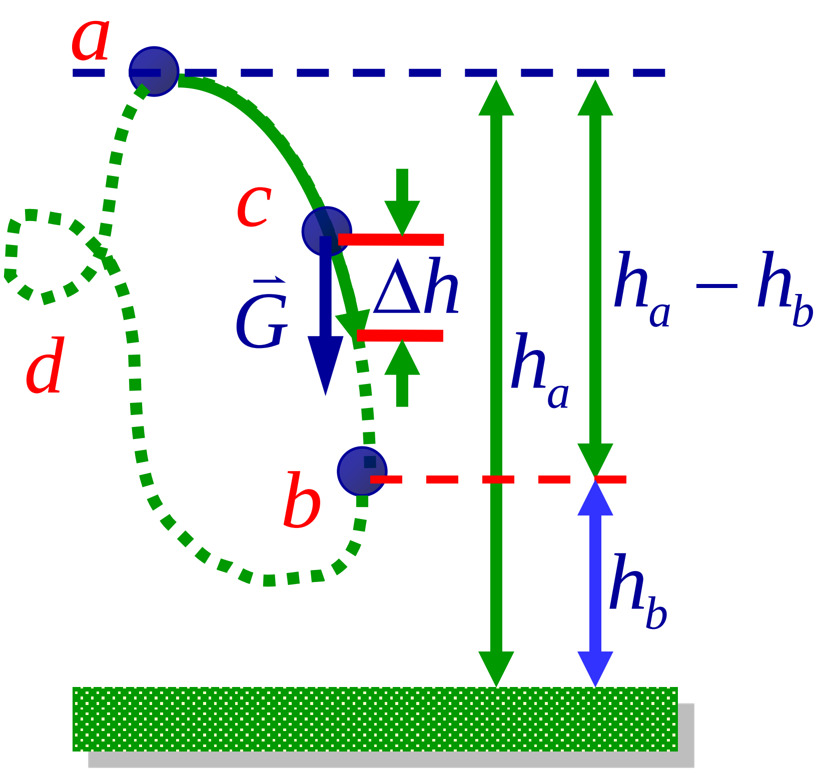
d．功是一个过程量，而动能是一个状态量，它们之间仅仅是一个等量关系。

第三次：第二章：8、9、10、第三章：6、9、16

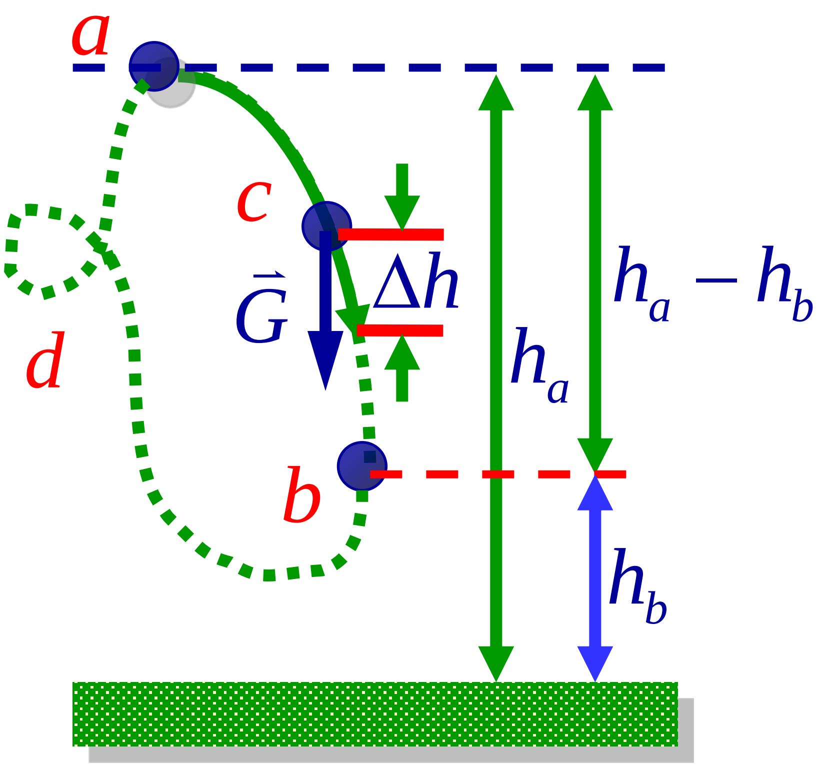
§3-2 几种常见力的功

1. 重力功

设质量为m的物体在重力的作用下从a点任一曲线abc运动到b点。



在元位移$\Delta\vec{s}$中，重力$\vec{G}$所做的元功是



$$\Delta A = G\cos\alpha\Delta s$$

$$= mg\cos\alpha\Delta s$$

$$= mg\Delta h$$

$$\therefore A = \sum \Delta A = \sum mg\Delta h$$

$$= mg\sum \Delta h = mgh_a - mgh_b$$

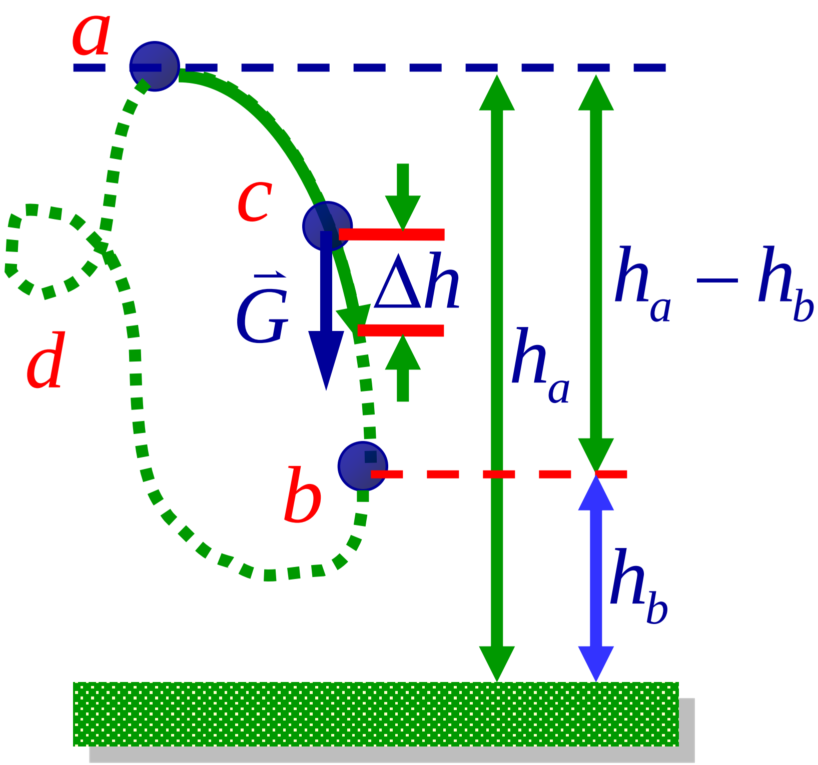
$$A = mgh_a - mgh_b$$

重力作功仅仅与物体的始末位置有关，而与运动物体所经历的路径无关。

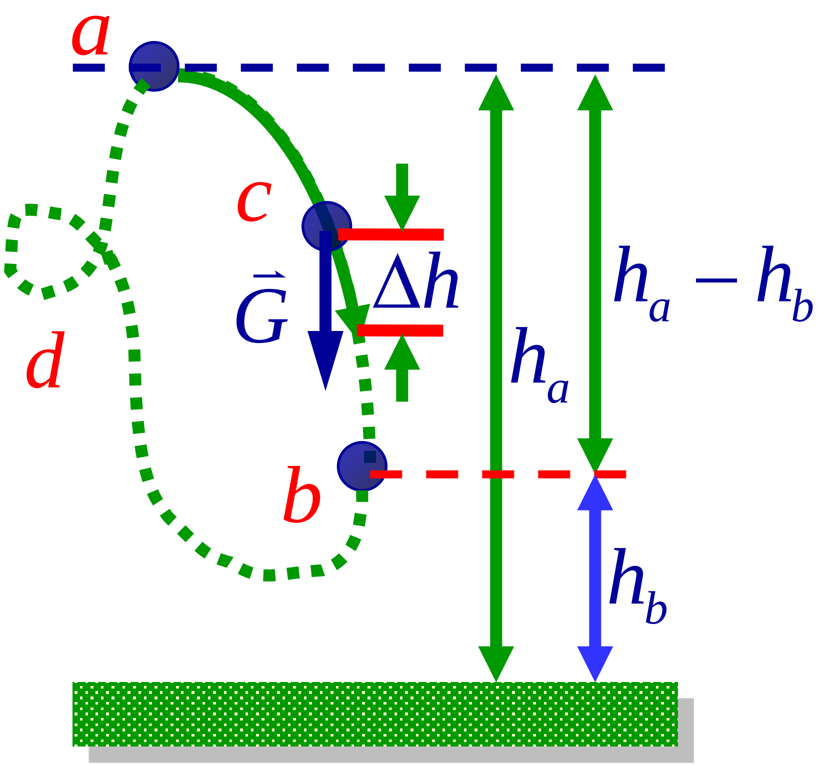
设物体沿任一闭合路径***abcda***运动一周，重力所作的功为：

$$A_{adb} = mgh_a - mgh_b$$

$$A_{bca} = -(mgh_a - mgh_b)$$



$$\therefore A = A_{adb} + A_{bca} = 0$$



$$A = \oint \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

在重力场中物体沿任一闭合路径运动一周时重力所作的功为零。

2．万有引力的功

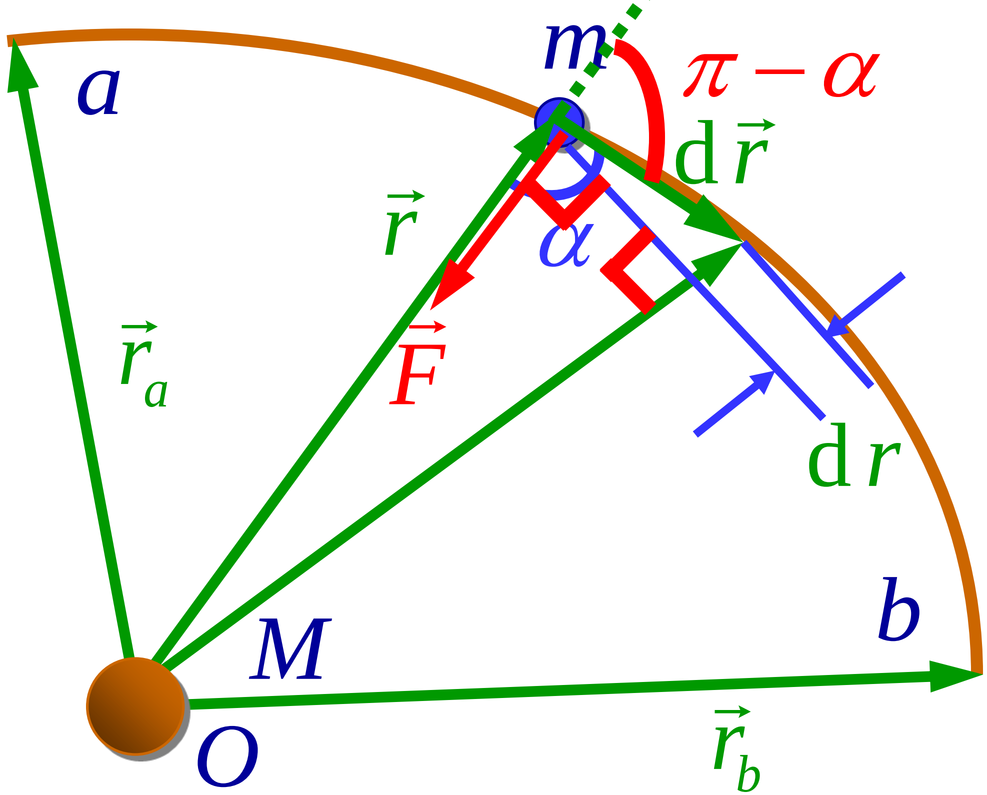
两个物体的质量分别为***M***和***m***，它们之间有万有引力作用。***M***静止，以***M***为原点***O***建立坐标系，研究***m***相对***M***的运动。

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= G_0 \frac{mM}{r^2} \cos\alpha \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

$$\because -\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\alpha$$

$$= \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos(\pi - \alpha)$$

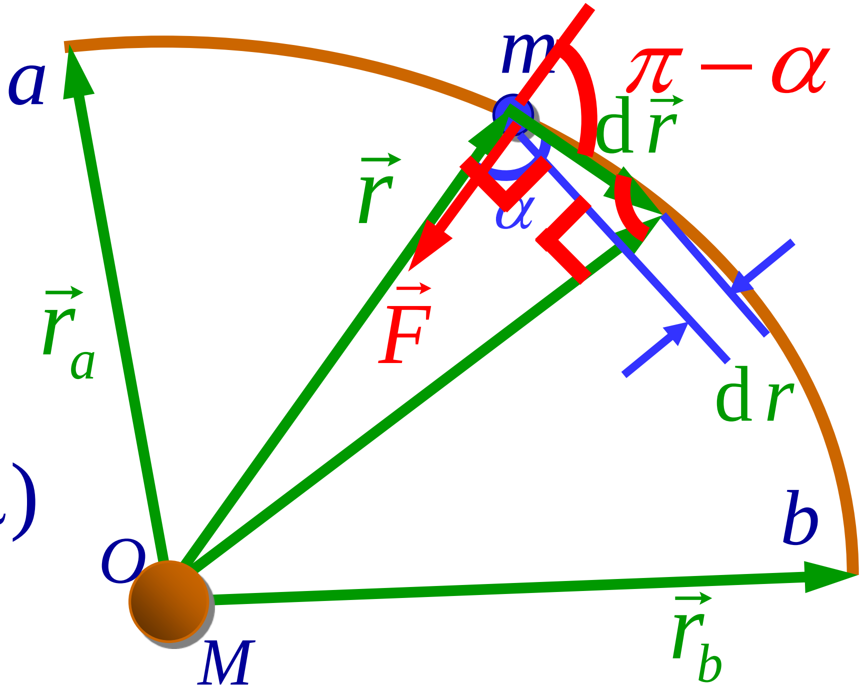


$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=G_0\frac{mM}{r^2}\cos\alpha|\mathrm{d}\vec{r}|$$

$$=-G_0\frac{mM}{r^2}|\mathrm{d}\vec{r}|\cos(\pi-\alpha)$$

$$\therefore \mathrm{d}A=-G_0\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$



$$A=\int_{r_a}^{r_b}\mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}-G_0\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=-G_0mM(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})$$

由此可见，万有引力作功也仅仅与质点的始末位置有关，与具体路径无关。

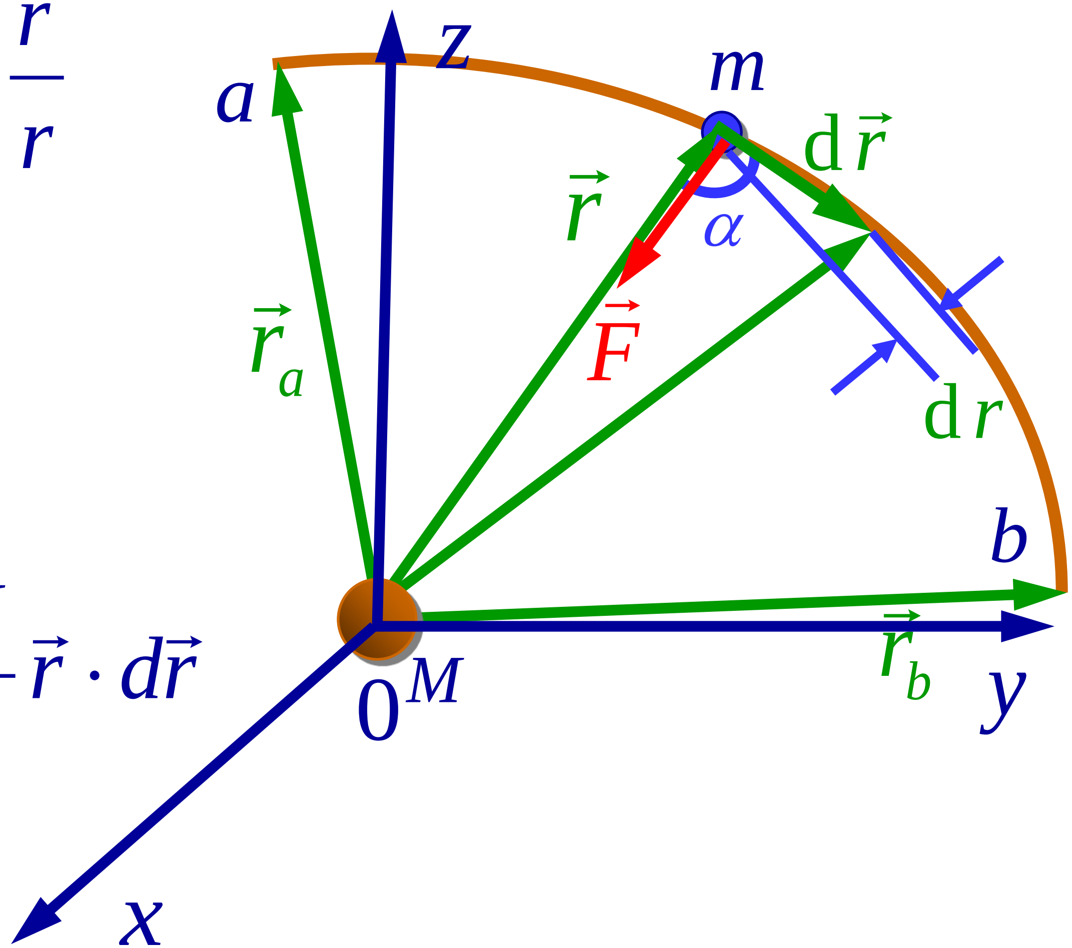
建立坐标系！

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = -G_0 \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

$$= -G_0 \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G_0 \frac{mM}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

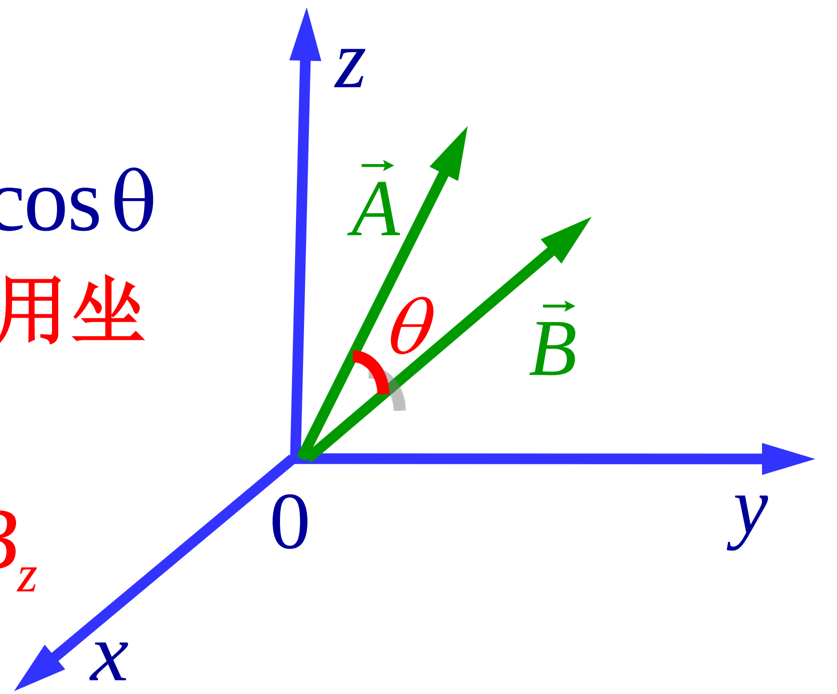


应用坐标系！！！

$$\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = ?$$

矢量点乘

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=AB\cos\theta$$



改变中学习惯，建立坐标系，用坐标分量计算矢量点乘！

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

速度矢量也有类似关系：

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}d(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=\frac{1}{2}dv^2=vdv$$

一般说来：

$$\vec{A}\cdot d\vec{A}=AdA$$

应用坐标系 $\vec{r}\cdot d\vec{r}=rdr$

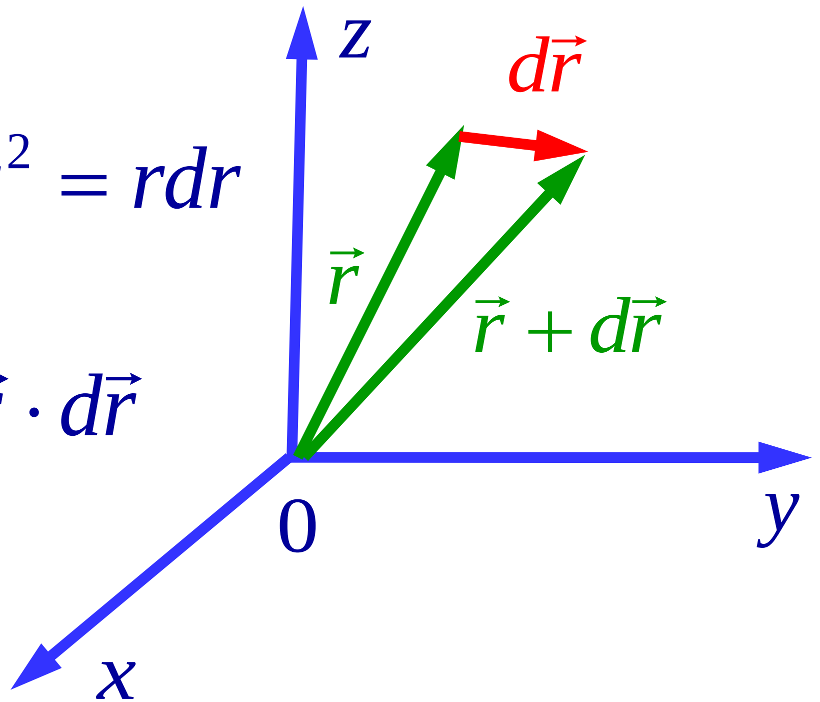
$$\because \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \quad \mathrm{d}\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

$$\therefore \vec{r}\cdot d\vec{r}=xdx+ydy+zdz$$

$$=\frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}dr^2=rdr$$

$$\therefore dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=-G_0\frac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=-G_0\frac{mM}{r^2}dr$$

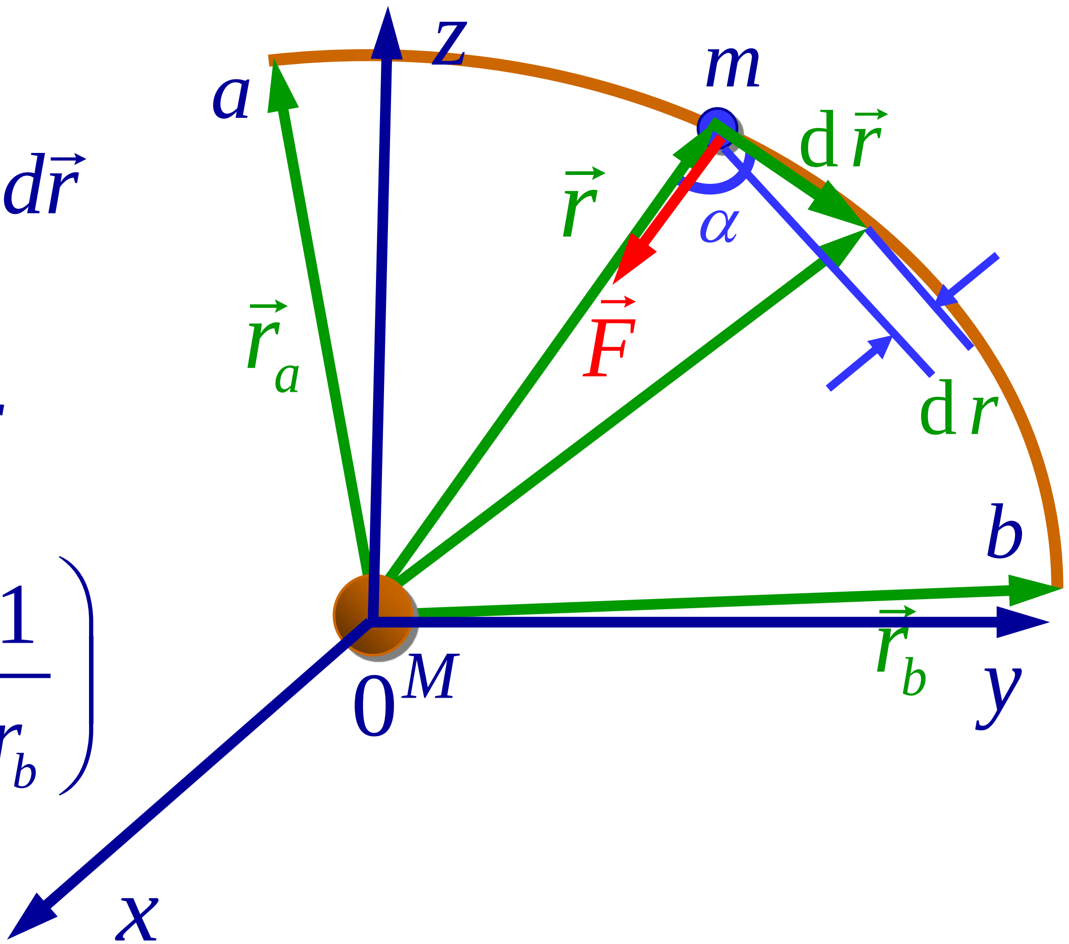


$$A = \int_{r_a}^{r_b} \mathrm{d}\,A = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$

$$= \int_{r_a}^{r_b} -G_0 \frac{mM}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

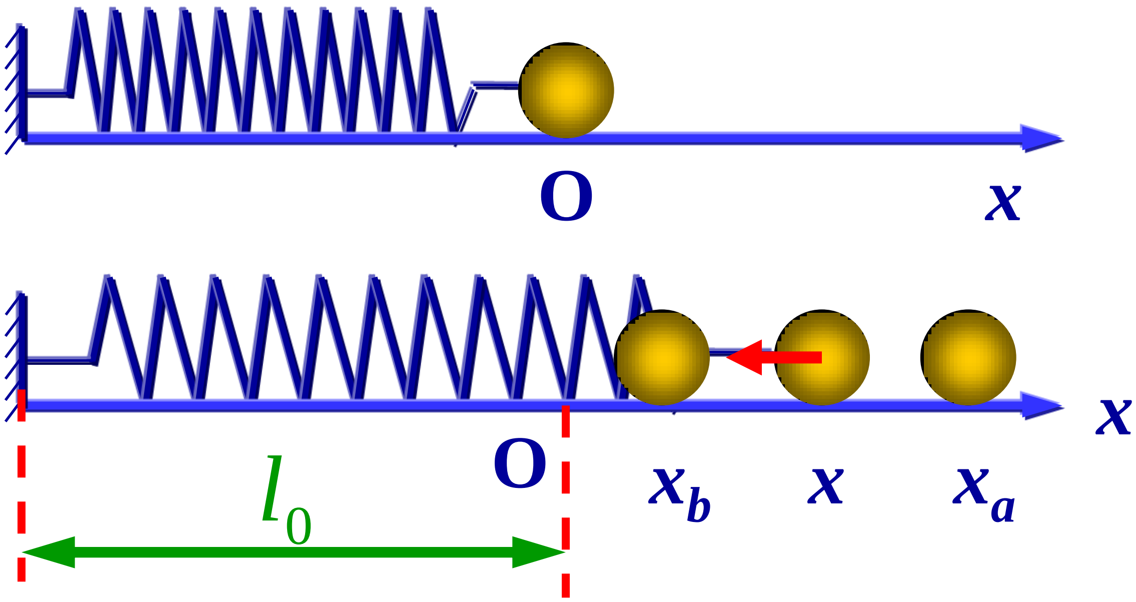
$$= \int_{r_a}^{r_b} -G_0 \frac{mM}{r^2} \mathrm{d}\,r$$

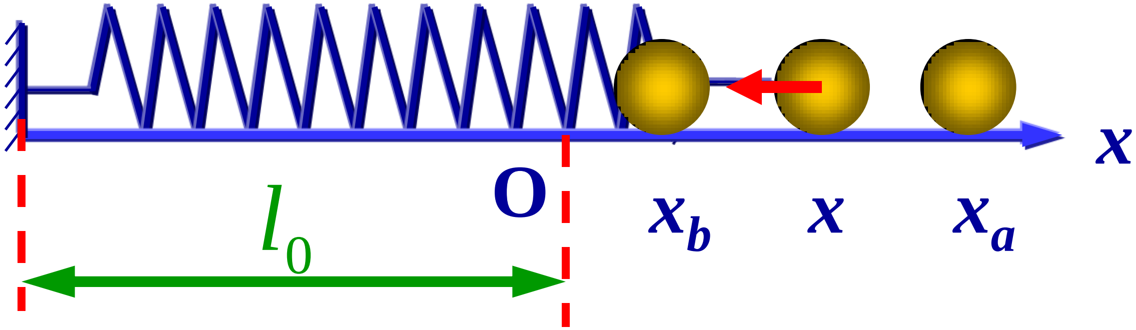
$$= -G_0 mM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



3．弹性力的功

弹簧劲度系数为k，一端固定于墙壁，另一端系一质量为m的物体，置于光滑水平地面。设a、b两点为弹簧伸长后物体的两个位置。以平衡位置为坐标原点O建立如图坐标系，x_a和x_b分别表示物体在a、b两点时的坐标。





$$A=\int_{x_a}^{x_b} F\,\mathrm{d}x=-\int_{x_a}^{x_b} kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2$$

由此可见，弹性力作功也仅仅与质点的始末位置有关，与具体路径无关。

4. 摩擦力的功

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

结论：现实世界是非常复杂的，摩擦力的功与质点路径有关。

§ 3-3 动能定理

1. 质点的动能定理

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad = \int_{t_a}^{t_b} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} m\vec{v} \cdot d\vec{v} \quad = \int_{v_a}^{v_b} mv \mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

定义质点的动能为：

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

质点动能定理：合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$A_{ab} = E_{kb} - E_{ka} = \Delta E_k$$

几点注意：

a．合力做正功时，质点动能增大；反之，质点动能减小。

b．动能的量值与参考系有关。

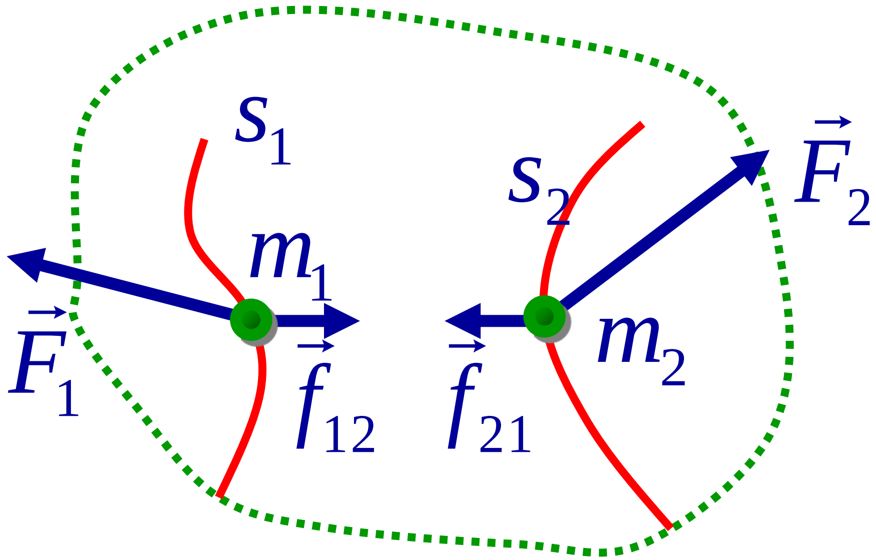
c．动能定理只适用于惯性系。

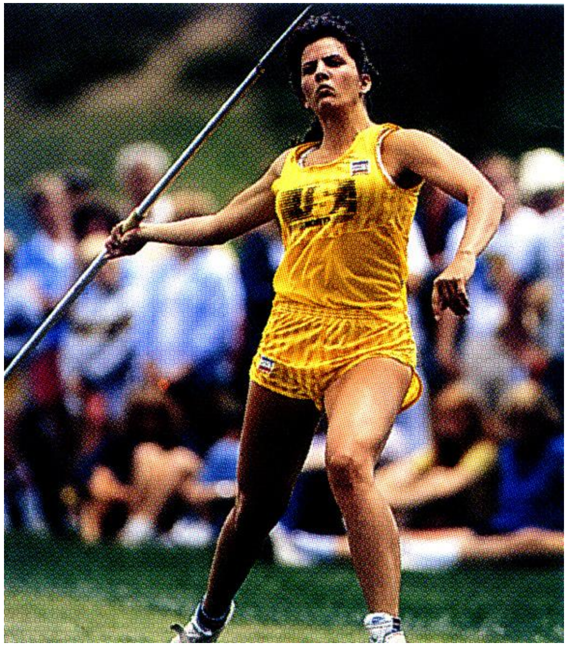
d．功是一个过程量，而动能是一个状态量，它们之间仅仅是一个等量关系。

2．质点系的动能定理

多个质点组成的质点系，既要考虑外力，又要考虑质点间的相互作用力（内力）。

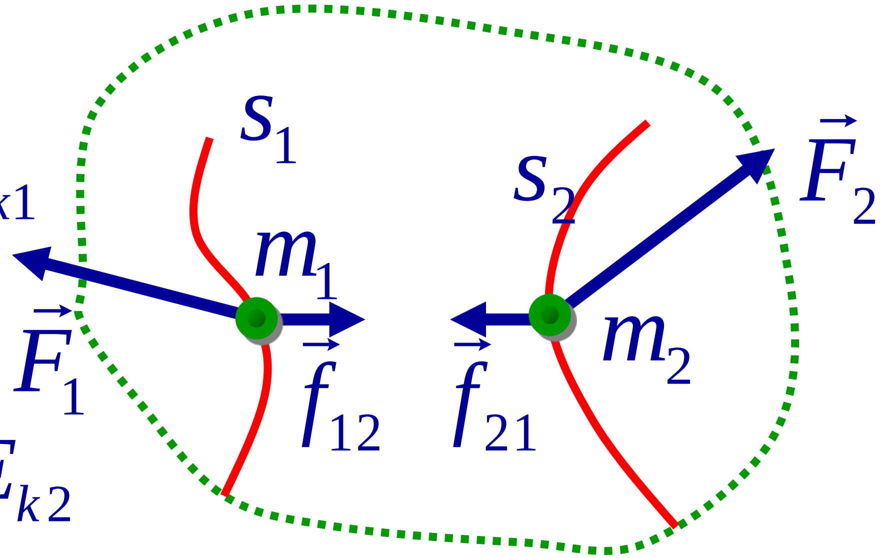
设系统由两个质点1和2组成，它们的质量分别为m_1和m_2。





对质点1应用动能定理：

$$\int \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \int \vec{f}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 = \Delta E_{k1}$$



对质点2应用动能定理：

$$\int \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 + \int \vec{f}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 = \Delta E_{k2}$$

$$\underbrace{\int \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \int \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}_{\text{系统外力的功}} + \underbrace{\int \vec{f}_{12} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \int \vec{f}_{21} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}_{\text{系统内力的功}} = \underbrace{\Delta E_{k1} + \Delta E_{k2}}_{\text{系统动能的增量}}$$

作为系统考虑时，得到：

$$\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2+\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{12}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1+\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$=(\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2)-(\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2)$$

$$A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k$$

质点系动能定理：所有外力与所有内力对质点系做功之和等于质点系总动能的增量。

推广:上述结论适用多个质点。

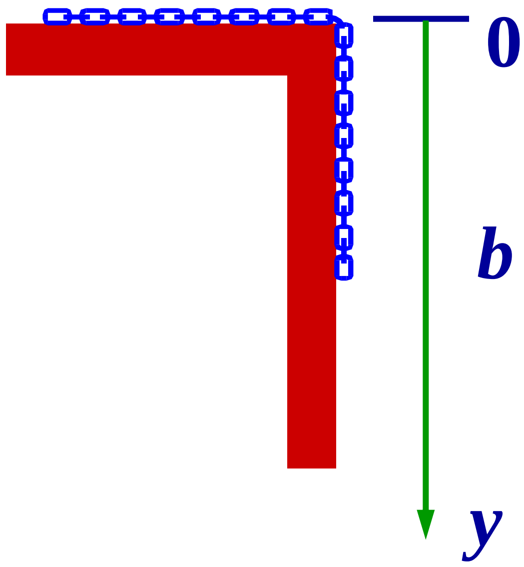
$$\boxed{A_e + A_i = \Delta E_k}$$

质点系统的动能定理：系统的外力和内力作功的总和等于系统动能的增量。

3．动能定理的应用

例：长为l 的均质链条，部分置于水平面上，其余自然下垂，若链条与水平面间静摩擦系数为μ_0，滑动摩擦系数为μ 。

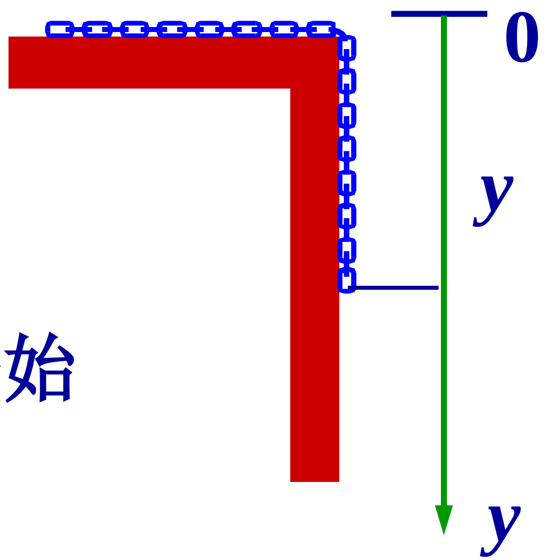
求：(1) 满足什么条件时，链条将开始滑动？(2) 若下垂部分长度为b 时，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？



解：(1)设链条线密度为ρ，下垂链条长度 y

$$\rho y g \geq \mu_0 \rho (l-y) g$$

$$\therefore y \geq \frac{\mu_0}{1+\mu_0} l$$



拉力大于最大静摩擦力时，链条将开始滑动。

(2) 以整个链条为研究对象，链条在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零。

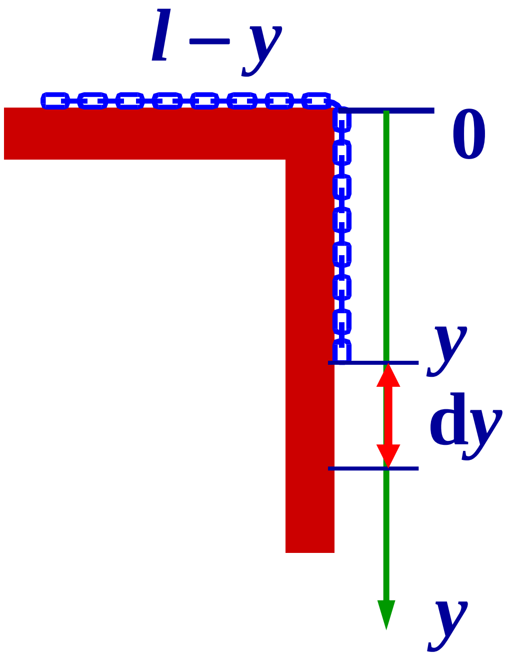
重力 $\mathrm{d}A' = \rho y g \mathrm{d}y$

摩擦 $\mathrm{d}A'' = -\mu\rho g(l-y)\mathrm{d}y$

总功 $A = \int_b^l \mathrm{d}A' + \mathrm{d}A''$

$$= \int_b^l [\rho g(1+\mu)y - \mu\rho g l]\mathrm{d}y$$

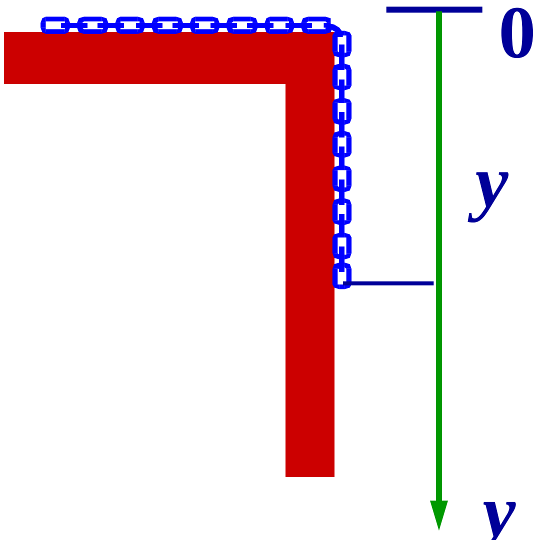
$$= \frac{1}{2}\rho g(1+\mu)(l^2 - b^2) - \mu\rho g l(l-b)$$



总功

$$A=\frac{1}{2}\rho g(1+\mu)(l^2-b^2)-\mu\rho gl(l-b)$$

$$=\frac{1}{2}\rho g\left[(l^2-b^2)-\mu(l-b)^2\right]$$



根据动能定理

$$A=\frac{1}{2}\rho lv^2-0$$

可得

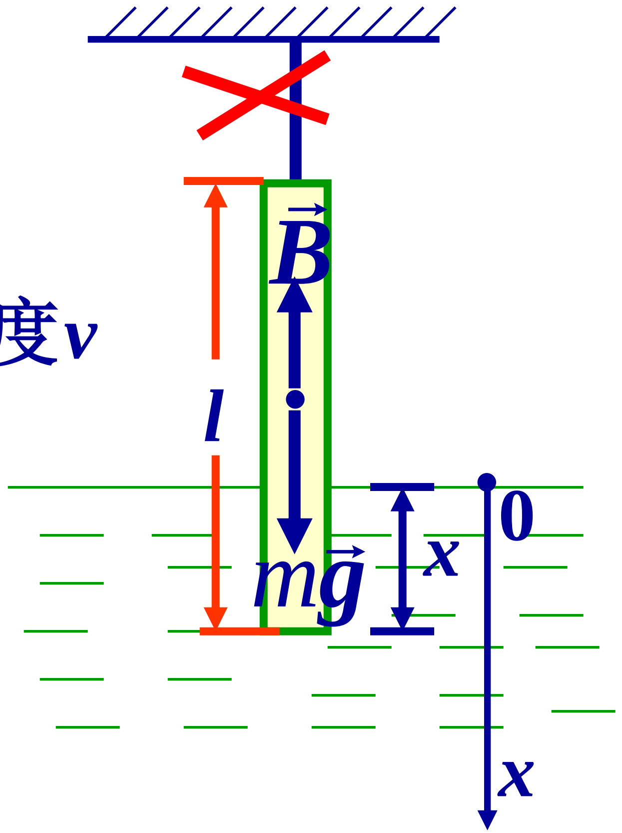
$$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-b^2)-\frac{\mu g}{l}(l-b)^2}$$

例题：利用动能定理重做剪断绳子的例题。

解：如图，细棒下落过程中，合外力对它作的功为

$$A=\int_0^l (G-B)dx=\int_0^l (\rho l-\rho' x)g dx$$

$$=\rho l^2 g-\frac{1}{2}\rho' l^2 g$$



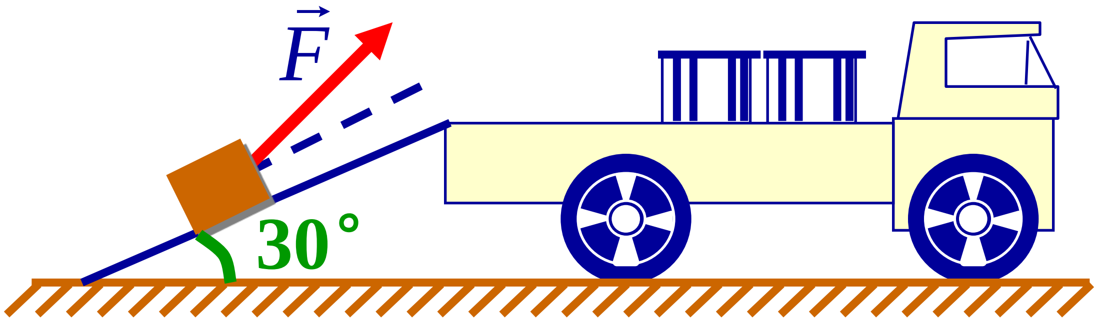
应用动能定理，因初速度为**0**，末速度v可求得如下

$$\rho l^2 g-\frac{1}{2}\rho' l^2 g=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho l v^2$$

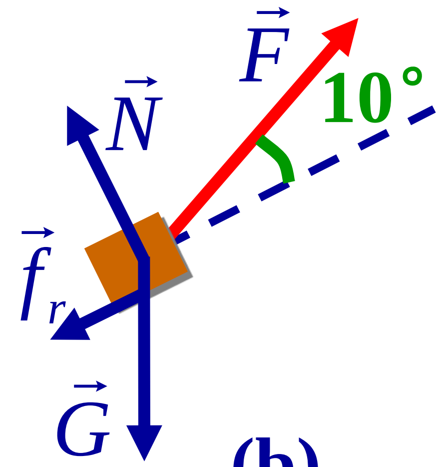
$$v=\sqrt{(2\rho l-\rho' l)/(\rho g)}$$

所得结果相同，而现在的解法无疑大为简便。

例题：装有货物的木箱，重G ＝ 980N，要把它运上汽车。现将长$l = 3$m的木板搁在汽车后部，构成一斜面，然后把木箱沿斜面拉上汽车。斜面与地面成30°角，木箱与斜面间的滑动摩擦系数μ ＝ 0.20，绳的拉力与斜面成10°角，大小为700N，如图 (a)所示。求：（1）木箱所受各力所作的功；（2）合外力对木箱所作的功；（3）如改用起重机把木箱直接吊上汽车能不能少做些功？



(a)



(b)

解：木箱受力为：拉力 $\vec{F}$ ，方向与斜面成**10°**向上；重力$\vec{G}$，方向竖直向下；斜面对木箱的支持力 $\vec{N}$，方向垂直于斜面向上，斜面对木箱的摩擦力$\vec{f_r}$ 方向和斜面平行，与木箱运动方向相反，如图 **(b)**所示。已知$\boldsymbol{l=3m}$，每个力所作的功可计算如下。

（**1**）拉力$\vec{F}$ 所做的功$\boldsymbol{A_1}$

$$A_1 = Fl\cos 10^\circ = 700\times 3\times 0.985\text{J} = 2.07\times 10^3\text{J}$$

重力 $\vec{G}$ 所做的功$\boldsymbol{A_2}$

$$A_2 = Fl\cos(180^\circ - 60^\circ)$$

$$= 980\times 3\times(-0.5)\ \text{J}$$

$$= -1.47\times 10^3\text{J}$$

正压力 $\vec{N}$ 所做的功A_3

$$A_3 = Nl\cos 90^\circ = 0$$

摩擦力$\vec{f}_r$所做的功A_4；分析木箱的受力，由于木箱在垂直于斜面方向上没有运动，根据牛顿第二定律得

$$N + F\sin 10^\circ - G\cos 30^\circ = 0$$

$$N = G\cos 30^\circ - F\sin 10^\circ = 727\mathrm{N}$$

由此可求得摩擦力

$$f_r = \mu N = 0.20 \times 727N = 145\mathrm{N}$$

$$A_4 = f_r l\cos 180^\circ = -145 \times 3\mathrm{J} = -435\mathrm{J}$$

因为重力和摩擦力在这里是阻碍物体运动的力，所以它们对物体所作的功都是负值。

（2）根据合力所作功等于各分力功的代数和，算出合力所作的功

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 165\text{J}$$

（3）如改用起重机把木箱吊上汽车，这时所用的拉力$\vec{F}$至少要等于重力$\vec{G}$。在这个拉力（$F' = 980N$）的作用下，木箱移动的竖直距离是$l\sin 30^\circ$。因此拉力所作的功为

$$A' = Fl\sin 30^\circ = 980 \times 30 \times 0.5\text{J} = 1.47 \times 10^3\text{J}$$

它等于重力所作的功，而符号相反（因为这时合外力所作的功为零）。与（1）中 F 作的功相比较，用了起重机能够少作功。我们还发现，虽然 F'比 F 大，但所作的功A'却比A_1为小，这是因为功的大小不完全取决于力的大小，还和位移的大小及位移与力之间的夹角有关。为了把木箱装上汽车，我们所需要作的最小功等于克服重力所作的功，其大小为 $1.47\times10^3 J$， 这对于斜面或是利用起重机甚至其他机械都是一样的。机械不能省功，但能省力或省时间，正是这些场合，使我们对功的概念的重要性加深了认识。现在，在（1）中推力 F 所多作的功

$$2.07\times10^3\,\mathrm{J}-1.47\times10^3\,\mathrm{J}=0.60\times10^3\,\mathrm{J}$$

起的是什么作用呢？我们说：第一，为了克服摩擦力，用去435J的功，它最后转变成热量；第二，余下的165J的功将使木箱的动能增加。

§3-4 势能 机械能守恒定律

1．保守力

功的大小只与物体的始末位置有关，而与所经历的路径无关，这类力叫做保守力。不具备这种性质的力叫做非保守力。

2．势能

蕴藏在保守力场中的与位置有关的能量称为势能（位能），是一种潜在的能量，不同于动能。

势能定义（粗糙版本）：质点在某点处的势能等于质点从该点移动至势能零点时保守力所做的功。

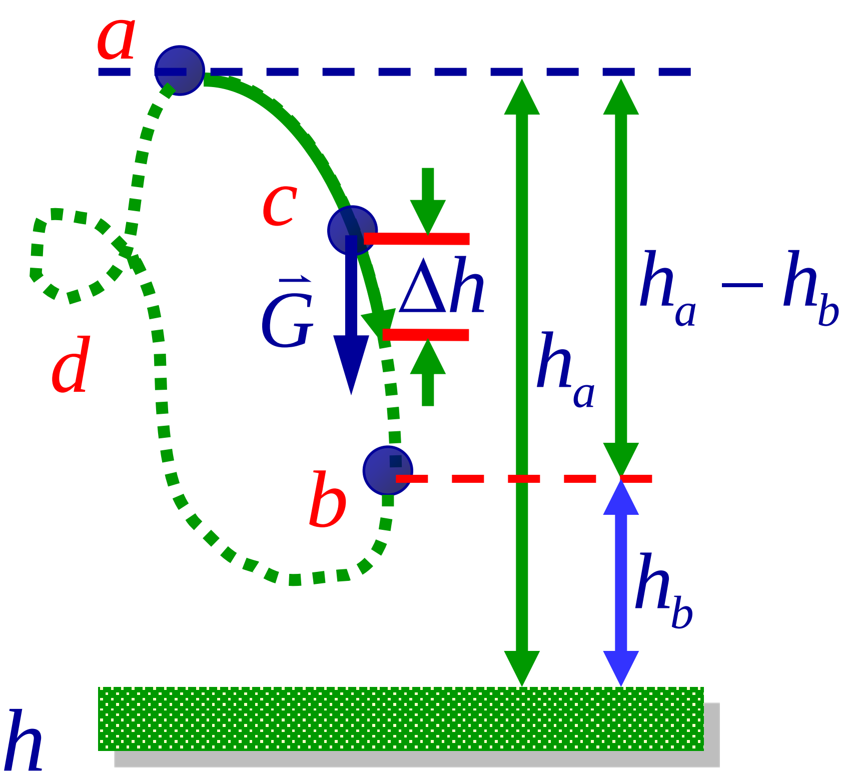
势能的增量等于保守力所做功的负值。即保守力做正功，势能减少；做负功，势能增加。

重力势能：若取高度为0为势能零点，则有

重力$\vec{G}$所做的功：

$$A=\int_{h_a}^{h_b} mg\mathrm{d}h$$

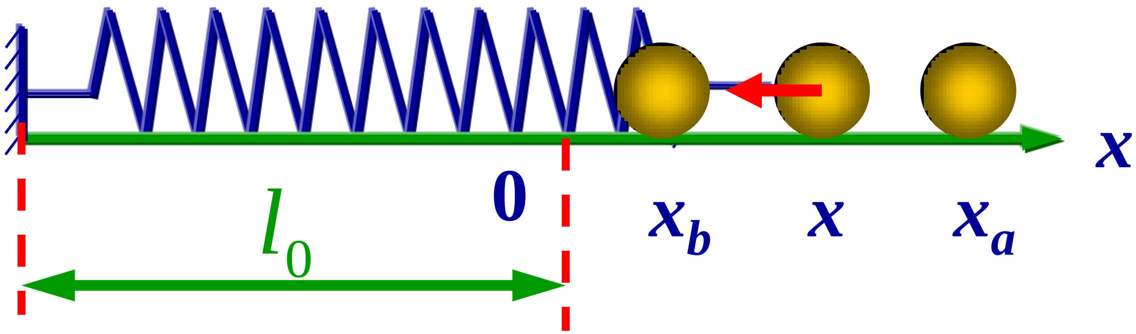
$$=mgh_a-mgh_b$$



定义势能：

$$E_p=\int_h^0(-mg)dh=mgh$$

弹性势能：若取弹簧原长时端点为势能零点，则有



$$A = -\int_{x_a}^{x_b} kx\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2$$

弹性力作功也仅仅与质点的始末位置有关，与具体路径无关。

定义势能：

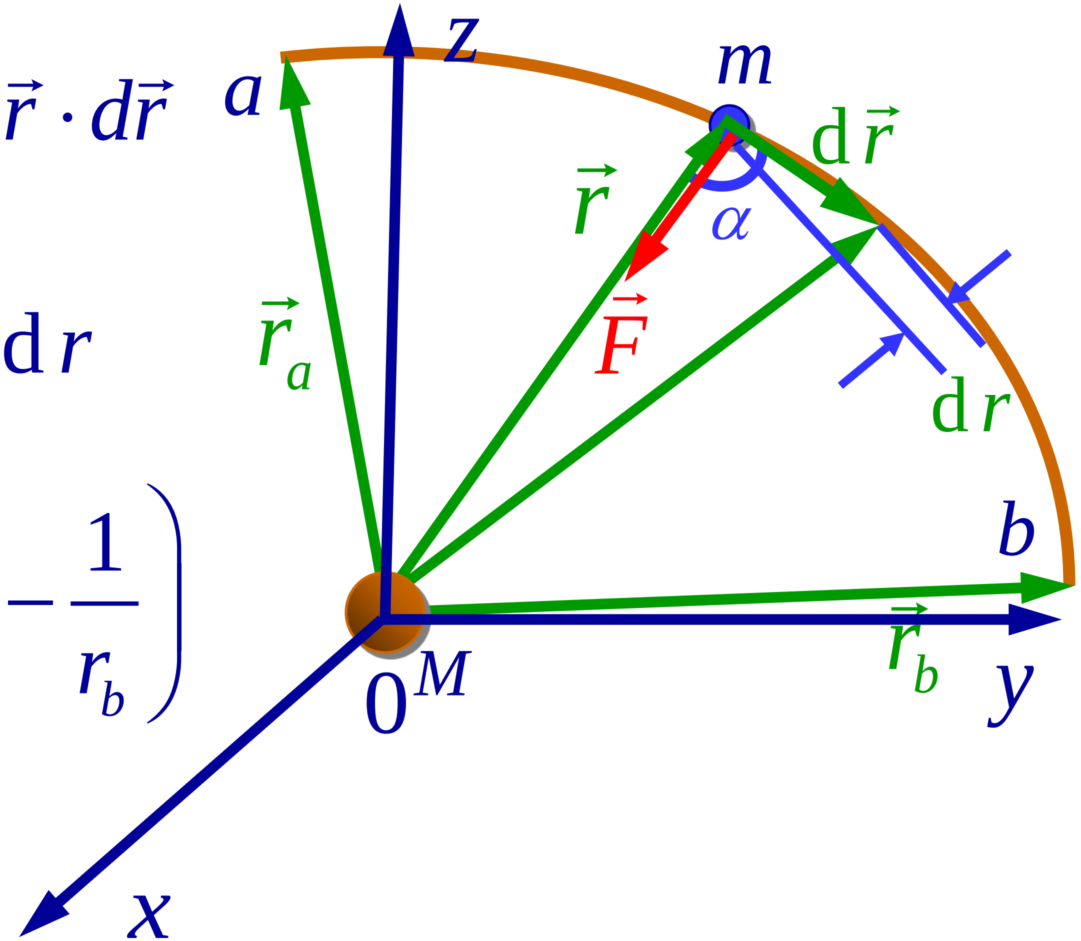
$$E_p = \int_x^0 (-kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$$

万有引力势能：取无穷远为势能零点，则有

$$A=\int_{r_a}^{r_b}-G_0\frac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{r_a}^{r_b}-G_0\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$=-G_0 mM\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$



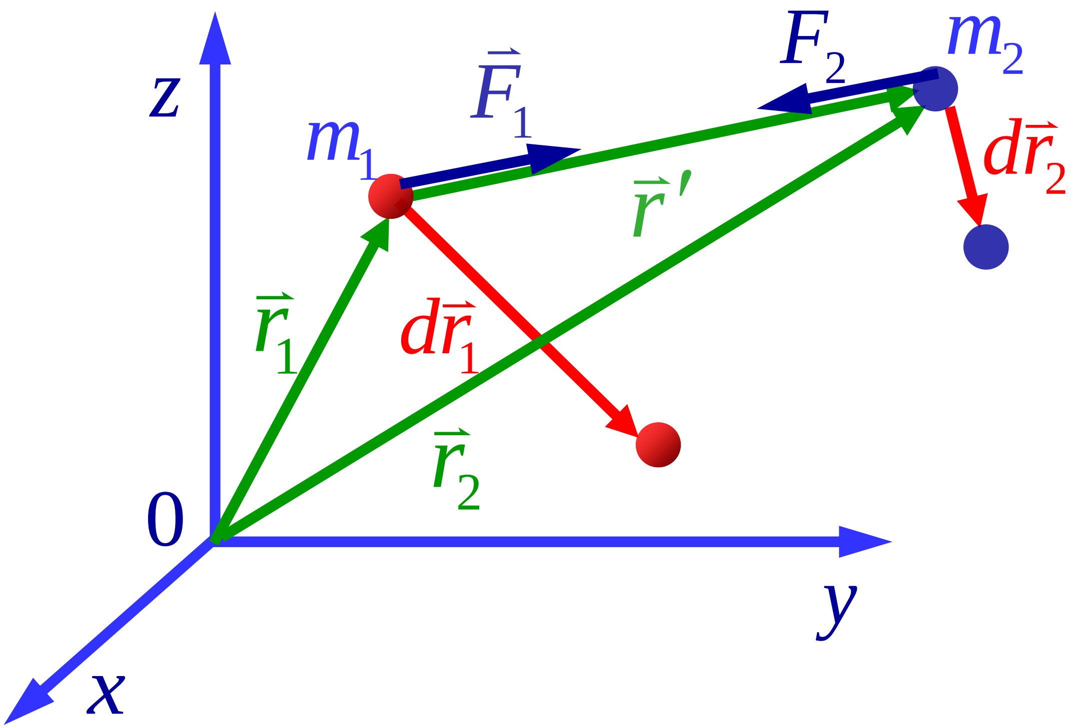
功与具体路径无关。

定义势能：

$$E_p=\int_r^{\infty}(-G_0\frac{mM}{r^2})\mathrm{d}r=-G_0\frac{mM}{r}$$

成对力的功

设有两个质点1和2，质量分别为 m_1 和 m_2，$\vec{F}_1$ 为质点1受到质点2的作用力，$\vec{F}_2$ 为质点2受到质点1的作用力，它们是一对作用力和反作用力。



分析相对位移

$$\vec{r}' = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

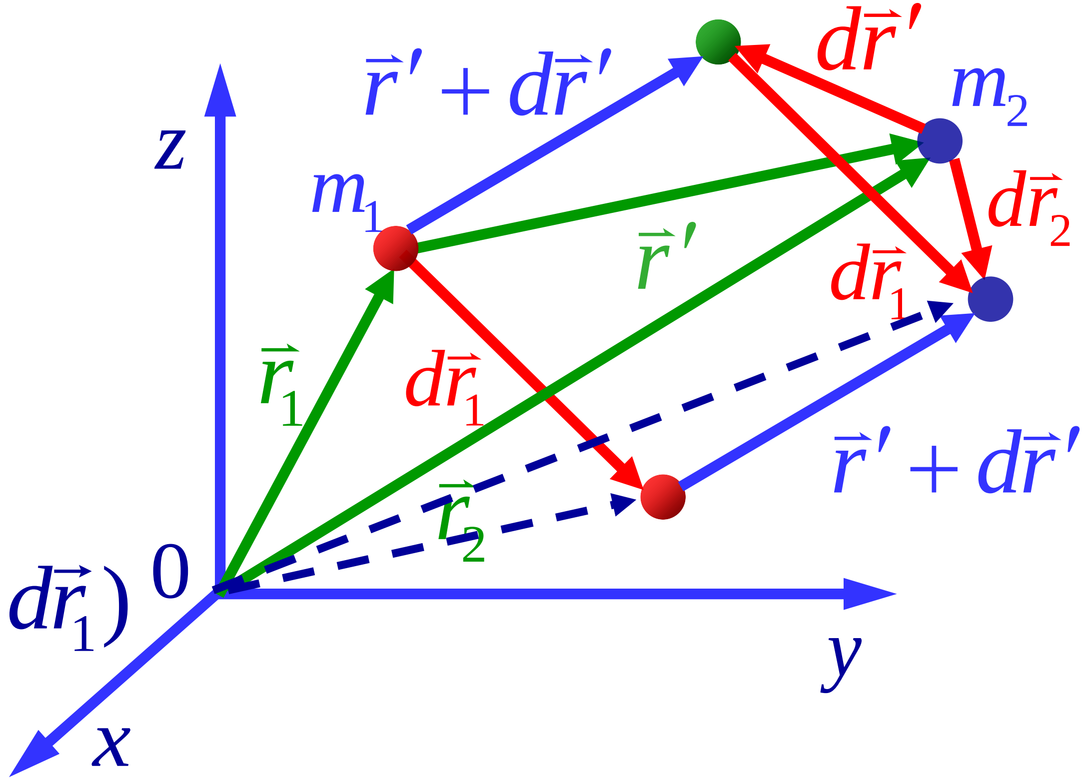
$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1 + d\vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2 + d\vec{r}_2$$

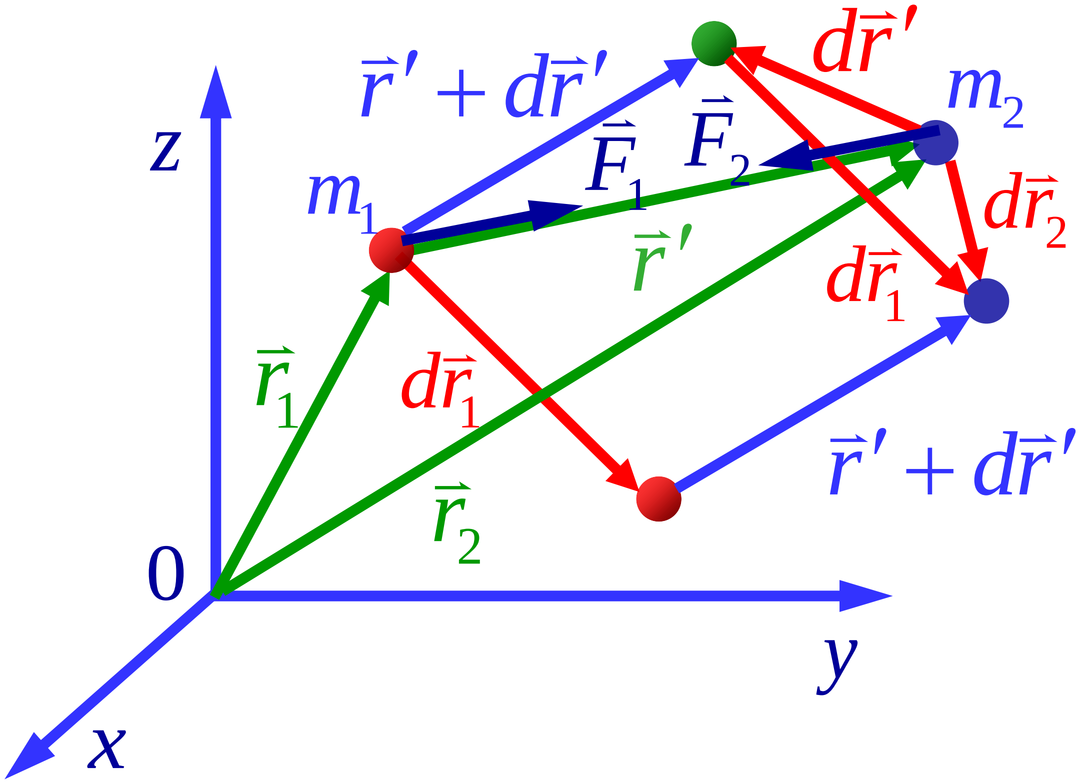
$$\vec{r}' \rightarrow \vec{r}' + d\vec{r}'$$

$$= (\vec{r}_2 + d\vec{r}_2) - (\vec{r}_1 + d\vec{r}_1)$$

$$\therefore d\vec{r}' = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1$$



成对力功的计算：



$\vec{r}\,' + d\vec{r}\,'$
$d\vec{r}\,'$
m_2
z
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_1$
m_1
$d\vec{r}_2$
$\vec{r}\,'$
$d\vec{r}_1$
$\vec{r}_1$
$d\vec{r}_1$
$\vec{r}\,' + d\vec{r}\,'$
$\vec{r}_2$
0
y
x

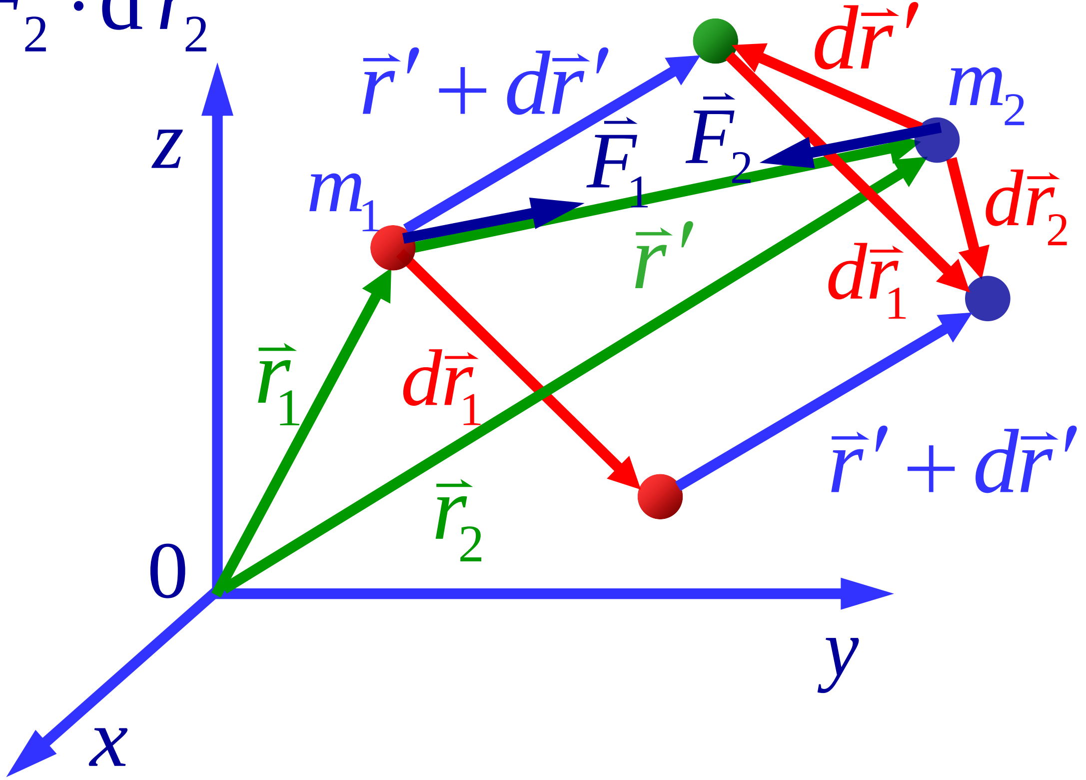
$$\mathrm{d}A_1=\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1\quad \mathrm{d}A_2=\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$\mathrm{d}A=\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$=-\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_1+\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$=\vec{F}_2\cdot(\mathrm{d}\vec{r}_2-\mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$=\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,'$$



由此可见，成对作用力与反作用力所作的总功只与作用力$\vec{F}_2$及相对位移$\mathrm{d}\vec{r}\,'$有关，而与每个质点各自的运动无关。

表明：任何一对作用力和反作用力所作的总功具有与参考系选择无关的不变性质。

保守力的普遍定义：在任意的参考系中，成对保守力的功只取决于相互作用质点的始末相对位置，而与各质点的运动路径无关。

保守力的功 $A_c = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$

成对保守内力的功等于系统势能的减少（或势能增量的负值）。

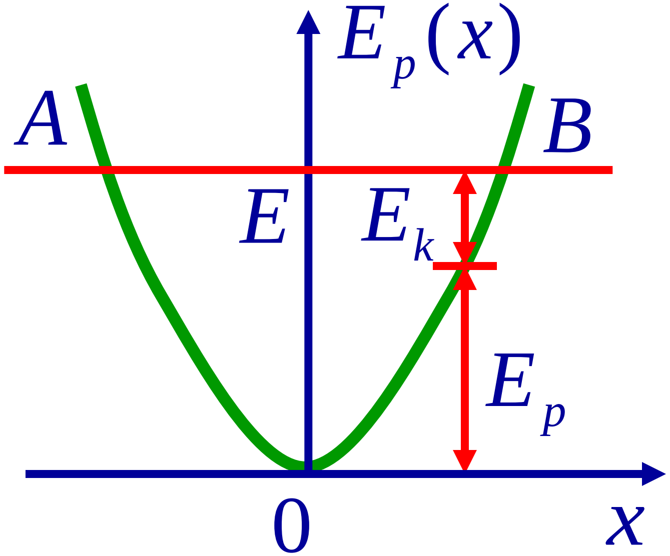
注意：

(1)势能既取决于系统内物体之间相互作用的形式，又取决于物体之间的相对位置，所以势能是属于物体系统的，不为单个物体所具有。

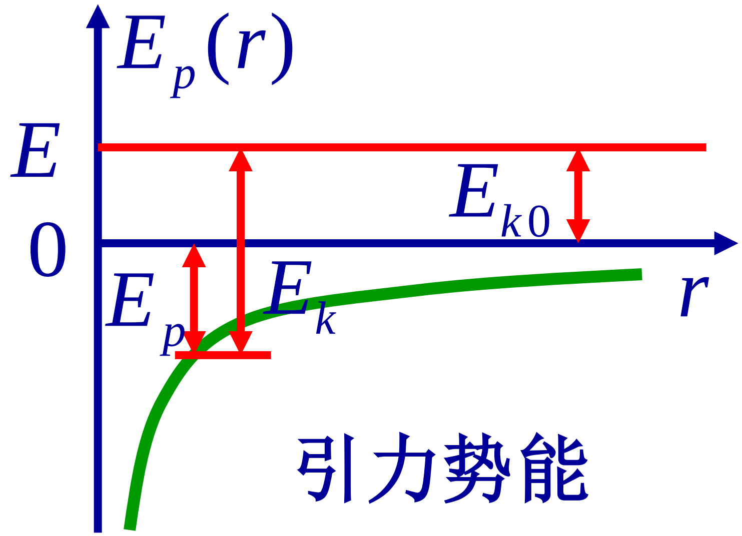
(2)物体系统在两个不同位置的势能差具有一定的量值，它可用成对保守力作的功来衡量。

(3)势能差有绝对意义，而势能只有相对意义。势能零点可根据问题的需要来选择。

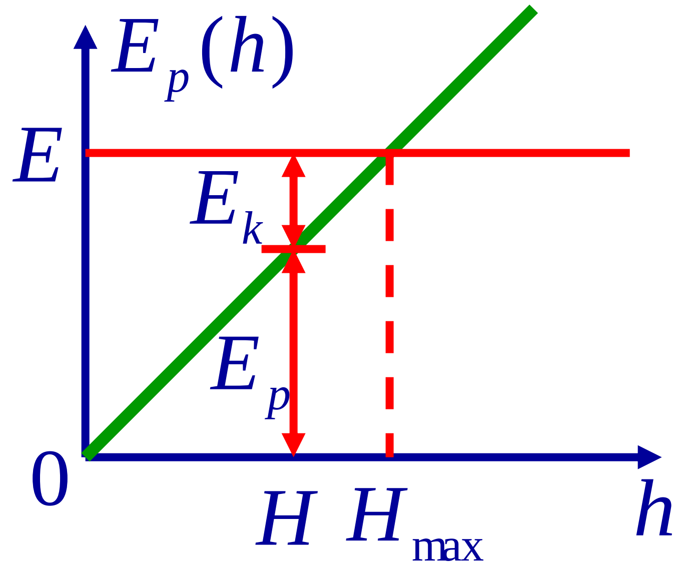
*3．势能曲线



弹性势能



引力势能



重力势能

势能曲线的作用：

（1）根据势能曲线的形状可以讨论物体的运动。

（2）利用势能曲线，可以判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向。

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_p \quad \Rightarrow \quad \therefore F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$$\because \mathrm{d}A = F\cos\varphi\,\mathrm{d}x$$

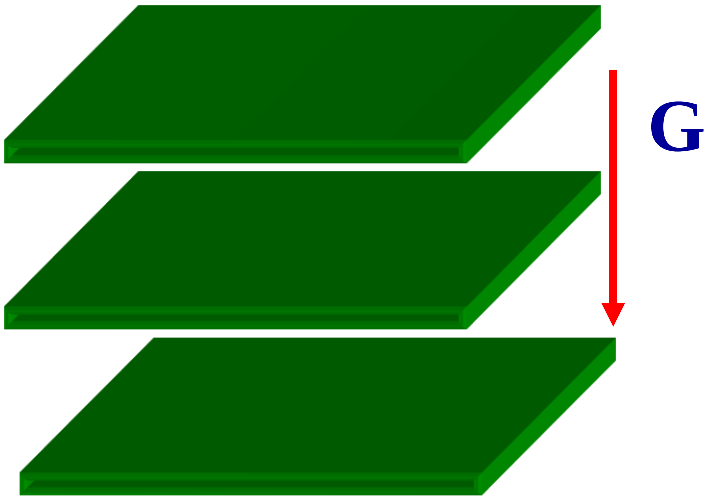
表明：保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标的导数的负值。

关系：保守力即负的势能函数的梯度！

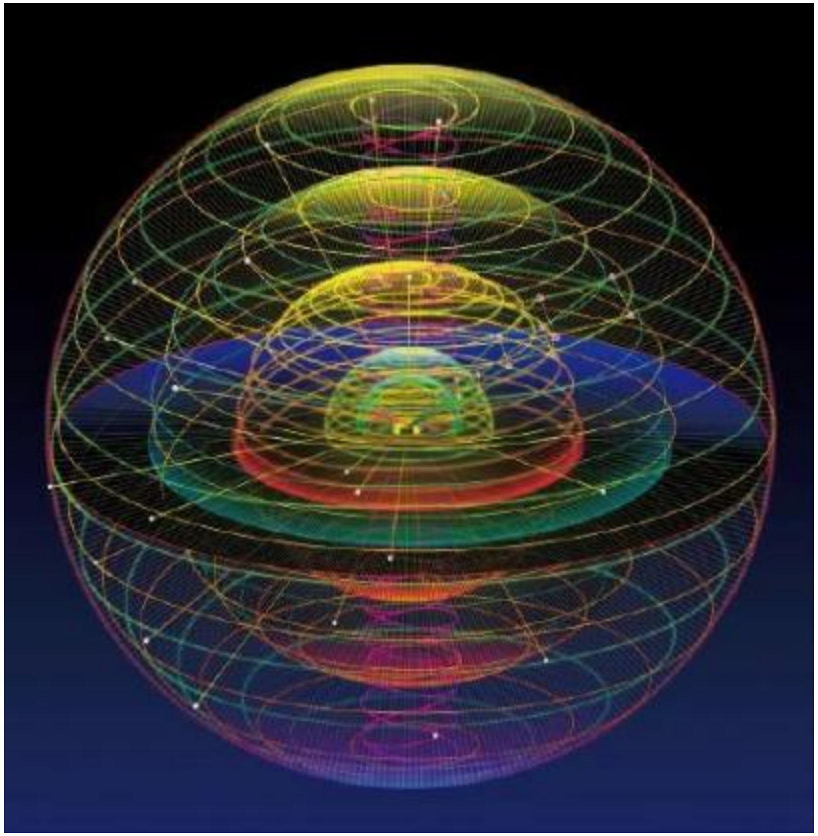
等势面

保守力场中，势能相同的点组成一个曲面。

重力场中的等势能面



引力场中的等势能面



保守力即负的势能函数的梯度：

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

引力即引力势能的负梯度

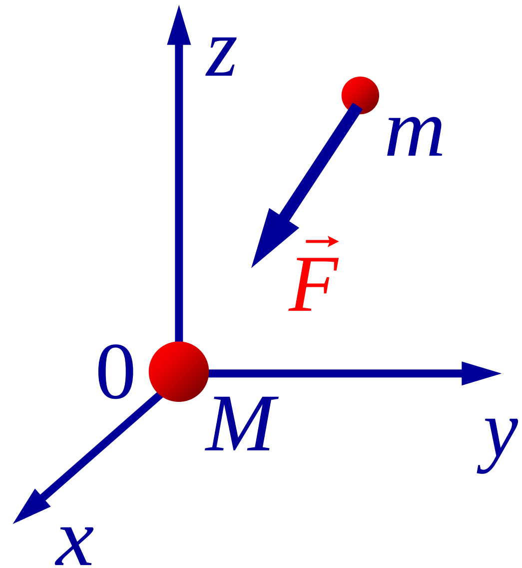
$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

引力即引力势能的负梯度：（取引力源为原点）

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{xG_0 Mm}{r^3}$$

$$F_y = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{yG_0 Mm}{r^3}$$

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{zG_0 Mm}{r^3}$$



亦即：$\vec{F} = -\frac{G_0 Mm}{r^3}\vec{r}$

从数学角度看，一个标量函数Φ的全微分为：

$$d\Phi(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

$$=\nabla\Phi(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

物理上，保守力作正功，则势能减少；保守力作负功，势能增加。势函数Φ与保守力的关系为：

$$d\Phi(x,y,z)=-\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad =\nabla\Phi(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

$$\therefore \vec{F}=-\nabla\Phi(x,y,z)$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=(B_yA_z-B_zA_y)\vec{i}+(B_zA_x-B_xA_z)\vec{j}$$

$$+(B_xA_y-B_yA_x)\vec{k}$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla\times\vec{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\vec{j}$$

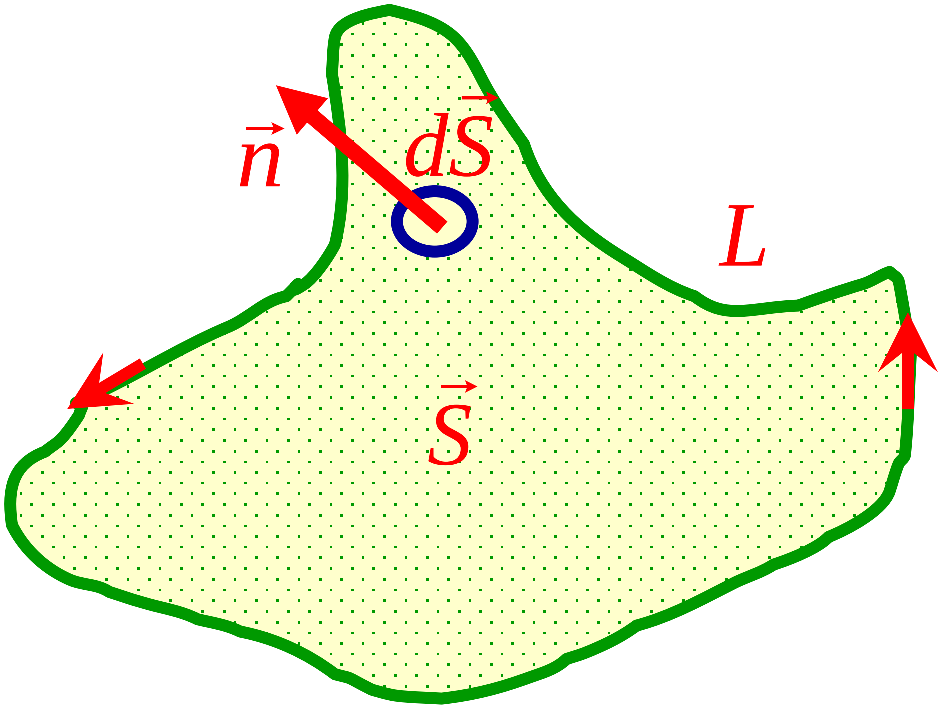
$$+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



斯托克斯定理：矢量场对任一闭合回路L的线积分等于该矢量场的旋度对以L为边界的任一曲面S的面积分。即：

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

简单运算可知：$\nabla\times\nabla\Phi = 0$

按照斯托克斯定理，此即：

$$\oint_L \nabla\Phi\cdot d\vec{r} = 0 = \iint_S \nabla\times\nabla\Phi\cdot d\vec{S}$$

左边等于 0 表示线积分与路径无关；右边等于 0 称该矢量场为无旋场。

所以物理上说保守场是无旋场！

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\nabla \times \nabla\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\vec{k}$$

$$= 0$$

环路积分等于 0 表示线积分与路径无关。

或者等价的说：开路积分的值仅依赖于端点坐标。
物理上，保守力的功仅和始末位置有关。

从数学角度看，一个标量函数Φ的全微分为：

$$d\Phi(x,y,z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz$$

$$=\nabla\Phi(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$

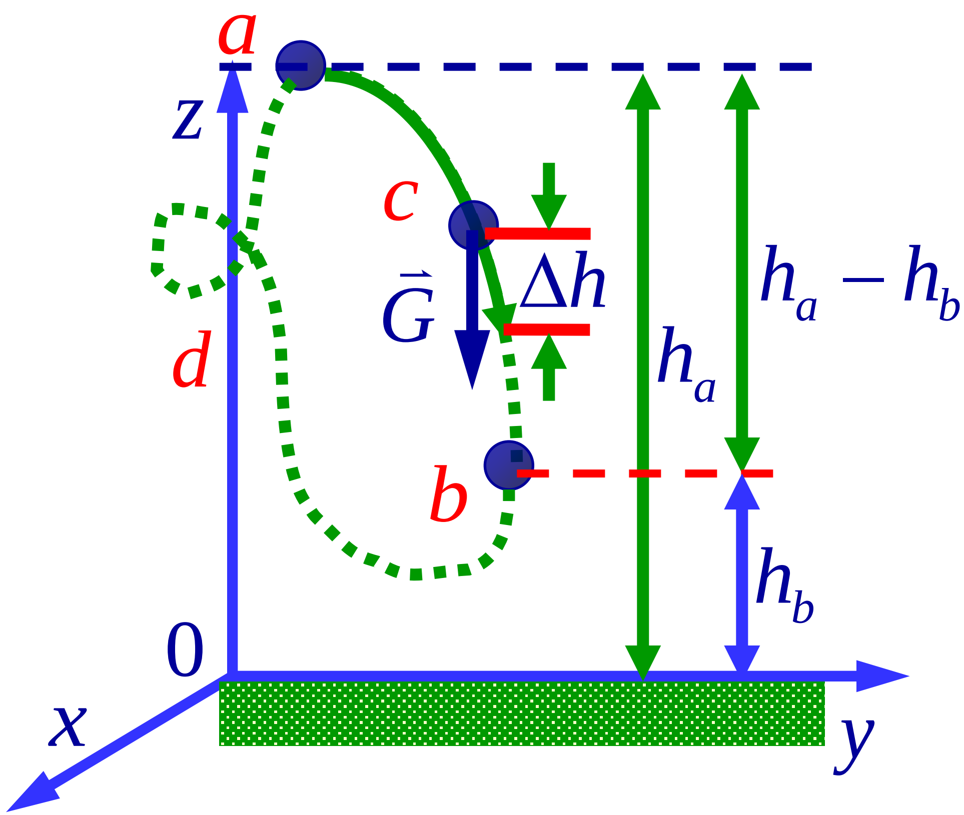
$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

保守场积分与路径无关的性质可表示为：

$$\int_A^B\nabla\Phi\cdot d\vec{r}=\int_A^B d\Phi=\Phi(x_B,y_B,z_B)-\Phi(x_A,y_A,z_A)$$

$$A = A_{adb} + A_{bca} = 0$$

$$A = \oint \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



在重力场中物体沿任一闭合路径运动一周时重力所作的功为零。

$$\Phi = mgz$$

按照斯托克斯定理，此即：

$$\oint_L -\nabla\Phi \cdot d\vec{r} = 0 = \iint_S -\nabla \times \nabla\Phi \cdot d\vec{S}$$

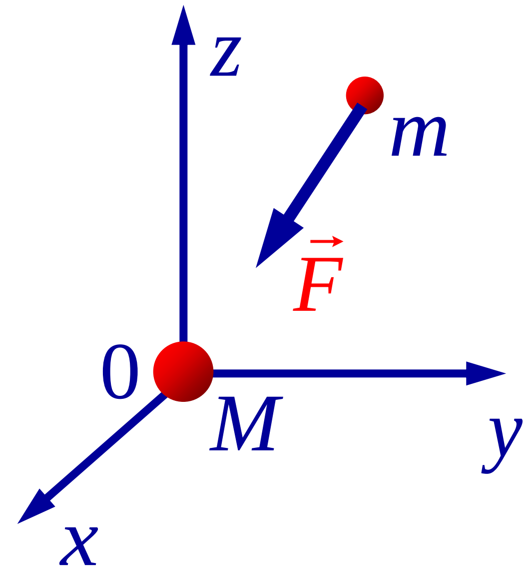
左边等于**0**表示线积分与路径无关；右边等于**0**称该矢量场为无旋场。

引力即引力势能的负梯度：（取引力源为原点）

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{xG_0 Mm}{r^3}$$

$$F_y = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{yG_0 Mm}{r^3}$$

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{-G_0 Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{zG_0 Mm}{r^3}$$



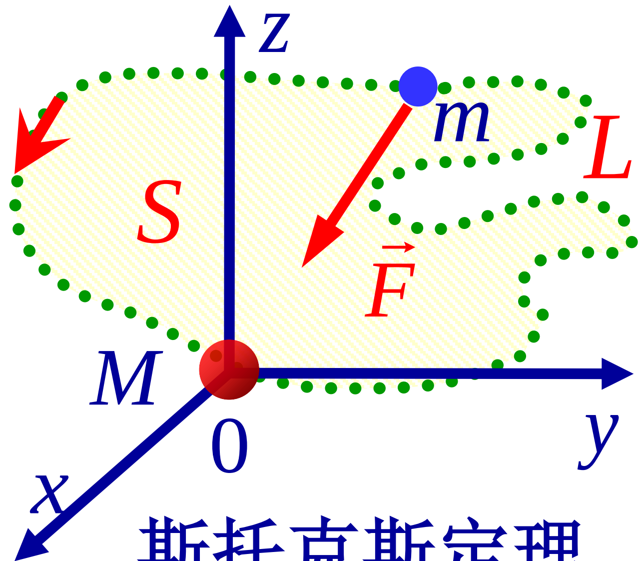
亦即：$\vec{F} = -\frac{G_0 Mm}{r^3}\vec{r}$

$$E_p = -G_0 \frac{Mm}{r}$$ 引力势能

$$E_p(r)\Big|_{r=\infty} = E_p(\infty) = 0$$ 以无穷远点为势能零点

$$\vec{F} = -\frac{G_0 Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$= -\nabla\left(-\frac{G_0 Mm}{r}\right)$$



斯托克斯定理

$$\oint_L -\nabla E_p \cdot d\vec{r} = 0 = \iint_S -\nabla \times \nabla E_p \cdot d\vec{S}$$

左边等于0表示线积分与路径无关；右边等于0称该矢量场为无旋场。

系统的功能原理

因为对系统的内力来说，它们有保守内力和非保守内力之分，所以内力的功也分为保守内力的功A_{ic}和非保守内力的功A_{id}。

$$A_i = A_{ic} + A_{id}$$

$$\because A_{ic} = -\Delta E_p$$

$$\boxed{\therefore A_e + A_{id} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E}$$

系统的功能原理：当系统从状态1变化到状态2时，它的机械能的增量等于外力的功与非保守内力的功的总和，这个结论叫做系统的功能原理。

注意：

(1)取物体作为研究对象时，其中外力所作的功指的是作用在物体上的所有外力所作的总功，必须计算包括重力、弹性力的一切外力所作的功。

(2)取系统作为研究对象时，保守内力所作的功，已为系统势能的变化所代替，如果计算了保守内力所作的功，就不必再去考虑势能的变化；反之，考虑了势能的变化，就不必再计算保守内力的功。

例题：一质量为$m = 1\text{kg}$的物体，在保守力$F(x)$的作用下，沿x轴正向运动($x > 0$)。与该保守力相应的势能是

$$E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \quad (x > 0)$$

x以m为单位，势能单位为J，$a = 1\text{J}\cdot\text{m}^2$，$b = 2\text{J}\cdot\text{m}$。(a) 画出物体的势能曲线；(b) 设物体的总能量$E = -0.50\text{J}$ 保持不变，这表明物体的运动被引力束缚在一定范围之内。试分别用作图和计算的方法求物体的运动范围。

解 (a) 根据

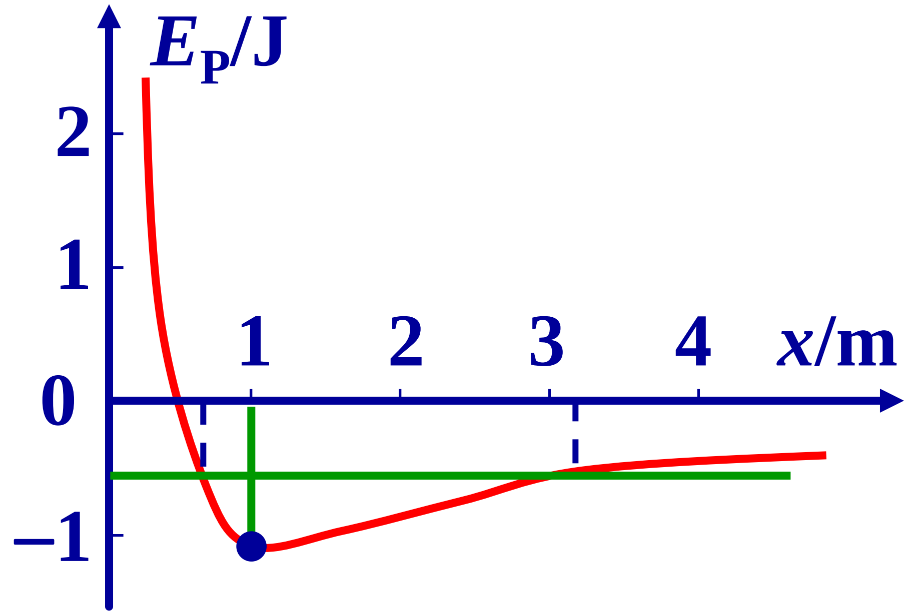
$$E_p(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} \quad (x > 0)$$

取下列数据来画出势能曲线

x/m	0.2	0.5	1	2	3	4
$E_p(x)$/J	1.5	0	–1.0	–0.75	–0.55	–0.44

求物体的平衡位置

$$F=-\frac{dE_p}{dx}=\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}$$



令$F=0$，解得$x=1$m，这就是物体的平衡位置，在该点，势能有极小值，如图所示。

（b）当物体的总能量E ＝ –0.50J保持不变时，令$E_p(x)$ ＝ E就可求得物体的E_k ＝ E–E_p为0的位置，因此，令

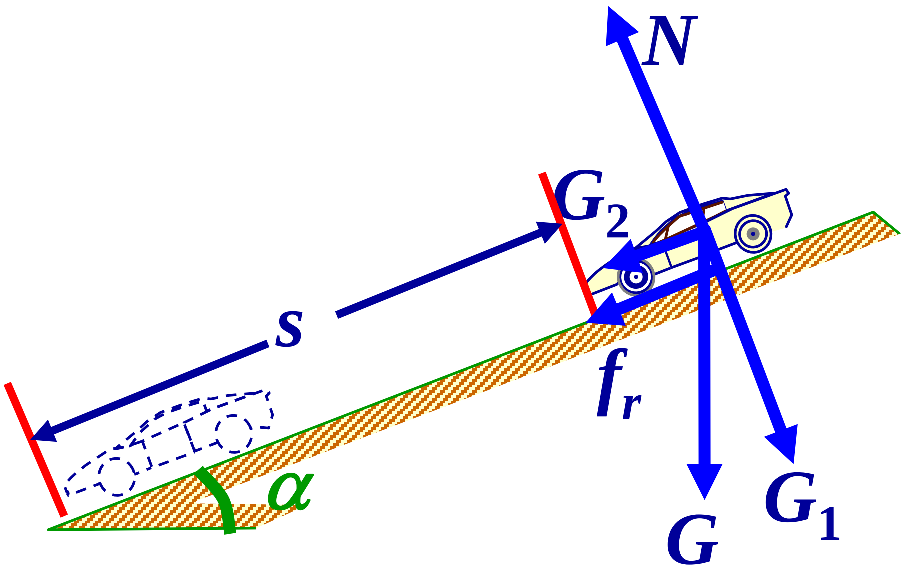
$$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}=-0.50\mathrm{J}$$

由此解得

$$x=(2\pm\sqrt{2})\mathrm{m}\approx\begin{cases}0.59\ \mathrm{m}\\3.14\ \mathrm{m}\end{cases}$$

例题：一汽车的速度$v_0 = 36$km/h,驶至一斜率为0.010的斜坡时，关闭油门。设车与路面间的摩擦阻力为车重G的0.05倍，问汽车能冲上斜坡多远？

解法一：取汽车为研究对象。汽车上坡时，受到三个力作用：一是沿斜坡方向向下的摩擦力 $\vec{f}_r$，二是重力 $\vec{G}$，方向竖直向下，三是斜坡对物体的支持力$\vec{N}$ ，如图所示。设汽车能冲上斜坡的距离为s，此时汽车的末速度为0。根据动能定理



$$-f_r \cdot s - Gs\sin\alpha = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

上式说明，汽车上坡时，动能一部分消耗于反抗摩擦力作功，一部分反抗重力作功。因 $f_r = \mu N = \mu G_1$，所以

$$\mu G_1 s + Gs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (2)$$

按题意，**tgα = 0.010**，表示斜坡与水平面的夹角很小，所以 **sin α ≈ tgα**，$G_1 \approx G$，并因 **G = mg**，上式可化成

$$\mu gs + gs\,tg\alpha = \frac{1}{2}v_0^2 \qquad (3)$$

或 $$s=\frac{v_0^2}{2g(\mu+tg\alpha)}$$

代入已知数字得

$$s=\frac{10^2}{2\times 9.8(0.05+0.010)}\,\mathrm{m}=85\,\mathrm{m}$$

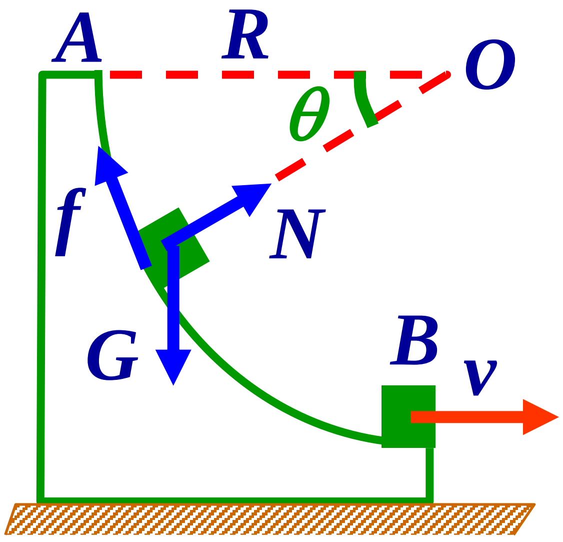
解法二：取汽车和地球这一系统为研究对象，则系统内只有汽车受到 $\vec{f}_r$ 和 $\vec{N}$ 两个力的作用，运用系统的功能原理，有

$$-f_r\cdot s=(0+Gs\sin\alpha)-(\frac{1}{2}mv_0^2+0)$$

即 $$\mu Gs=\frac{1}{2}mv_0^2-Gs\sin\alpha \qquad \textbf{（4）}$$

例题：如图，一质量m = 2kg的物体从静止开始，沿四分之一圆周从A滑到B，已知圆半径R = 4m，设物体在B处的速度v = 6m/s，求在下滑过程中，摩擦力所作的功。

解：物体从A下滑到B的过程中，受重力 G ，摩擦力f和正压力N的作用， f 与N两者都是变力。N处处和物体运动方向相垂直，所以不作功。



因摩擦力是变力，直接计算它的功比较复杂。方便的方法是采用功能原理。把物体和地球作为系统，取B为重力势能零点，则物体在A点时系统的能量E_A是势能mgR，而在B点时系统能量E_B则是动能$mv^2/2$，它们的差值就是摩擦力的功，由此

$$A = E_B - E_A = \frac{1}{2}mv^2 - mgR$$

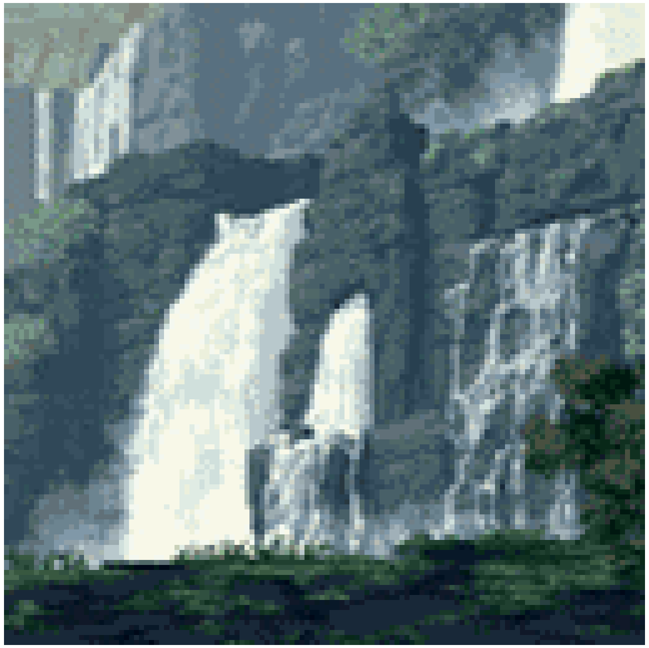
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 6^2\,\mathrm{J} - 2 \times 9.8 \times 4\mathrm{J} = -42.4\mathrm{J}$$

负号表示摩擦力对物体作负功，即物体反抗摩擦力作功**42.4J**

4．机械能守恒定律

机械能守恒定律：如果一个系统内只有保守内力做功，或者非保守内力与外力的总功为零，则系统内各物体的动能和势能可以互相转换，但机械能的总值保持不变。这一结论称为机械能守恒定律。

条件 $A_e + A_{id} = 0$



定律 $E_{Ka} + E_{Pa} = E_{Kb} + E_{Pb}$

或 $E = E_K + E_P =$ 常量

或 $E_{Kb} - E_{Ka} = E_{Pa} - E_{Pb}$

§3-4 势能 机械能守恒定律

能量

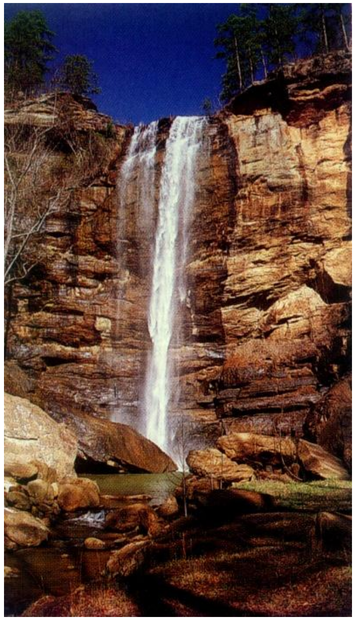
能量是反映各种运动形式共性的物理量，各种运动形式的相互转化用能量来量度。各种运动形式的相互转化遵循能量的转换和守恒定律。

到十九世纪，能量概念才逐步由力的概念中分离出来。实际上，只有在能量的转换和守恒定律发现以后，人们才认识功、动能和势能的真实含义。二十世纪初，爱因斯坦建立了狭义相对论，得到了“质能关系”，进一步揭示能量和质量的相当性，对于能量的认识才更深入了一步。

与机械运动直接相关的能量是机械能。

能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另外一种形式，或从系统内一个物体传给另一个物体。这就是普遍的能量守恒定律。



亥姆霍兹(1821—1894)，德国物理学家和生理学家。于1874年发表了《论力 (现称能量) 守恒》的演讲，首先系统地以数学方式阐述了自然界各种运动形式之间都遵守能量守恒这条规律。所以说亥姆霍兹是能量守恒定律的创立者之一。

对与一个与自然界无任何联系的系统来说，系统内各种形式的能量是可以相互转换的，但是不论如何转换，能量既不能产生，也不能消灭，这一结论叫做能量守恒定律 。

例如：利用水位差推动水轮机转动，能使发电机发电，将机械能转换为电能；电流通过电热器能发热，把电能又转换为热能。

注意

1. 生产实践和科学实验的经验总结;

2. 能量是系统状态的函数;

3. 系统能量不变，但各种能量形式可以互相转化;

4. 能量的变化常用功来量度 。

能量守恒定律的重要性：

① 支配着一切自然现象：若发现某过程中违反能量守恒，意味着存在未知的新事物。

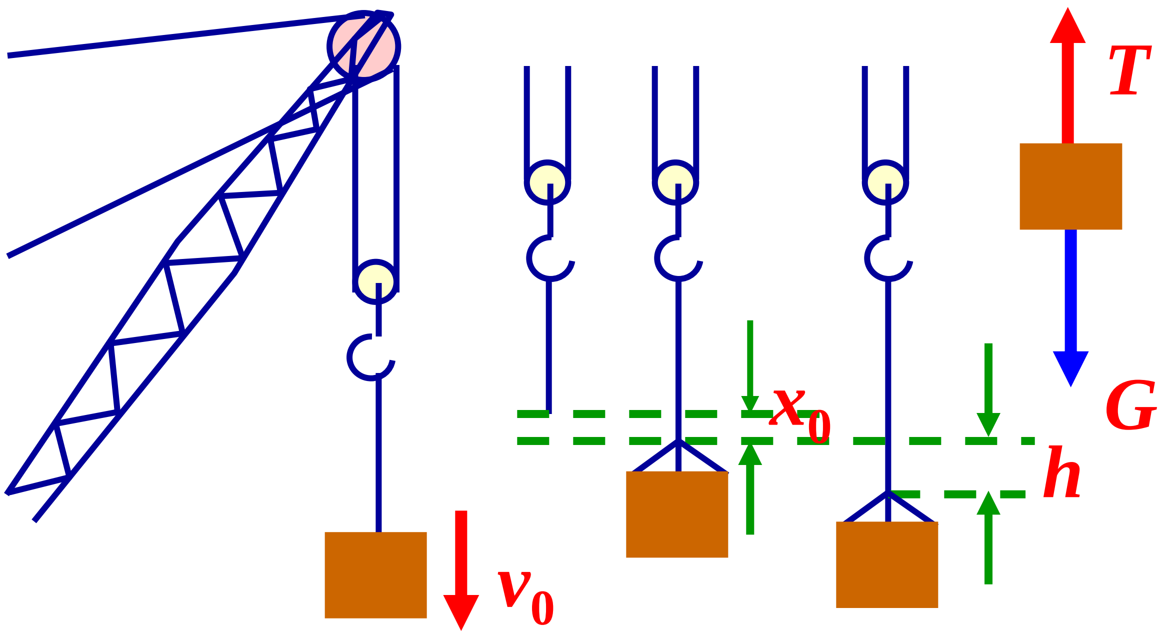
β衰变： $${}_{Z}^{A}X \xrightarrow{\beta\ \text{decay}} {}_{Z+1}^{A}Y + \beta^{-}(e^{-}) + \bar{\nu}$$

② 违背能量守恒定律的过程不可能实现。

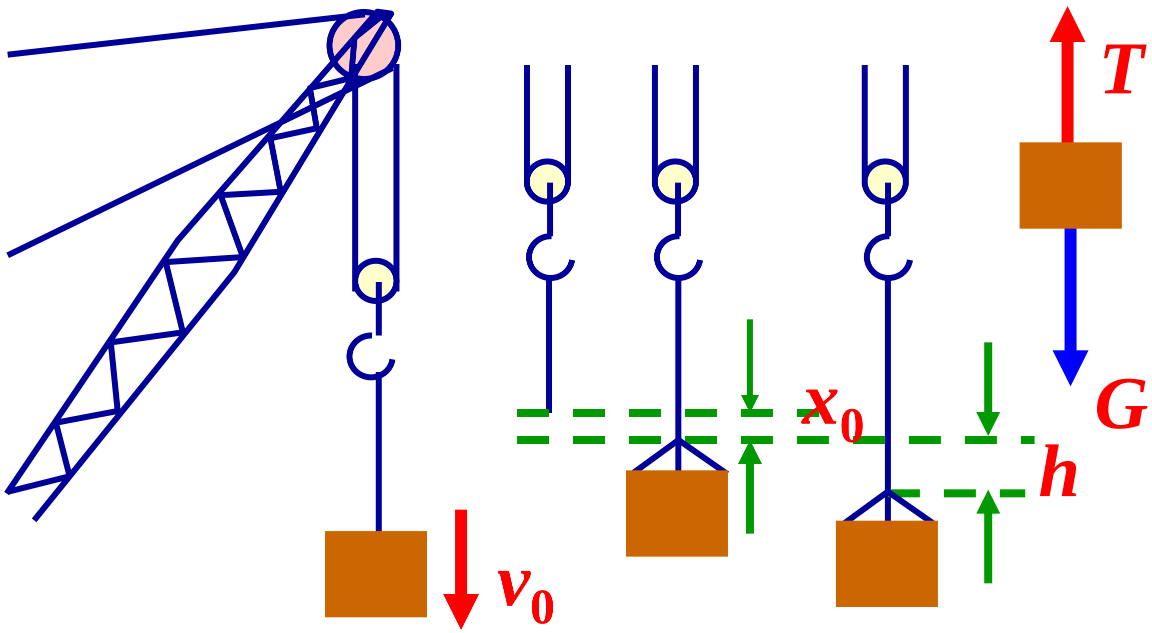
永动机？

③ 为解决问题提供新方法。

例题：起重机用钢丝绳吊运一质量为m 的物体，以速度v_0作匀速下降，如图所示。当起重机突然刹车时，物体因惯性进行下降，问使钢丝绳再有多少微小的伸长？(设钢丝绳的劲度系数为k，钢丝绳的重力忽略不计)。这样突然刹车后，钢丝绳所受的最大拉力将有多大？



解：考察由物体、地球和钢丝绳所组成的系统。除重力和钢丝绳中的弹性力外，其它的外力和内力都不作功，所以系统的机械能守恒。



现在研究两个位置的机械能。 在起重机突然停止的那个瞬时位置，物体的动能为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

设这时钢丝绳的伸长量为$\boldsymbol{x_0}$，系统的弹性势能为

$$E_{p1}^{弹}=\frac{1}{2}kx_0^2$$

如果物体因惯性继续下降的微小距离为$\boldsymbol{h}$，并且以这最低位置作为重力势能的零位置，那么，系统这时的重力势能为

$$E_{p1}^{重}=mgh$$

所以，系统在这位置的总机械能为

$$E_1 = E_{k1} + E_{p1}^{弹} + E_{p1}^{重} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + mgh$$

物体到最低位置时动能$\boldsymbol{E_{k2} = 0}$，系统弹性势能应为

$$E_{p2}^{弹} = \frac{1}{2}k(x_0 + h)^2$$

此时的重力势能

$$E_{p2}^{重} = 0$$

所以在最低位置时，系统的总机械能为

$$E_2 = E_{k2} + E_{p2}^{弹} + E_{p2}^{重} = \frac{1}{2}k(x_0 + h)^2$$

按机械能守恒定律，应有$E_1 = E_2$，于是

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + mgh = \frac{1}{2}k(x_0 + h)^2$$

$$\frac{1}{2}kh^2 + (kx_0 - mg)h - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

由于物体作匀速运动时，钢丝绳的伸长x_0量满足$x_0 = G/k = mg/k$，代入上式后得

$$kh^2 - mv_0^2 = 0$$

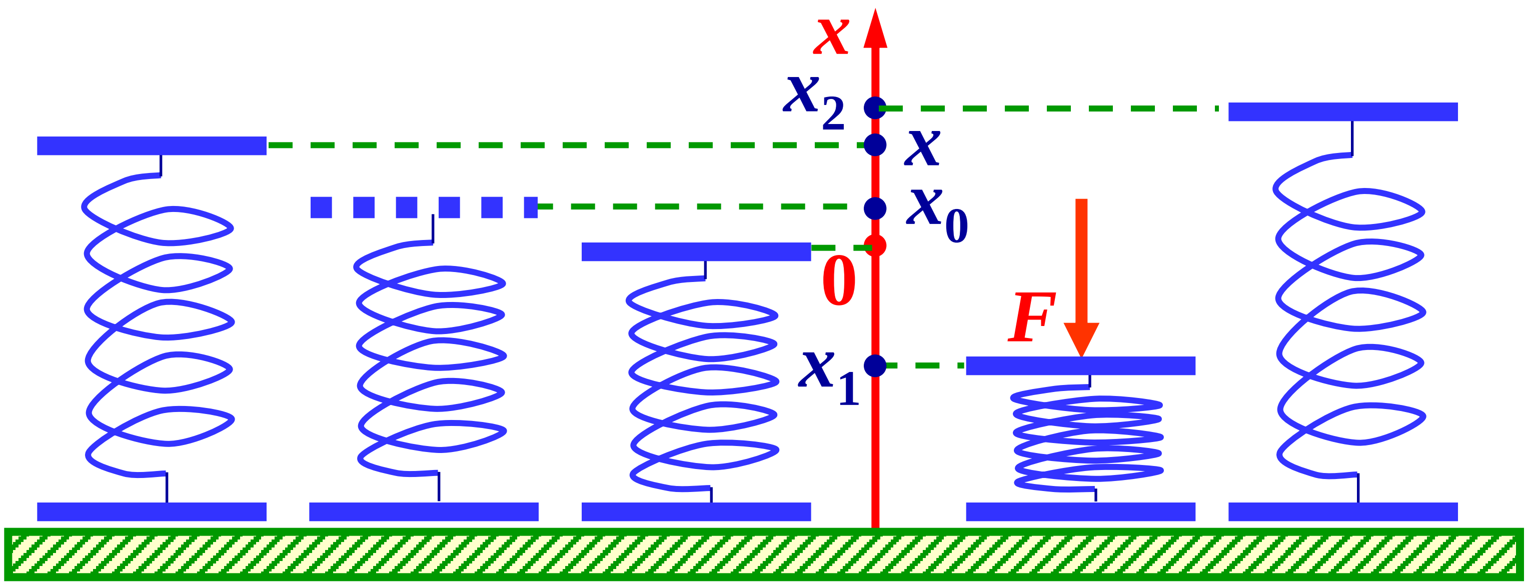
$$\therefore h = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

钢丝绳对物体的拉力T和物体对钢丝绳的拉力T'是一对作用力和反作用力。T'和T的大小决定于钢丝绳的伸长量x，$T' = kx$。现在，当物体在起重机突然刹车后因惯性而下降，在最低位置时相应的伸长量$x=x_0+h$是钢丝绳的最大伸长量，所以钢丝绳所受的最大拉力

$$T'_m = k(x_0 + h) = k\left(\frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\right) = mg + \sqrt{km}v_0$$

由此式可见，如果v_0较大，T'_m也较大。所以对一定的钢丝绳来说，应规定吊运速度v_0不得超过某一限值。

例题：用一弹簧将质量分别为m_1和m_2的上下两水平木板连接如图所示，下板放在地面上。（1）如以上板在弹簧上的平衡静止位置为重力势能和弹性势能的零点，试写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。（2）对上板加多大的向下压力F，才能因突然撤去它，使上板向上跳而把下板拉起来？

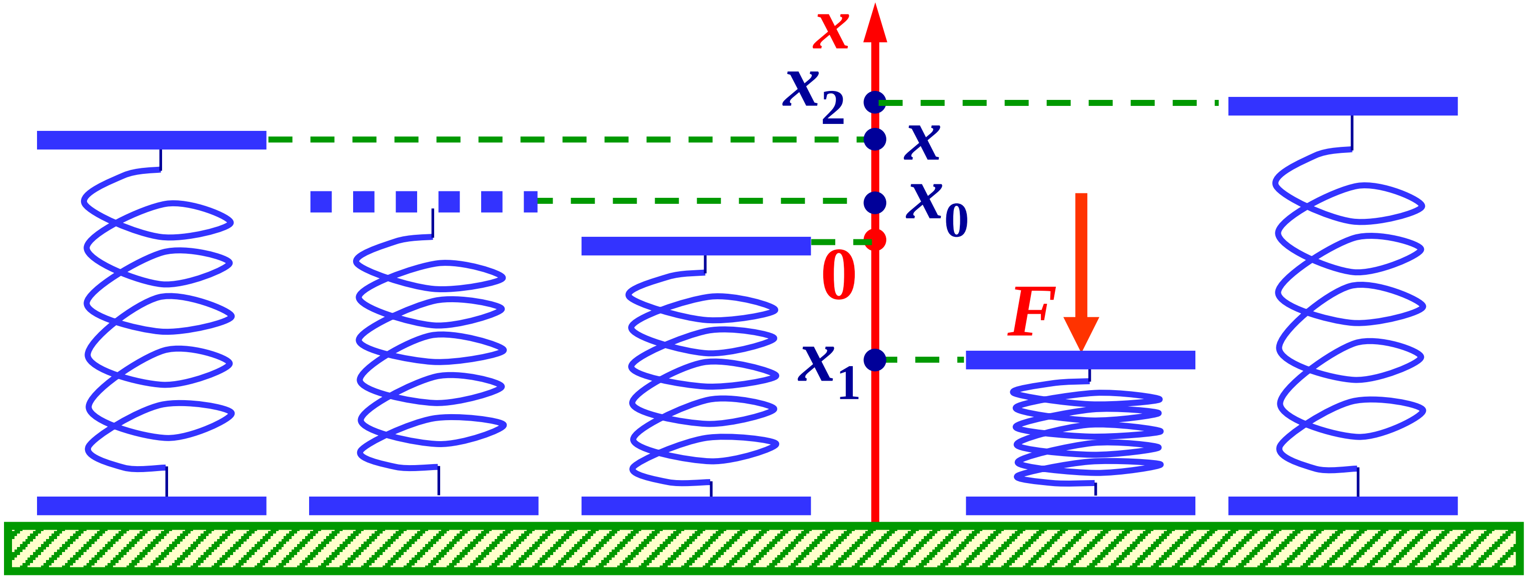


势能零点的确定：以弹性势能为例

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + c_0 = \frac{1}{2}kx^2 - kxx_0$$

$$E_{pe}(0) = E_{pe}(x)\big|_{x=0} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}kx_0^2 + c_0 = 0 \qquad \therefore c_0 = -\frac{1}{2}kx_0^2$$

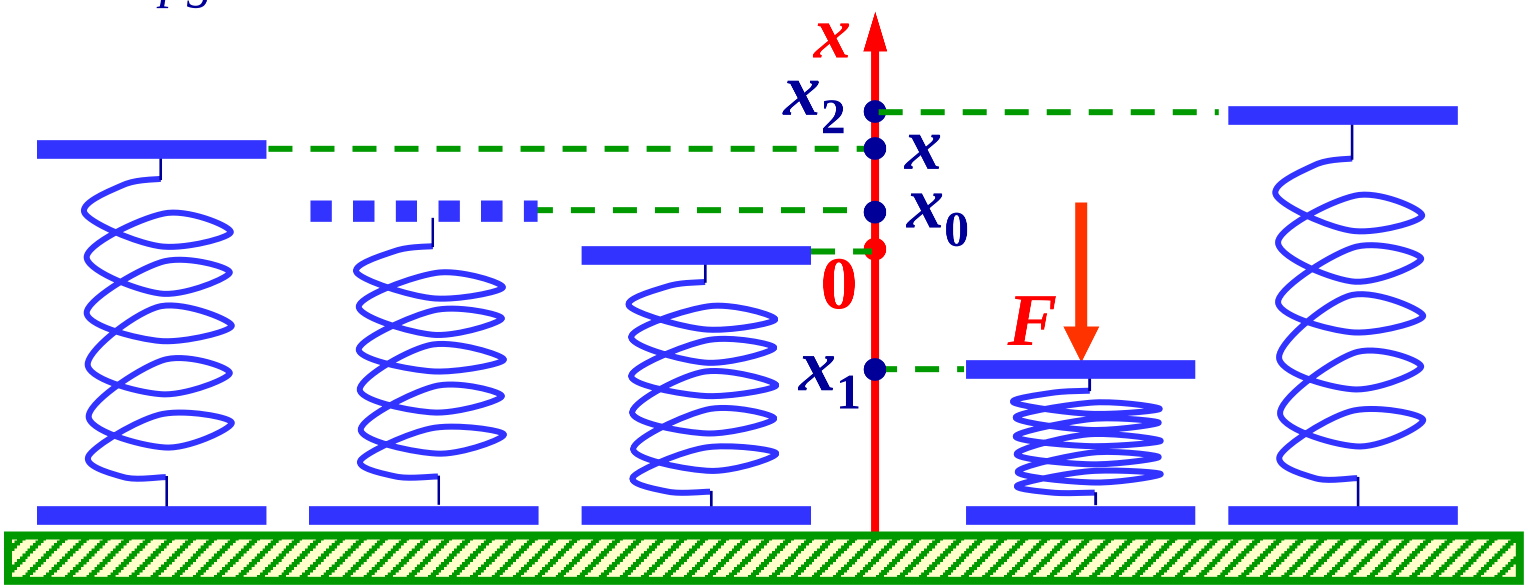


解：（1）取上板的平衡位置为x 轴的原点，设弹簧为原长时上板处在x_0位置。系统的弹性势能

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 - kxx_0$$

系统的重力势能

$$E_{pg} = m_1 g x$$



所以总势能为

$$E_p = E_{pe} + E_{pg} = \frac{1}{2}kx^2 - kx_0 x + m_1 g x$$

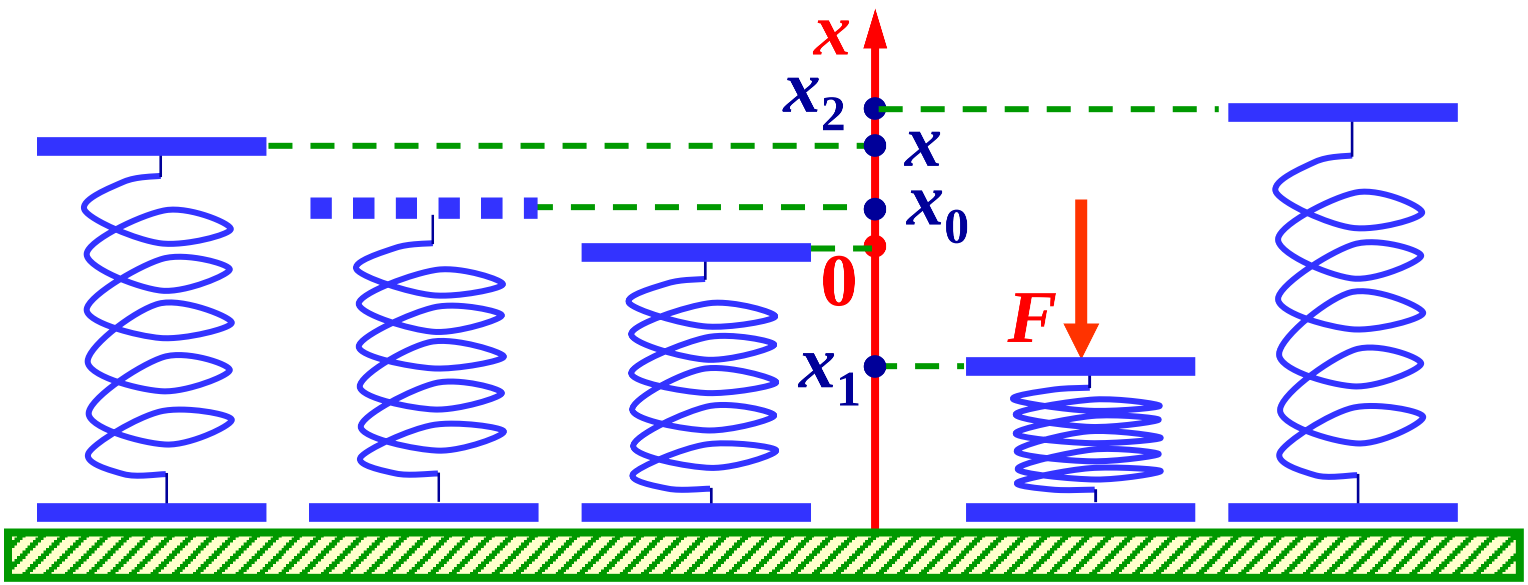
考虑到上板在弹簧上的平衡条件，得$\boldsymbol{kx_0 = m_1 g}$，代入上式得

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

（2）以加力F 时为初态，撤去力F 而弹簧伸长最大时为末态，则

初态 $E_{k1}=0$ $E_{p1}=\dfrac{1}{2}kx_1^2$

末态 $E_{k2}=0$ $E_{p2}=\dfrac{1}{2}kx_2^2$



根据能量守恒定律，应有

$$\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}=\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$$

恰好提起m_2时，$k(x_2-x_0)=m_2g$，而$kx_1=F$，$kx_0=m_1g$

代入解得

$$F=\left(m_1+m_2\right)g$$

这就是说$F\geq(m_1+m_2)g$时，下板就能被拉起。