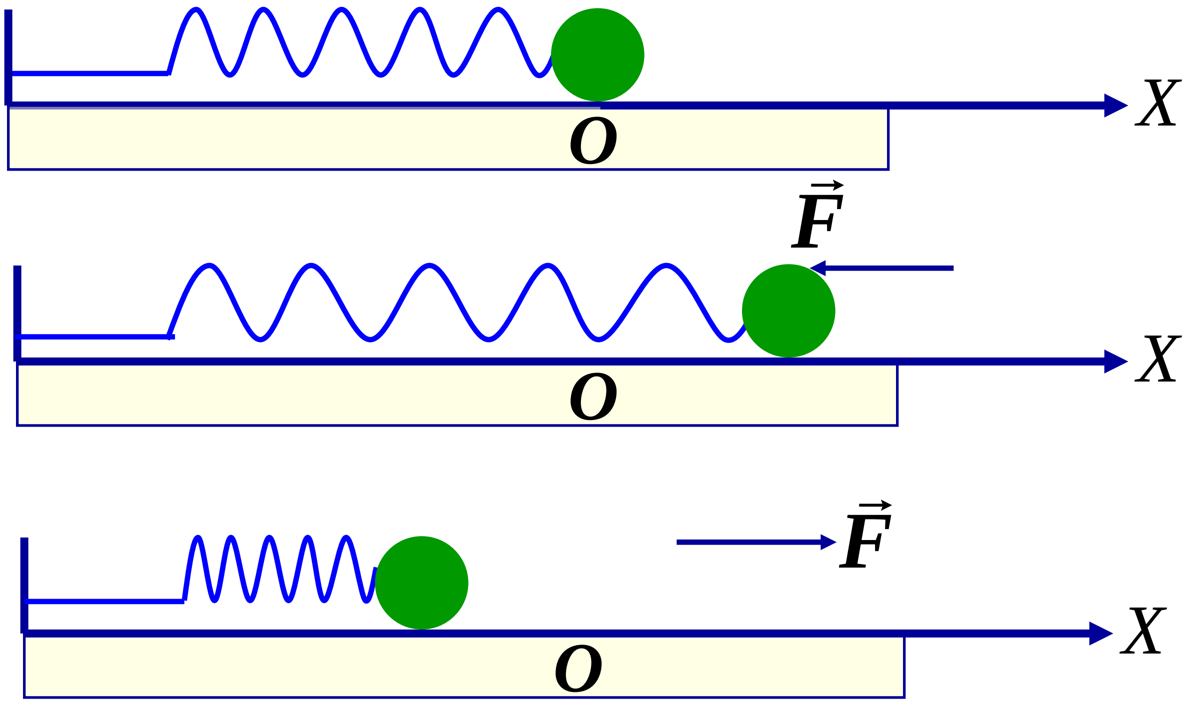
第六章

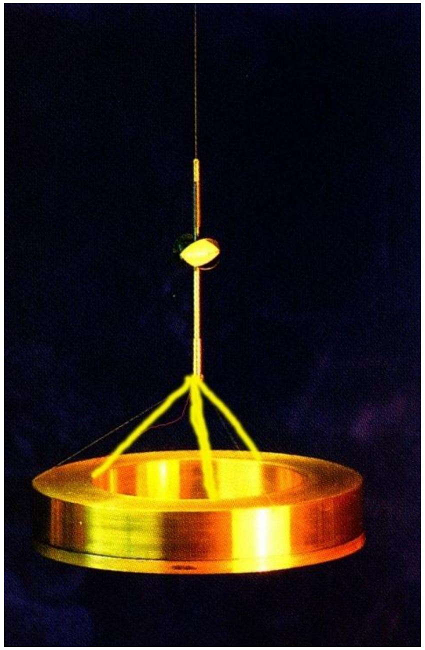
机械振动基础

§6-1 简谐振动

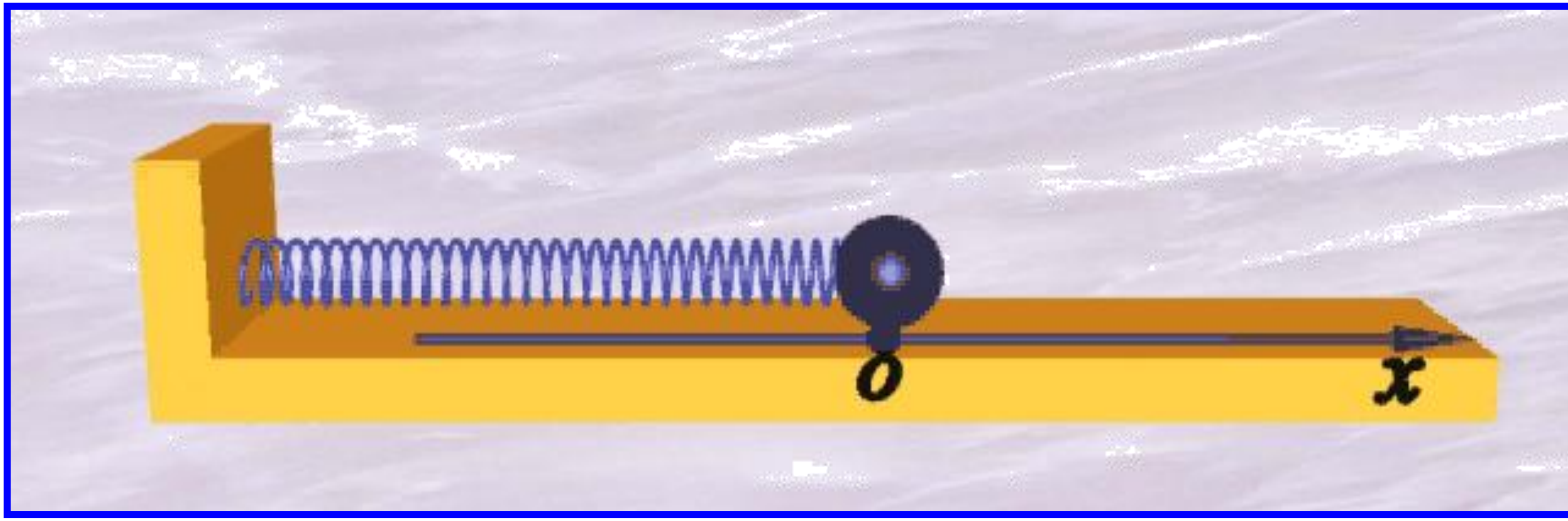
简谐振动：物体运动时，离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦(或正弦)规律随时间变化。

1．简谐振动的特征及其表达式





弹簧振子：连接在一起的一个忽略了质量的弹簧和一个不发生形变的物体系统。



回复力：作简谐运动的质点所受的沿位移方向的合外力，该力与位移成正比且反向。

简谐振动的动力学特征：

$$F=-kx$$

据牛顿第二定律，得

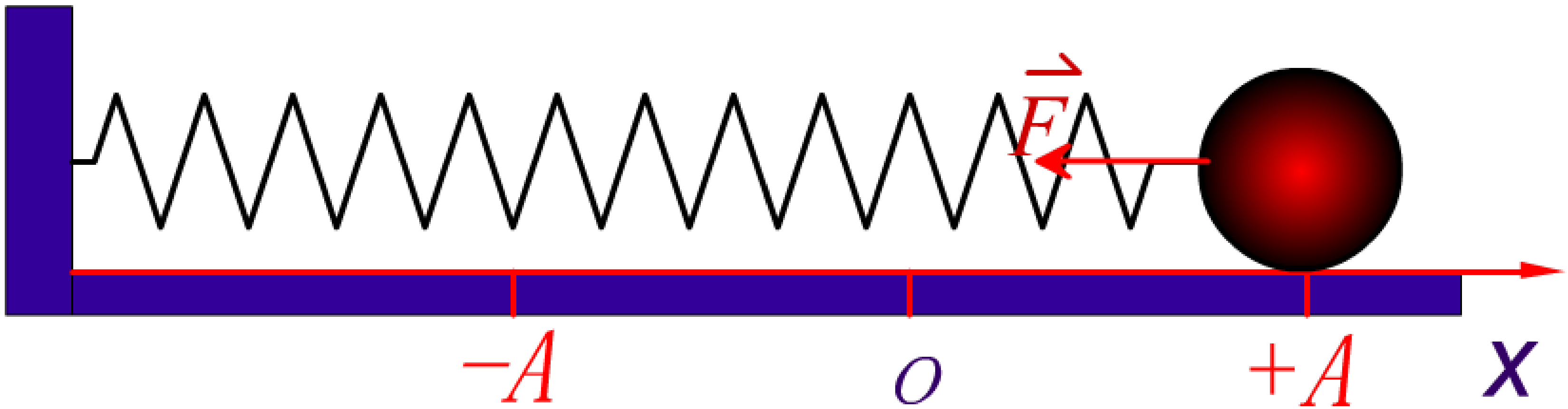
$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x,$$

令 $\frac{k}{m}=\omega^2$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$

弹簧振子

$F = -kx$



位移x之解可写为：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

或 $$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$$

简谐振动的运动学特征：物体的加速度与位移成正比而方向相反，物体的位移按余弦规律变化。

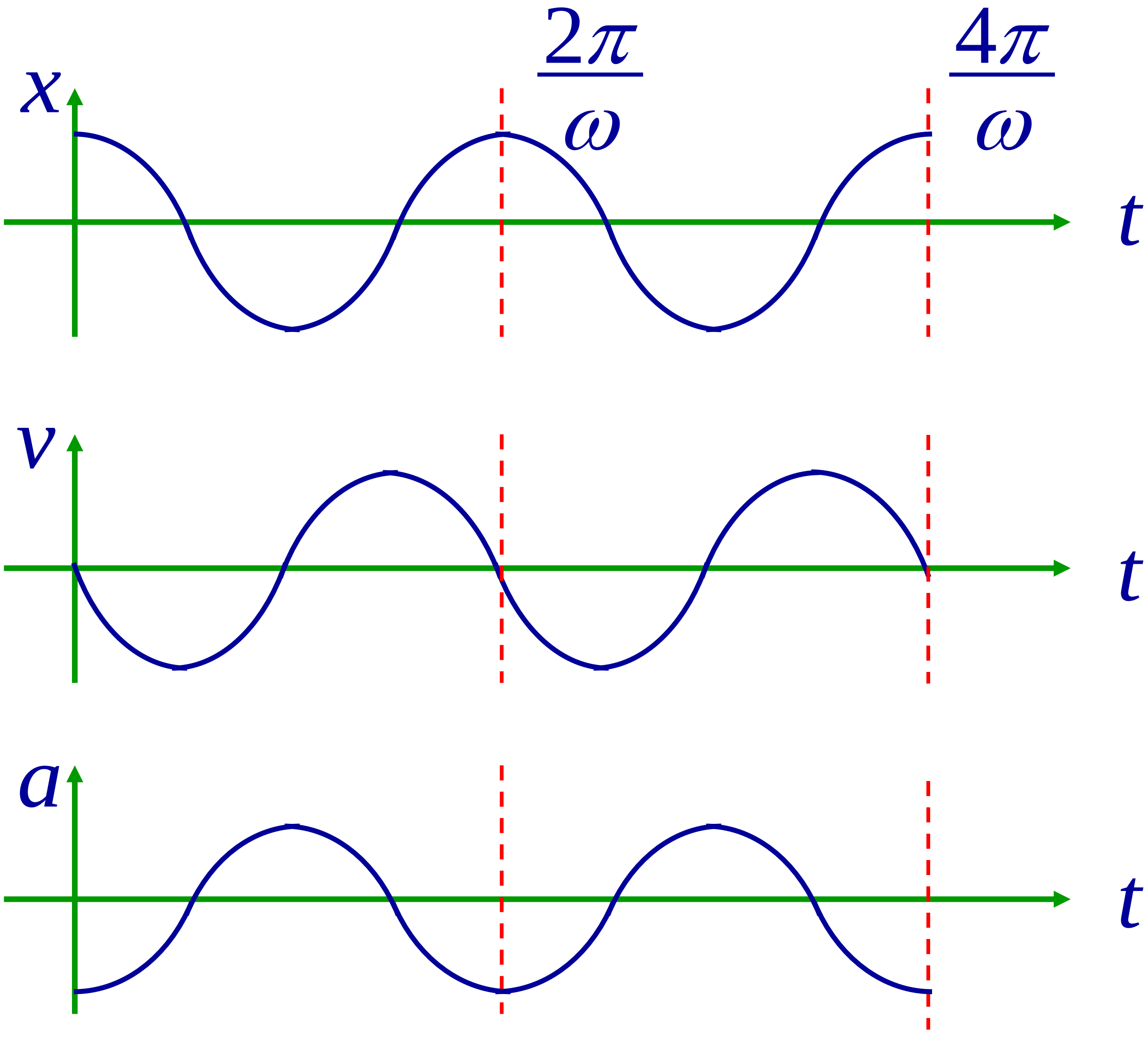
速度：

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

加速度：

$$a = \frac{\mathrm{d}^2\,x}{\mathrm{d}\,t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动中质点位移、速度、加速度与时间的关系：



振动质点的位移随时间的变化—振动曲线

2．简谐振动的振幅、周期、频率和相位

(1)振幅：物体离开平衡位置的最大位移的绝对值。

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$$ —— 由初始条件确定

(2)周期和频率

周期：物体作一次完全运动所经历的时间。

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=A\cos[\omega(T+t)+\varphi_0]$$

$$\Rightarrow\quad T=2\pi/\omega$$

频率：单位时间内物体所作完全运动的次数。

$$\nu=1/T=\omega/2\pi$$

角频率：物体在2π秒内所作的完全运动的次数。

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$$

对于弹簧振子，因有

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

因此：

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},\ \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

利用上述关系式，得谐振动表达式：

$$x = A\cos\left(2\pi t/T + \varphi_0\right)$$

$$x = A\cos\left(2\pi\nu t + \varphi_0\right)$$

(3)相位和初相

相位$(\omega t+\varphi_0)$：决定简谐运动状态的物理量。

初相位φ_0：$t=0$ 时的相位。

相位概念可用于比较两个谐振动之间在振动步调上的差异。

设有两个同频率的谐振动，表达式分别为：

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_{20})$$

二者的相位差为：

$$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_{20})-(\omega t+\varphi_{10})=\varphi_{20}-\varphi_{10}$$

讨论：$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{20}) - (\omega t + \varphi_{10}) = \varphi_{20} - \varphi_{10}$

(a)当$\Delta\varphi = 2k\pi$时，称两个振动为同相；

(b)当$\Delta\varphi = (2k+1)\pi$时，称两个振动为反相；

(c)当$\Delta\varphi > 0$时，称第二个振动超前第一个振动$\Delta\varphi$；

(d)当$\Delta\varphi < 0$时，称第二个振动落后第一个振动$\Delta\varphi$。

相位可以用来比较不同物理量变化的步调，对于简谐振动的位移、速度和加速度，存在：

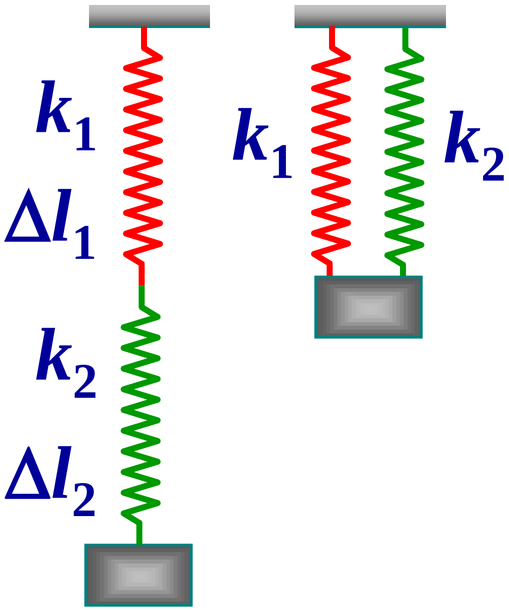
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

$$a = -a_m \cos(\omega t + \varphi_0) = a_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

速度的相位比位移的相位超前$\pi/2$，加速度的相位比位移的相位超前π。

例题：一质量为m的物体用两根弹簧竖直悬挂，各弹簧的劲度系数标明在图上，求图示两种情况下，系统沿竖直方向振动的固有频率。



解：串联时各弹簧受力相等。设等效劲度系数为k，总伸长Δl，则

$$k\Delta l = k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 = mg$$

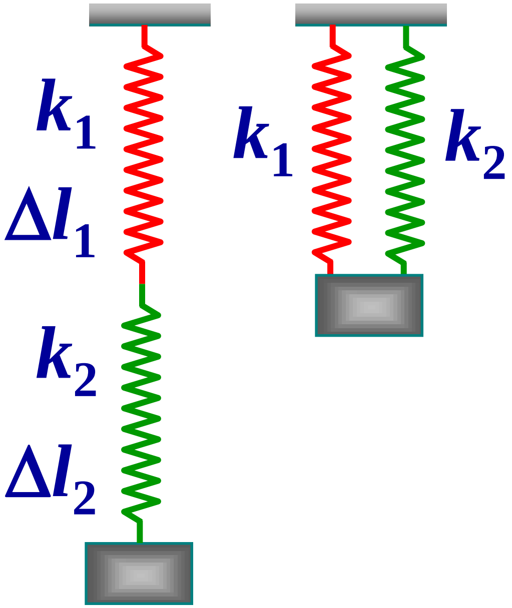
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} mg$$

即弹簧串联的等效劲度系数为

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$



所以，系统的固有频率为

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

并联时各弹簧受力伸长相等。设等效劲度系数为***k***，总伸长**Δ*l***，则

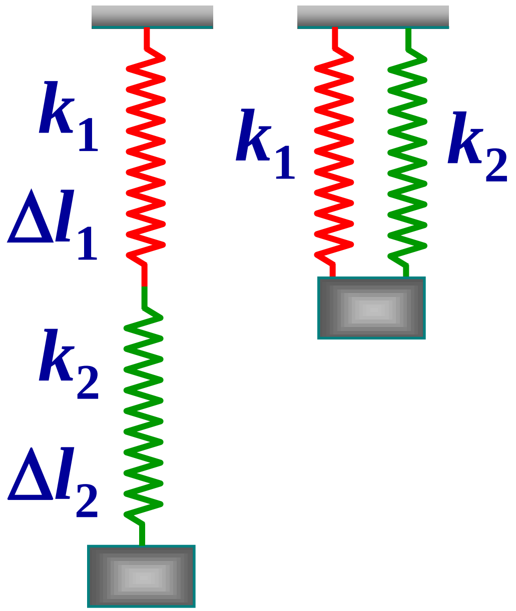
$$k\Delta l = k_1\Delta l_1 + k_2\Delta l_2 = mg$$

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$$

$$k = k_1 + k_2$$

所以，系统的固有频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



第七次：第六章：5、12、15、19

3. 振幅和初相的确定

根据初始条件：$t=0$时，$x=x_0$，$v=v_0$，得

$$x_0 = A\cos\varphi_0,\quad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

在$-\pi$到$+\pi$之间，通常φ_0存在两个值，可根据$v_0=-\omega A\sin\varphi_0$进行取舍。

4．简谐振动的能量

以水平弹簧振子为例讨论简谐振动系统的能量。

动能 $E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$

势能 $E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$

总机械能： $E = E_K + E_P$

$$E = E_K + E_P$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2$$

考虑到$\omega^2 = k/m$，系统总能量为$E = kA^2/2$，表明简谐振动的机械能守恒。

能量平均值

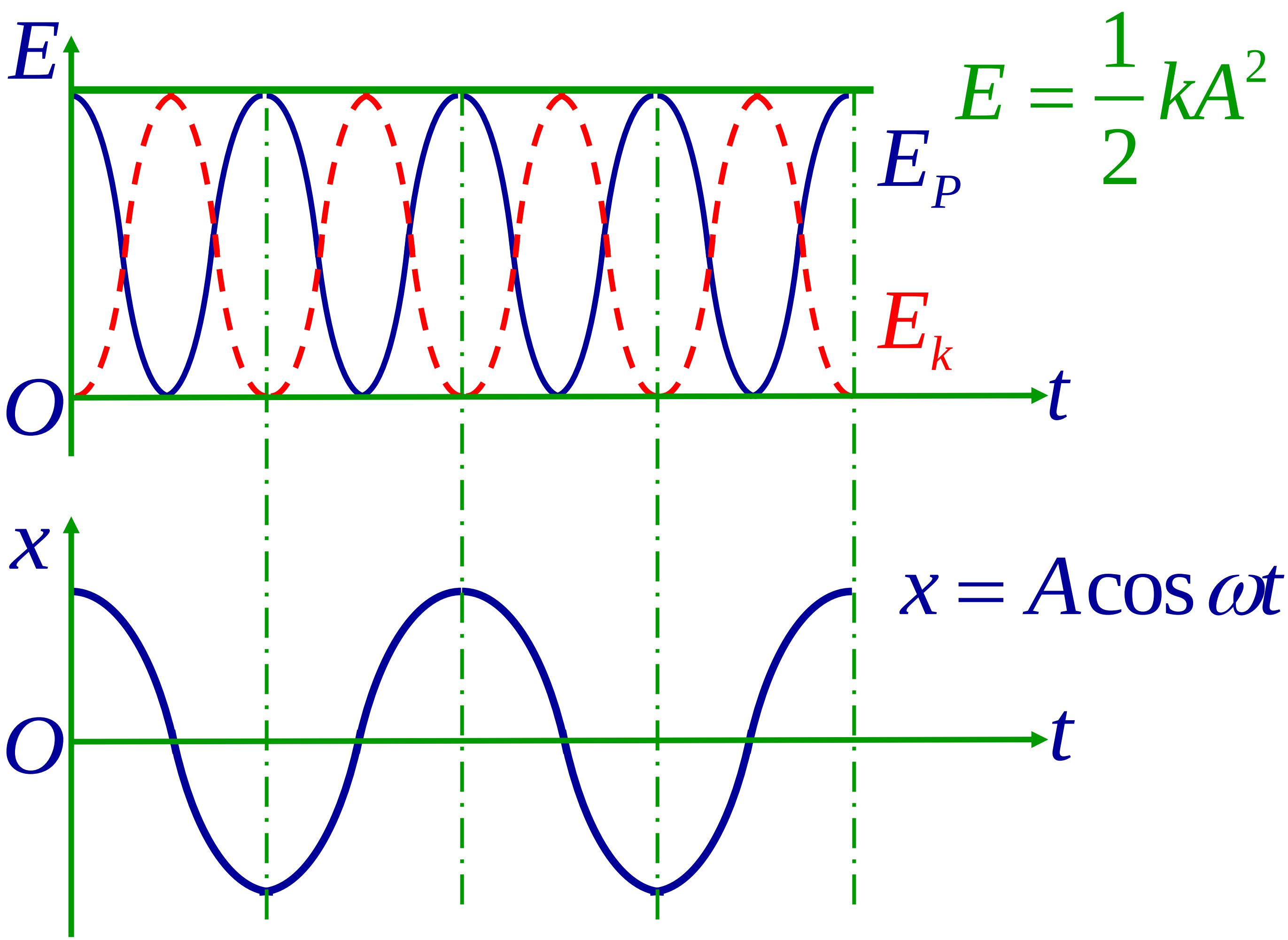
$$\overline{E}_K = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

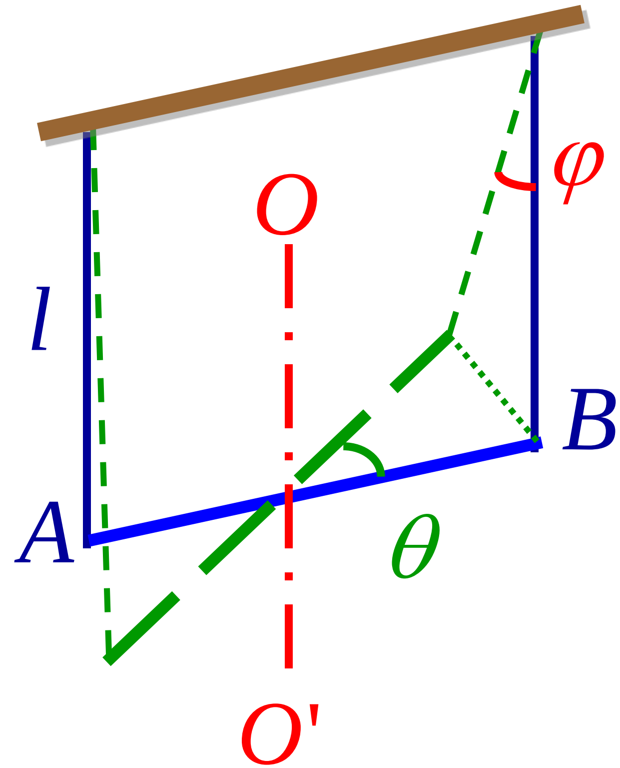
$$\overline{E}_K = \overline{E}_P = E/2$$

上述结果对任一谐振系统均成立。

谐振子的动能、势能和总能量随时间的变化曲线：



例题：一匀质细杆AB的两端，用长度都为l 且不计质量的细绳悬挂起来，当棒以微小角度绕中心轴OO'扭动时，求证其运动周期为$2\pi\sqrt{l/3g}$。



解：设棒长为$2R$，质量m。棒扭动时，其质心沿OO'上下运动。因扭动角度φ很小，可近似认为细棒在水平面内转动。扭动角度为φ时，细棒在水平面内转动角度为θ，则有

$$\varphi l = R\theta$$

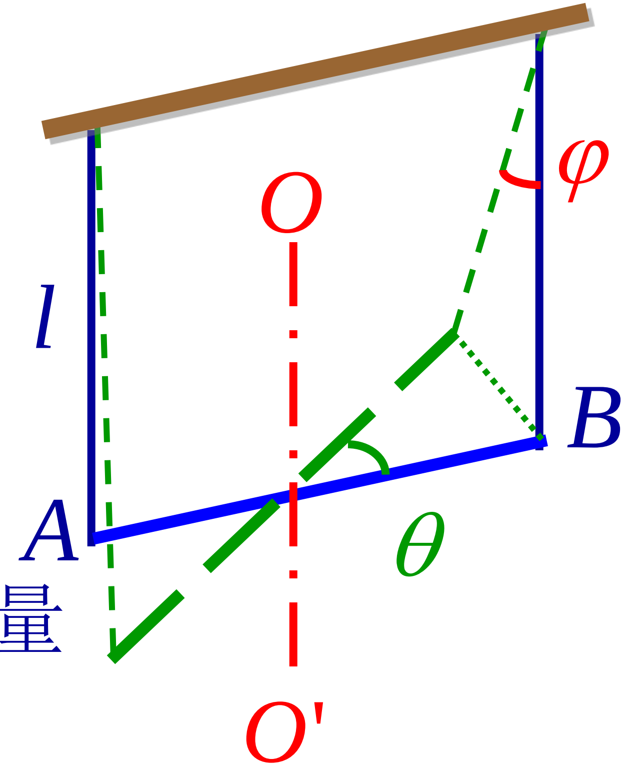
$$E_P = mgh_C$$

$$E_K = \frac{1}{2}J\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

h_c是棒的质心相对棒平衡位置的高度

$$h_c = l(1-\cos\varphi)$$

$$J = m(2R)^2/12 = mR^2/3$$



系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mR^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgl(1-\cos\varphi) = 常量$$

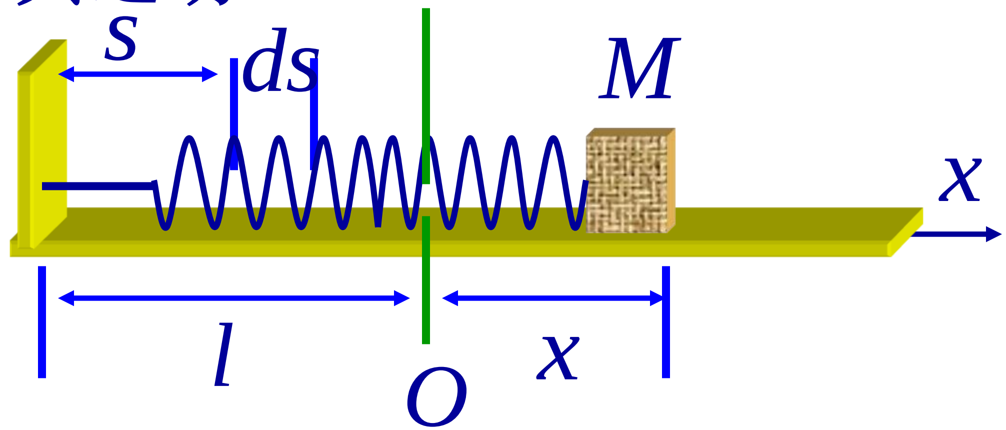
上式两端对时间求导，并利用关系$\boldsymbol{\sin\varphi \approx \varphi = R\theta/l}$。

$$\frac{1}{3}mR^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + mgl \cdot \frac{R}{l} \cdot \theta \cdot \frac{R}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{3g}{l}\theta = -\omega^2\theta \qquad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/3g}$$

例：劲度系数为k、原长为l、质量为m的均匀弹簧，一端固定，另一端系一质量为M的物体，在光滑水平面内作直线运动。求解其运动。

解：平衡时O点为坐标原点。物体运动到x处时，弹簧固定端位移为0，端点M位移为x。



物体位于x时，弹簧元ds的质量dm = mds/l，位移为sx/l，速度为$(s/l)(dx/dt)$，弹簧、物体的动能分别为：

$$E_{K1}=\int_0^l \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}\mathrm{d}s\right)\left(\frac{s}{l}v\right)^2=\frac{1}{6}mv^2 \qquad E_{K2}=\frac{1}{2}Mv^2$$

系统弹性势能为 $E_P = kx^2/2$

系统机械能守恒，有$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{6}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$常数

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(M+\frac{m}{3})v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常数}$$

将上式对时间求导，整理后可得

$$(M+\frac{m}{3})\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{k}{M+m/3}}_{\omega^2}x = 0$$

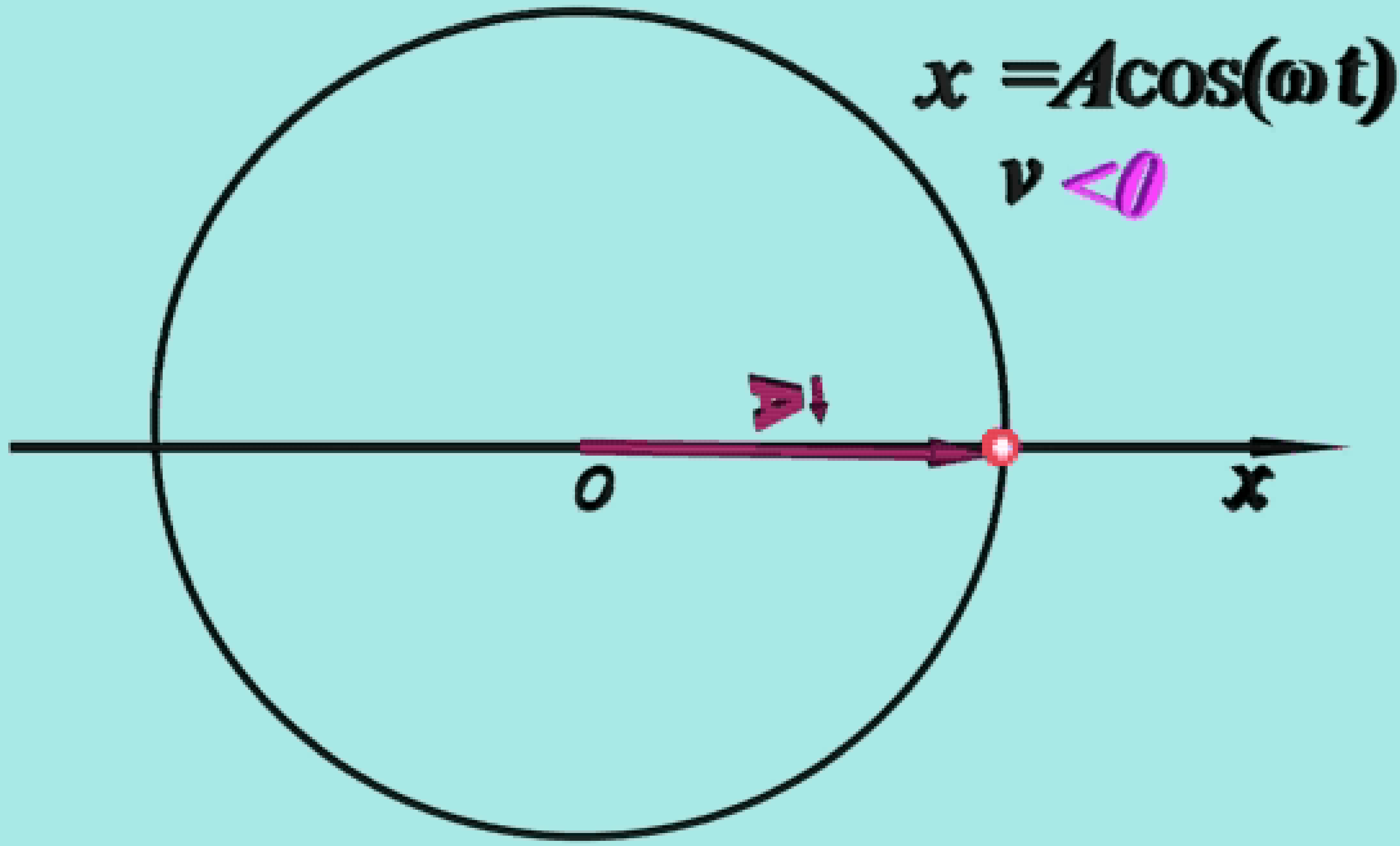
因此，弹簧质量小于物体质量，且系统作微运动时，弹簧振子的运动可视为简谐运动。

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{(M+m/3)/k}$$ 解毕。

5．简谐振动的矢量图示法

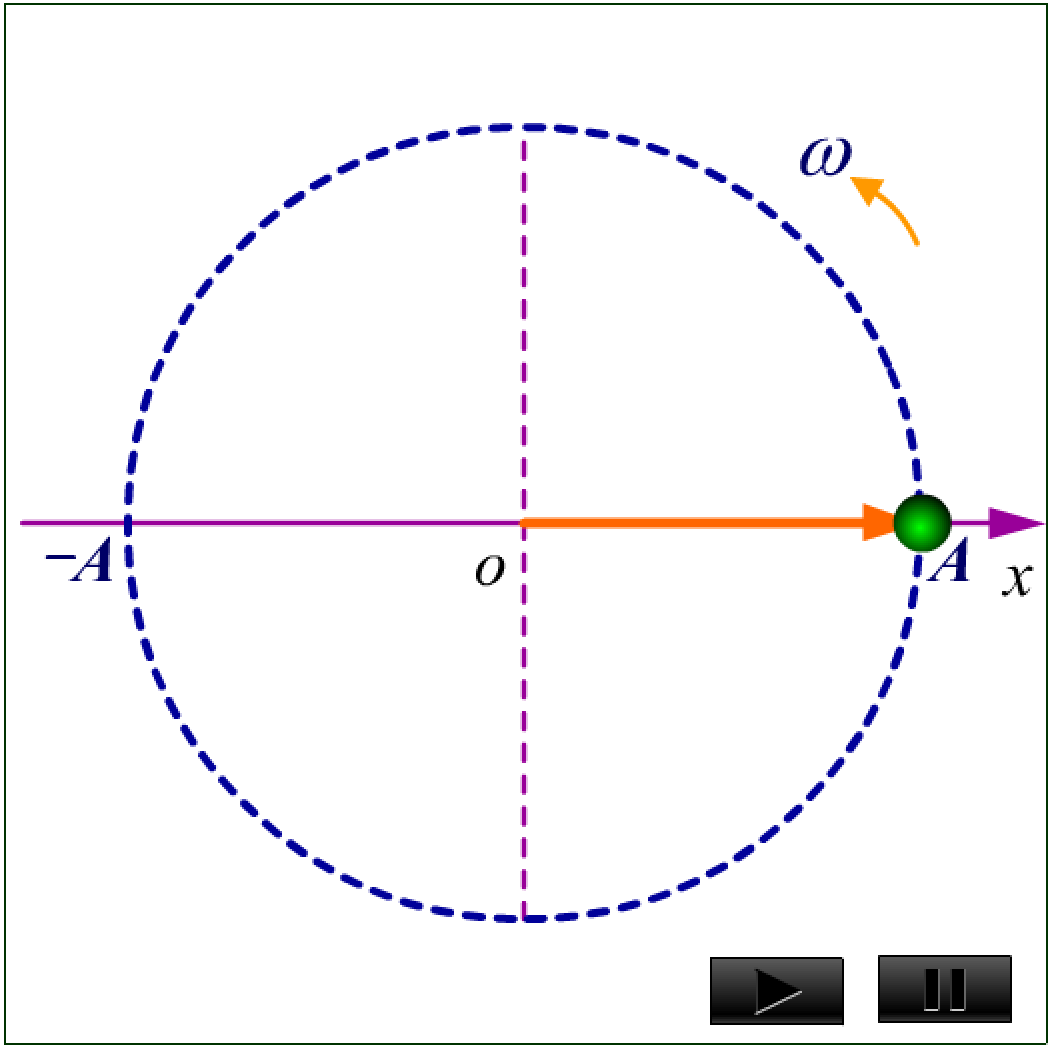
旋转矢量：一长度等于振幅A的矢量$\vec{A}$在纸平面内绕O点沿逆时针方向旋转，其角速度与谐振动的角频率相等，这个矢量称为旋转矢量。

采用旋转矢量法，可直观地领会简谐振动表达式中各个物理量的意义。

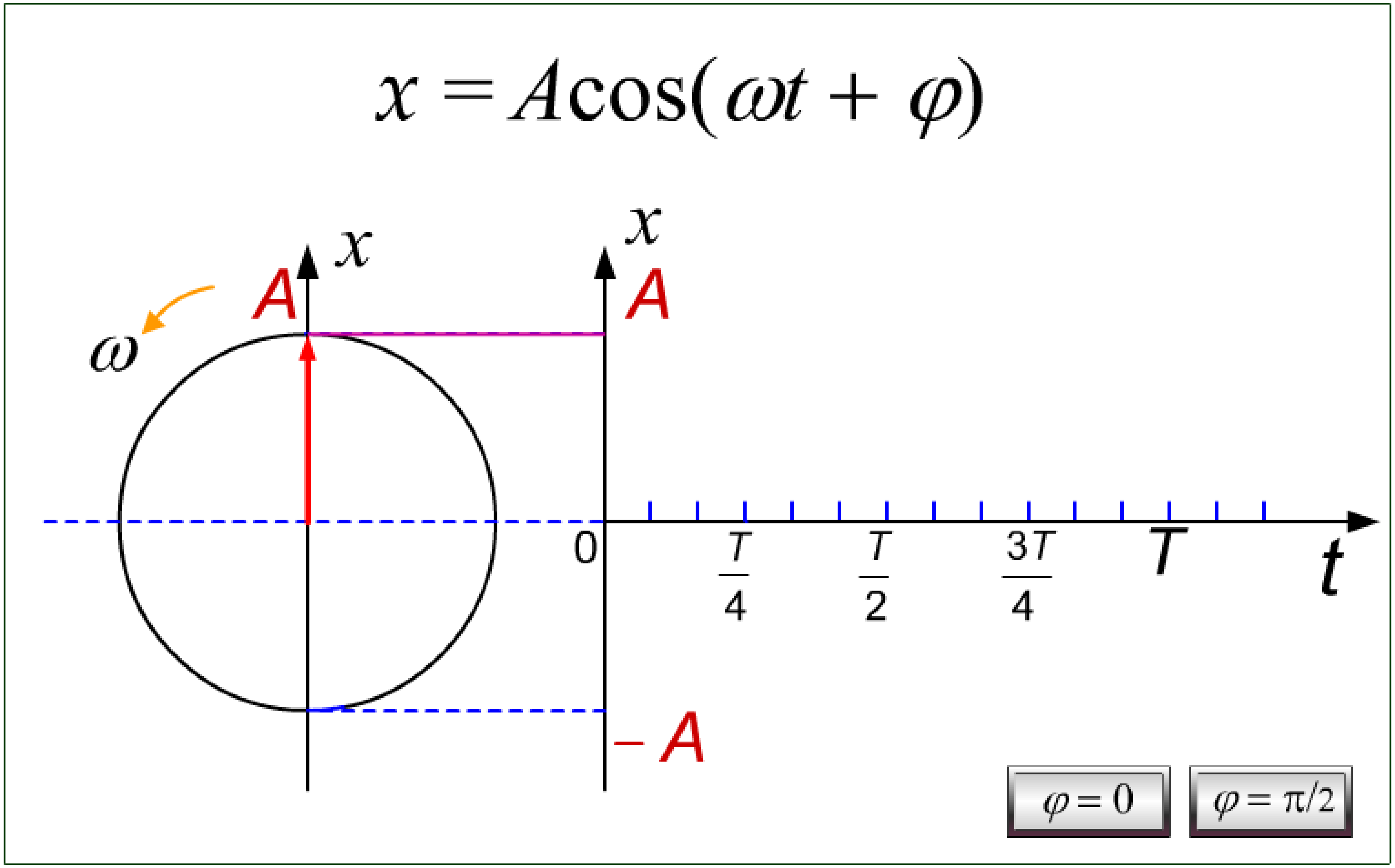

x =Acos(ωt)
v <0
O
x

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点的运动为简谐运动。



用旋转矢量图画简谐运动的*x–t*图



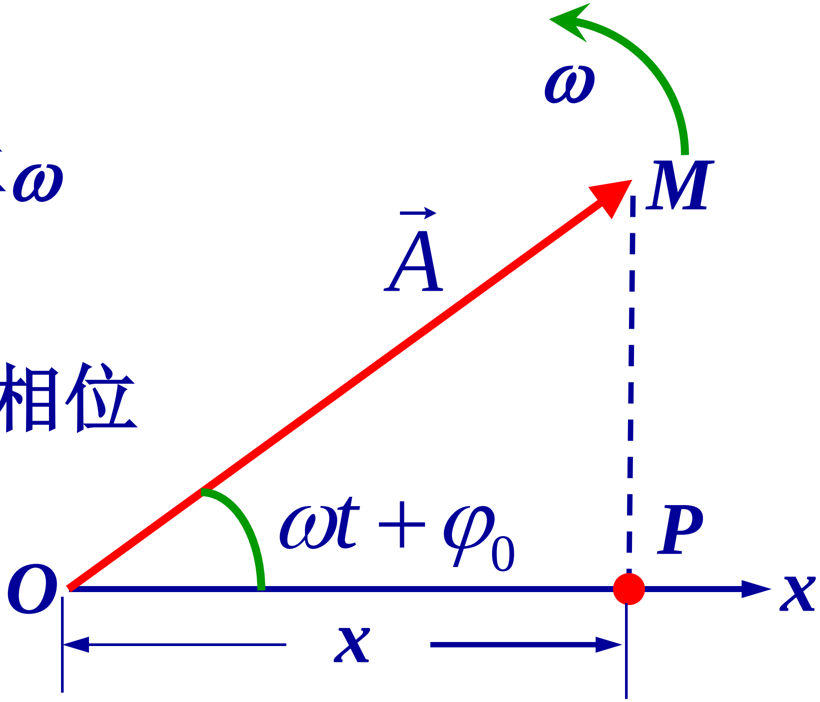
$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

$\vec{A}$的长度：振幅A

$\vec{A}$旋转的角速度：振动圆频率ω

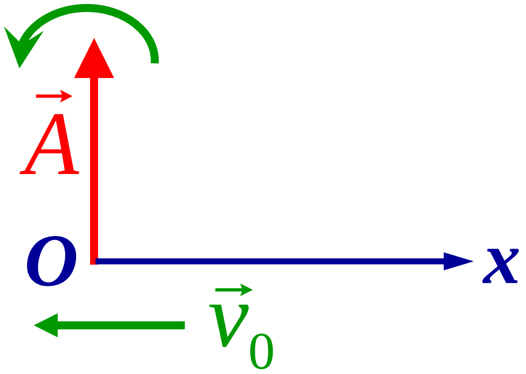
$\vec{A}$旋转的方向：逆时针方向

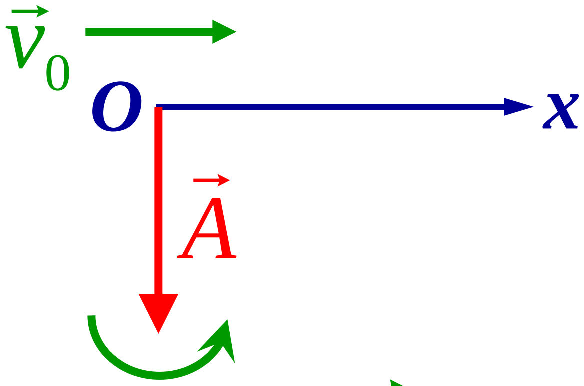
$\vec{A}$与参考方向x 的夹角：振动相位



M 点在 x 轴上投影(P点)的运动规律：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

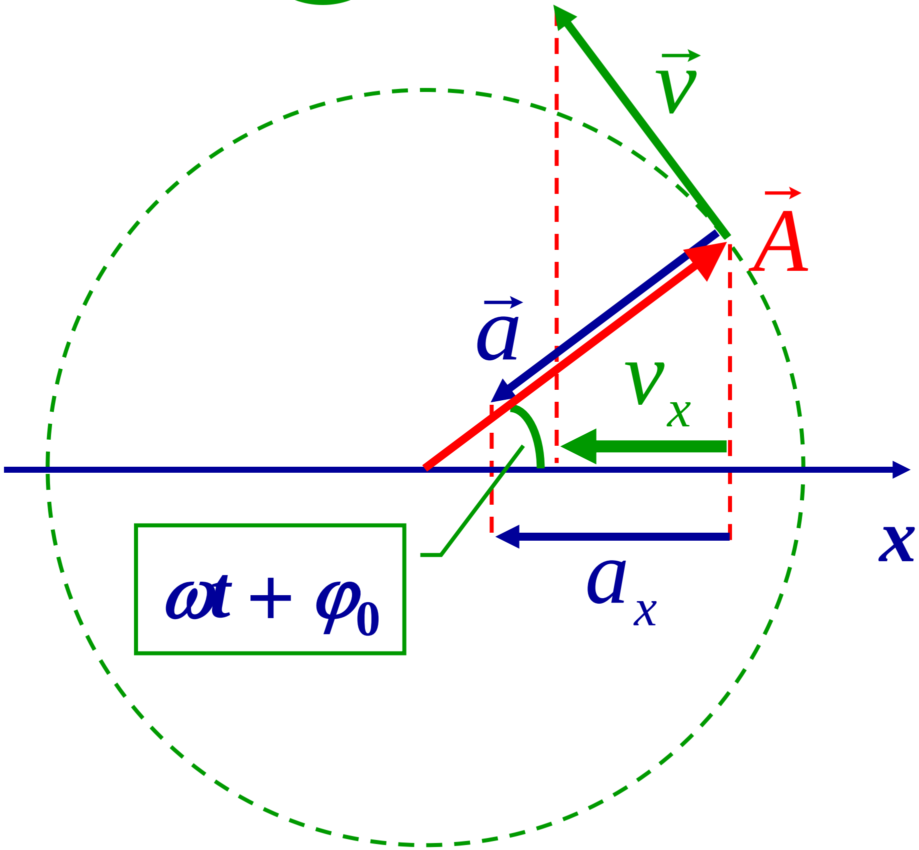




$\vec{v}$，$\vec{a}$ 沿x 轴的投影为简谐运动的速度、加速度。

M 点：$v_m = \omega A$

$$a_m = \omega^2 A$$



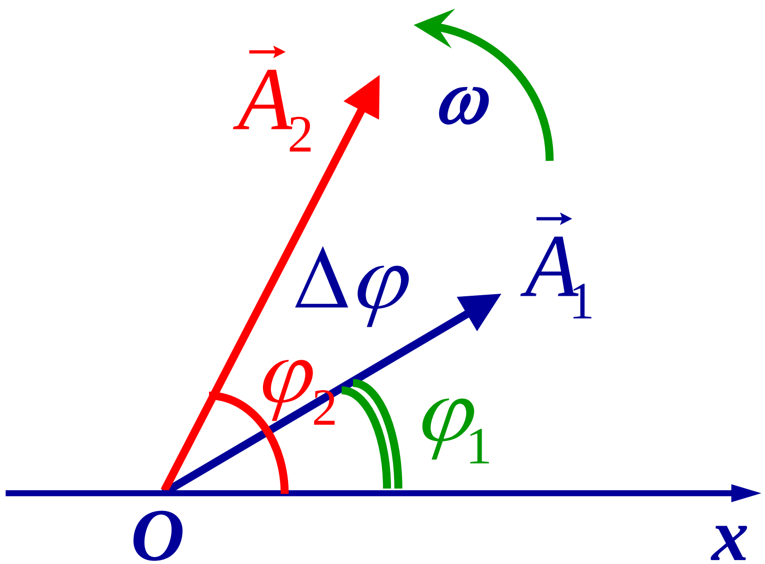
两个同频率的简谐运动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

相位之差为：$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$

采用旋转矢量直观表示为：



例：两质点沿 x 轴作同方向同振幅的谐振动，其周期均为5s，当$t = 0$时，质点1在 $\sqrt{2}A/2$处向 x 轴负方向运动，而质点2在$-A$处。试用旋转矢量法求这两个谐振动的初相差，以及两个质点第一次经过平衡位置的时刻。

解 两质点的谐振动方程分别为

$$x_1 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_2)$$

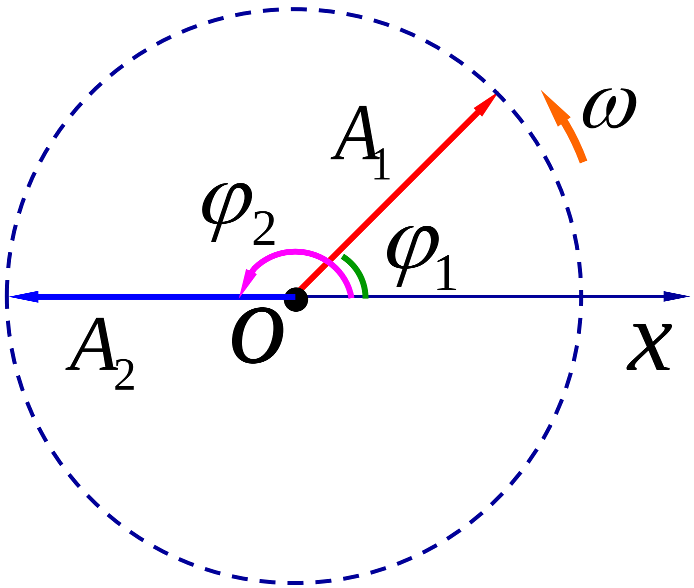
质点1在$t=0$时，$x_{10}=\sqrt{2}A/2$

向x轴负方向运动，其旋转矢量A_1如图所示。

由图得初相角 $\varphi_1=\pi/4$

同理，旋转矢量A_2如图所示。

初相角 $\varphi_2=\pi$



两质点的初相差

$$\varphi_2-\varphi_1=\pi-\pi/4=3\pi/4$$

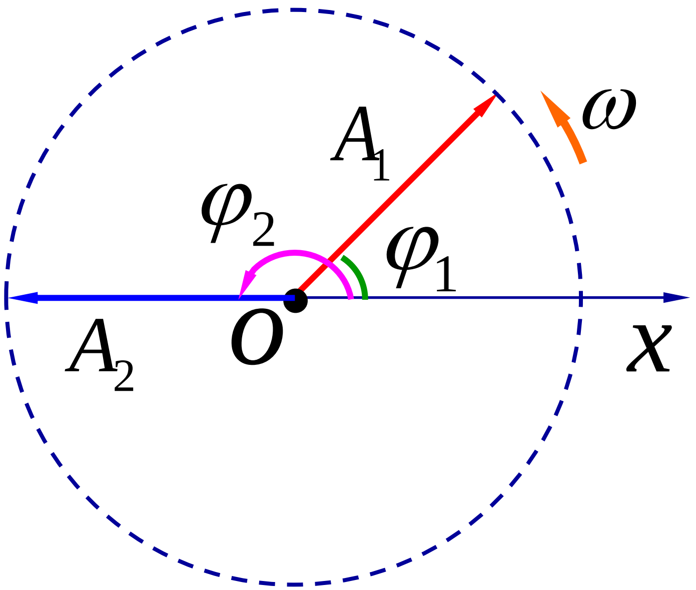
质点2的相位比质点1的相位超前 $3\pi/4$ 。

由图得，质点1第一次经过平衡位置的时刻为

$$t_1 = T/8 = 0.625\text{s}$$

质点2第一次经过平衡位置的时刻为

$$t_2 = T/4 = 1.25\text{s}$$



例：一物体沿x轴作简谐振动，振幅$A = 0.12\text{m}$，周期T＝2s。当$t = 0$时，物体的位移$x = 0.06\text{m}$，且向x轴正向运动。求：(1)简谐振动表达式；(2)$t = T/4$时物体的位置、速度和加速度；(3)物体从$x = -0.06\text{m}$向x轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解： (1)取平衡位置为坐标原点，谐振动方程写为：

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中$A = 0.12\text{m}$，$T = 2\text{s}$，$\omega = 2\pi/T = \pi(\text{s}^{-1})$

初始条件：$t = 0$，$x_0 = 0.06\text{m}$，可得

$$0.12\cos\phi_0 = 0.06 \rightarrow \phi_0 = \pm\pi/3$$

据初始条件$v_0 = -\omega A\sin\phi_0 > 0$，得$\phi_0 = -\pi/3$

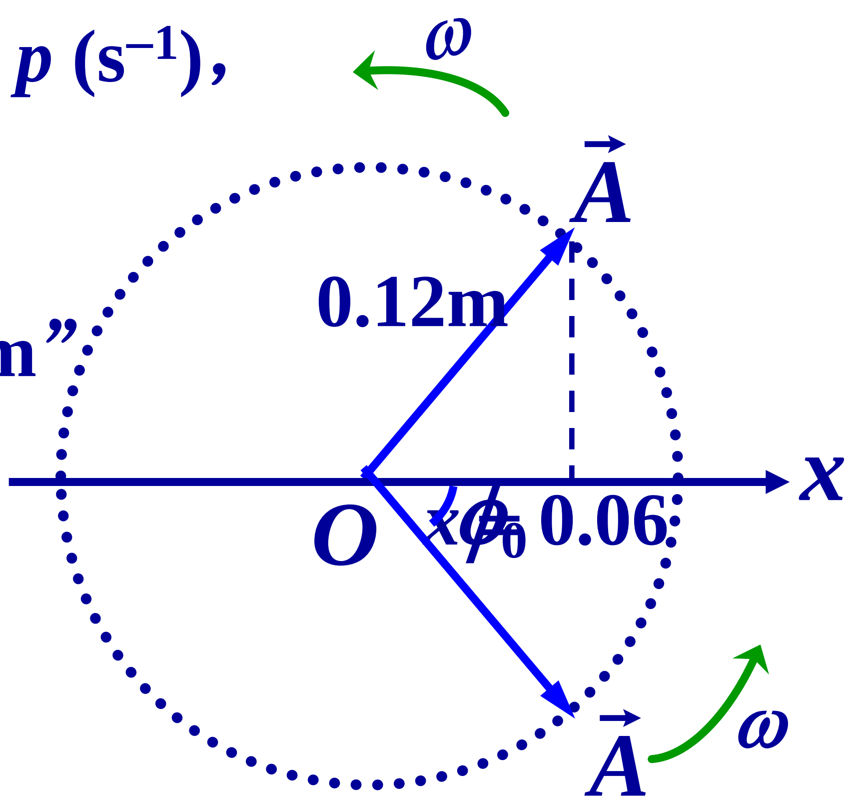
$$x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3)\ \ (\text{m})$$

(1)简谐振动表达式： $x = A\cos(\omega t + \phi_0)$

若采用旋转矢量法，比较直观方便！

已知：$A = 0.12\text{m}$，$\omega = 2p / \text{T} = p\ (\text{s}^{-1})$，

$\phi_0 = ?$



“当$t = 0$时物体位移$x = +0.06\text{m}$”

“且向x轴正向运动”

$$\therefore\ \phi_0 = -\frac{\pi}{3},\quad \text{or}\ \frac{5\pi}{3}$$

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\ \text{m}$$

(2) 由(1)求得的简谐振动表达式得：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi\sin(\pi t - \pi/3) \quad (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \pi/3) \quad (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

在$t = T/4 = 0.5\mathrm{s}$时，从前面所列的表达式可得

$$x = 0.12\cos(\pi\times 0.5 - \pi/3) = 0.104\,\mathrm{m}$$

$$v = -0.12\times\pi\sin(\pi\times 0.5 - \pi/3) = -0.18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a = -0.12\times\pi^2\cos(\pi\times 0.5 - \pi/3) = -1.03\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(3) 当$x=-0.06$m时，该时刻设为t_1，得

$$\cos(\pi t_1-\pi/3)=-1/2$$

$$\pi t_1-\pi/3=2\pi/3,\ 4\pi/3$$

因该时刻速度为负，应舍去$4\pi/3$，$\rightarrow t_1=1$s。

设物体在t_2时刻第一次回到平衡位置，相位是$3\pi/2$。

$$\pi t_2-\pi/3=3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad t_2=1.83\text{s}$$

因此从$x=-0.06$m处第一次回到平衡位置的时间：

$$\Delta t=t_2-t_1=0.83\text{s}$$

另解：从t_1时刻到t_2时刻所对应的相差为：

$$\Delta\phi=3\pi/2-2\pi/3=5\pi/6$$

$$\Rightarrow \Delta t=\Delta\phi/\omega=0.83\text{s}$$

(3)物体从$x = -0.06$m向 x轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

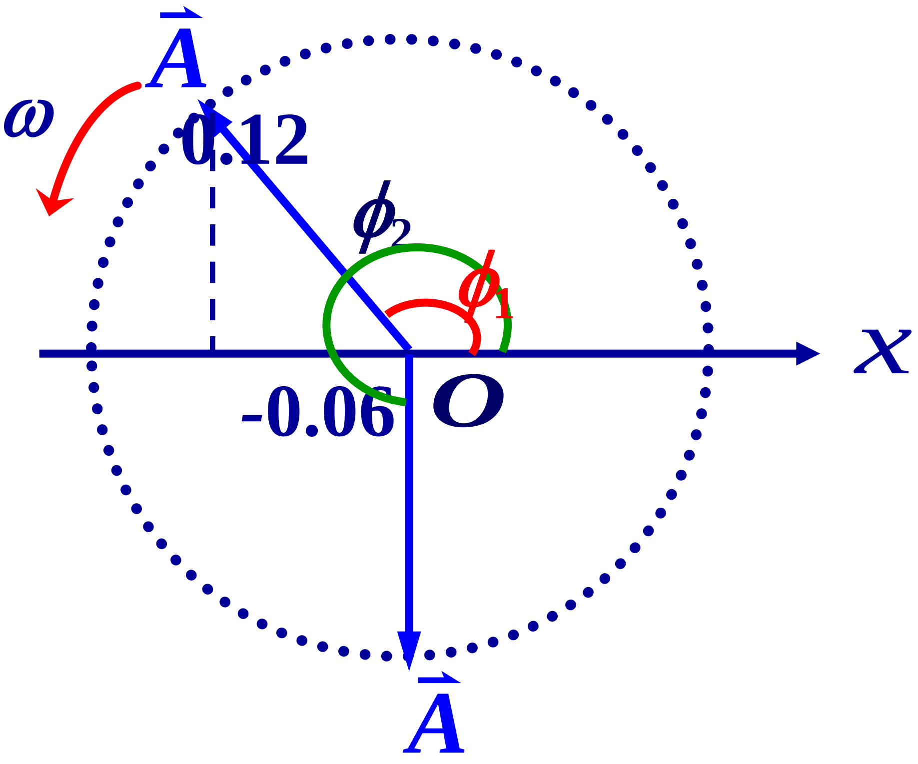
若采用旋转矢量法，比较直观方便！

t_1时刻： $\phi_1 = \dfrac{2\pi}{3}$,

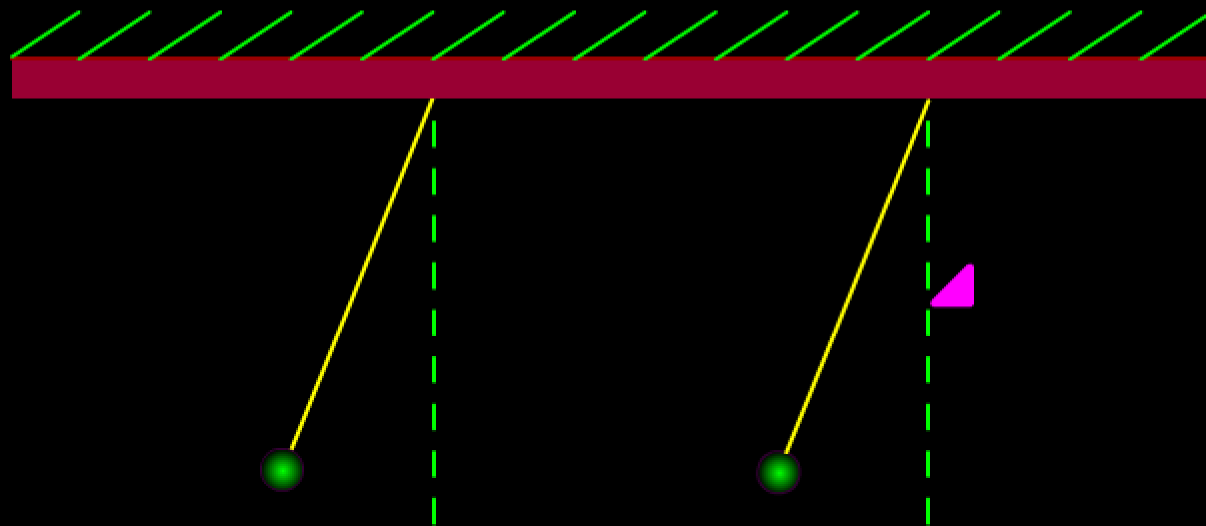
t_2时刻： $\phi_2 = \dfrac{3\pi}{2}$,

$$\therefore \Delta\phi = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\phi}{\omega} = 0.83\text{s}.$$



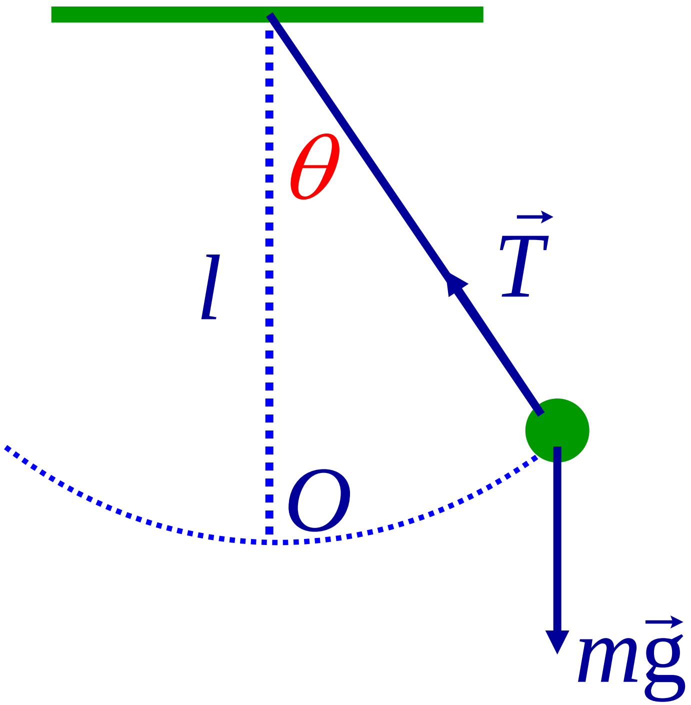
单摆



当摆动幅度较小时,
单摆可视为简谐振动

6．几种常见的简谐振动

(1) 单摆



重物所受合外力矩：

$$M = -mgl\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

θ很小时(小于5°)，可取

$$\sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad M = -mgl\theta$$

据转动定律，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{M}{J} = -\frac{mgl\theta}{ml^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

令$\omega^2 = g/l$，有

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$$

转角θ的表达式可写为：

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi_0)$$

角振幅θ_m和初相 φ_0由初始条件求得。

单摆周期T与角振幅θ_m的关系为

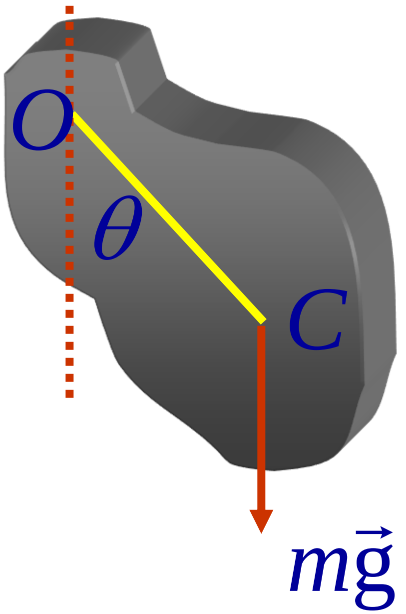
$$T=T_0\left(1+\frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2}+\frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2}+\cdots\right)$$

T_0为θ_m很小时单摆的周期。

根据上述周期的级数公式，可以将周期计算到所要求的任何精度。

(2) 复摆

一个可绕固定轴摆动的刚体称为复摆。



刚体的质心为*C*，对过*O*点的转轴的转动惯量为*J*，*O*、*C*两点间距离的距离为*h*。

据转动定律，得 $$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgh\sin\theta$$

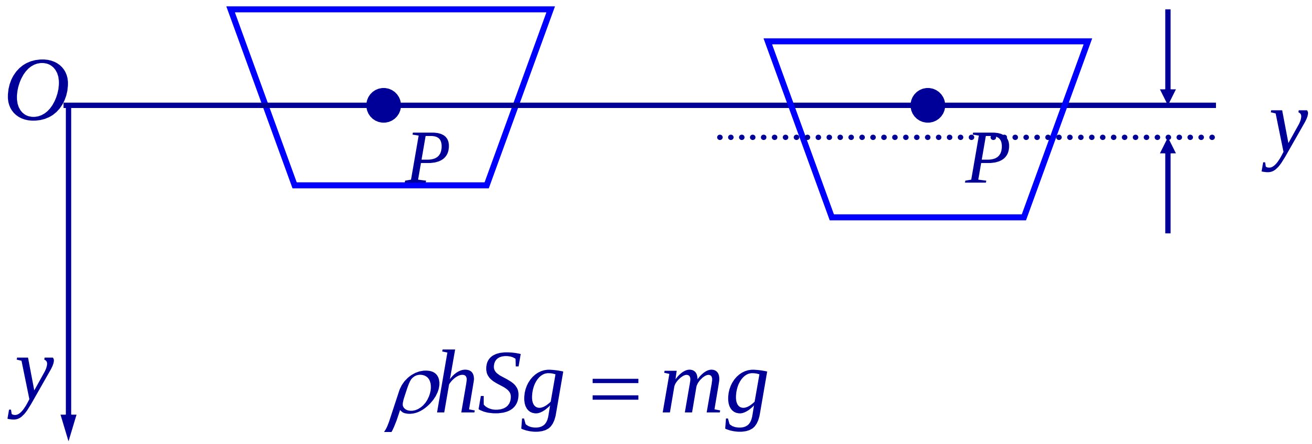
若θ角度较小时 ➡ $$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mgh\theta$$

令 $$\omega^2=\frac{mgh}{J}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$$

例：一质量为**m**的平底船，其平均水平截面积为**S**，吃水深度为**h**，如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期。

解：船静止时浮力与重力平衡，



$$\rho hSg = mg$$

船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为*y*轴，船的位移用*y*表示。

船的位移为y时船所受合力为：

$$f=-(h+y)\rho Sg+mg=-y\rho Sg$$

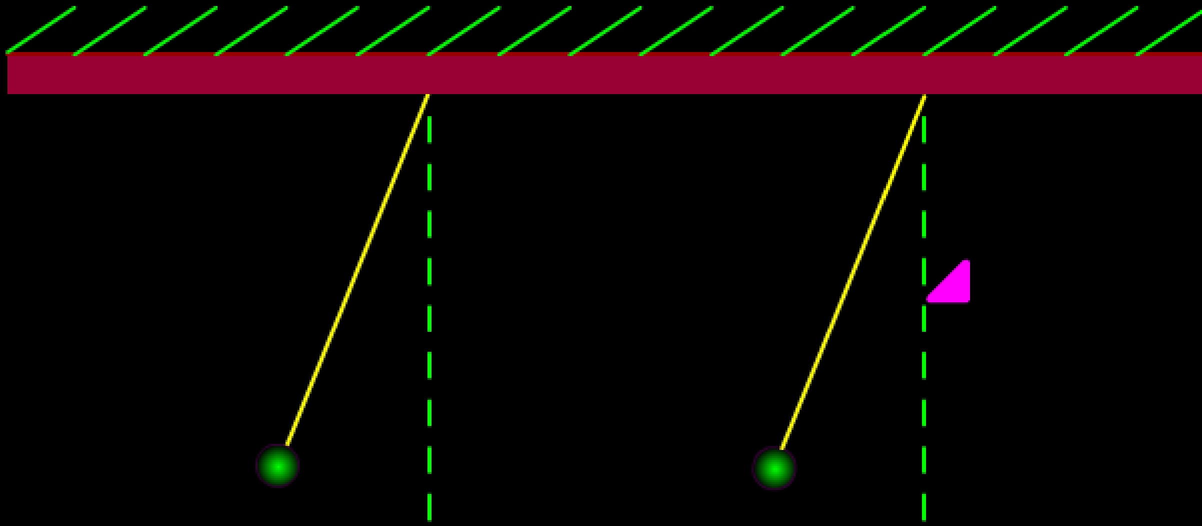
船在竖直方向作简谐振动，其角频率和周期为：

$$\omega=\sqrt{\frac{\rho Sg}{m}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

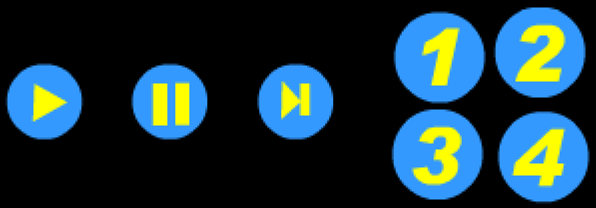
因 $m=\rho Sh,$

得： $$T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

单摆



当摆动幅度较小时，
单摆可视为简谐振动



本节关键词

- 简谐振动 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$
- 其运动学方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$
- 其动力学特征 $F = -kx$
- 简谐振动的特征量（振幅，相位，角频率，频率，周期……）
- 简谐振动的<u>旋转矢量</u>表示方法

§6-2　谐振动的合成

1.同方向同频率简谐振动的合成

设一质点同时参与沿同一方向(x 轴)的两个独立的同频率的简谐振动，两个振动位移为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

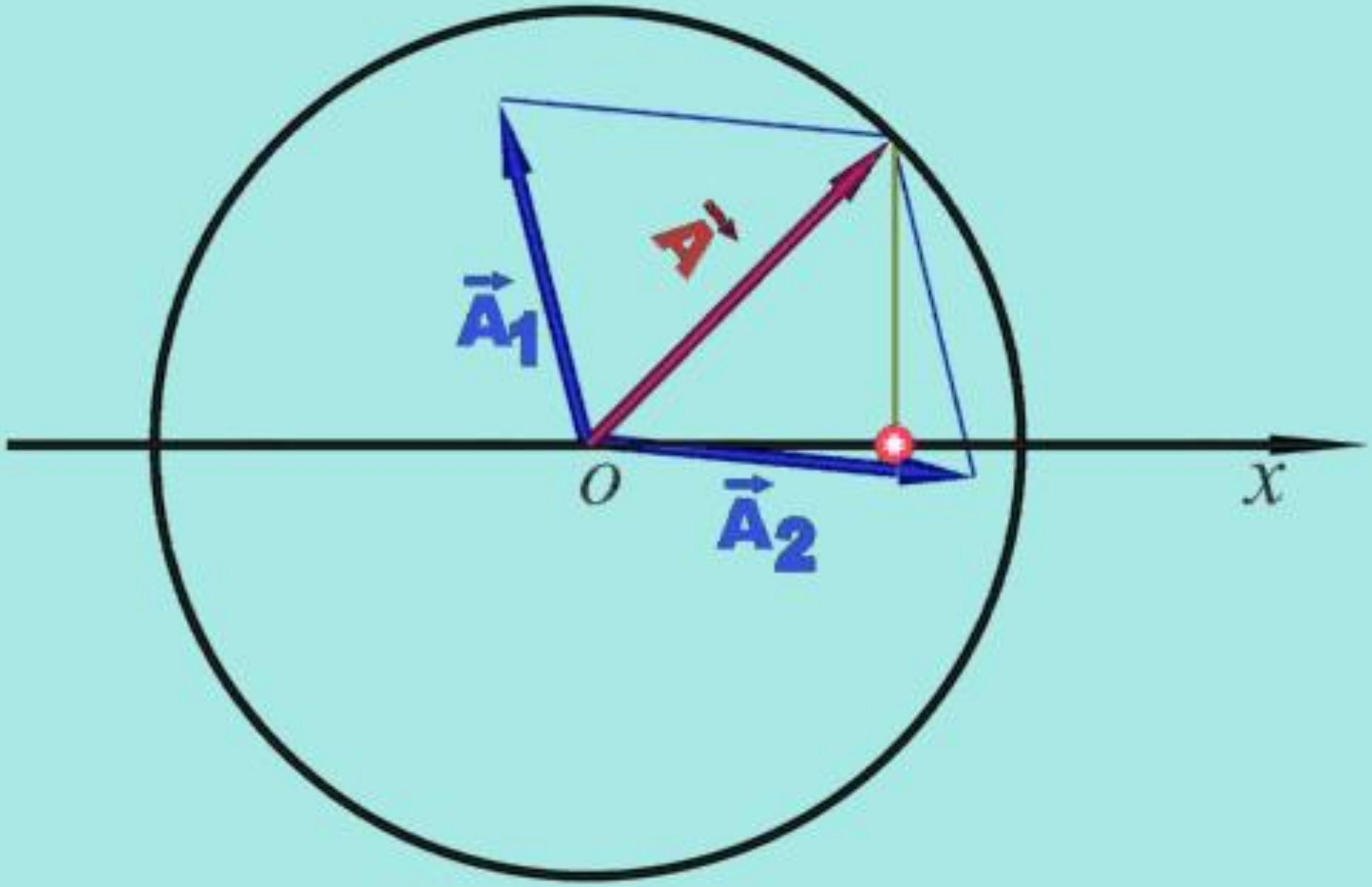
合位移：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{A_1 \sin\phi_{10} + A_2 \sin\phi_{20}}{A_1 \cos\phi_{10} + A_2 \cos\phi_{20}}$$

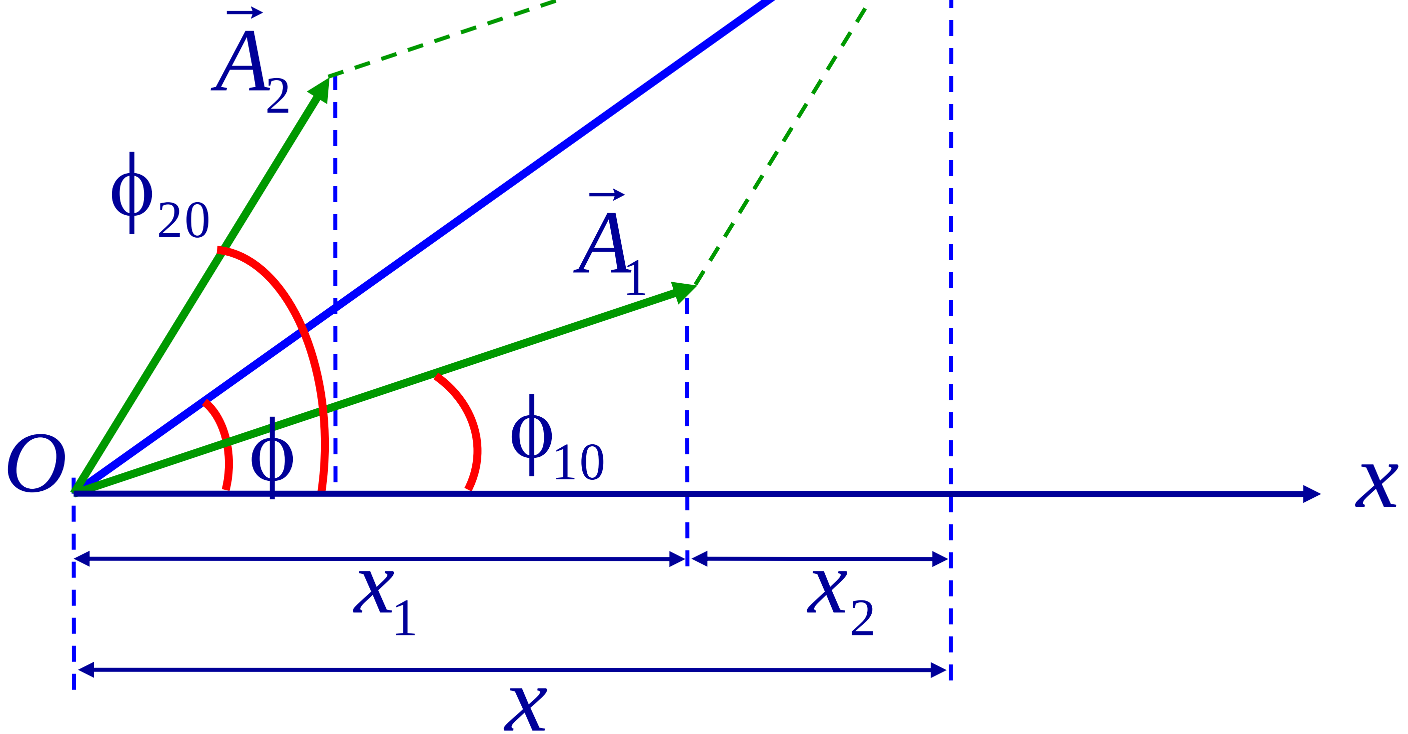
合振动仍是简谐振动，其方向和频率与原来相同。



$\vec{A}_1$
$\vec{A}$
O
$\vec{A}_2$
x

旋转矢量图示法

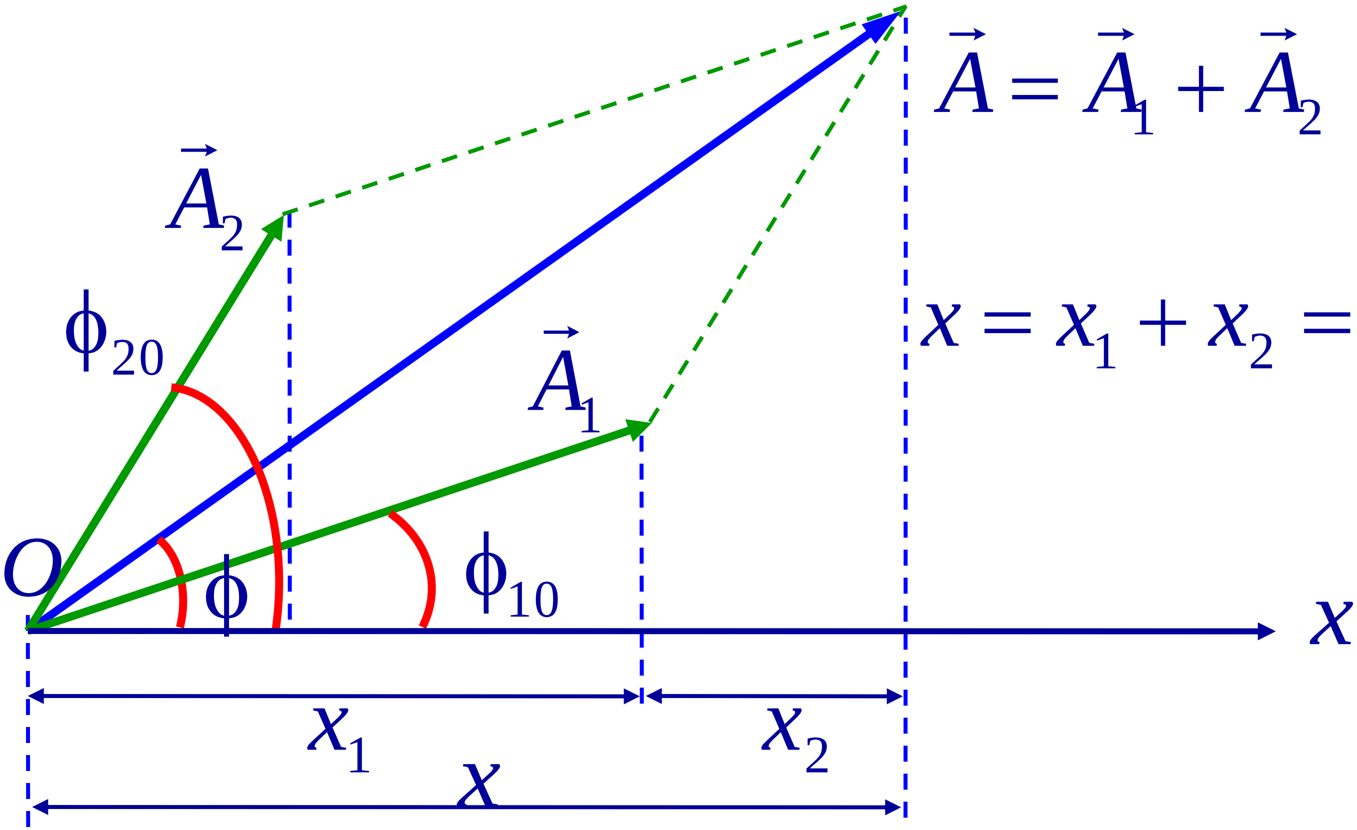
$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$



$\vec{A}$ 矢量沿x 轴之投影表征了合运动的规律。

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi_0)$$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})}$$

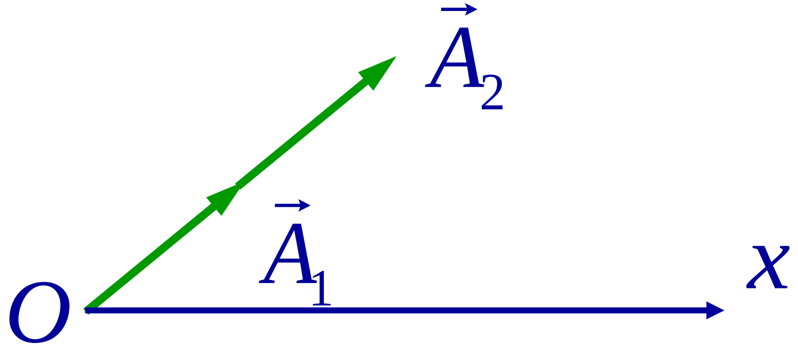
$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{A_1\sin\phi_{10} + A_2\sin\phi_{20}}{A_1\cos\phi_{10} + A_2\cos\phi_{20}}$$

讨论：

(1)当$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} = 2k\pi$ (k 取整数)，$\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = 1$，有

$$A = A_1 + A_2$$

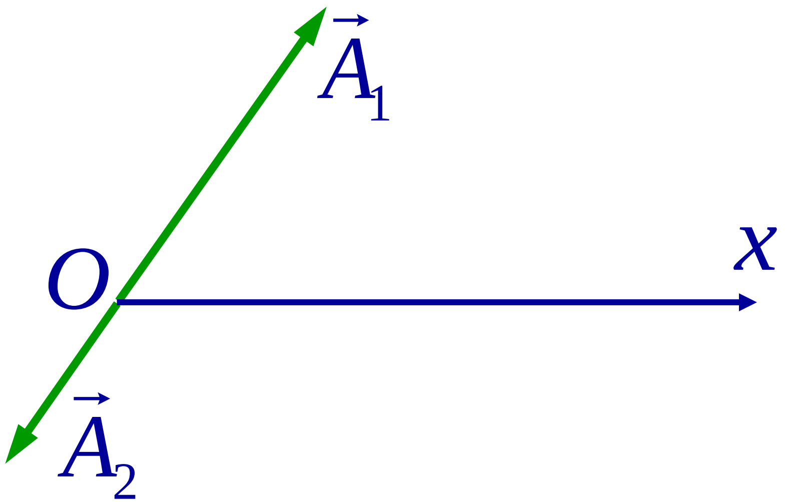
同相迭加，合振幅最大。



(2)当$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} = (2k+1)\pi$ (k 取整数)，$\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = -1$，有

$$A = \left| A_1 - A_2 \right|$$

反相迭加，合振幅最小。当$A_1 = A_2$时，$A = 0$。



(3)通常情况下，合振幅介于$A_1 + A_2$和$|A_1 - A_2|$之间。

例：N个同方向、同频率的简谐振动，它们的振幅相等，初相分别为0，α，2α，…，依次差一个恒量α，振动表达式可写成

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \alpha)$$

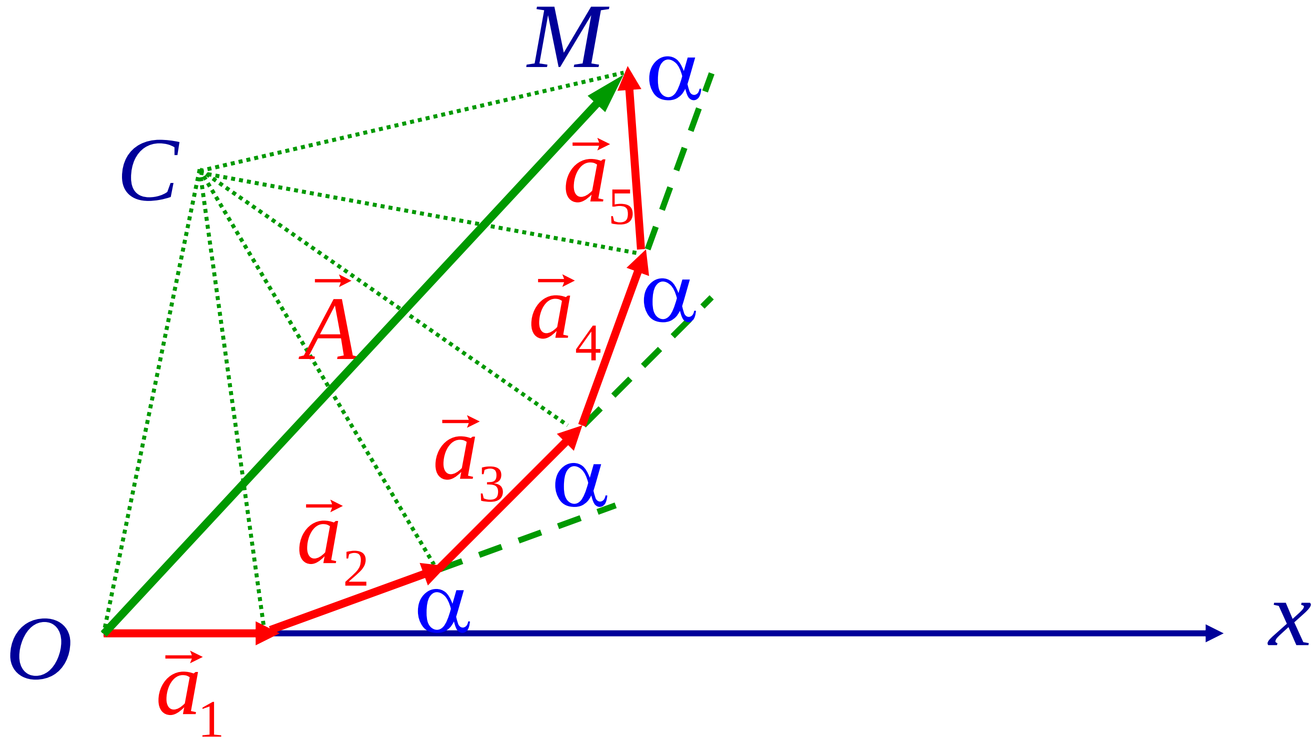
$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\alpha)$$

$$x_N = a\cos[\omega t + (N-1)\alpha]$$

求它们的合振动的振幅和初相。

解：采用旋转矢量法可使问题得到简化，从而避开烦琐的三角函数运算。

根据矢量合成法则，N个简谐振动对应的旋转矢量的合成如下图所示：



因各个振动的振幅相同且相差依次恒为α，上图中各个矢量的起点和终点都在以C为圆心的圆周上，根据简单的几何关系，可得

$$\angle OCM = N\alpha$$

在三角形$\Delta\angle OCM$中，OM的长度就是和振动位移矢量的位移，角度$\angle MOX$就是合振动的初相，据此得

$$A = 2\overline{OC}\sin\frac{N\alpha}{2}$$

因为 $a = 2\overline{OC}\sin\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $A = a\sin\frac{N\alpha}{2}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\phi = \angle MOX = \angle COX - \angle COM$$

$$= \frac{1}{2}(\pi-\alpha) - \frac{1}{2}(\pi - N\alpha) = \frac{N-1}{2}\alpha$$

当$\alpha = 0$时(同相合成)，有 $A = Na,\ \phi = 0$

另解（代数法）：通项可表示如下：

$$x_i = a\cos[\omega t + \varphi_0 + (i-1)\alpha] \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i = a\sum_{i=1}^{N}\cos[\omega t + \varphi_0 + (i-1)\alpha]$$

$$= \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}\sum_{i=1}^{N}\{\sin[\omega t + \varphi_0 + (i-\frac{1}{2})\alpha]$$

$$-\sin[\omega t + \varphi_0 + (i-\frac{3}{2})\alpha]\}$$

$$x=\frac{a}{2\sin(\alpha/2)}\{\sin[\omega t+\varphi_0+(N-\frac{1}{2})\alpha]$$

$$-\sin[\omega t+\varphi_0-\frac{1}{2}\alpha]\}$$

振幅最大

$$=\frac{a\sin(\frac{N}{2}\alpha)}{\sin(\alpha/2)}\cos(\omega t+\varphi_0+\frac{N-1}{2}\alpha)$$

合振幅：

$$A=\left|\frac{a\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\right|$$

若$\alpha=0$，

$$x=\sum_{i=1}^{N}x_i=Nx_1$$

$$A_{max}=Na$$

2．同方向不同频率简谐振动的合成 拍

当两个同方向简谐振动的频率不同时，在旋转矢量图示法中两个旋转矢量的转动角速度不相同，二者的相位差与时间有关，合矢量的长度和角速度都将随时间变化。

两个简谐振动的频率ω_1和ω_2很接近，且$\omega_2 > \omega_1$

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_0),\quad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_0)$$

两个简谐振动合成得：（振幅相等的情形）

$$\boldsymbol{x = x_1 + x_2}$$

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \phi_0\right)$$

ω_1~ω_2，$\omega_2-\omega_1 \ll \omega_1$或$\omega_2$，有 $(\omega_2+\omega_1)/2 \approx \omega_1 \approx \omega_2$

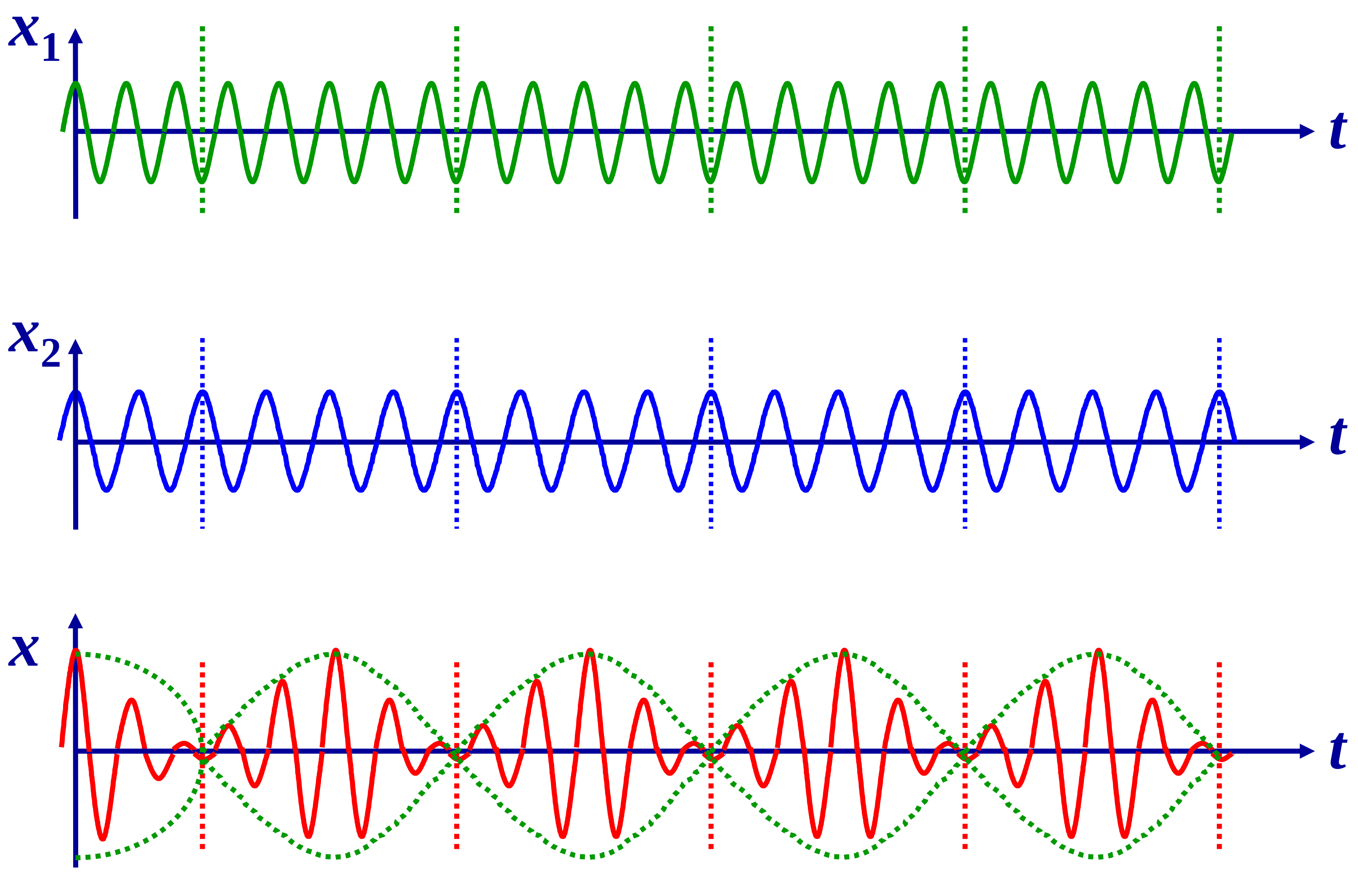
$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)\cdot\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\phi_0)$$

在两个简谐振动的位移合成表达式中，第一项随时间作缓慢变化，第二项是角频率近于ω_1或ω_2的简谐函数。合振动可视为是角频率为$(\omega_1+\omega_2)/2$、振幅为$|2A\cos[(\omega_2-\omega_1)t/2]|$的简谐振动。

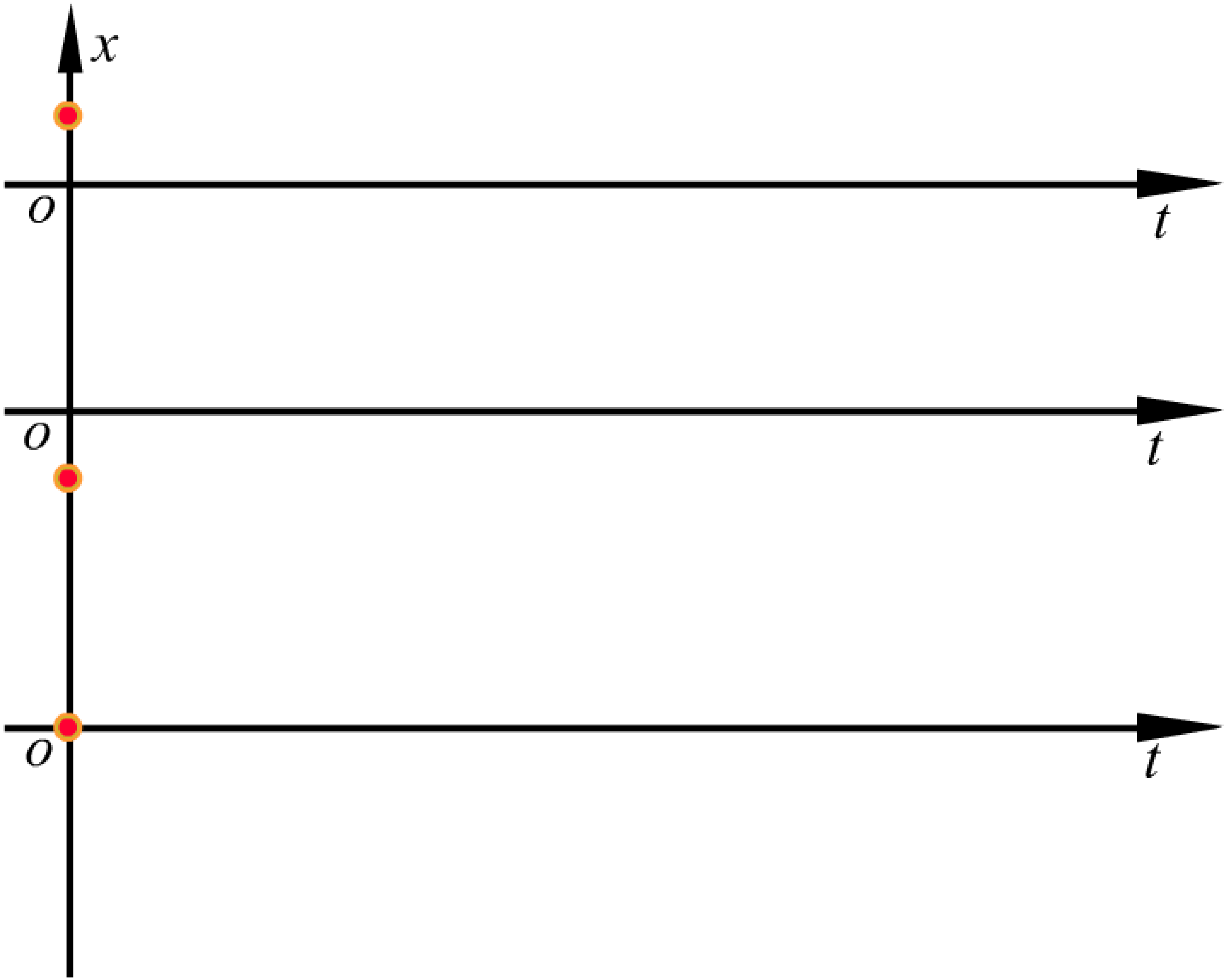
合振动的振幅随时间作缓慢的周期性的变化，振动出现时强时弱的**拍现象**。

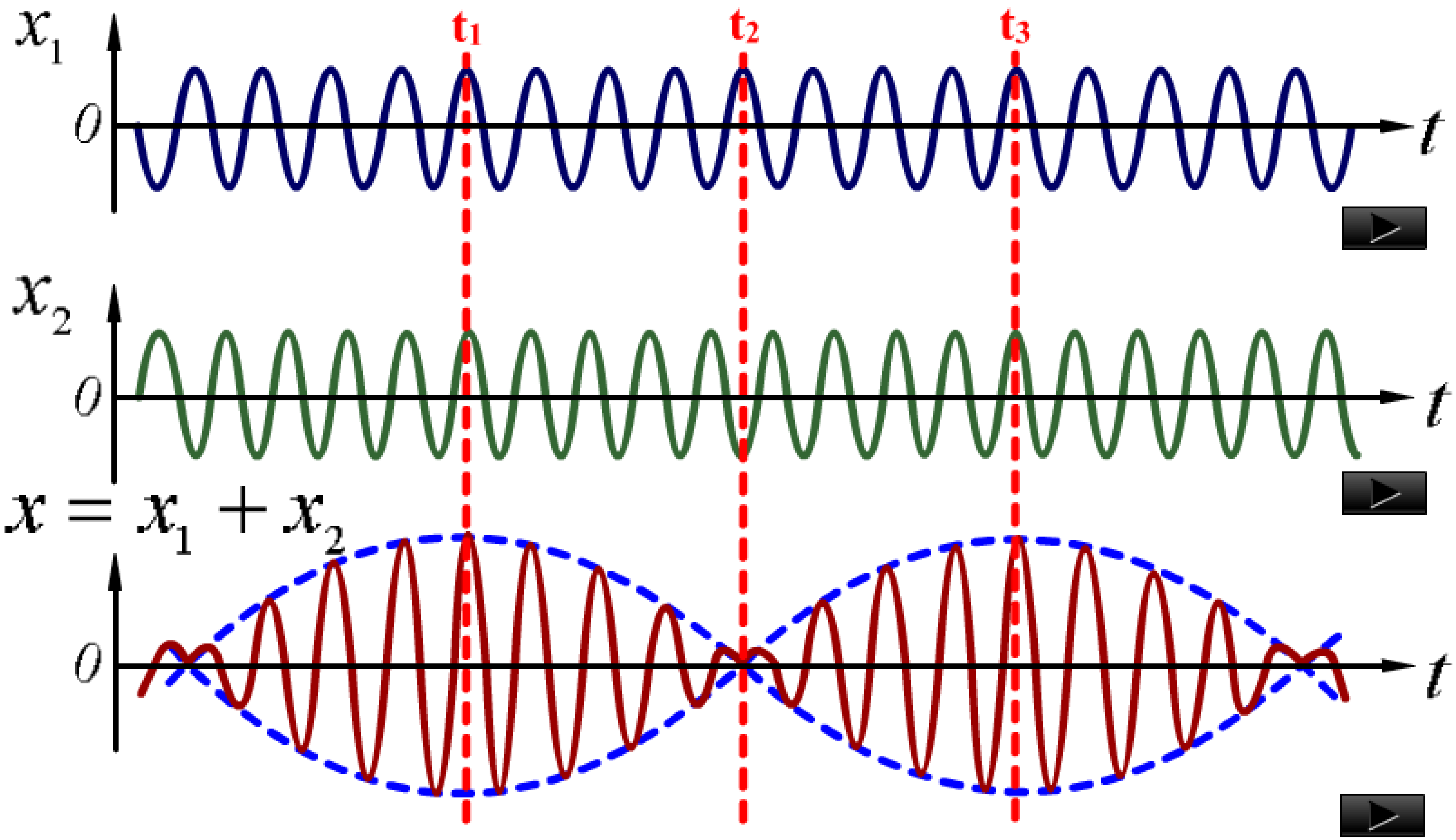
拍频：单位时间内强弱变化的次数。

$$\nu = \left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2-\nu_1|$$



x_1
t
x_2
t
x
t


x
O
t
O
t
O
t



x_1
t_1
t_2
t_3
0
t
x_2
0
t
$x = x_1 + x_2$
0
t

*3. 两个相互垂直谐振动的合成、李萨如图

两个同频率的相互垂直的分运动位移表达式

$$x = A_1\cos(\omega t + \phi_{10}) \qquad y = A_2\cos(\omega t + \phi_{20})$$

消时间参数，得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\phi_{20} - \phi_{10}) = \sin^2(\phi_{20} - \phi_{10})$$

合运动一般是在$2A_1$(x方向)、 $2A_2$(y方向)范围内的一个椭圆。

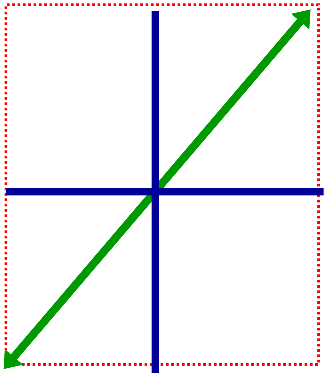
椭圆的性质(方位、长短轴、左右旋)在A_1、A_2确定之后，主要决定于$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10}$。

几种特殊情况：

(1) $\phi_{20}-\phi_{10}=0$，两个分振动同相位，得 $y=\dfrac{A_2}{A_1}x$

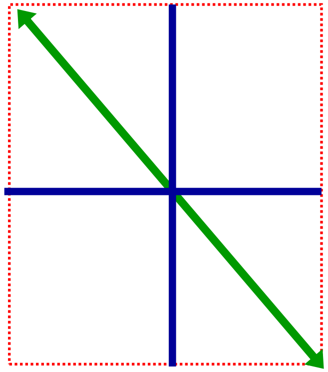
在任一时刻离开坐标原点位移为：

$$s=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\phi)$$

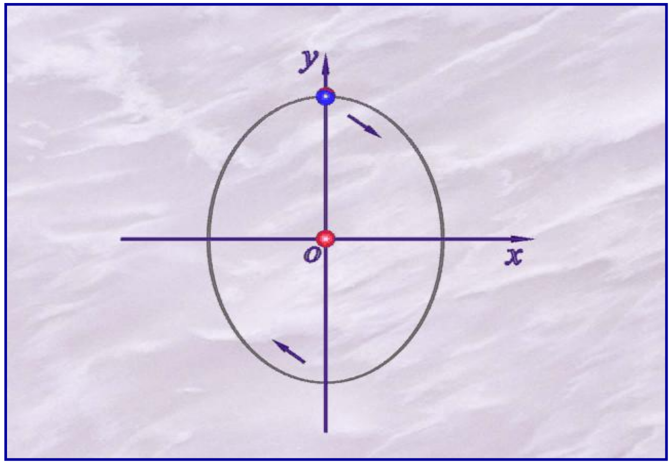


(2) $\phi_{20}-\phi_{10}=\pi$，两个分运动反相位，得

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$



(3) $\phi_{20}-\phi_{10}=\pi/2$，得 $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$

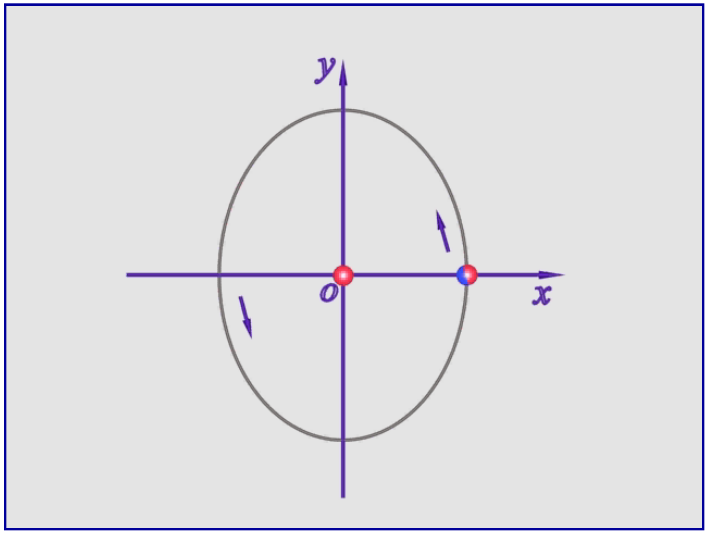


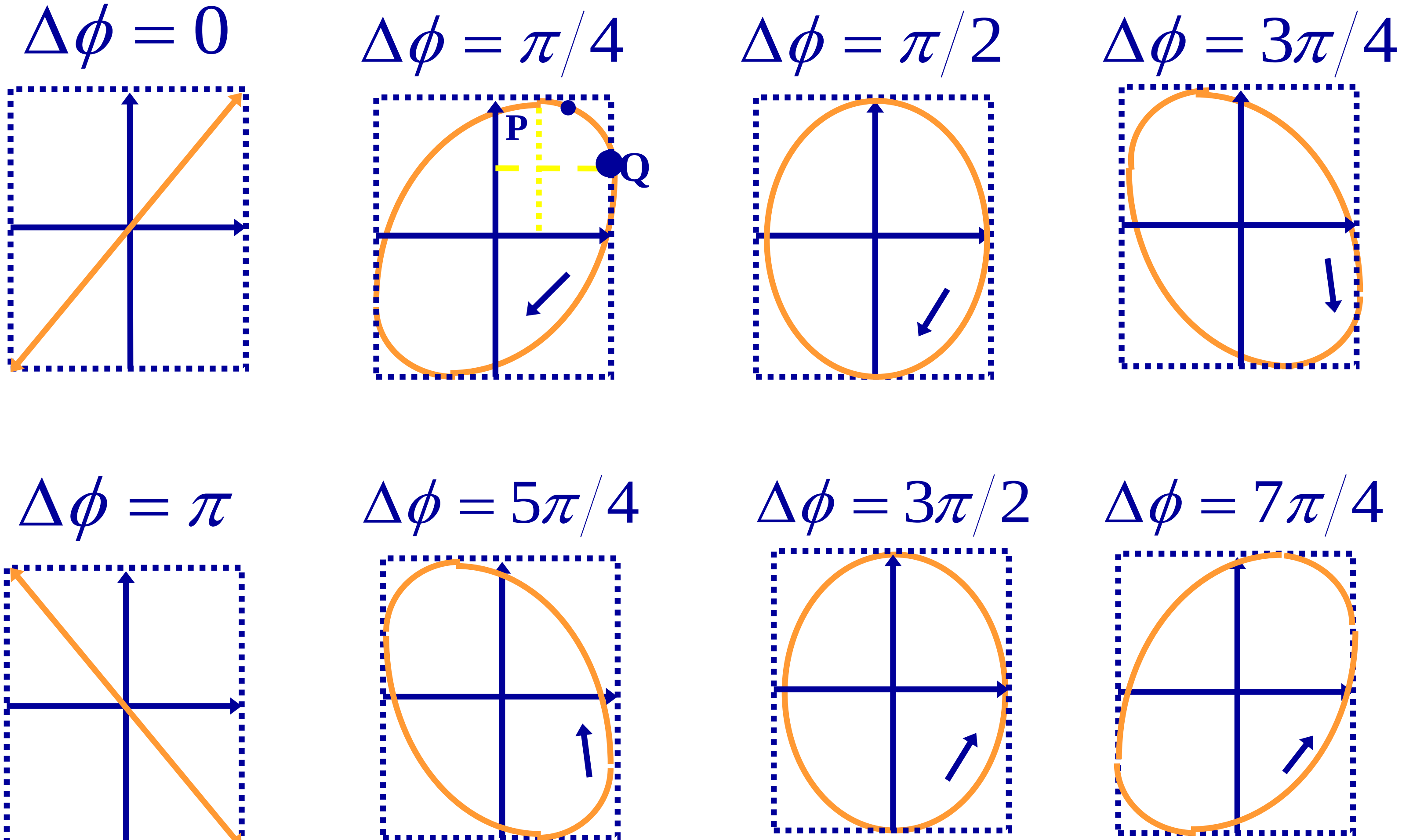
这是坐标轴为主轴的椭圆，质点的轨迹是顺时针旋转。

超前90度

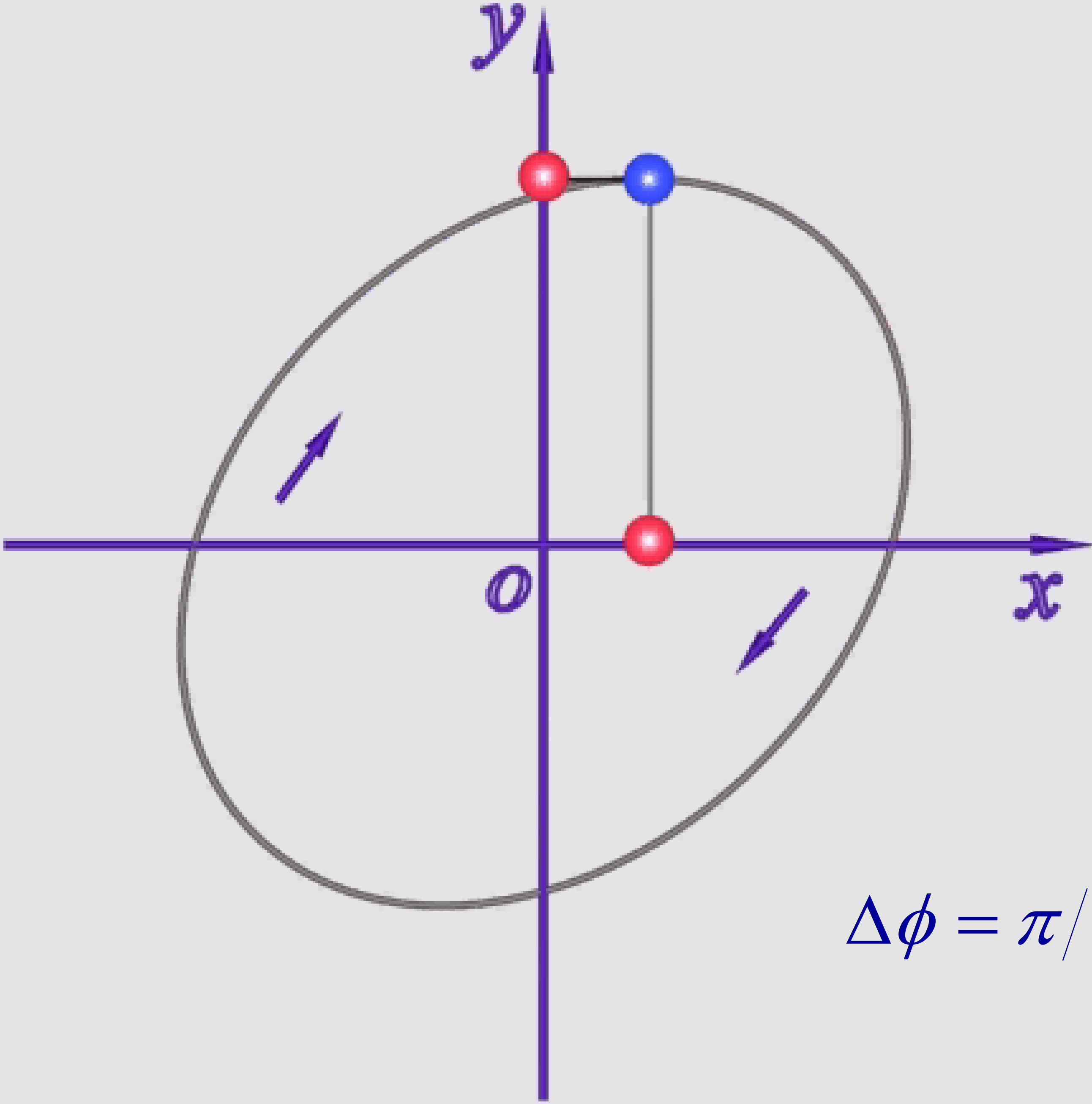
(4) $\phi_{20}-\phi_{10}=3\pi/2$，仍然得 $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$

与(3)相同，只是质点的轨迹沿逆时针旋转。

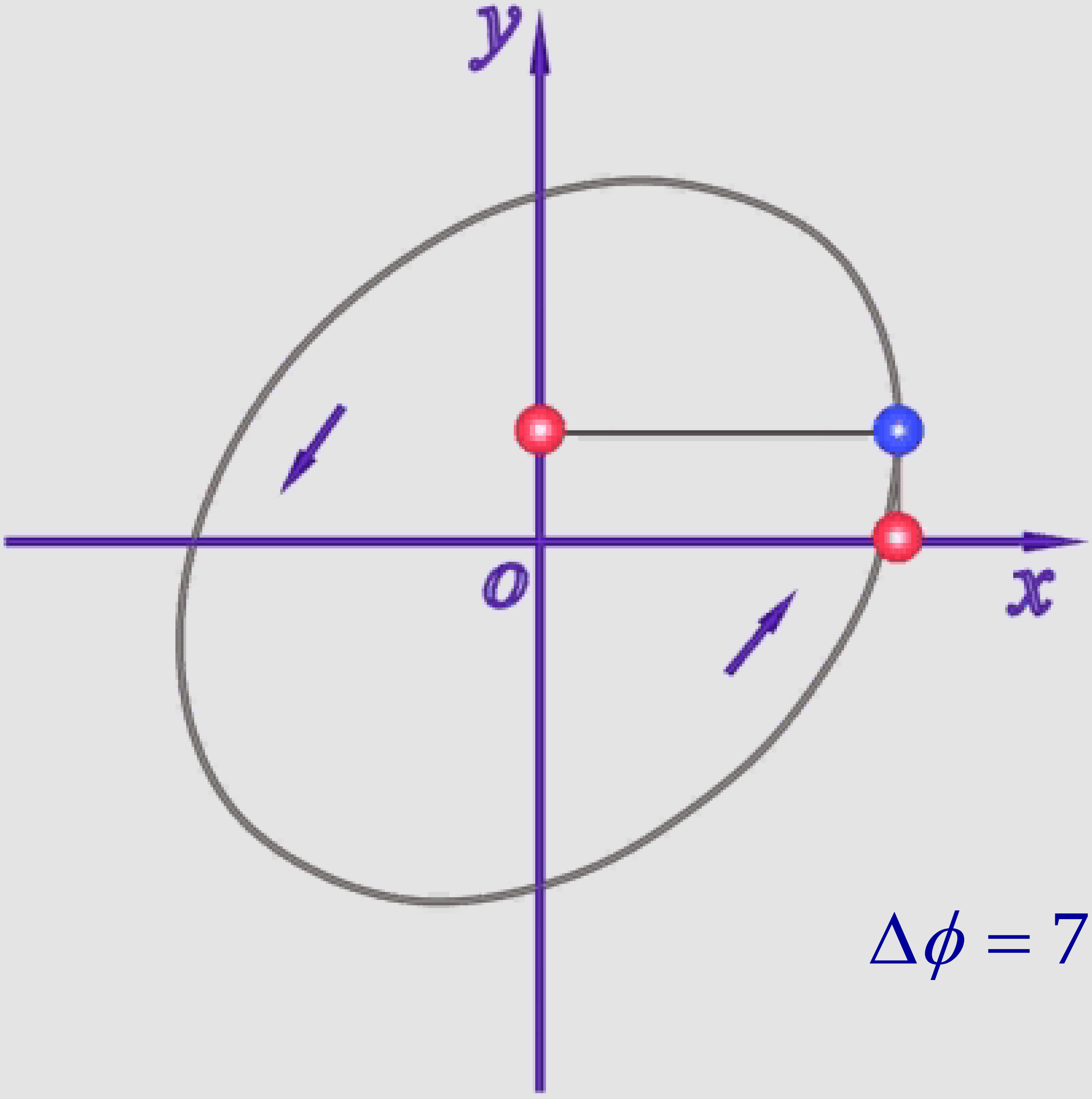




$$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10}$$



$$\Delta\phi = \pi/4$$



$$\Delta\phi = 7\pi/4$$

方向垂直的不同频率的简谐振动的合成

- 两分振动频率相差很小

$$\Delta\phi = (\omega_2 - \omega_1)t$$

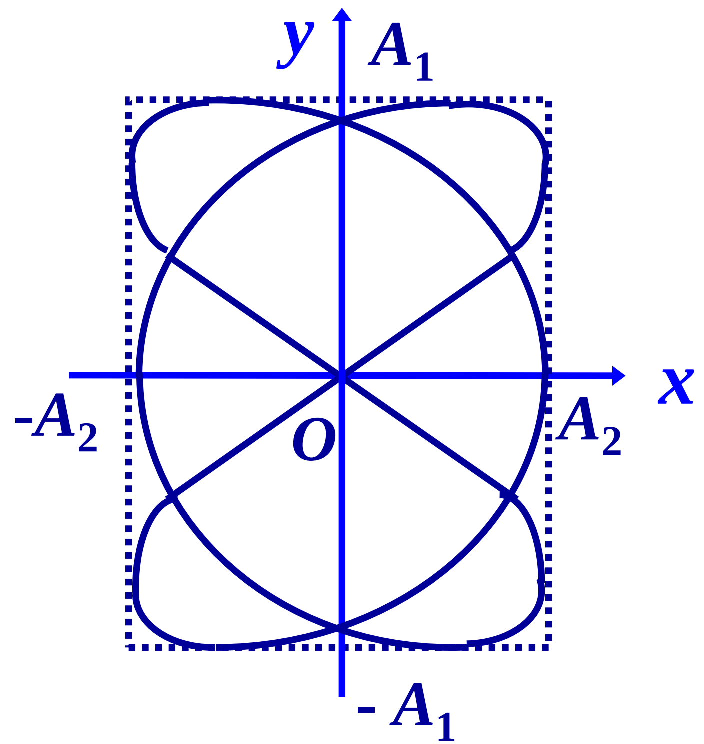
可看作两频率相等而$\Delta\phi$随t缓慢变化，合运动轨迹将按上页图依次缓慢变化

- 两振动的频率成**整数比**

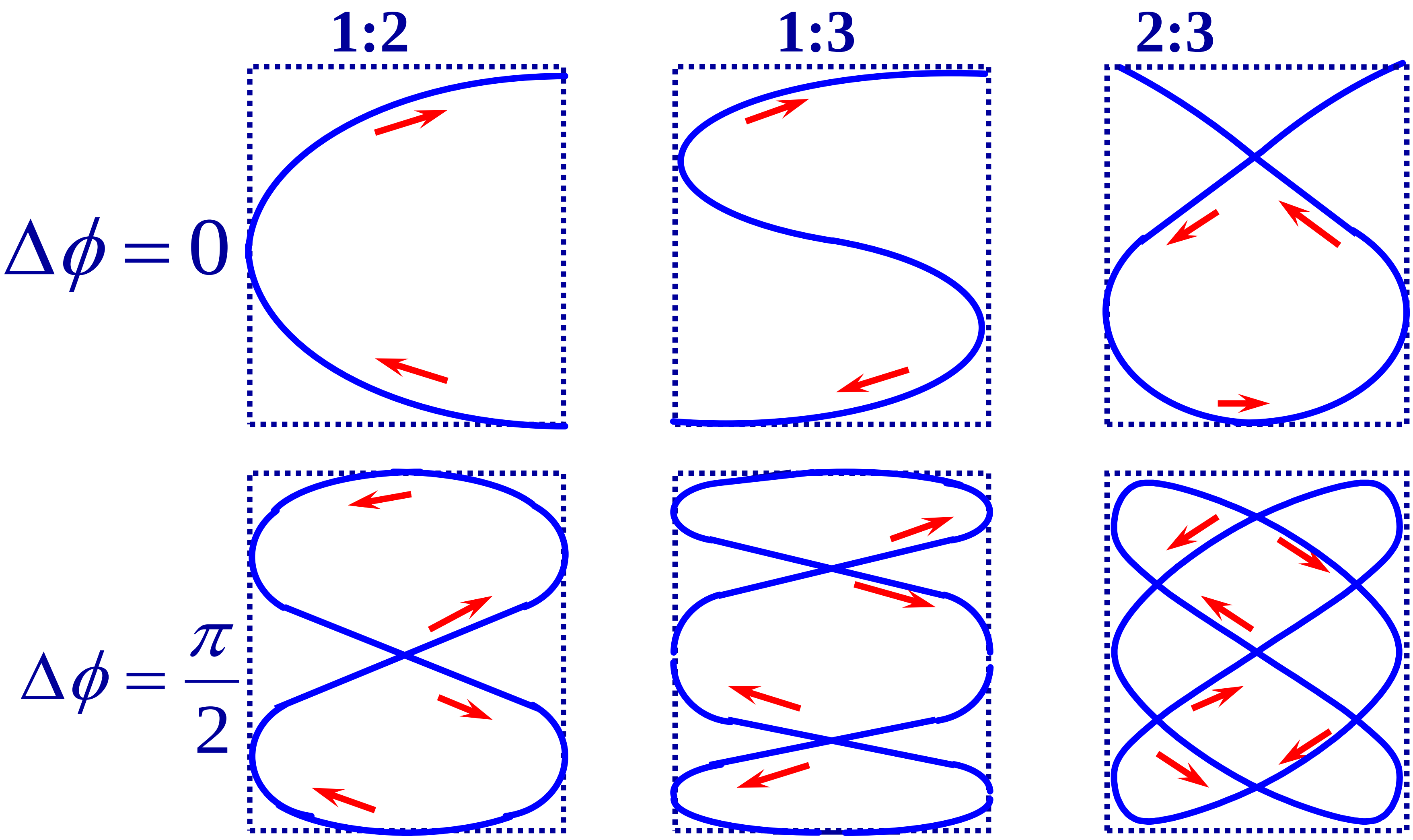
轨迹称为李萨如图形

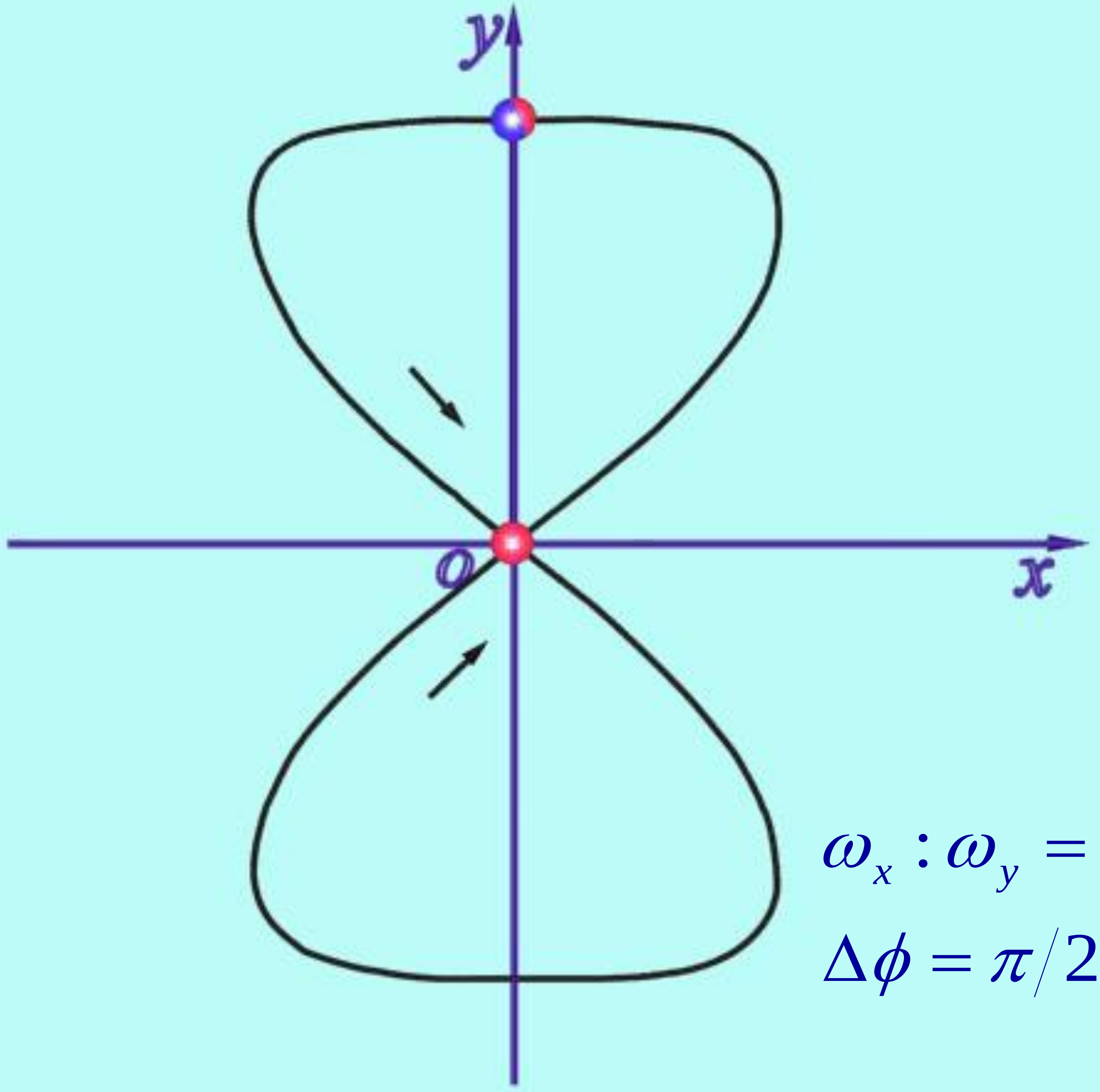
$$\omega_x : \omega_y = 3:2$$

$$\phi_{20} = \pi/4, \quad \phi_{10} = 0$$



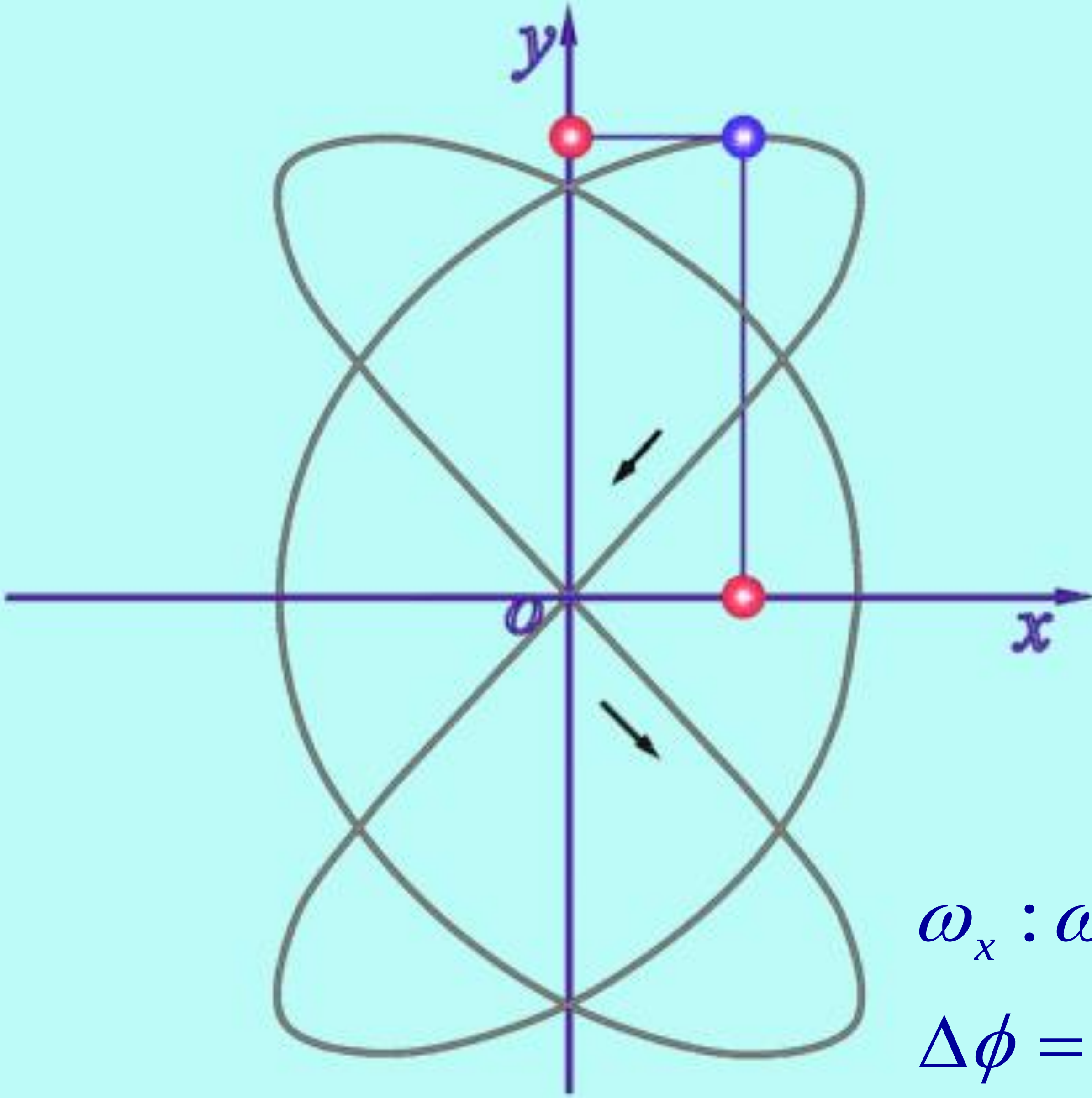
几幅典型的利萨如图形





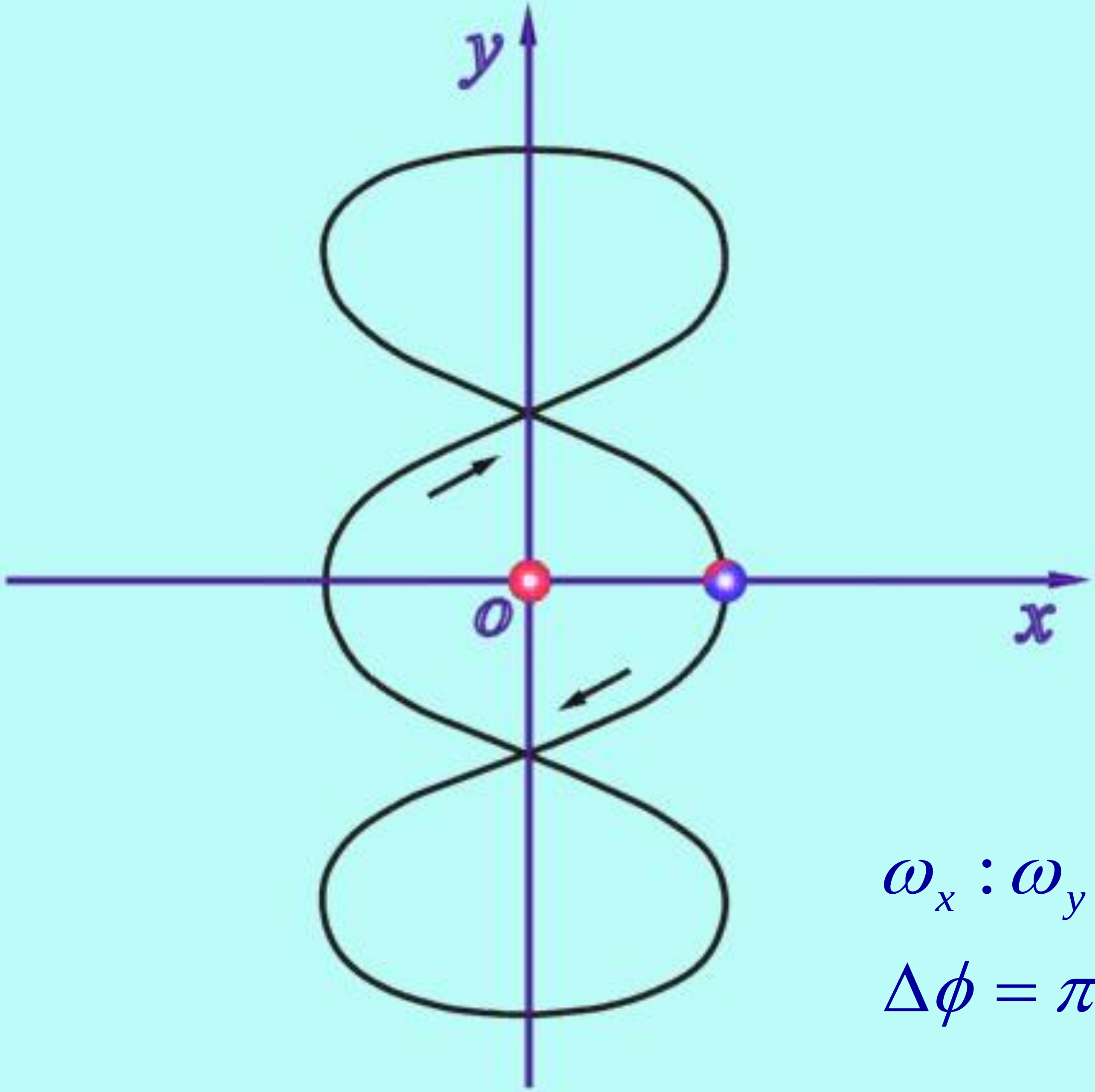
$$\omega_x : \omega_y = 2:1$$

$$\Delta\phi = \pi/2$$



$$\omega_x : \omega_y = 3:2$$

$$\Delta\phi = \pi/4$$



$$\omega_x : \omega_y = 3:1$$

$$\Delta\phi = \pi/2$$

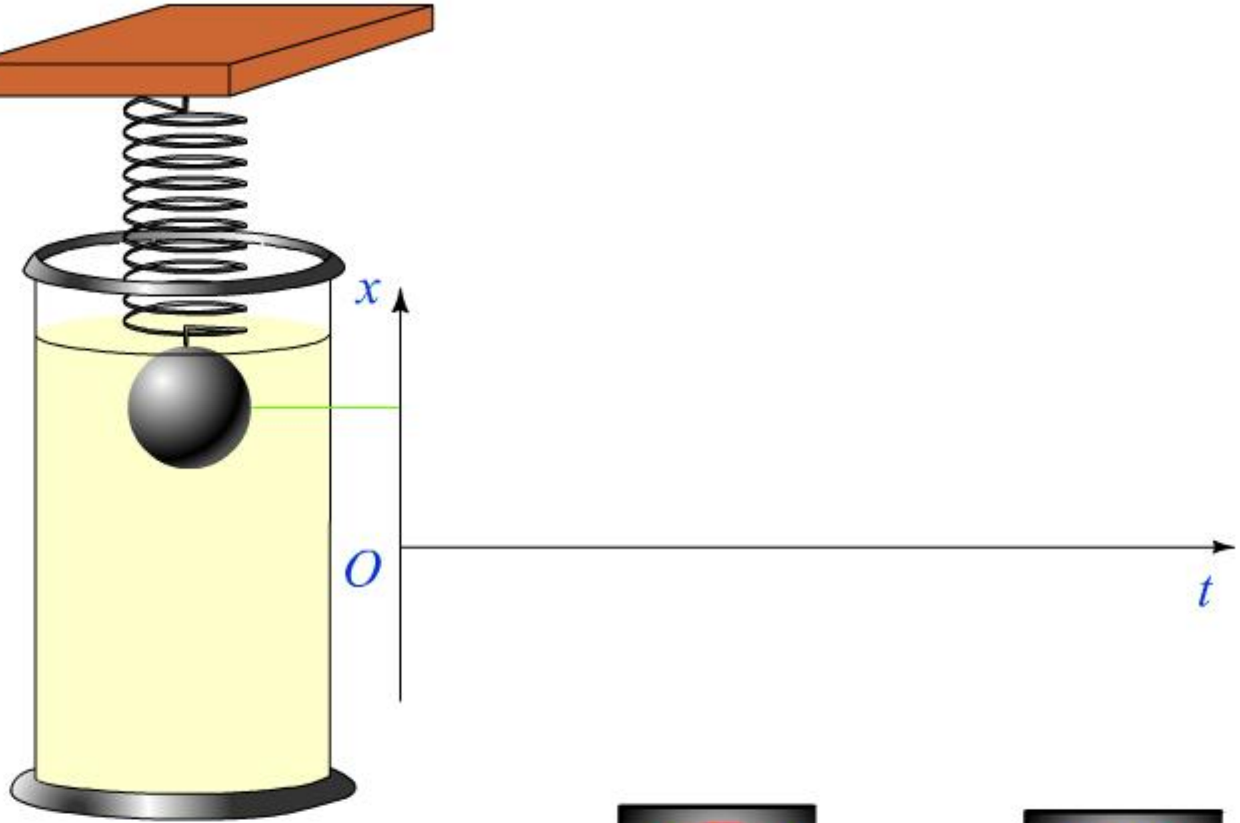
不同相位差的

2：1；3：1；3：2

典型相位差演示

§ 6-3 阻尼振动和受迫振动 简介

阻尼振动



演示　恢复

振动物体不受任何阻力的影响，只在回复力作用下所作的振动，称为无阻尼自由振动。

在回复力和阻力作用下的振动称为阻尼振动。

阻尼：消耗振动系统能量的原因。

阻尼种类：摩擦阻尼、辐射阻尼

对在流体(液体、气体)中运动的物体，当物体速度较小时，阻力大小正比于速度，方向相反，表示为

$$F_{\mathrm{f}} = -\gamma v = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

γ：阻尼系数

在阻力作用下的弹簧振子

受力：弹性恢复力$-kx$；阻力F_f

运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

引入阻尼因子：$\beta=\gamma/2m$　　固有频率 $\omega_0=\sqrt{k/m}$

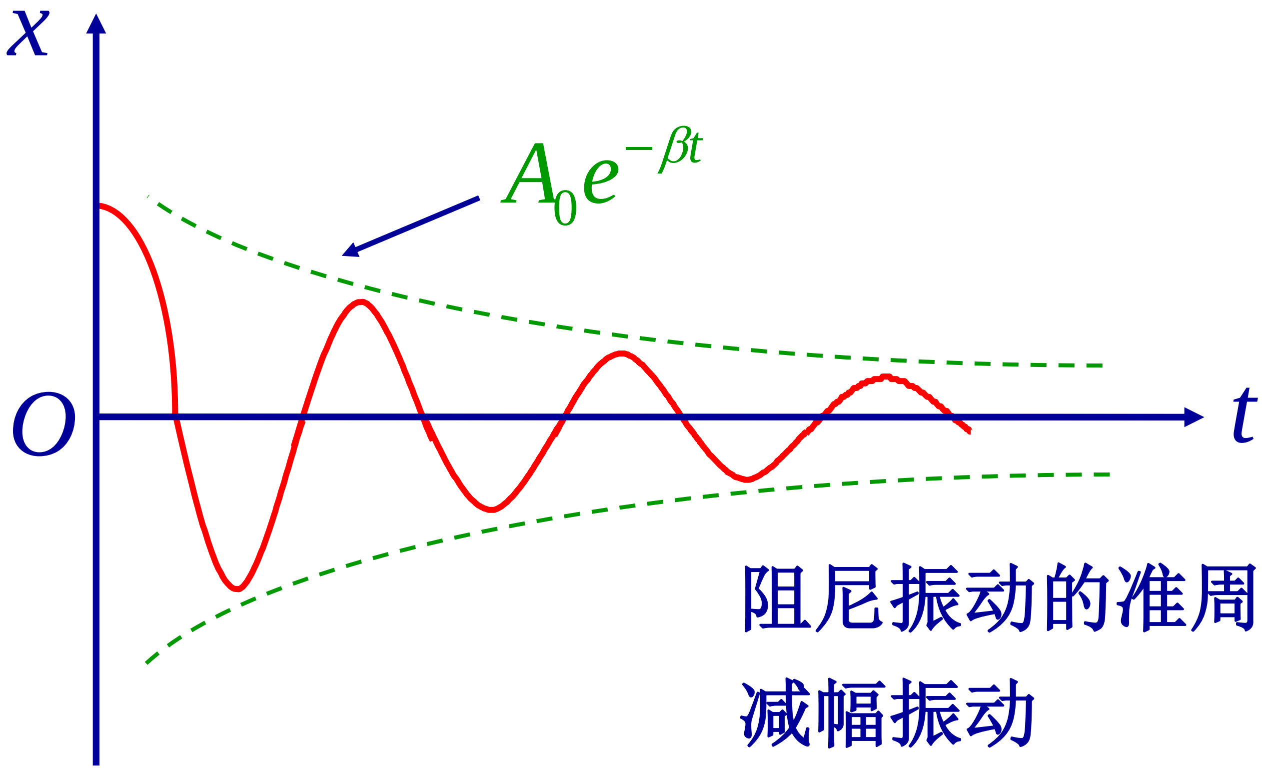
$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

在小阻尼条件下($\beta<\omega_0$)，微分方程的解为：

$$x=A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega' t+\varphi_0')\quad 其中\ \omega'=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0')$$

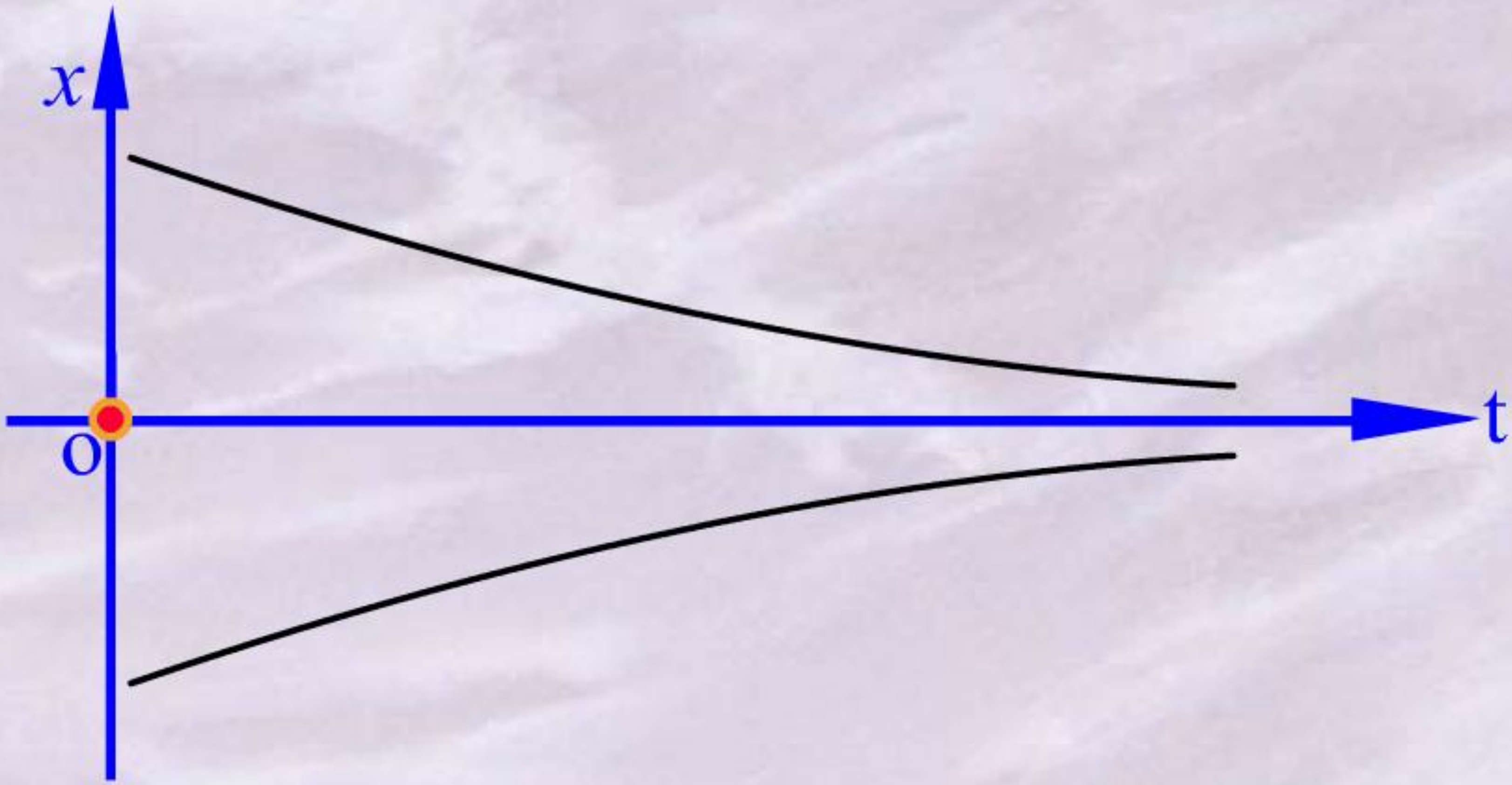
其中A_0 和φ_0'为积分常数，由初始条件决定。上式中的余弦项表征了在弹性力和阻力作用下的周期运动；指数项反映了阻尼对振幅的影响。



阻尼振动的准周期性

减幅振动

振动质点的位移随时间的变化—振动曲线



阻尼振动不是周期性振动，更非简谐振动，因位移不是时间的周期函数。但阻尼振动有某种重复性。

位移相继两次达到极大值的时间间隔叫做阻尼振动的周期，有

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

显而易见，由于阻尼，振动变慢了。

阻尼振动的振幅为：

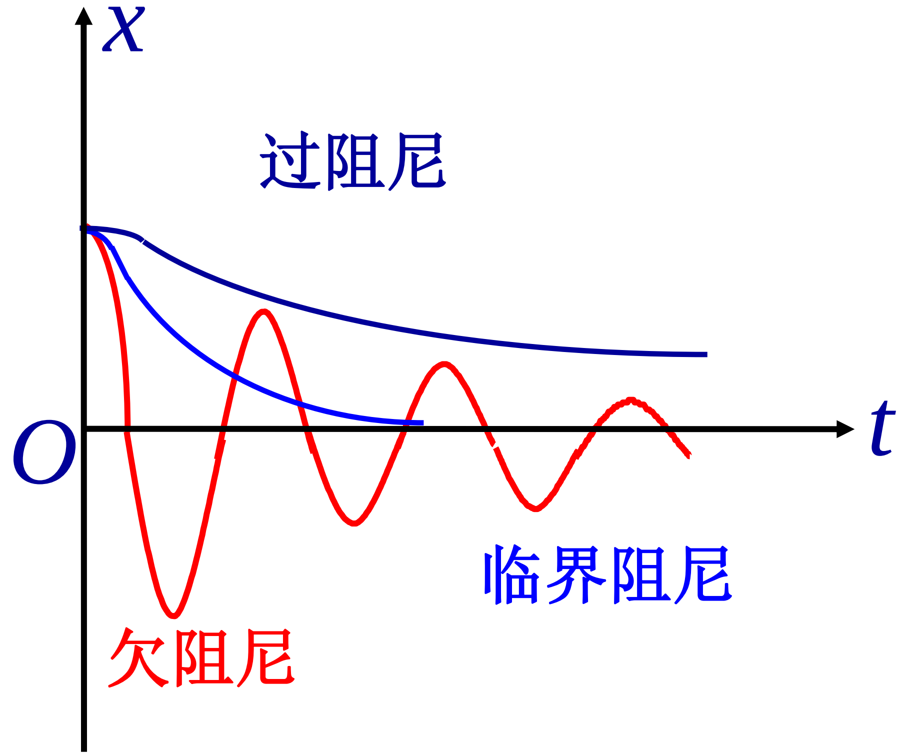
$$A = A_0 \, \mathrm{e}^{-\beta t}$$

振幅随时间作指数衰减。阻尼β大小决定了阻尼振动振幅的衰减程度。

阻尼振动的三种情形：

- 过阻尼 $\beta > \omega_0$
- 欠阻尼 $\beta < \omega_0$
- 临界阻尼 $\beta = \omega_0$

通过控制阻尼的大小，以满足不同实际需要。



2.受迫振动

物体在周期性外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动。

物体所受驱动力： $F = F_0 \cos\omega t$

运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\cos\omega t$$

设 $\beta = \gamma/2m \qquad \omega_0^2 = k/m$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

对于阻尼较小的情形，运动方程之解表为：

$$x = \underbrace{A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0')}_{\text{衰减项}} + \underbrace{A\cos(\omega t+\varphi_0)}_{\text{稳态项}}$$

经过一段时间后，衰减项忽略不计，仅考虑稳态项。

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

稳态时振动物体速度：

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=v_m\cos(\omega t+\varphi_0+\pi/2)$$

$$v_m=\frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

在受迫振动中，周期性的驱动力对振动系统提供能量，另一方面系统又因阻尼而消耗能量，若二者相等，则系统达到稳定振动状态。

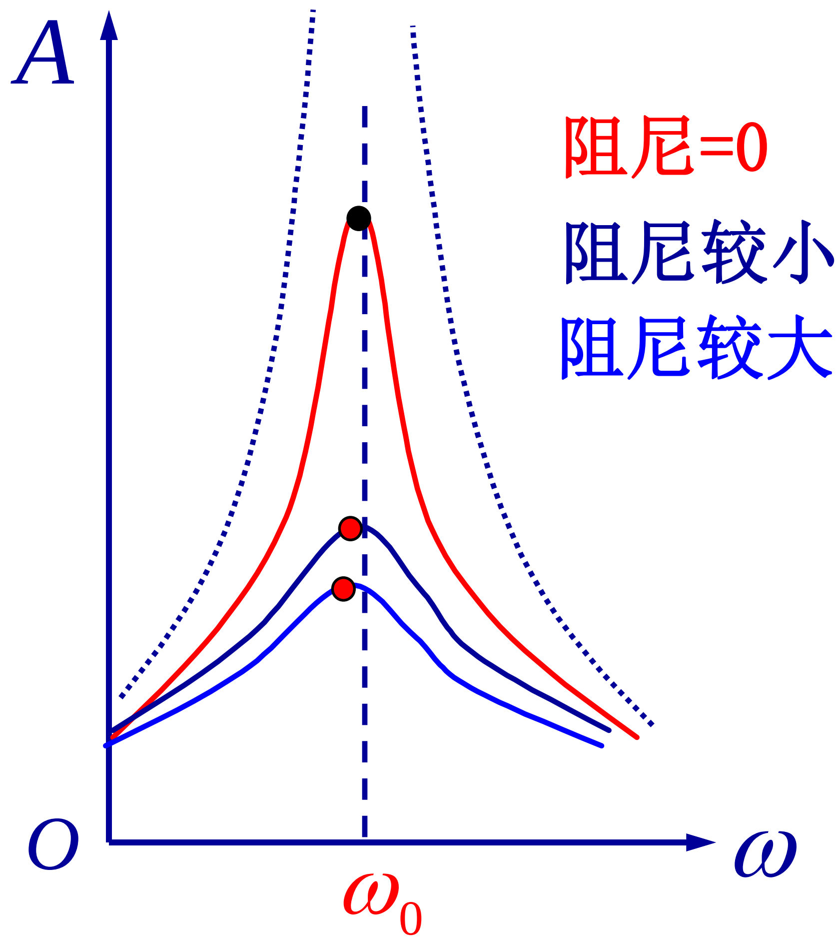
3.共振

稳定态振幅 $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$

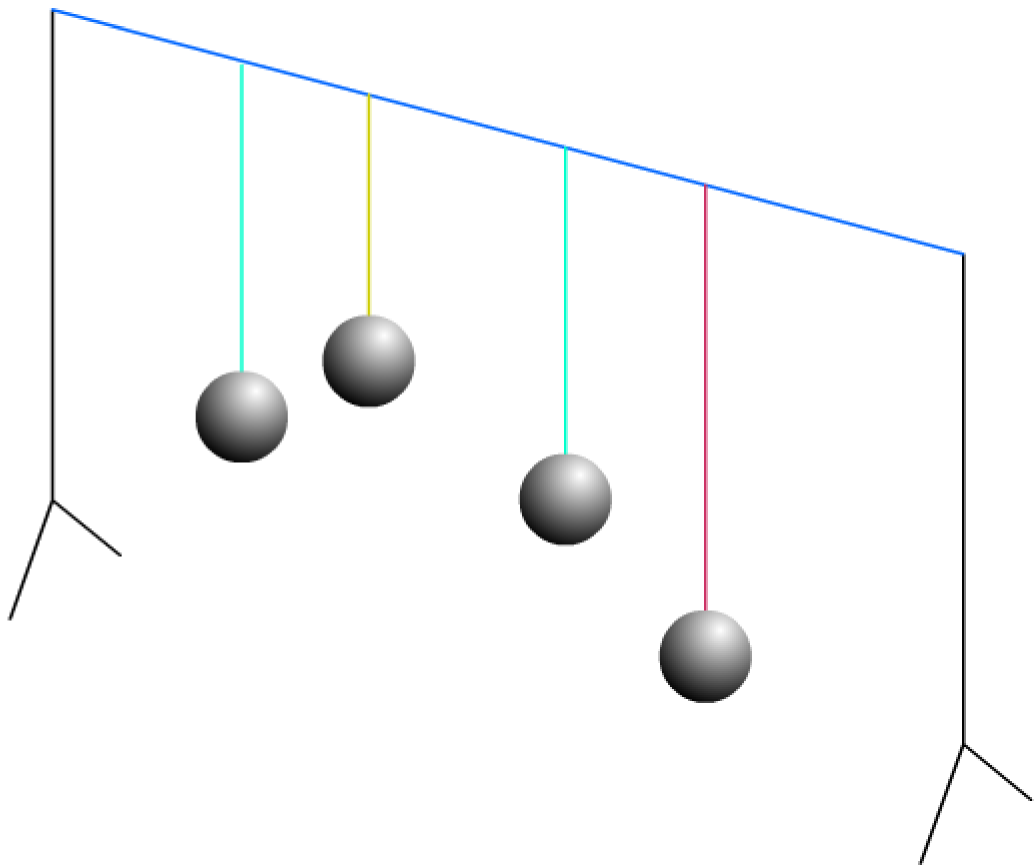
对于受迫振动，当外力幅值恒定时，稳定态振幅随驱动力频率而变化。当驱动力的角频率等于某特定值时，位移振幅达到最大值的现象称为位移共振。

根据 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0$

$$\omega_{共振} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



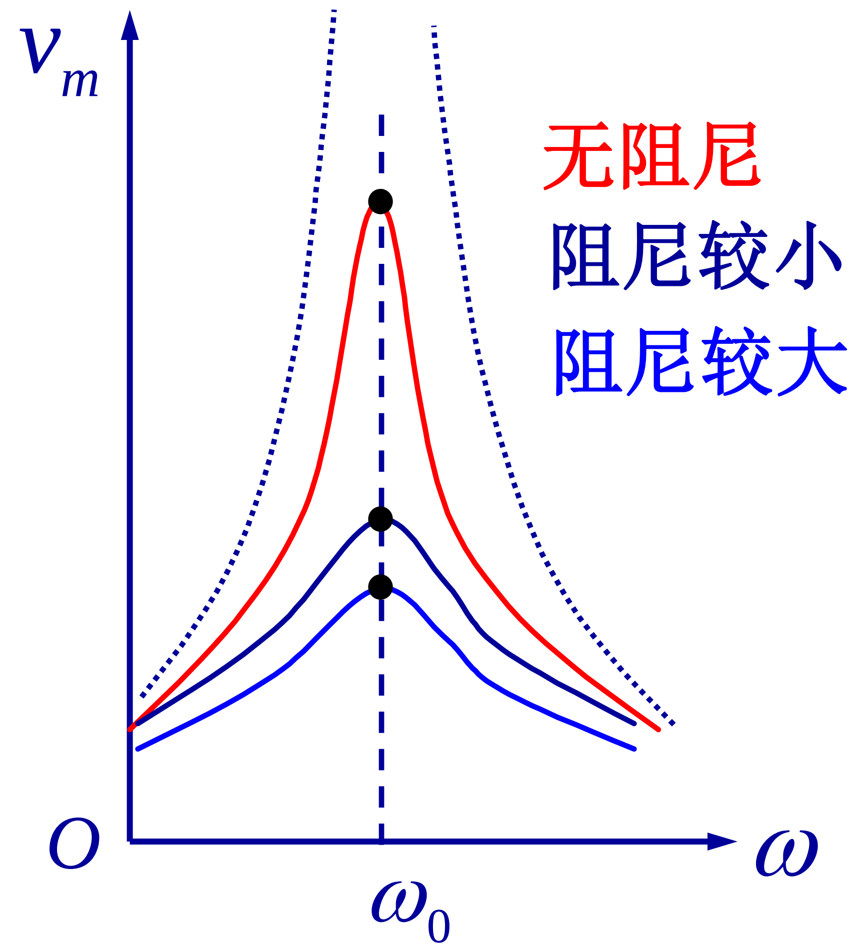
共振现象



受迫振动速度在一定条件下发生共振的的现象称为速度共振。

根据 $\dfrac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}\omega}=0$

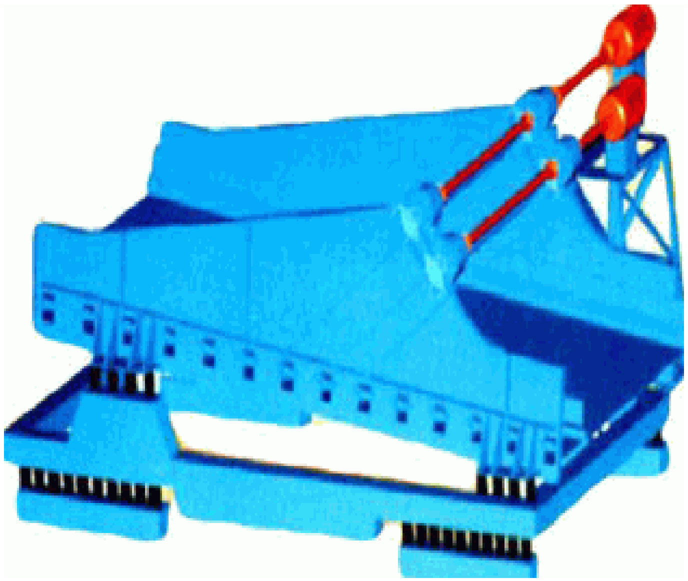
$$\omega_{共振}=\omega_0$$



在阻尼很小的前提下，速度共振和位移共振可以认为等同。

共振的应用和防止

应用



共振筛

共鸣箱

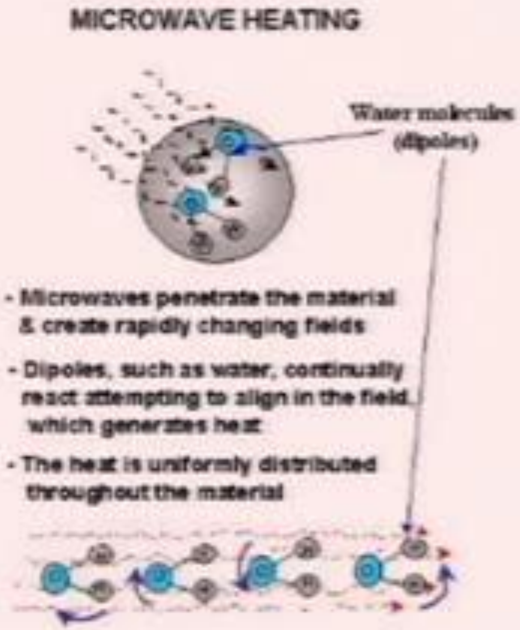
防止

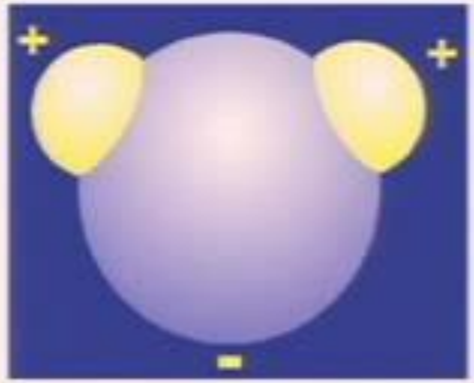
1.队列或火车过桥时要便步走或放慢速度
2.在振动物体底座加防振垫
3.装修剧场、房屋时使用吸声材料等

◆ 共振现象的危害

1940年美国华盛顿的Tocama悬索桥建成，1940 年7月1日 因共振而坍塌

小号发出的波足以把玻璃杯振碎





H_2O molecule dipole

H_2O molecule in oscillating electric field

many H_2O molecules in oscillating electric field

正常人体的共振频率应为7.5左右，其中各部分又有自己的共振频率。如内脏为4～6Hz，头部为8～12Hz等。正是由于这个原因，次声波对人体有很大的破坏作用，因为人体各部分的共振频率都在次声波的频率范围之内。次声武器就是利用频率低于20Hz的次声波与人体发生共振，使共振的器官或部位发生位移和变形而造成人体损伤以至死亡的一种武器