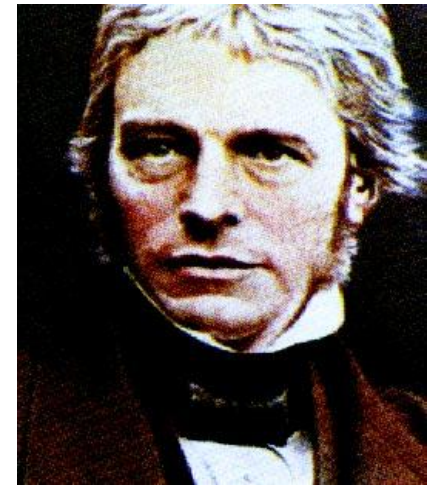


# 第十二章

## 电磁感应 电磁场理论

# 法拉第简介

(Michael Faraday, 1791-1867)



## 1. 生平

法拉第于1791年出生在英国伦敦附近的一个小村里，父亲是铁匠，自幼家境贫寒，无钱上学读书。13岁时到一家书店里当报童，次年转为装订学徒工。在学徒工期间，法拉第除工作外，利用书店的条件，在业余时间贪婪地阅读了许多科学著作，例如《化学对话》、《大英百科全书》的《电学》条目等，这些著作开拓了他的视野，激发了他对科学的浓厚兴趣。

1812年，学徒期满，法拉第打算专门从事科学研究。次年，经著名化学家戴维推荐，法拉第到皇家研究院实验室当助理研究员。这年底，作为助手和仆人，他随戴维到欧洲大陆考察漫游，结识了不少知名科学家，如安培、伏打等，这进一步扩大了他的眼界。1815年春回到伦敦后，在戴维的支持和指导下作了好多化学方面的研究工作。1821年开始担任实验室主任，一直到1865年。1824年，被推选为皇家学会会员。次年法拉第正式成为皇家学院教授。1851年，曾被一致推选为英国皇家学会会长，但被他坚决推辞掉了。1867年8月25日，他坐在书房的椅子上安祥地离开了人世。遵照他的遗言，在他的墓碑上只刻了名字和生死年月。

# 法拉第简介

(Michael Faraday, 1791-1867)

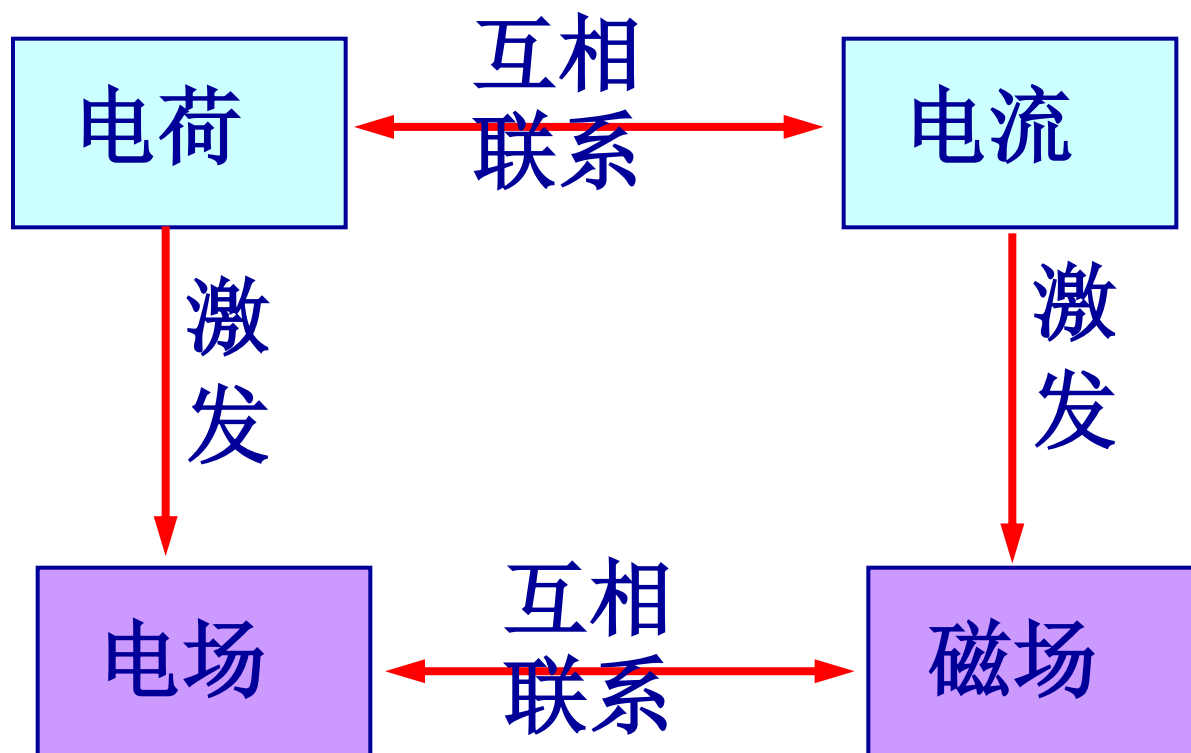
## 2. 主要工作

1821年法拉第读到了奥斯特的描述他发现电流磁效应的论文《关于磁针上的电碰撞的实验》。该文给了他很大的启发，使他开始研究电磁现象。经过十年的实验研究（中间曾因研究合金和光学玻璃等而中断过），在1831年，他终于发现了电磁感应现象。

1833年，法拉第发现了电解定律，1837年发现了电解质对电容的影响，引入了电容率概念。1845年发现了磁光效应，后又发现物质可分为顺磁质和抗磁质等。

## § 12-1 电磁感应的基本规律

电场 vs. 磁场



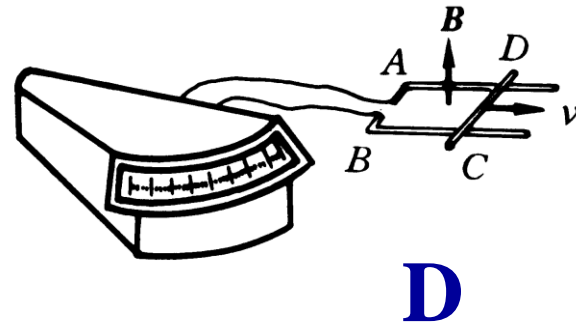
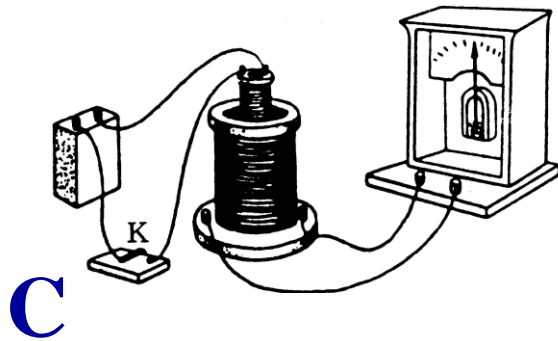
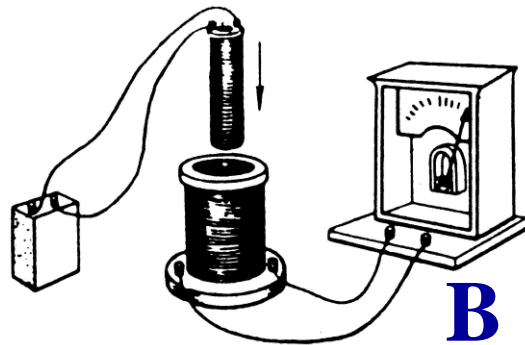
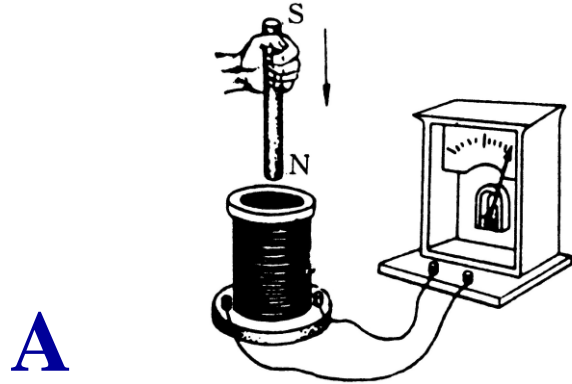
电流→磁场， 磁场→电流？

在恒定电流的磁场中， 导线中无电流  
——法拉第感到迷惑。

经过失败和挫折(1822—1831)， 法拉第终于发现： 感应电流与原电流的变化有关， 而与原电流本身无关。

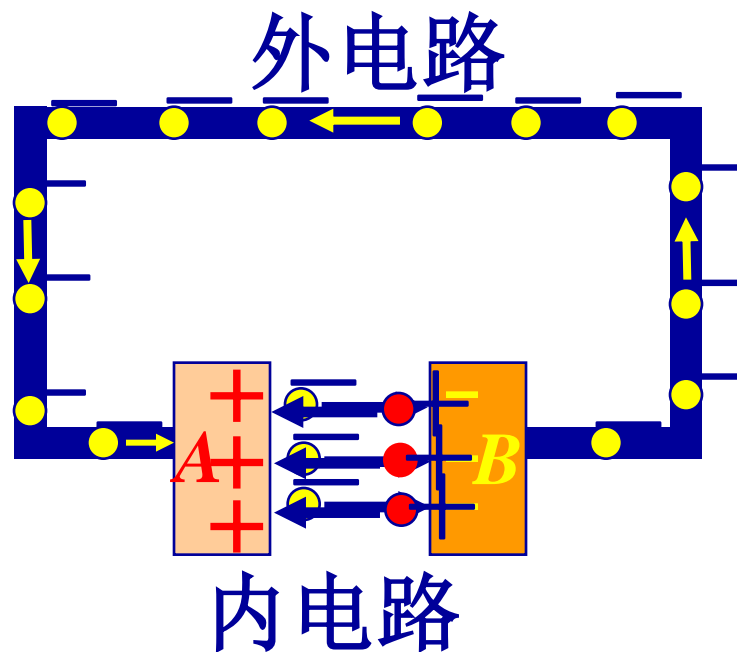
电磁感应现象揭示了电与磁之间的联系和转化， 为人类获取电能开辟了道路， 引起了一场重大的工业和技术革命。

1831年法拉第总结出以下五种情况都可产生感应电流：**变化着的电流（C）**，**运动着的恒定电流（B）**，**在磁场中运动着的导体（D）**，**变化着的磁场（A）**，**运动着的磁铁（A）**。



# 1. 电源的电动势

## (1) 非静电力



电源——提供非静电力的一种装置。

它把其他形式的能量转化成电能。



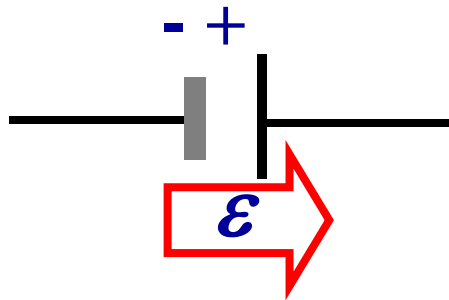
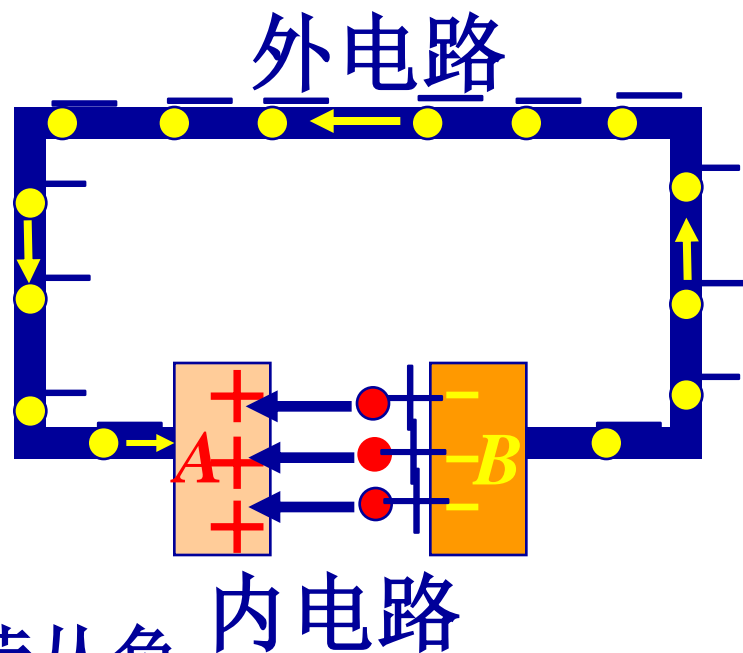
## (2) 电源电动势

电源迫使正电荷  $dq$  从负极经电源内部移动到正极所做的功为  $dA$ ，  
电源的**电动势**为：

$$\varepsilon = \frac{dA}{dq}$$

**电源的电动势**，等于把单位正电荷从负极经内电路移动到正极时所做的功，单位为伏特。单位： $\text{J} / \text{C}$ ，即  $\text{V}$

★**正方向规定**：自**负极**经**内电路**指向**正极**。



哪一端电势高？

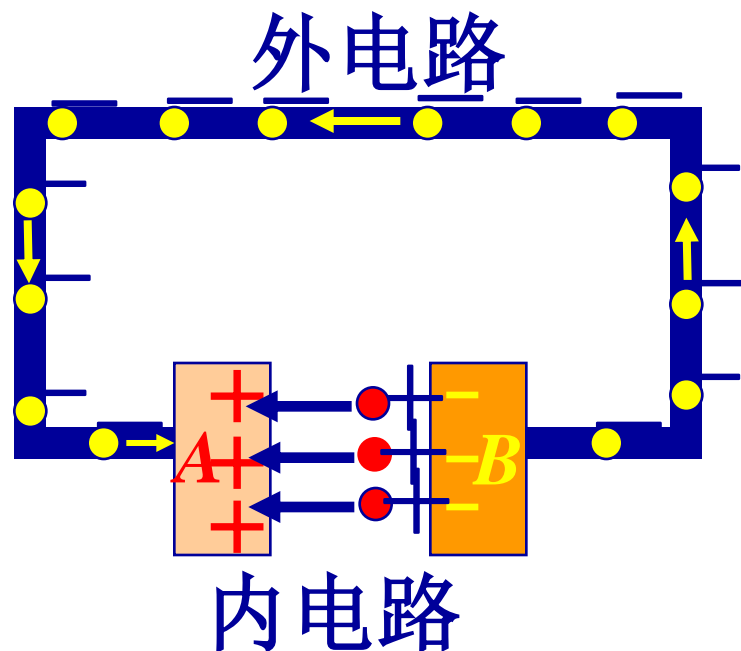
(3) 引入非静电场强:

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_K}{q}$$

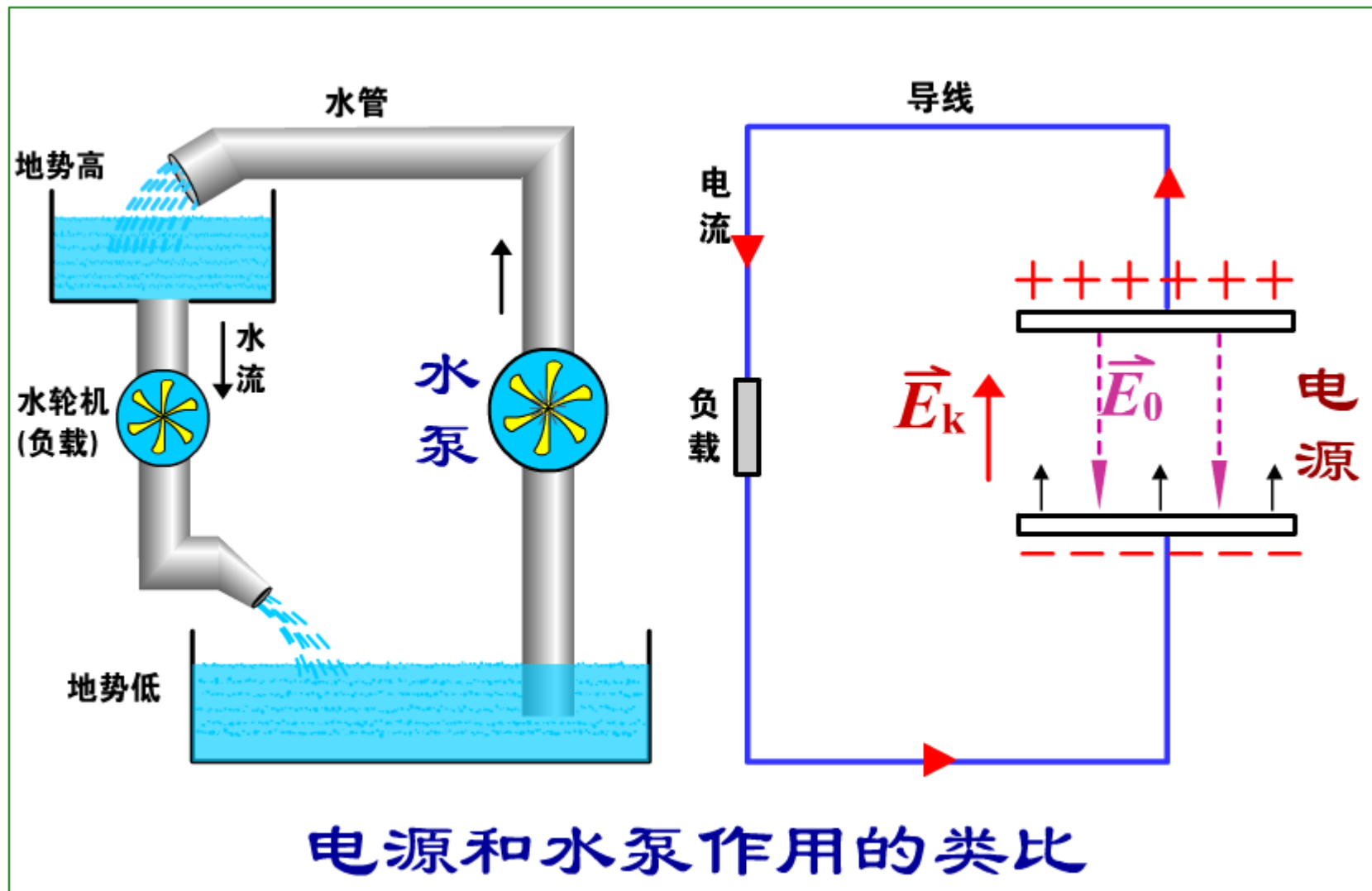
由电源电动势定义, 得:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{A}{q} = \frac{\int_B^A \vec{F}_K \cdot d\vec{l}}{q} \\ &= \frac{q \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l}}{q} = \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

电源电动势, 等于非静电场强沿着从负极经内电路到正极的路径积分。



# 电源的电动势



关于电动势的说明：

(1)反映电源作功能力，与外电路无关

(2)有方向的标量，规定其方向为电源内部负极指向正极。

从场的观点来看：非静电力对应非静电场 $E_k$ 。非静电场把单位正电荷从负极B经电源内部移到正极A做功为

$$\varepsilon = \int_B^A \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

电源外部回路 $E_k = 0$ ，非静电场场强沿整个闭合回路的环流等于电源电动势，即

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

当穿过一个闭合导体回路所包围的面积内的磁通量发生变化时（不论这种变化是由什么原因引起的），在导体回路中就有电流产生。这种现象称为**电磁感应现象**。

回路中所产生的电流称为**感应电流**。

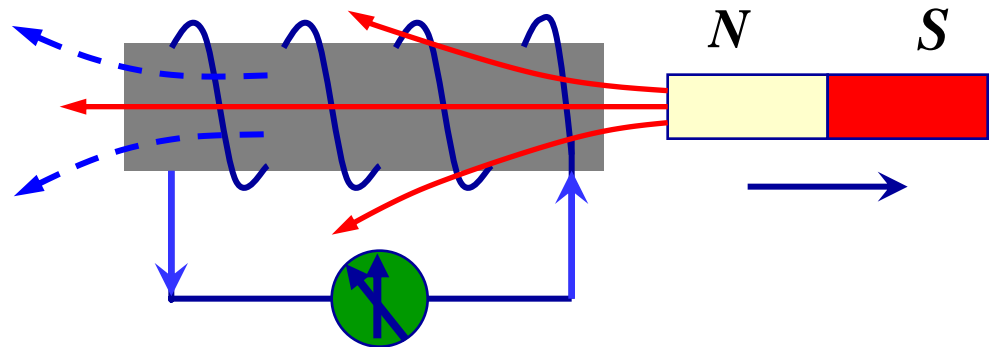
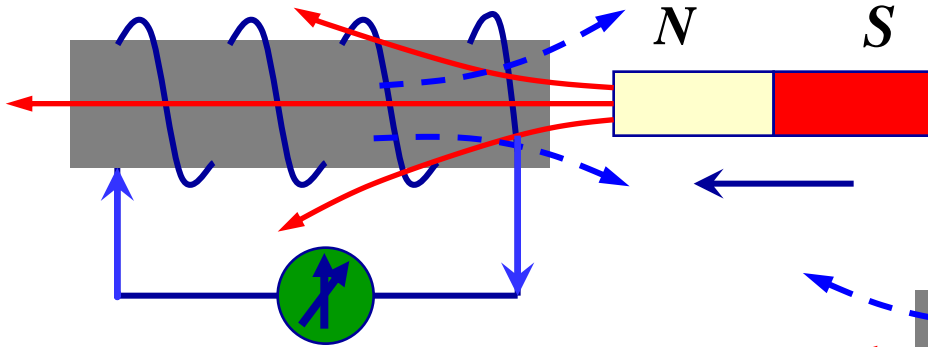
相应的电动势则称为**感应电动势**。

# 楞次定律

判断感应电流方向的**楞次定律**：闭合回路中产生的感应电流具有确定的方向，它总是使感应电流所产生的通过回路面积的磁通量，去补偿或者反抗引起感应电流的磁通量的变化。



楞次



注意：

（1）感应电流所产生的磁通量要阻碍的是磁通量的变化，而不是磁通量本身。

（2）阻碍并不意味着抵消。如果磁通量的变化完全被抵消了，则感应电流也就不存在了。

## 2. 法拉第电磁感应定律

1832年法拉第发现，在相同的条件下，不同金属导体中产生的感应电流的大小，与导体的电阻率 $\rho$ 成反比。

他意识到：感应电流是由与导体性质无关的感应电动势产生的。

即使不形成导体回路，这时不存在感应电流，但感应电动势却仍然有可能存在。



## 2. 法拉第电磁感应定律

通过回路所包围面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势  $\varepsilon_i$  与磁通量  $\Phi$  对时间的变化率成正比。

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

负号 “-”：

反映感应电动势的方向；与楞次定律一致。

$d\Phi/dt$ ： $\varepsilon_i$  正比于磁通量变化快慢。

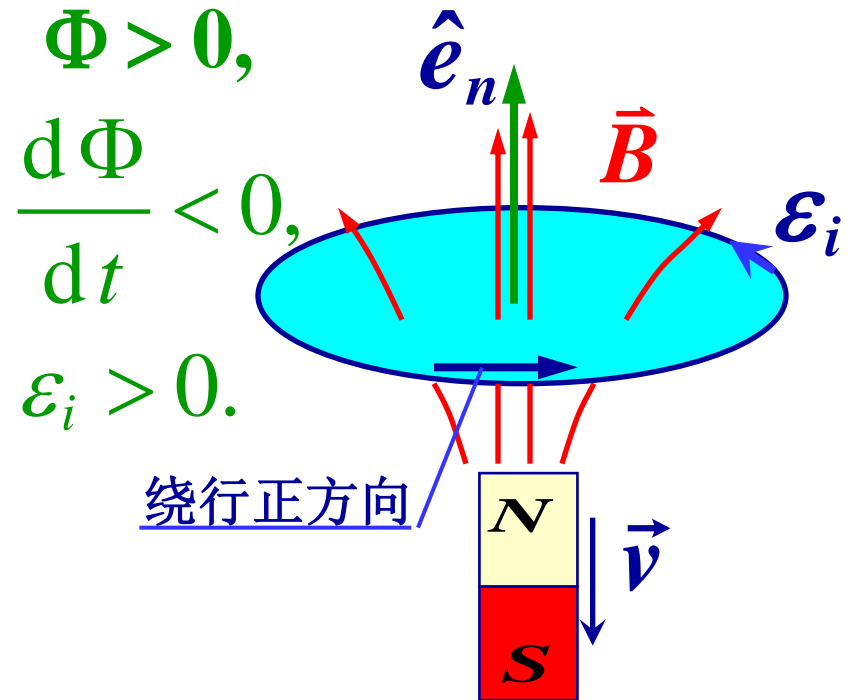
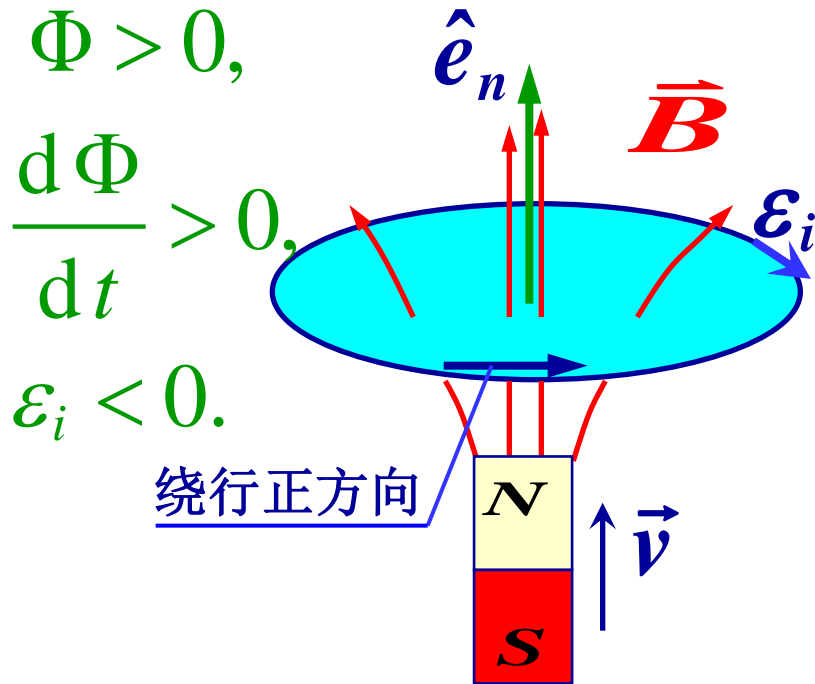
讨论：A、利用定律判定电动势方向：  
(1)首先确定一个正绕行方向和正法线方向  $\hat{e}_n$  ;

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

(2)确定磁通量的正负;

(3)确定  $d\Phi/dt$  的正负;

(4)确定电动势 $\varepsilon_i$  的方向。



**B、若回路由N匝导线串联而成：**

感应电动势为：

$$\varepsilon_i = -\underline{N} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

其中， $\Psi = N\Phi$ ， 磁链数（或全磁通）

表示通过 $N$ 匝线圈的总磁通量。

**C, 通过回路导体任一截面的感应电量:**

设闭合导体回路的总电阻为 $R$ ,

由全电路欧姆定律, 回路中的感应电流:

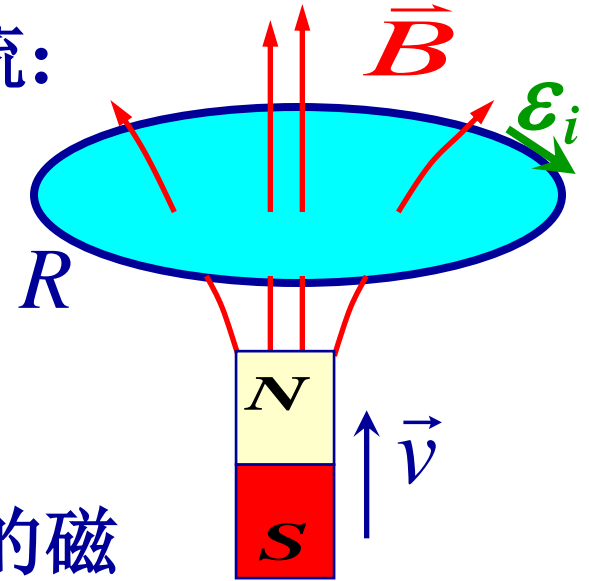
$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\therefore dq_i = I_i dt = -\frac{1}{R} d\Phi.$$

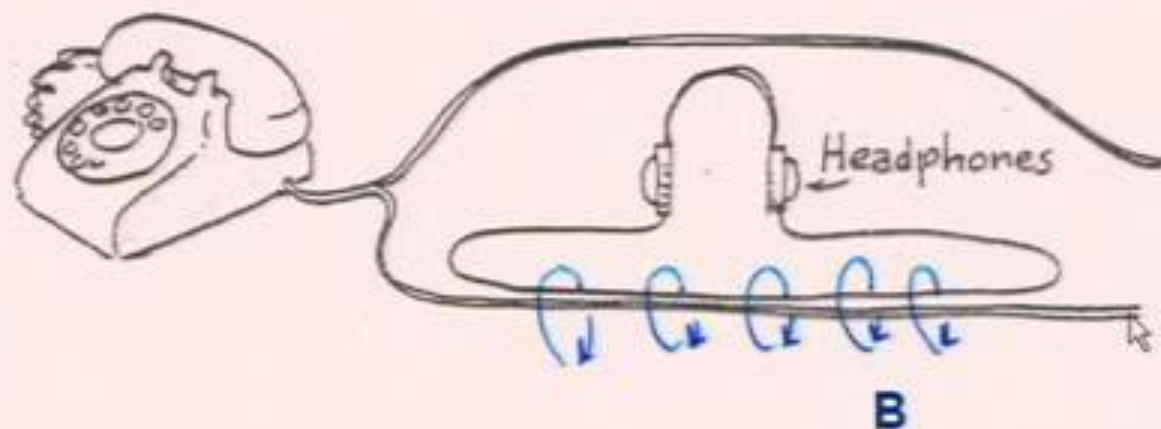
设在 $t_1$ 到 $t_2$ 时间内, 通过闭合导体回路的磁通量由 $\Phi_1$ 变到 $\Phi_2$ ,

$$\therefore \underline{q_i} = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

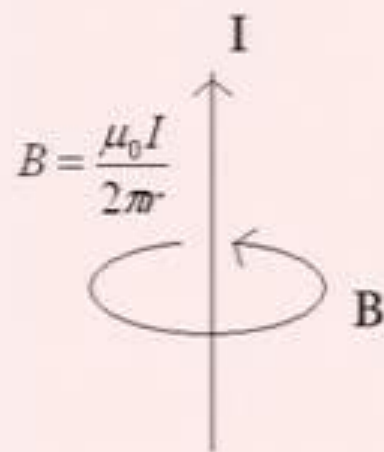
$$q_i \square \rightarrow (\Phi_2 - \Phi_1) \quad \text{——磁通计}$$

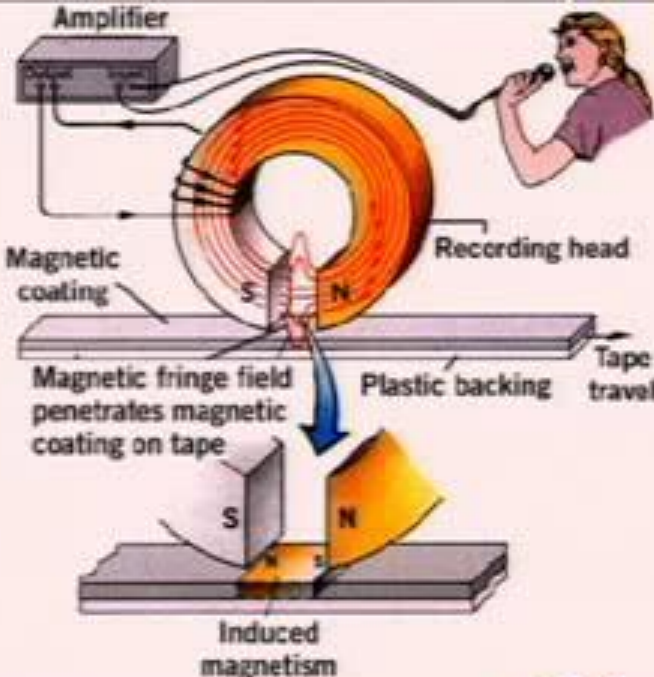




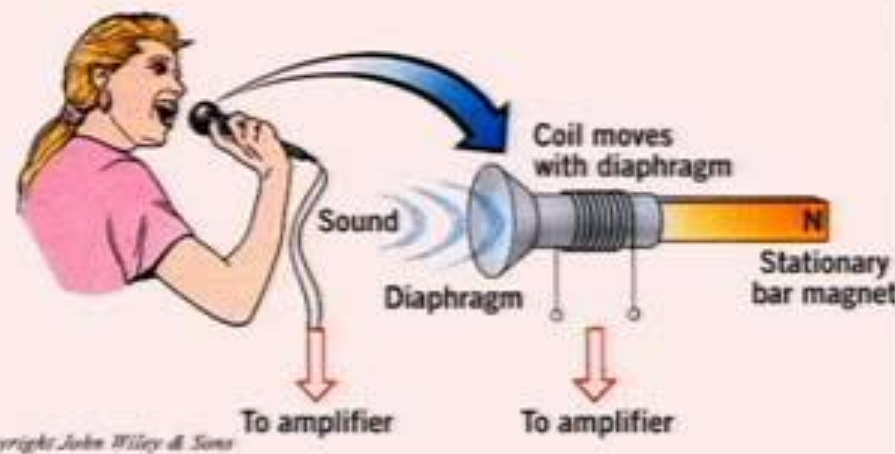
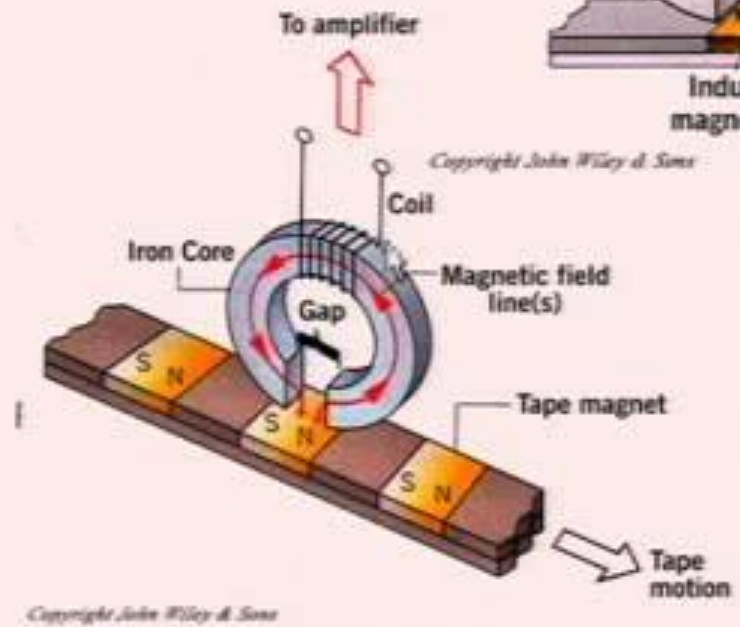
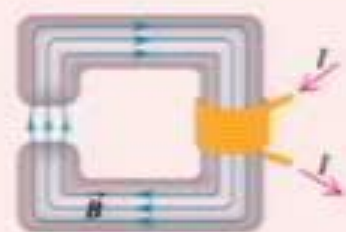


古老的竊聽器：  
**Ampere's Law** 與 **Faraday's Law**  
 的交互運用





The magnetic fringe field of the recording head penetrates the magnetic coating on the tape and causes the coating to become magnetized.



The magnetic playback head of a tape deck. As each tape magnet passes by the gap in the iron core, some of the magnetic field lines are routed through the core and the coil. The change in flux through the coil creates an induced emf. The width of the gap has been exaggerated.

例题： 矩形框导体的一边 $ab$ 可以平行滑动，长为 $l$  。  
整个矩形回路放在磁感强度为 $B$ 、方向与其平面垂直的均匀磁场中，如图。

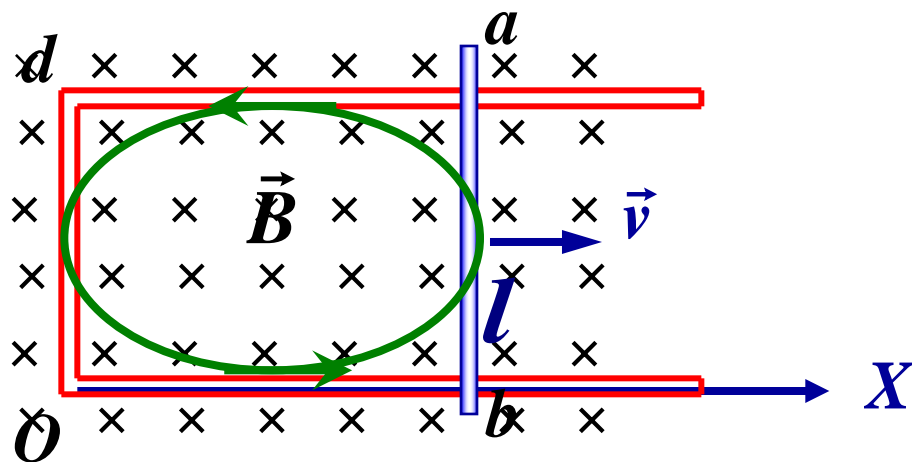
若导线 $ab$ 以恒定速率  $v$  向右运动，求闭合回路的感应电动势。

解：建立如图所示坐标轴。

设 $t$  时刻 $ab$ 的坐标为 $x$ ，取逆时针方向为回路的正绕行正方向，

$t$  时刻穿过回路的磁通量为：

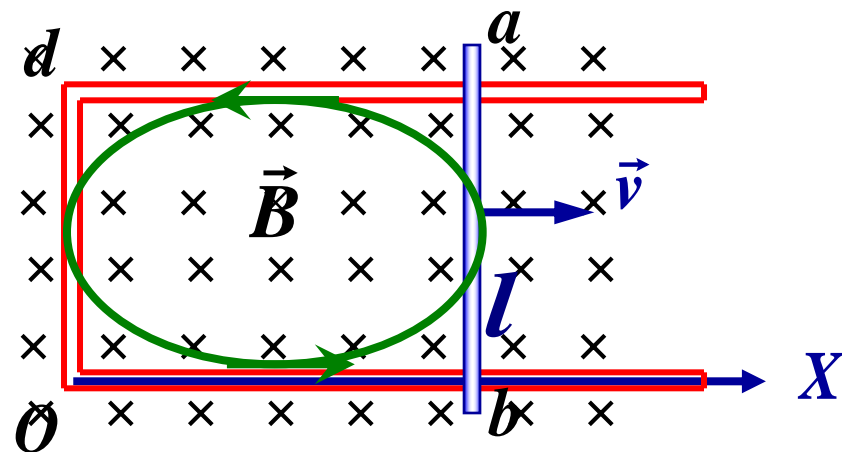
$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B \cdot lx$$





$$\Phi = -B \cdot lx$$

当导线匀速向右时，穿过回路的磁通量发生变化，回路感应电动势为：



$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = +Bl \frac{dx}{dt} = \textcircled{+} Blv$$

**正号**表示：感应电动势的方向与回路的正方向一致，即沿逆时针方向。

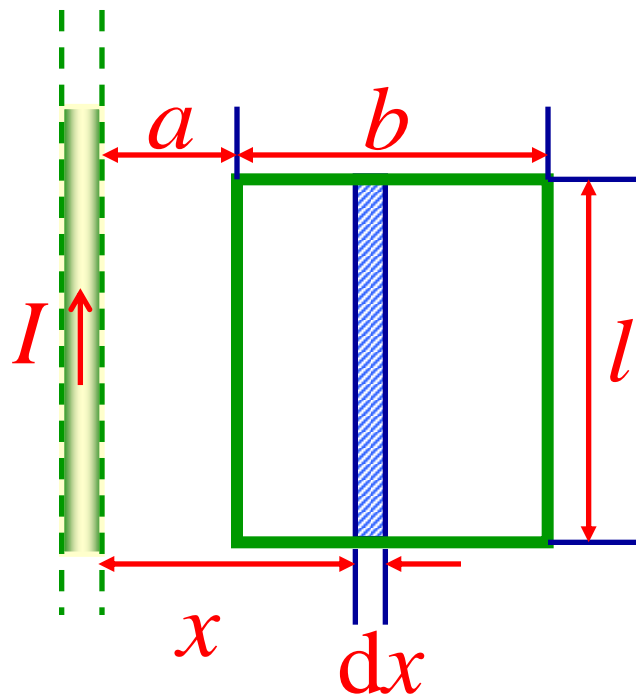
也可不选定回路绕行方向，而是根据楞次定律判断感应电动势的方向。

例题：一长直导线中通有交变电流  $I = I_0 \sin \omega t$ ，式中  $I$  表示瞬时电流， $I_0$  是电流振幅， $\omega$  是角频率， $I_0$  和  $\omega$  都是常量。在长直导线旁平行放置一矩形线圈，线圈平面与直导线在同一平面内。已知线圈长为  $l$ ，宽为  $b$ ，线圈近长直导线的一边离直导线距离为  $a$ 。求任一瞬时线圈中的感应电动势。

解：某一瞬间，距离直导线  $x$  处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

选顺时针方向为矩形线圈的绕行正方向，则通过图中阴影部分的磁通量为



$$d\Phi = B \cos \theta dS = \frac{\mu_0 I l dx}{2\pi x}$$

在该瞬时 $t$ ，通过整个线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I l_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

由于电流随时间变化，通过线圈的磁通量也随时间变化，故线圈内的感应电动势为

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I l_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \frac{d}{dt} \sin \omega t \\ &= -\frac{\mu_0 I l_0 \omega}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cos \omega t \end{aligned}$$

感应电动势随时间按余弦规律变化，其方向也随余弦值的正负作顺、逆时针转向的变化。

## § 12-2 动生电动势与感生电动势

感应电动势:  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$       $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

磁通 $\Phi$ 可按不同方式变化

磁场恒定、回路运动：动生电动势  
磁场变化、回路静止：感生电动势

} 感应电动势

【思考】非静电力是什么？

# 动生电动势

## 1. 在磁场中运动的导线内的感应电动势

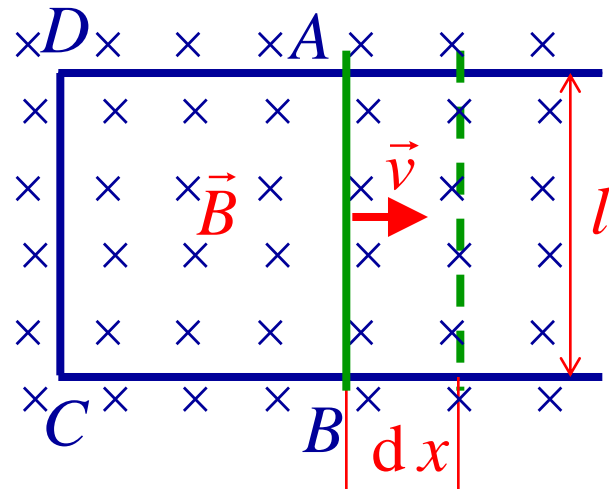
由于导体运动而产生的感应电动势，称为动生电动势。图中回路取顺时针绕向为正。

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bl dx$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= -Bl \frac{dx}{dt}$$

$$= -Blv$$



当导线 $AB$ 以速度  $\vec{v}$  向右运动时，导线内每个自由电子也就获得向右的定向速度  $\vec{v}$ ，由于导线处在磁场中，自由电子受洛伦兹力  $\vec{F}$  为

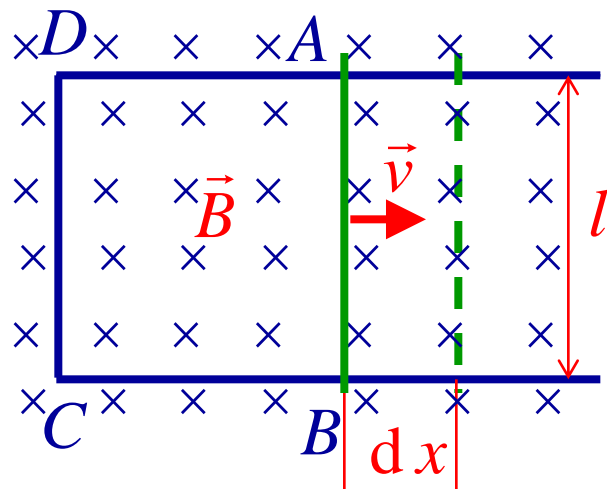
$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

若以  $\vec{E}_k$  表示非静电场强，则有  $-e\vec{E}_k = -e\vec{v} \times \vec{B}$

$$\longrightarrow \vec{E}_k = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -lvB$$

动生电动势的非静电力场来源 —— 洛伦兹力.



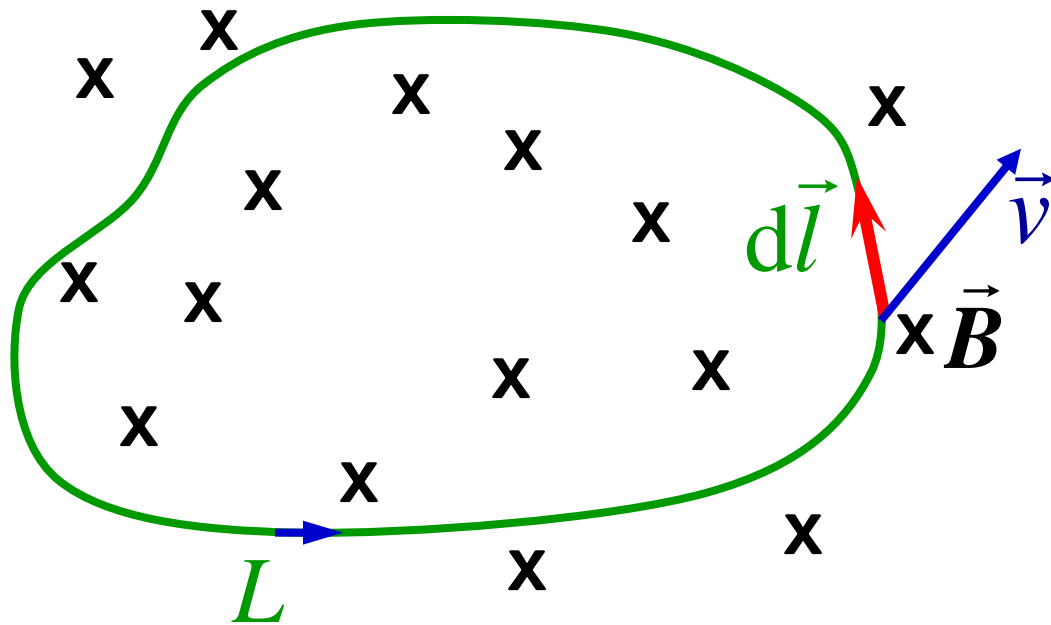
在一般情况下，磁场可以不均匀，导线在磁场中运动时各部分的速度也可以不同， $\vec{v}$ 、 $\vec{B}$  和  $d\vec{l}$  也可以不相互垂直，这时运动导线内总的动生电动势为

$$\varepsilon_i = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

由上式可看出，矢积  $\vec{v} \times \vec{B}$  与  $d\vec{l}$  成锐角时， $\varepsilon_i$  为正；成钝角时， $\varepsilon_i$  为负。因此，由上式算出的电动势有正负之分， $\varepsilon_i$  为正时，表示电动势方向顺着  $d\vec{l}$  的方向； $\varepsilon_i$  为负时，则表示电动势的方向逆着  $d\vec{l}$  的方向。

任意形状的导线回路 $L$ ，在恒定磁场中运动或形变，回路中产生的动生电动势为：

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$





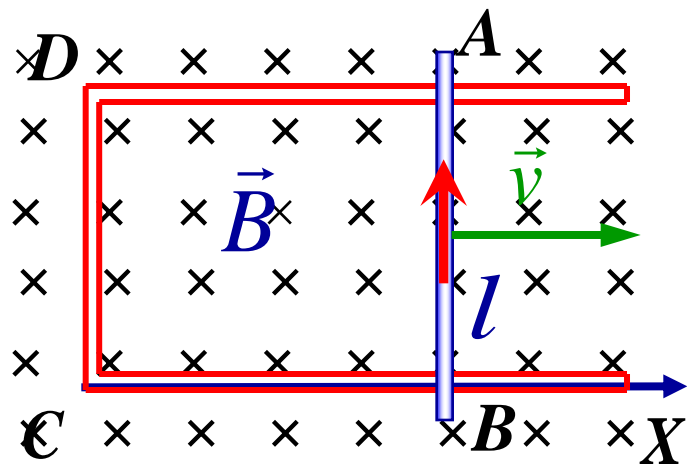
$$\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

复杂吗？

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \underline{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}}$$

新矢量  $\vec{D}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } AB \sin \theta, \\ \text{方向: 右手螺旋} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{C}$$



$$\underline{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$$

## 能量转换分析——电能从哪里转化而来？

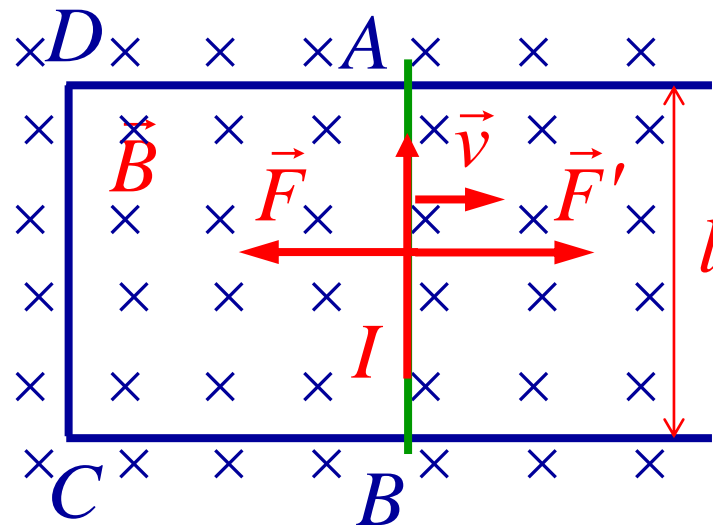
设电路中感应电流为 $I$ ，则感应电动势做功的功率为

$$P = I_i \varepsilon_i = I_i B l v$$

通电导体棒 $AB$ 在磁场中受到安培力大小为 $F_m = IlB$ ，方向向左。为了使导体棒匀速向右运动，必须有外力 $F_{\text{外}}$ 与 $F_m$ 平衡，它们大小相等，方向相反。因此，外力的功率为

$$P = F' v = I_i l B v$$

这正好等于上面求得的感应电动势做功的功率。



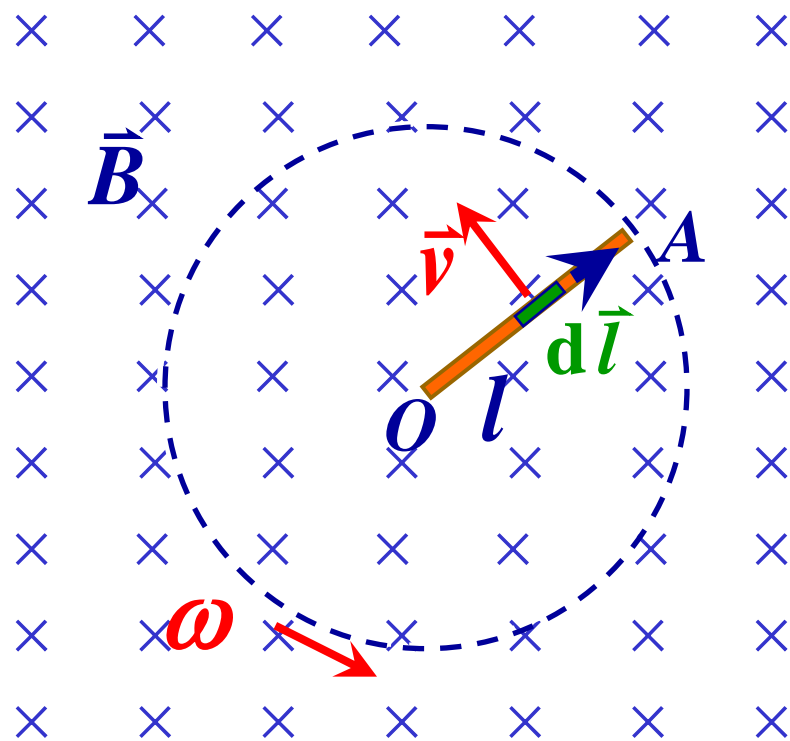
例： 长为 $L$ 的铜棒在均匀磁场  $\vec{B}$  中，在与磁场方向垂直的平面内以角速度 $\omega$  绕 $O$ 轴逆时针匀速转动。

求：棒中的动生电动势。

$$\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

分析：铜棒上各点处  $\vec{B}$  相同，但是  $\vec{v}$  不相同，因此有必要进行微元分割。

解：在距 $O$ 点为  $l$  处取线元 $d\vec{l}$ ，其方向沿 $O$ 指向 $A$ ，其速度大小为  $v = \omega l$ ，



$$\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

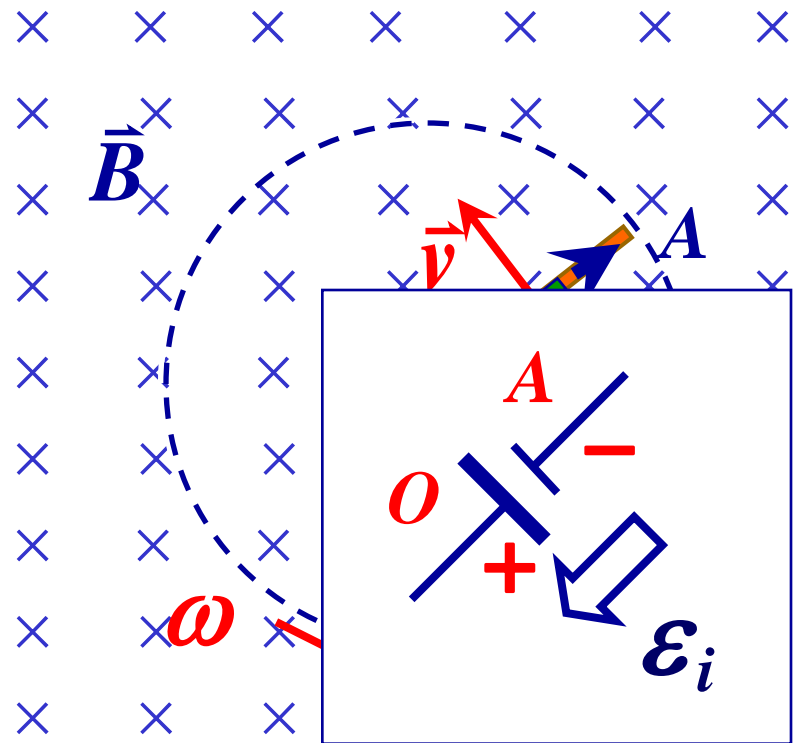
由于  $\vec{v}, \vec{B}, d\vec{l}$  相互垂直,  
所以  $d\vec{l}$  上的动生电动势为:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= -vB dl \end{aligned}$$

由此可得金属棒上总电动势为:

$$\varepsilon_i = \int_L d\varepsilon_i = \int_0^L -vB dl = -\int_0^L B\omega l dl = \left(-\frac{1}{2}\right) B\omega L^2$$

因为  $\varepsilon_i < 0$  , 所以  $\varepsilon_i$  的方向为 A (负极)  $\rightarrow$  O (正极) ,  
即 O 点电势较高.



例： 如图，导线 $ab$ 以速率 $v$ 沿平行于长直载流导线的方向运动， $ab$ 与直导线共面，且与它垂直。导线中电流强度为 $I$ ， $ab$ 长 $L$ ， $a$ 端到直导线的距离为 $d$ ，求导线 $ab$ 中的动生电动势，并判断哪端电势较高。

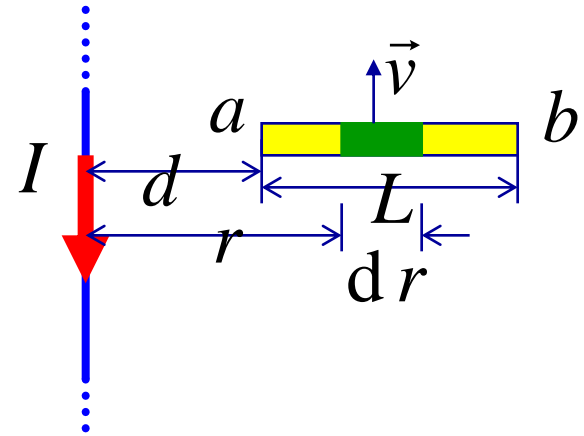
解：（1）应用  $\mathcal{E}_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$  求解

在导线 $ab$ 所在直线上距长直载流导线 $r$ 处取一线元 $dr$ ，方向向右。

$$d\mathcal{E}_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b d\mathcal{E} = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

$\mathcal{E}_{ab} > 0$ ，电动势的方向由 $a$ 指向 $b$ ， $b$ 端电势较高。



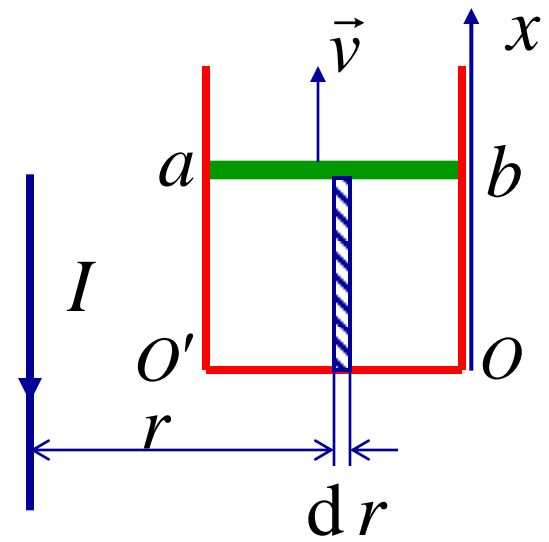
(2) 应用电磁感应定律求解  
 设某时刻导线 $ab$ 到 $U$ 形框底边距离为 $x$ ，取顺时针方向为回路正方向，则该时刻通过回路 $aboo'a$ 的磁通量为

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_d^{d+L} -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} x dr = -\frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

$$\varepsilon_{ab} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L}{d}\right) \frac{dx}{dt} = \frac{\mu l v}{2\pi} \ln \frac{d+L}{d}$$

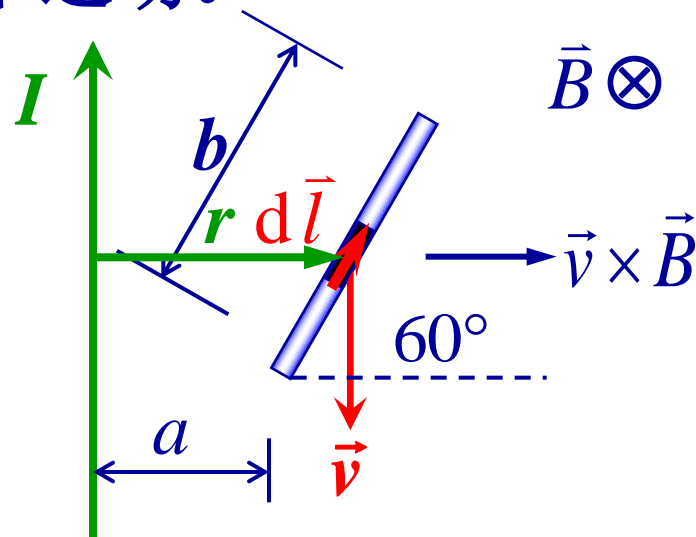
$\varepsilon_{ab} > 0$ 表示电动势的方向与所选回路正方向相同，即沿顺时针方向。因此在导线 $ab$ 上，电动势由 $a$ 指向 $b$ ， $b$ 端电势较高。



例：长直导线  $I$  附近的导体作向下运动。

求其动生电动势。

解：  $\varepsilon_i = \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot \underline{\underline{d\vec{l}}}$   
 $= \int_L \underline{\underline{vB}} \cdot \underline{\underline{dl}} \cdot \cos 60^\circ$



$$(r = a + l * \cos 60^\circ), \quad dl = \frac{dr}{\cos 60^\circ}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_L \frac{1}{r} \cos 60^\circ \cdot \frac{dr}{\cos 60^\circ} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a + (b/2)}{a}.$$

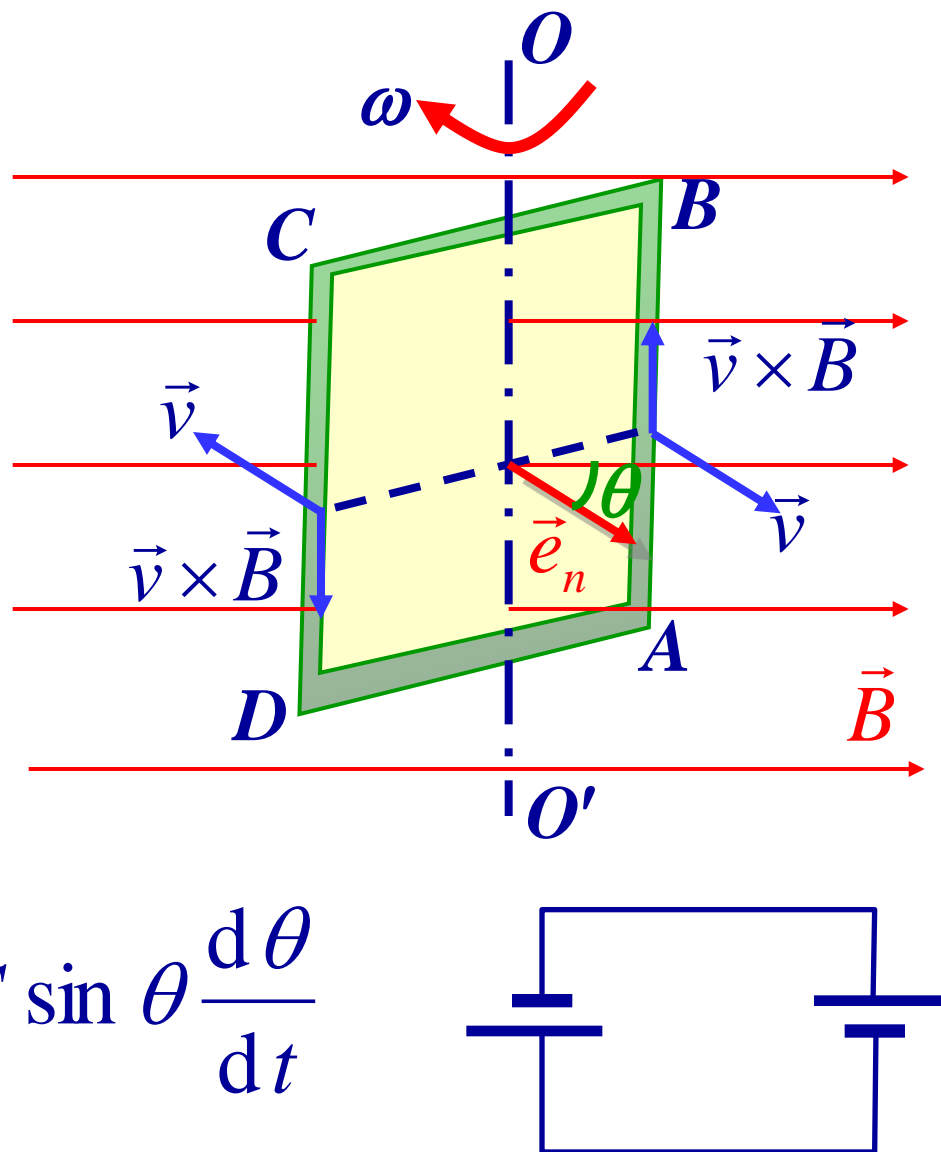
$\varepsilon_i > 0$ , 电动势正方向与积分路径方向相同, 上端电势高。

## 2. 在磁场中转动的线圈内的感应电动势

矩形线圈 $ABCD$ 的匝数为 $N$ ，面积为 $S$ ，在匀强磁场中绕固定轴 $OO'$ 转动。磁感应强度 $\vec{B}$ 与 $OO'$ 轴垂直。当 $t = 0$ 时， $\vec{B}$ 与 $\vec{e}_n$ 之间的夹角为 $0$ ，经过时间 $t$ ，与 $\vec{B}$ 之 $\vec{e}_n$ 间的夹角为 $\theta$

$$\Phi = BS \cos \theta$$

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$





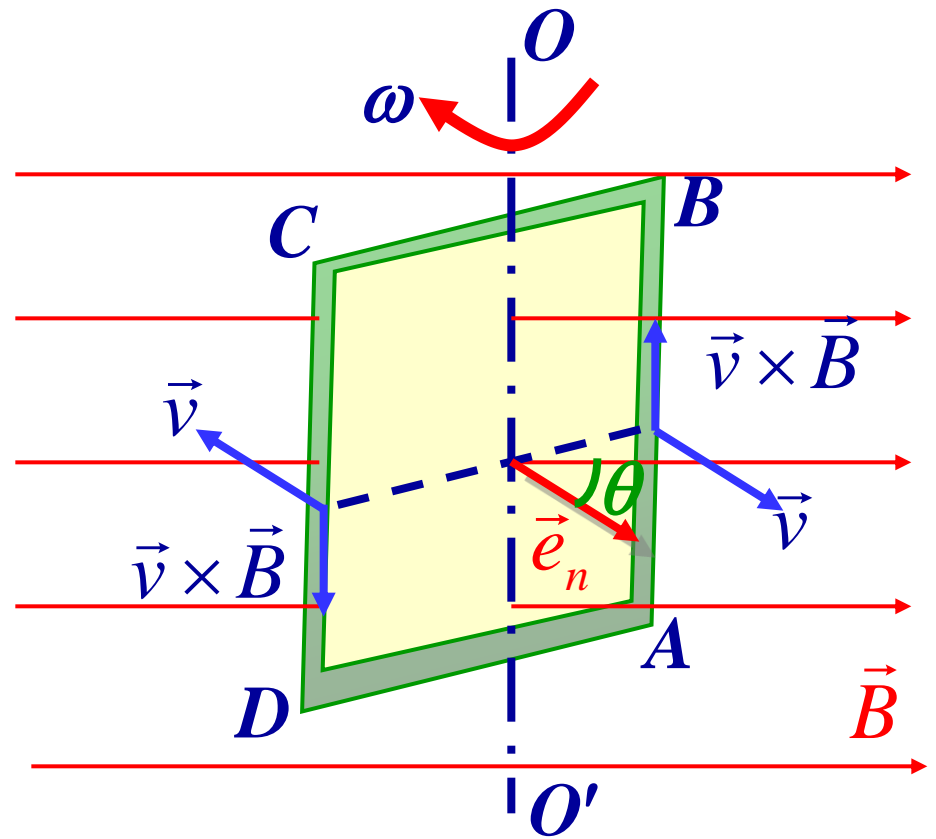
$$\because \theta = \omega t$$

$$\therefore \varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t$$

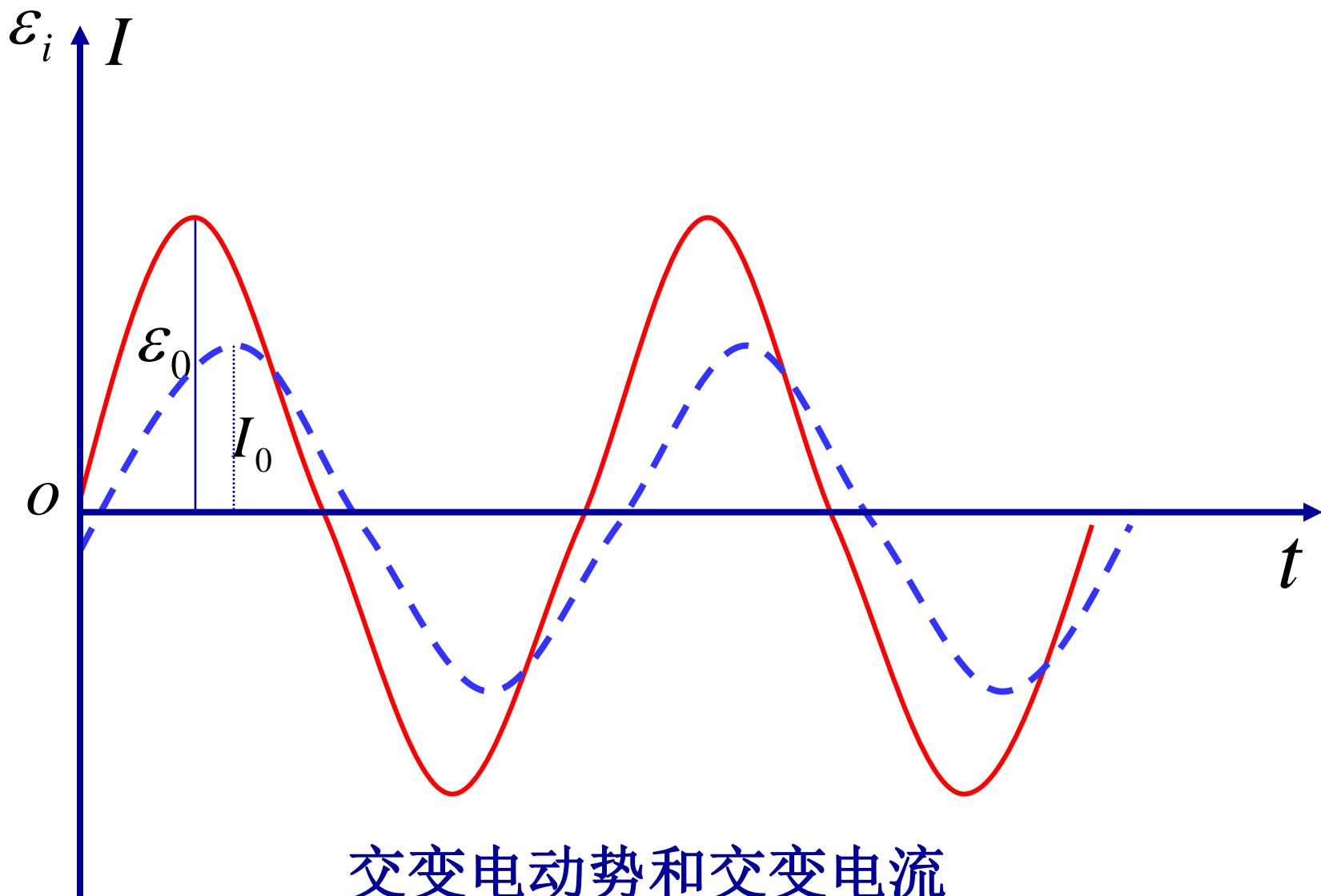
$$\text{令 } NBS\omega = \varepsilon_0$$

$$\text{则 } \varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin \omega t$$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

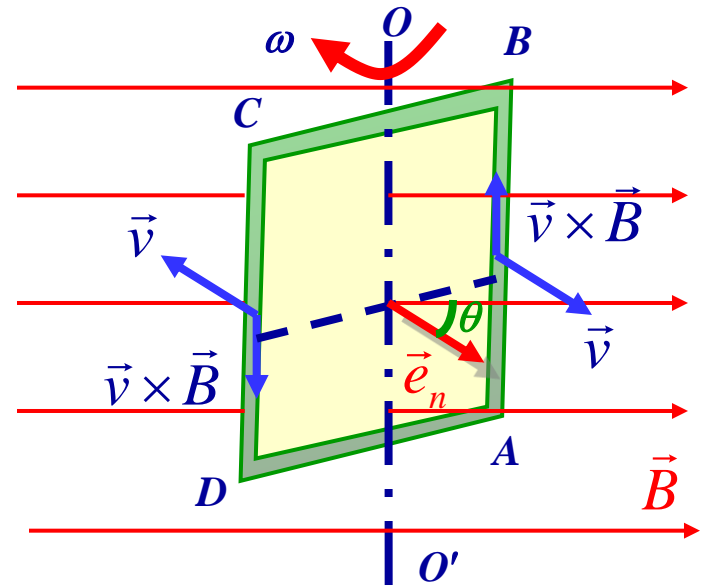


在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，这种电动势称为交变电动势。在交变电动势的作用下，线圈中的电流也是交变的，称为交变电流或交流。



例题：边长为 $l = 5\text{cm}$ 的正方形线圈，在磁感应强度为 $B=0.84\text{T}$ 的磁场中绕轴转动，线圈铜线的电阻率为 $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ，截面积 $S = 0.5\text{m}^2$ ，共10匝。线圈转速为 $n = 10\text{r/s}$ ，转轴与磁场方向垂直。求（1）当线圈由其平面与磁场垂直而转过 $30^\circ$ 时线圈内的动生电动势；（2）线圈转动时的最大电动势及该时刻线圈的位置；（3）由图示位置开始转过 $1\text{s}$ 时线圈内的动生电动势。

解：取逆时针的绕行方向为正方向，线圈平面与磁场方向垂直时为计时起点( $t = 0$ )，当线圈转过角 $\theta$ 时，通过单匝线圈磁通量为



$$\Phi = BS \cos \theta = Bl^2 \cos \theta$$

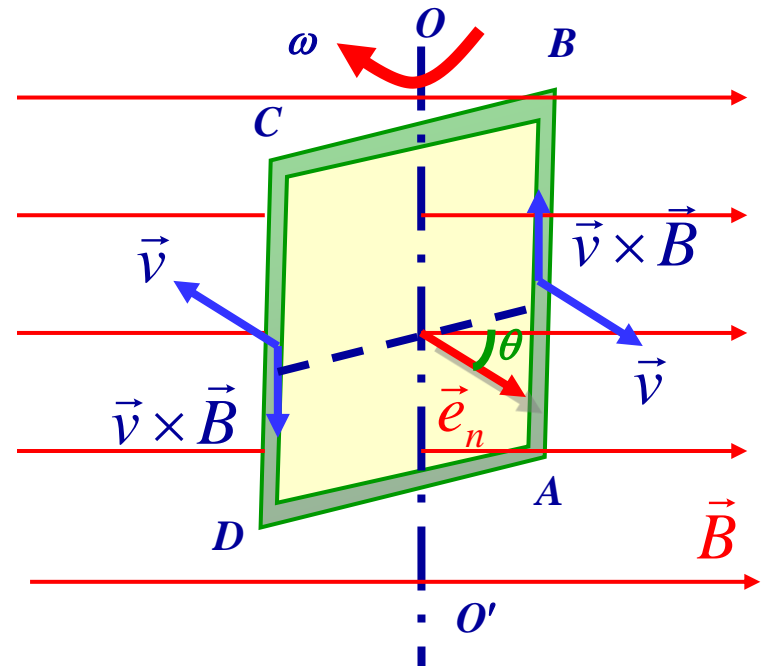
设线圈转动角速度为 $\omega$

$$\omega = 2\pi n, \quad \theta = 2\pi nt$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} (Bl^2 \cos(2\pi nt)) \\ &= NBl^2 2\pi n \sin(2\pi nt) \end{aligned}$$

(1) 当 $\theta = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= NBl^2 2\pi n \sin 30^\circ \\ &= 0.66V \end{aligned}$$



(2) 当  $|\sin 2\pi n t| = 1$ ,

即当  $\theta = 90^\circ$ 、 $\theta = 270^\circ$  等位置时电动势  $\varepsilon_i$  最大

$$\varepsilon_i = NBl^2 2\pi n = 1.32\text{V}$$

(3) 当  $t = 1\text{s}$  时,

$$\varepsilon_i = NBl^2 2\pi n \sin 2\pi n = 0$$

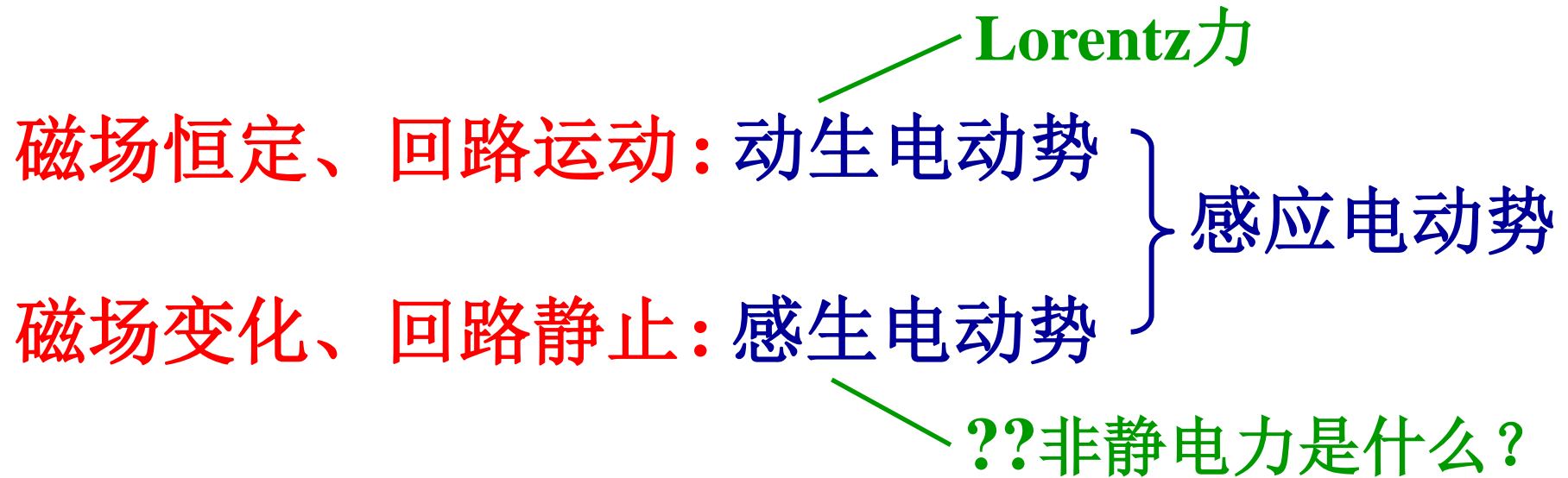
本题也可以将线圈看作由四段长为  $l$  的导线在磁场中运动产生动生电动势之和。显然只有  $ab$  和  $cd$  两边切割磁感应线产生电动势

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_{iab} + \varepsilon_{icd} = 2NBlv \sin \theta = 2NBl\omega \frac{l}{2} \sin \omega t \\ &= NBl^2 2\pi \sin 2\pi n t\end{aligned}$$

## 感生电动势 有旋电场

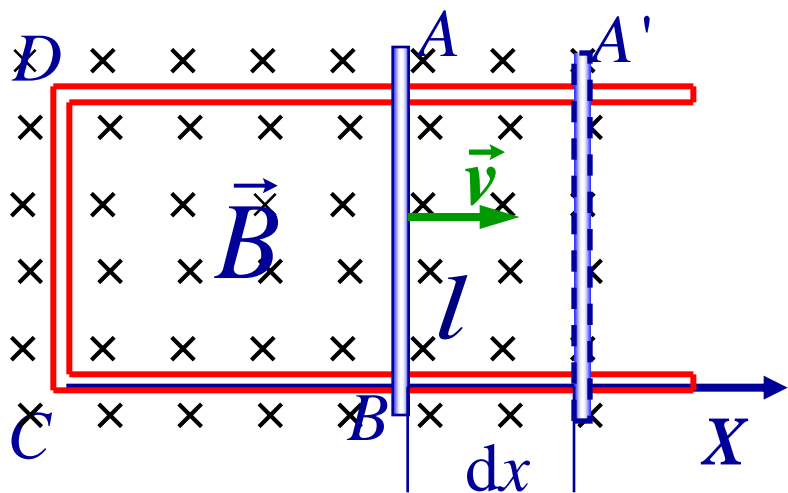
感应电动势:  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$      $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

磁通 $\Phi$ 可按不同方式变化

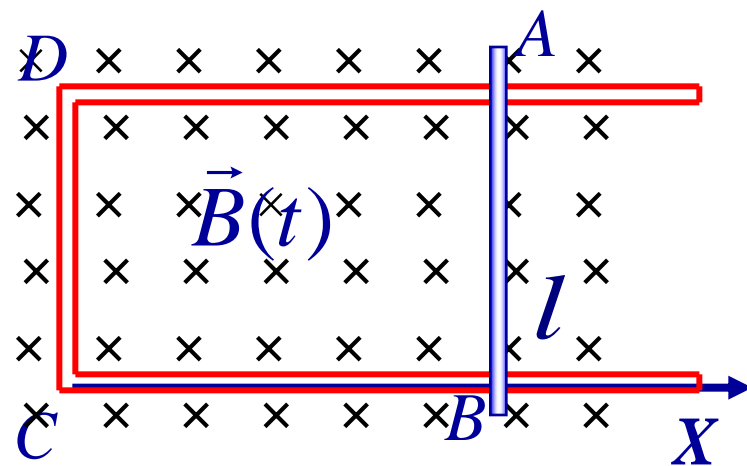


## 1. 感生电场

当导体回路不动，由于**磁场变化**引起磁通量改变而产生的感应电动势，叫做感生电动势。



# 动生电动势



# 感生电动势

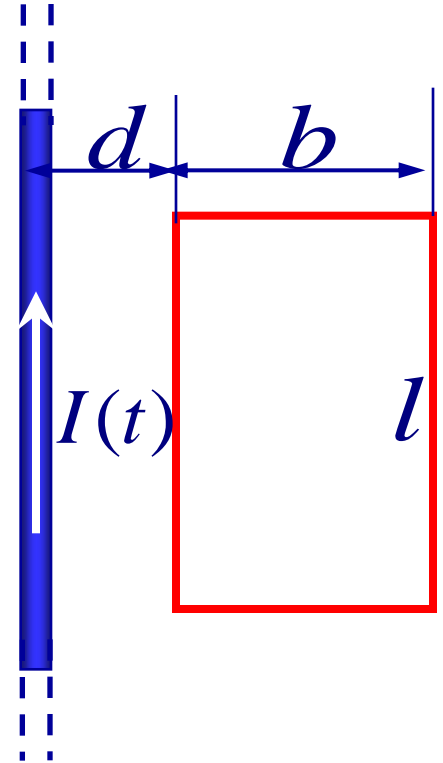
一长直导线中通有交变电流  $I = I_0 \sin \omega t$ 。在长直导线旁平行放置一矩形线圈，线圈相对导线静止。

求：任意瞬时，线圈中的感应电动势。

线圈内产生的感应电动势  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，

但，线圈相对磁场并未发生相对运动，  
——不存在Lorentz力驱动的动生电动势。

Lorentz力无法解释非静电力起源，  
非静电力到底是什么？



Maxwell提出：变化的磁场在其周围激发了一种电场，  
这种电场称为感生电场。——提供非静电力



# 天才物理学家 数学家 麦克斯韦

1847年进入爱丁堡大学学习数学和物理。

1850年转入剑桥大学三一学院数学系学习。

1854年以第二名的成绩获史密斯奖学金，毕业留校任职两年。

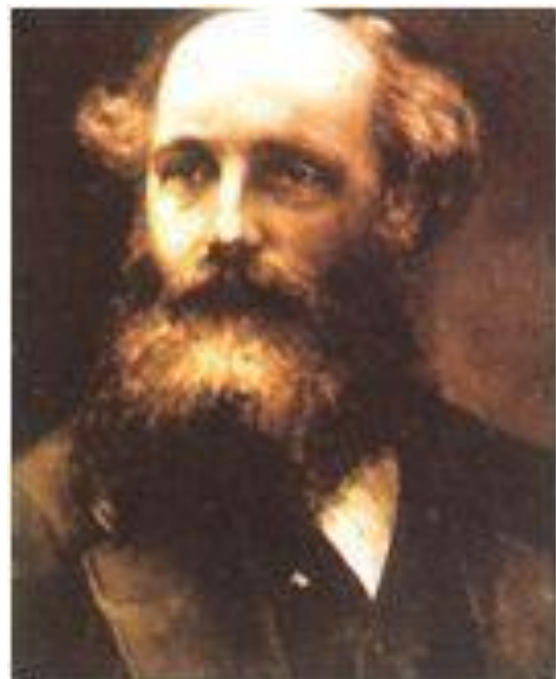
1856年在苏格兰阿伯丁的马里沙耳任自然哲学教授。

1860年到伦敦国王学院任自然哲学和天文学教授。

1861年选为伦敦皇家学会会员。

1865年春辞去教职回到家乡系统地总结他的关于电磁学的研究成果，完成了电磁场理论的经典巨著《论电和磁》，并于1873年出版

1871年受聘为剑桥大学新设立的卡文迪什实验物理学教授，负责筹建著名的卡文迪什实验室，1874年建成后担任这个实验室的第一任主任，直到1879年11月5日在剑桥逝世。




1831~1879

道光11年~~光绪5年

当导体回路不动，由于磁场变化引起磁通量改变而产生的感应电动势，叫做**感生电动势**。

变化的磁场在其周围激发了一种电场，这种电场称为**感生电场**。

以  $\vec{E}$  表示感生电场的场强，根据电源电动势的定义及电磁感应定律，则有

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$


$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

在磁场变化、回路静止的情况下

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

说明:

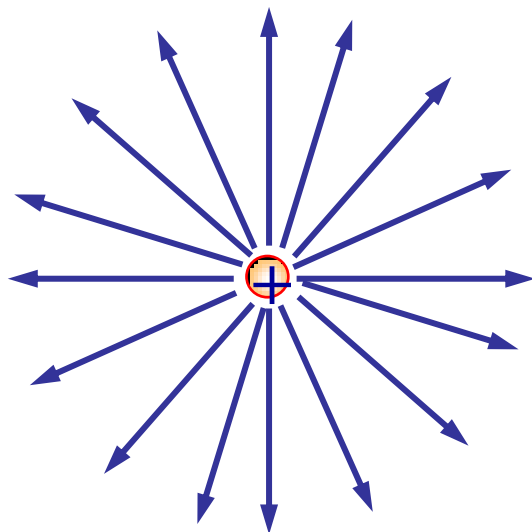
(1) 自然界中存在着两种以不同方式激发的电场，电场的性质也截然不同。

A, 静止电荷→静电场

保守力场:

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$$

电场线不闭合! (无旋场)



B, 变化磁场→感生电场

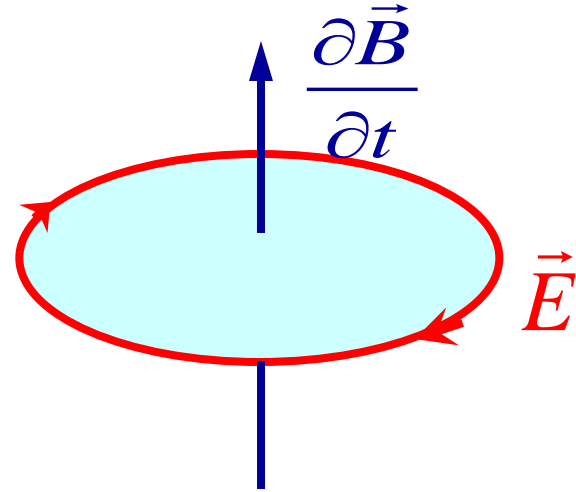
非保守力场:

$$\oint \vec{E}_{\text{感生}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \neq 0$$

电场线是无头无尾的闭合曲线! (有旋场)

(2) 感生电场  $\vec{E}$  的电场线的绕行方向，与所围的  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  的方向构成左螺旋关系。

$$\oint \vec{E}_{\text{感生}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$



(3) 感生电场是客观存在的，并不取决于空间有无导体回路存在。变化的磁场总是在空间激发电场。



## (4) 计算感应电动势的两种方法:

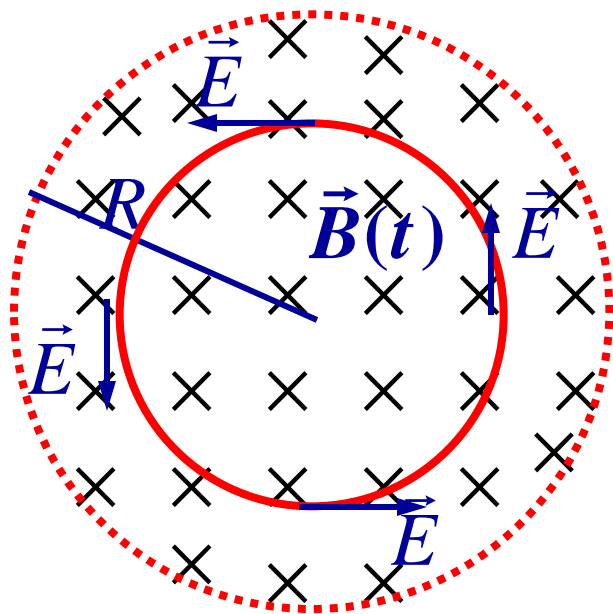
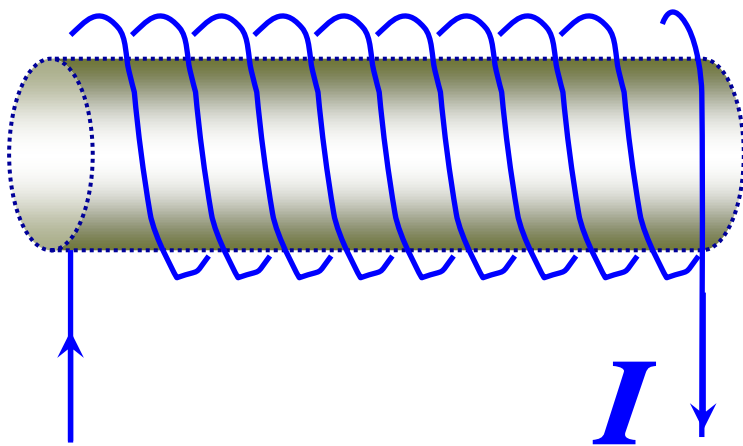
### a 通量法则——法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

### b 按感生和动生电动势分别计算

$$\mathcal{E}_i = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

例： 在半径为  $R$  的无限长螺线管内部的磁场  $\vec{B}$  随时间作线性变化 ( $\frac{dB}{dt} = \text{常量}$ ) 时，求管内外的感生电场  $\vec{E}_{\text{感生}}$ 。



解：由场的对称性可知，变化磁场所激发的感生电场的电场线在管内外都是与螺线管同轴的同心圆。

同一电场线（同心圆）上不同位置处  $E$  的大小相同。

$$\oint \vec{E}_{\text{感生}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

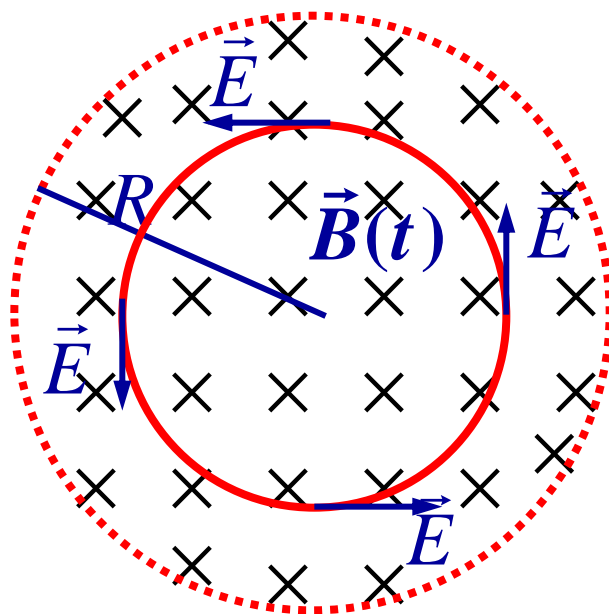
任取一电场线作为闭合回路，取逆时针为绕行方向。

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感生}} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_{\text{感生}} dl$$

$$= 2\pi r E_{\text{感生}}$$

$$= - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore E_{\text{感生}} = - \frac{1}{2\pi r} \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$





$$E_{\text{感生}} = -\frac{1}{2\pi r} \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

1)  $r < R$

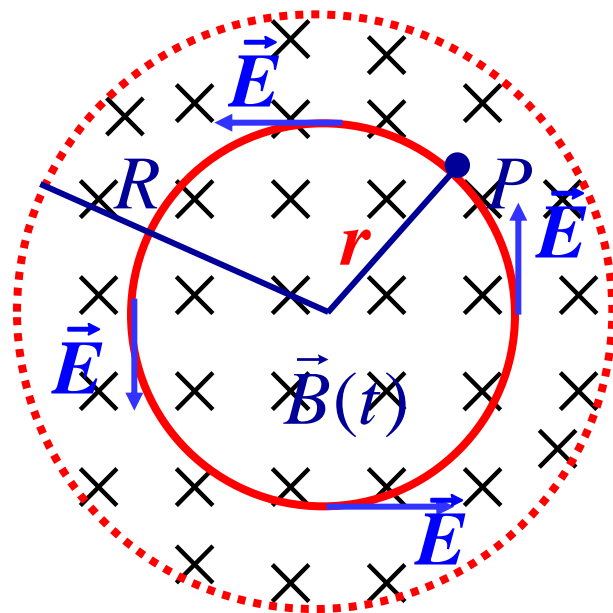
取积分面为半径为 $r$ 的圆面,

$$\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_s \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

$$\left( \frac{dB}{dt} = \text{常量} \right) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E_{\text{感生}} = -\frac{1}{2\pi r} \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$\vec{E}$  的方向沿圆周切线, 指向与圆周内的  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  成左旋关系。



$$E_{\text{感生}} = -\frac{1}{2\pi r} \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

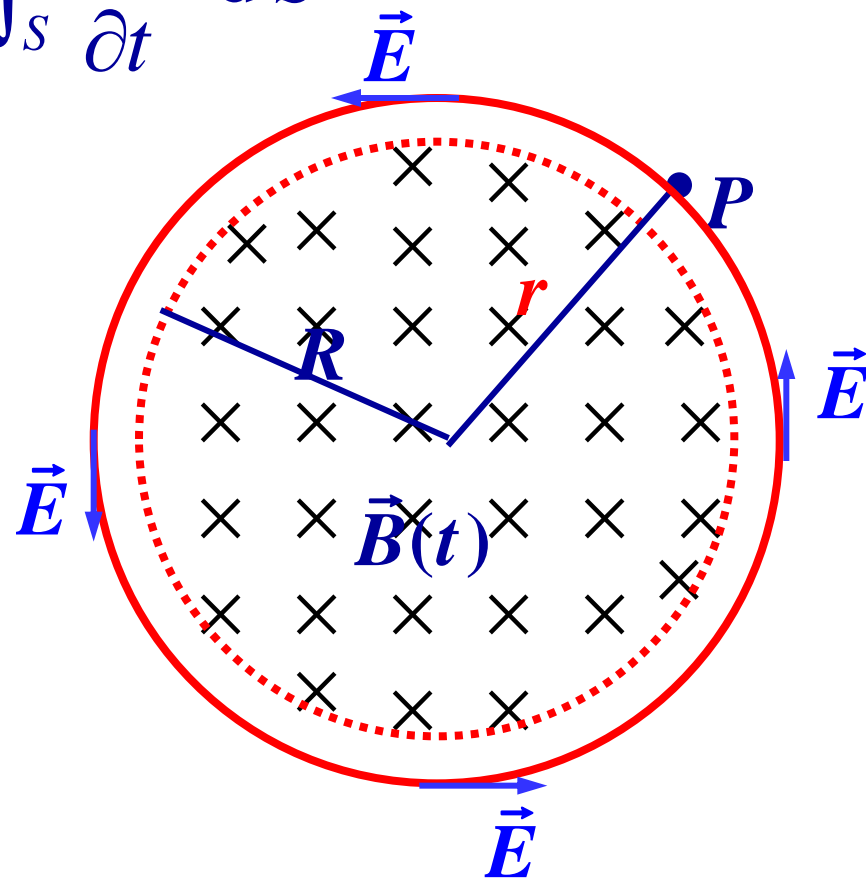
2)  $r > R$

取积分面为半径为 $r$ 的圆面,

$$\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_s \frac{\partial B}{\partial t} dS$$

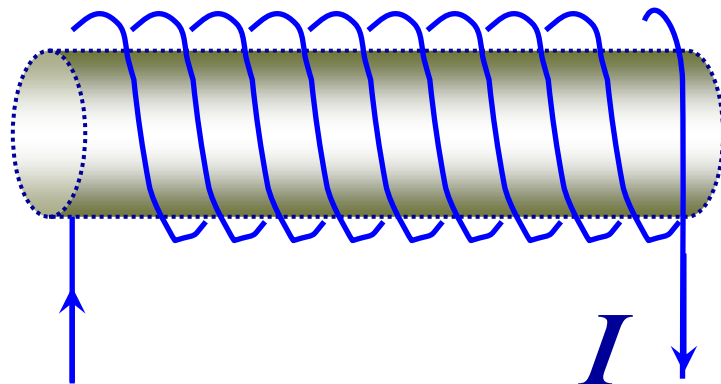
$$= -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\therefore E_{\text{感生}} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

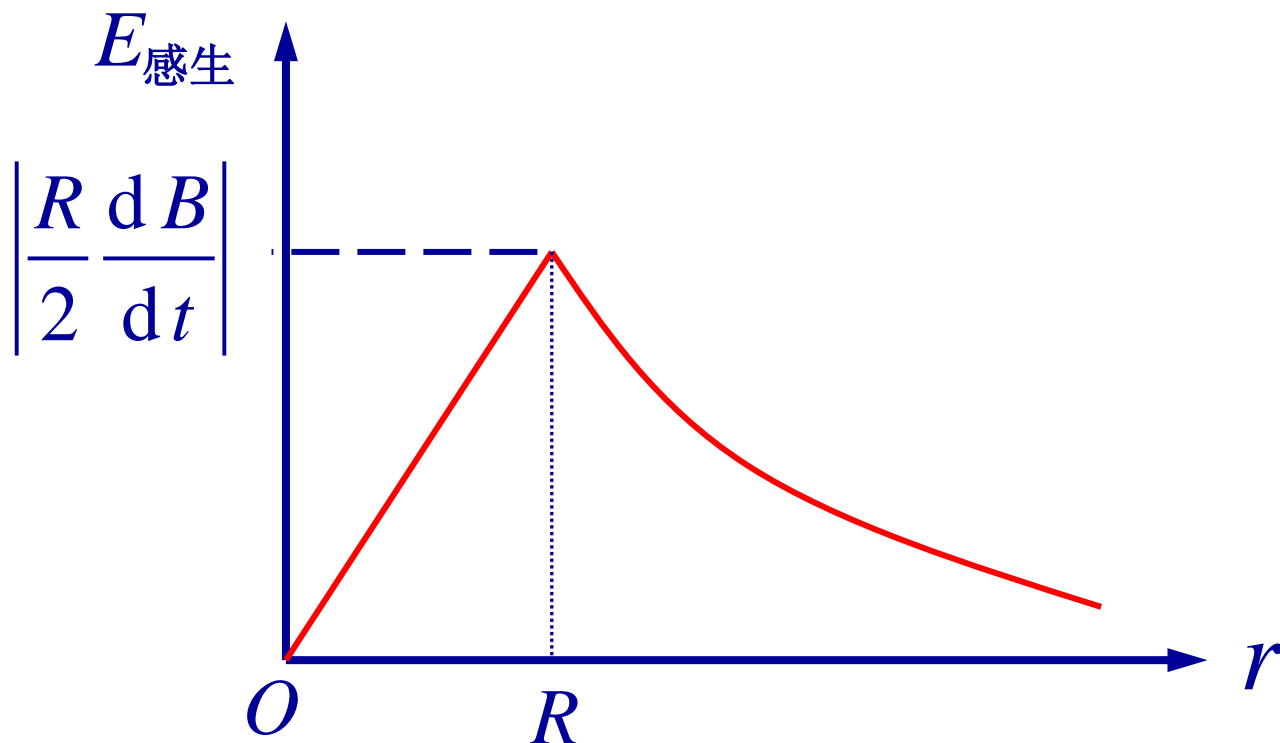


$\vec{E}$  的方向沿圆周切线, 指向与圆周内的  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  成左旋关系。

$$\therefore E_{\text{感生}} = \begin{cases} \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}, & (r < R) \\ \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}, & (r > R) \end{cases}$$



螺线管内外  
感生电场 vs  
离轴线距离



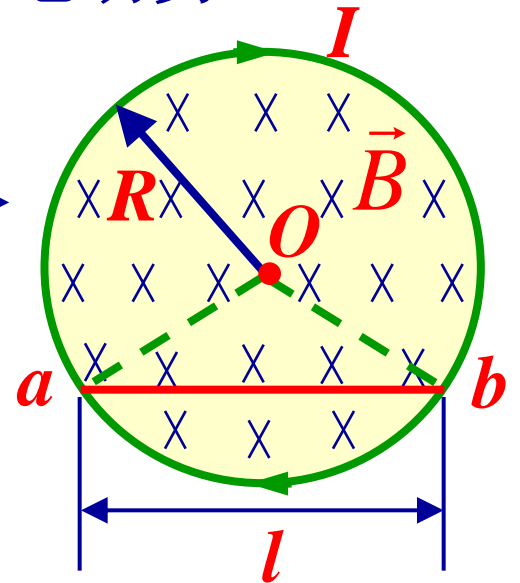
例题：如图，半径为 $R$ 的圆柱形体积内充满磁感应强度为 $B(t)$ 的均匀磁场，有一长为 $l$ 的金属棒放在磁场中，设 $dB/dt$ 为已知，求棒两端的感生电动势。

解法1：选闭合回路 $Oab$ ，方向为逆时针

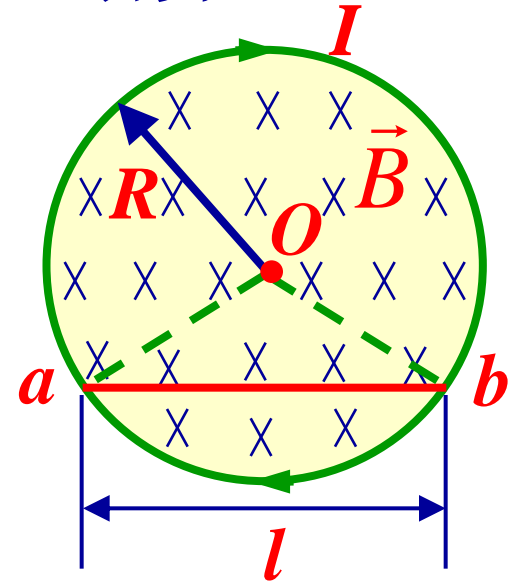
$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \left( \int_O^a + \int_a^b + \int_b^O \right) \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= 0 + \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + 0 = -\frac{d\Phi}{dt}\end{aligned}$$

$$= \iint_S \frac{\partial B}{\partial t} dS = \frac{dB}{dt} \iint_S dS = \frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} = \varepsilon_{ab}$$

方向为 $a \rightarrow b$



例题：如图，半径为 $R$ 的圆柱形体积内充满磁感应强度为 $B(t)$ 的均匀磁场，有一长为 $l$ 的金属棒放在磁场中，设 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 为已知，求棒两端的感生电动势。

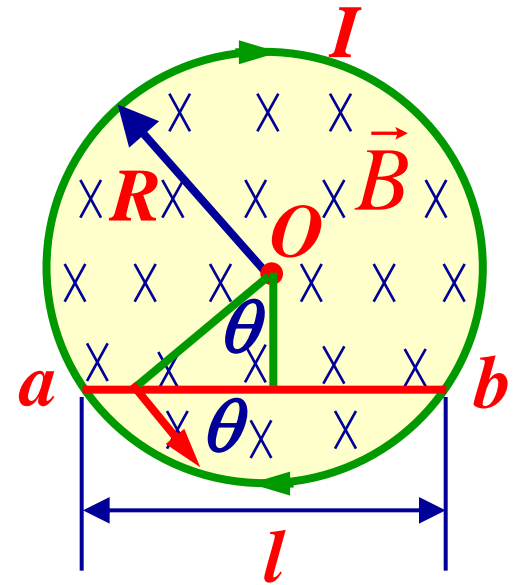


解法2：直接对感应电场积分，方向为 $a \rightarrow b$

$$\varepsilon_i = \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_i \cos \theta dl = \int_a^b \frac{r \cos \theta}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dl$$

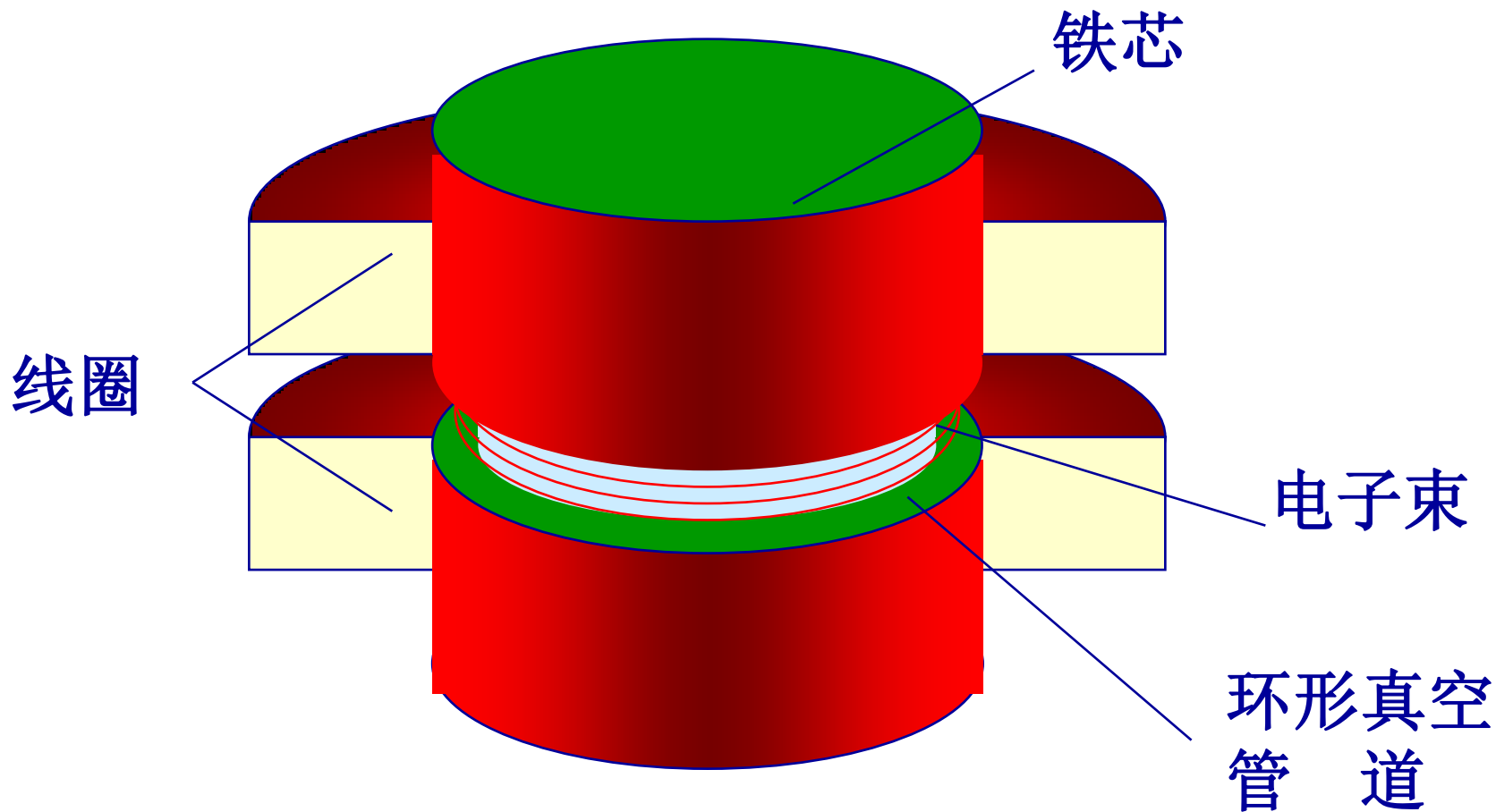
$$= \int_a^b \frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dl = \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b dl$$

$$= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} l = \frac{dB}{dt} \frac{1}{2} l \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$$

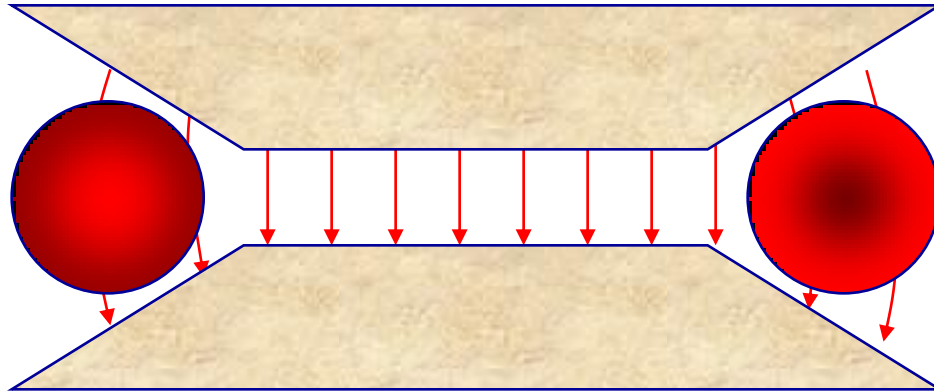


## 2. 电子感应加速器

电子感应加速器是利用感应电场来加速电子的一种设备。



它的柱形电磁铁在两极间产生磁场。在磁场中安置一个环形真空管道作为电子运行的轨道。当磁场发生变化时，就会沿管道方向产生感应电场。射入其中的电子就受到这感应电场的持续作用而被不断加速。





### 3. 涡电流

当大块导体，特别是金属导体处在变化的磁场中时，由于通过金属块的磁通量发生变化，因此在金属块中产生感应电动势。而且由于大块金属电阻特别小，所以往往可以产生极强的电流，这些电流在金属内部形成一个个闭合回路，所以称作涡电流，又叫涡流。

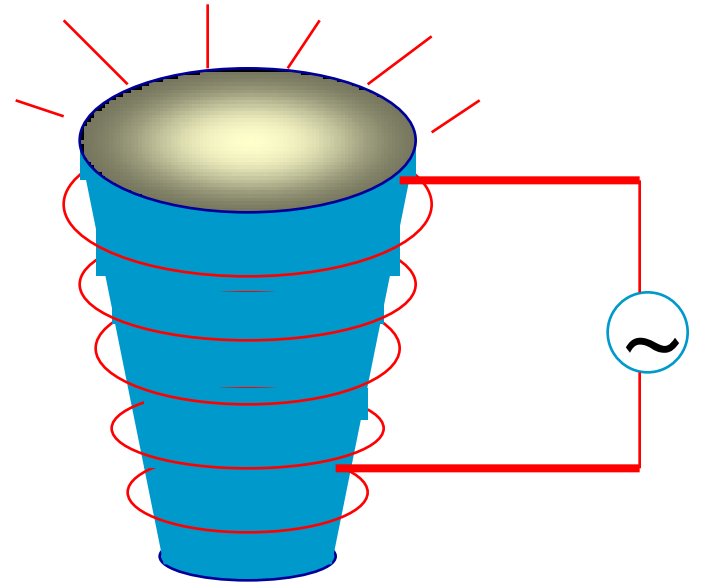
应用：

- 1) 涡流冶炼金属
- 2) 电动阻尼器
- 3) 电磁灶
- 4) 电磁感应加热抽真空

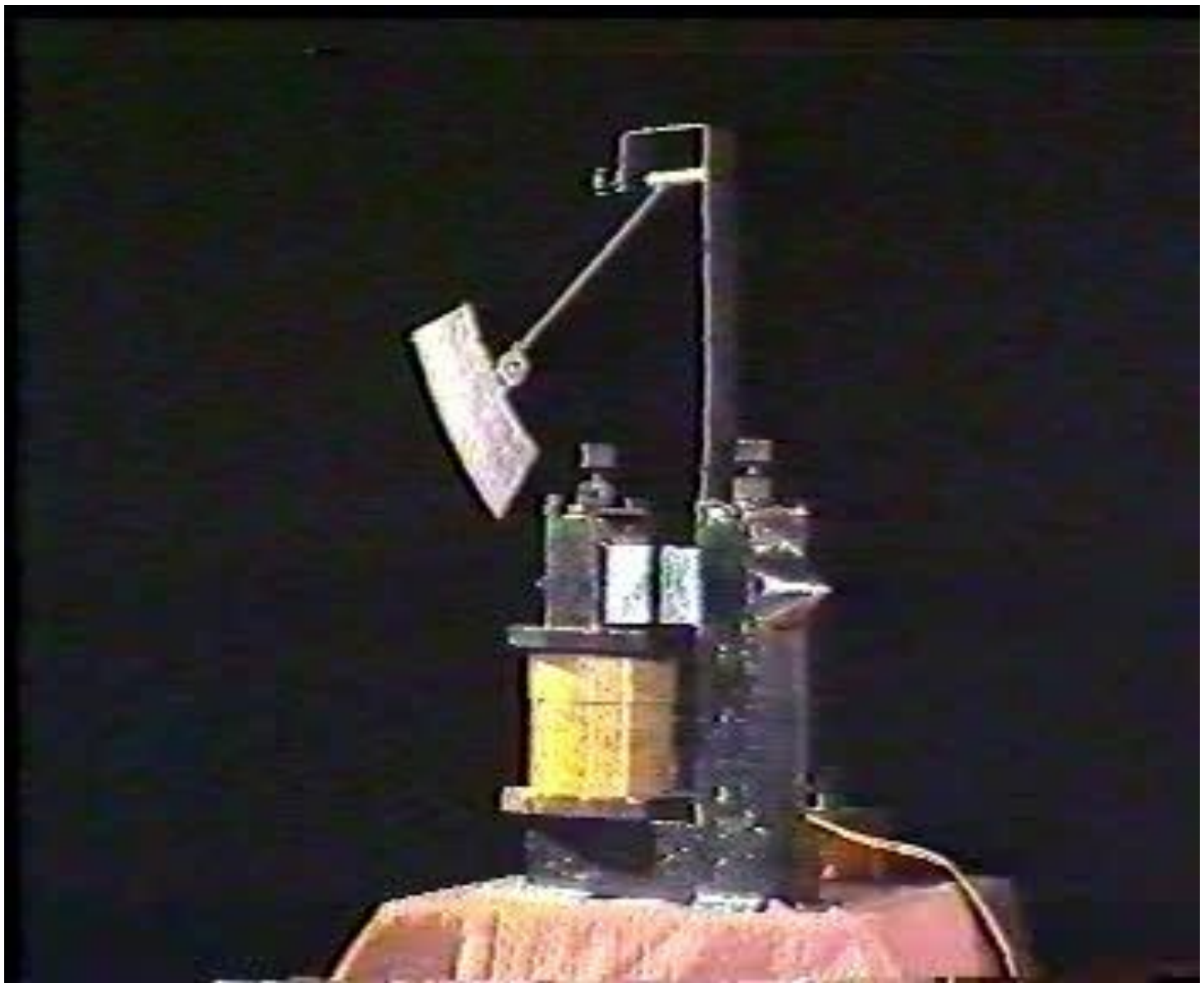


感应淬火

高频感应炉：利用金属块中产生的涡流所发出的热量使金属块熔化。具有加热速度快、温度均匀、易控制、材料不受污染等优点。

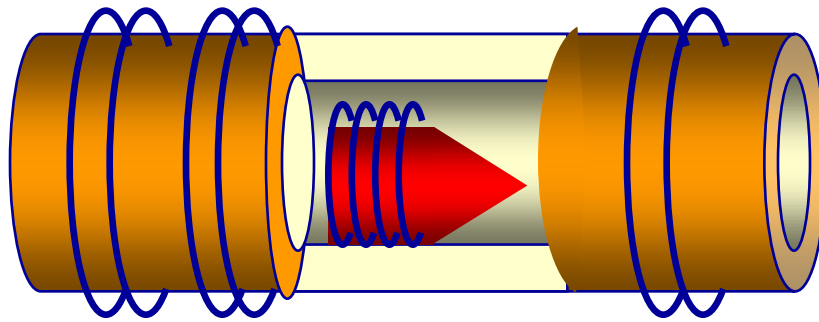


阻尼摆：在一些电磁仪表中，常利用电磁阻尼使摆动的指针迅速地停止在平衡位置上。电镀表中的制动铝盘，也利用了电磁阻尼效应。电气火车的电磁制动器等也都是根据电磁阻尼的原理设计的。

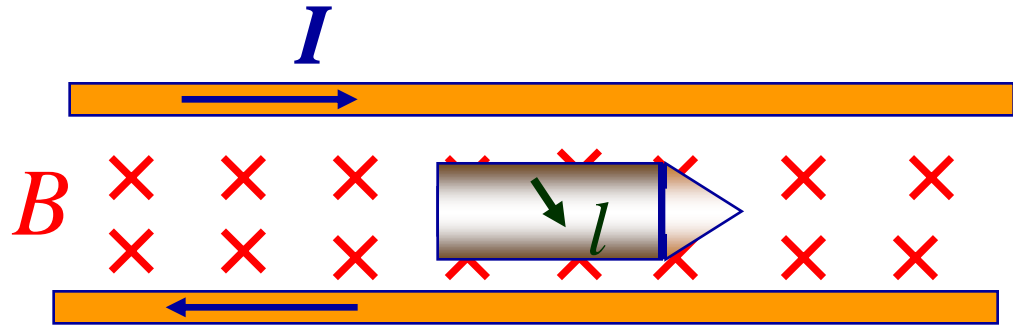


电磁阻尼

## 线圈炮



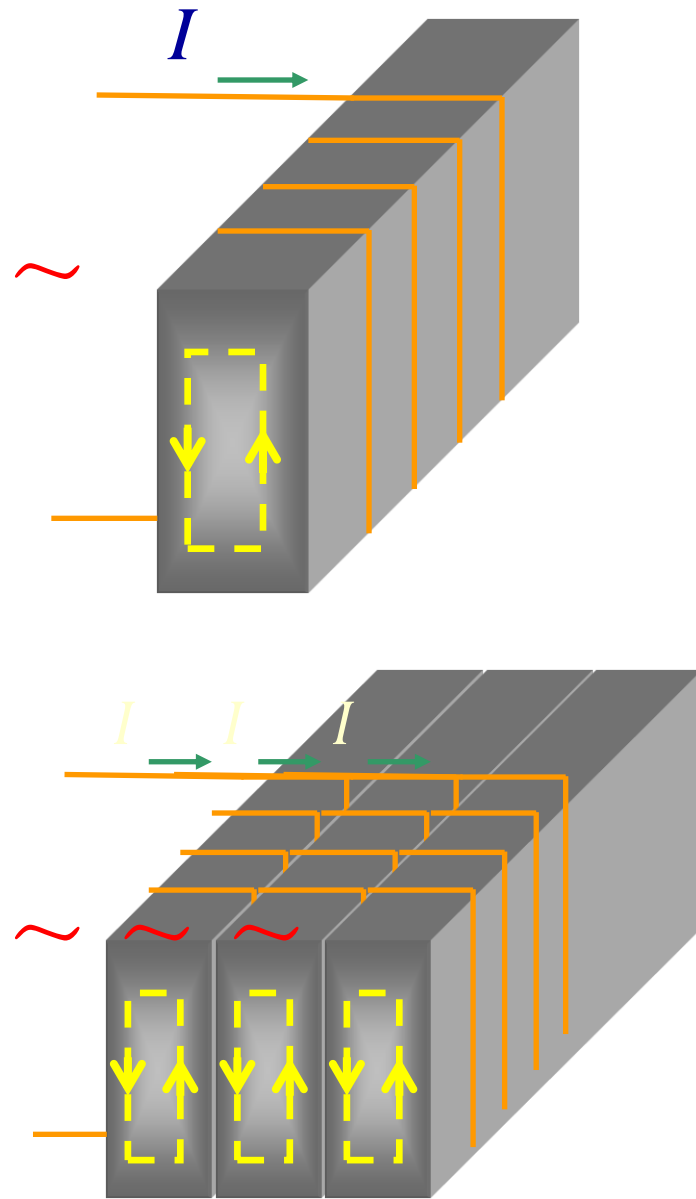
## 轨道炮



涡流的危害：变压器、电机铁芯发热。

## 涡电流的危害：

由于涡旋电流在导体中产生焦耳-楞次热，因此将有能量的损失。为避免能量的损失，常将发电机和变压器的铁芯做成层状的，用薄层绝缘材料把各层隔开，以减少损失。

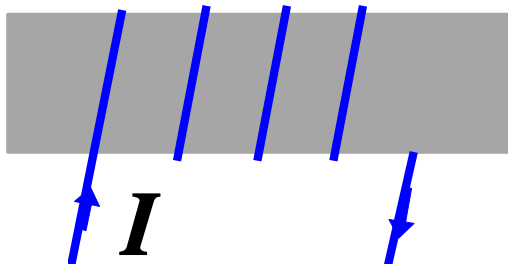


变压器铁芯中的涡电流

## § 12-3 自感和互感

### 1. 自感应

自感现象

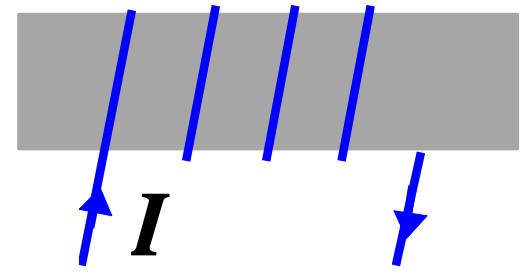


当电流  $I$  变化时，通过该线圈的全磁通（磁链） $\Psi$  也发生变化，因而在这个线圈中将产生感生电动势——自感电动势  $\varepsilon_L$ 。

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt}$$



$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt}$$



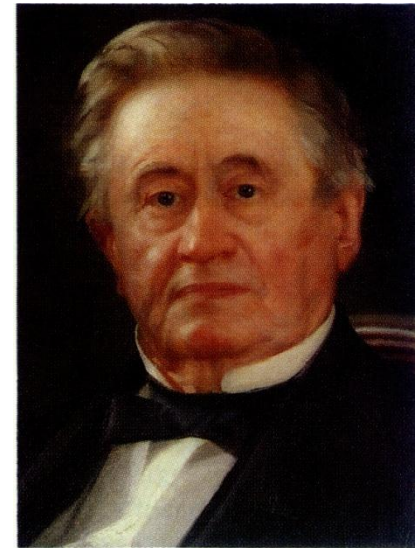
若回路的几何形状保持不变，且周围空间没有铁磁性物质。

根据毕奥—萨伐尔定律， $B \propto I$ ，

$\Psi = N\Phi \propto I$  磁链数可写成： $\Psi = \underline{L}I$ ，

系数  $L$  ( $>0$ ) — 自感系数、自感  $L = \frac{\Psi}{I}$ ，

$\therefore$  自感电动势： $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$  单位：亨利 (H)



Joseph Henry  
(1797–1878).

正比于电流随时间的变化率，正比于自感系数。

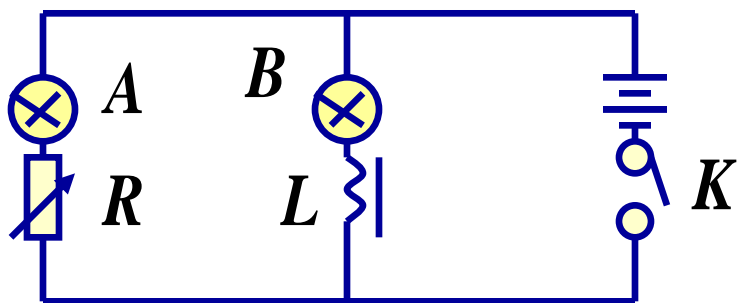


讨论:

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

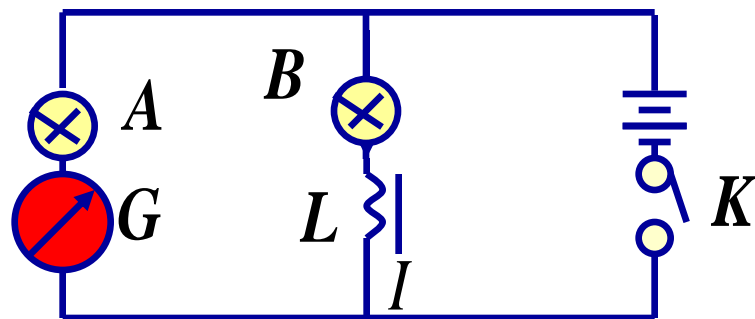
①  $L$  体现回路产生自感电动势反抗电流改变的能力。

② 回路产生的自感电动势，总是反抗回路电流的改变。



电键K闭合 or 电阻R变化

电感L反抗电流的变化



电键K断开

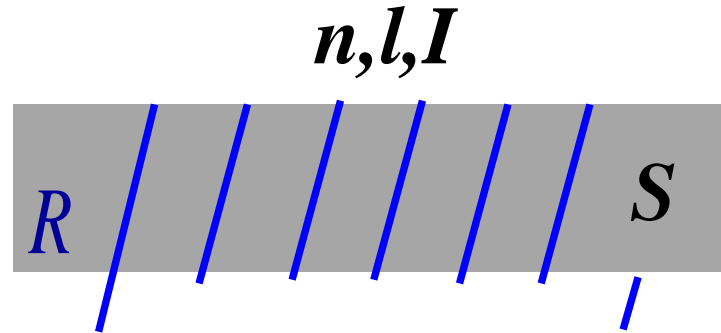
L反抗电流的变化，灯泡闪亮

自感的应用:

稳流， $LC$ 电路（振荡，滤波），灭弧保护

例：一无铁芯的长直螺线管，长为  $l$ ，截面半径为  $R$ ，管上绕组的总匝数为  $N$ ，其中通有电流  $I$ 。

求：长直螺线管的自感系数  $L$ 。



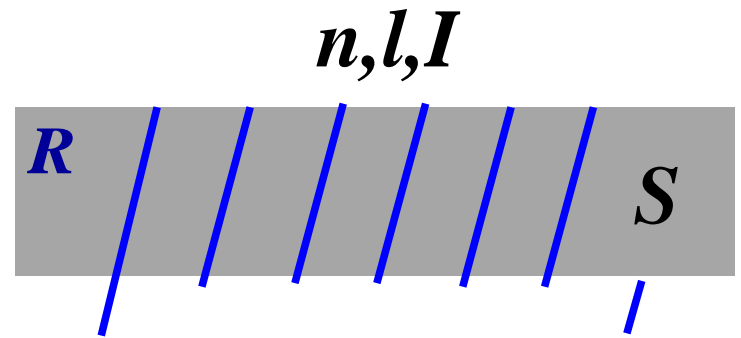
分析：对于密绕的细长螺线管，可忽略漏磁和管两端磁场的非均匀性。管内的磁场近似看作均匀分布。

根据安培环路定理，管内磁感应强度：

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

穿过 单匝线圈的磁通量为:

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N}{l} I \cdot \pi R^2,$$



穿过 N匝线圈的磁链数为:

$$\Psi = N\Phi = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} I,$$

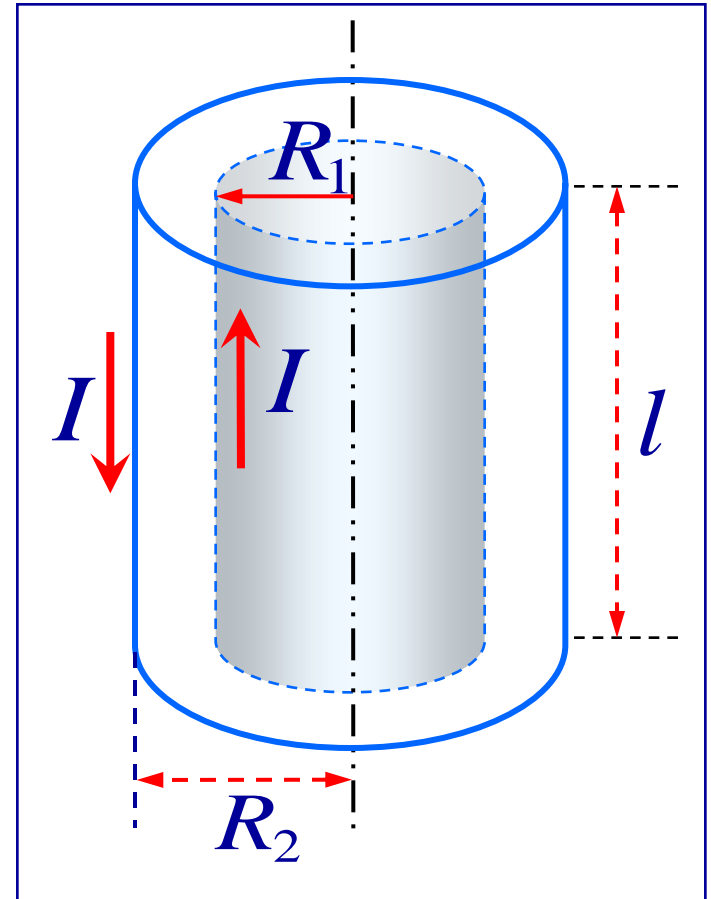
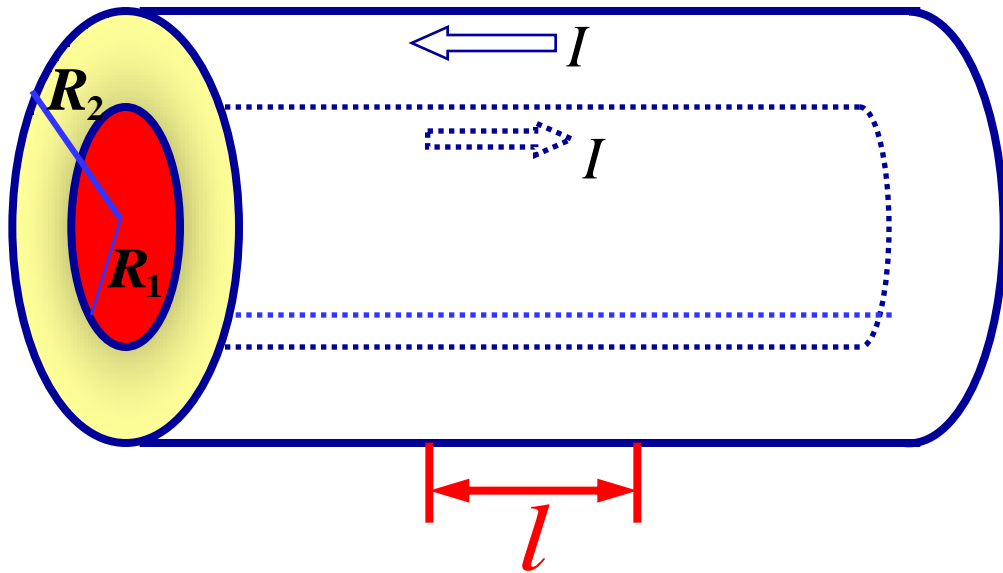
根据自感系数  $L$  的定义:  $\Psi = LI$

$$\therefore L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l}.$$

可见: 自感系数  $L$ , 与回路的几何形状, 匝数等有关。

例： 由两个“无限长”的同轴圆筒状导体所组成的电缆，其间充满磁导率为 $\mu$ 的磁介质，电缆中沿内圆筒和外圆筒流过的电流  $I$  大小相等而方向相反。设内外圆筒半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 。

求： 电缆单位长度的自感。



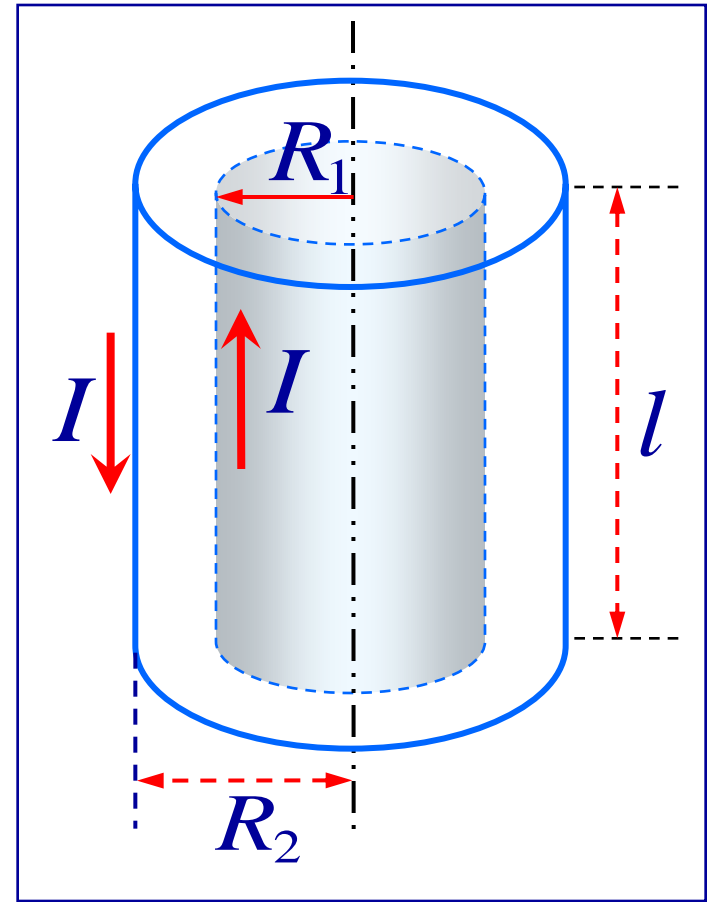
求：电缆单位长度的自感。

思路分析：

step1：分析导体在空间激发的磁场。

step2：计算通过导体的磁通量（磁链）。

step3：根据自感定义  $L = \Psi / I$ ，计算自感。



**step1:** 分析导体在空间激发的磁场。

根据对称性，磁感应线为与圆筒同轴的同心圆；

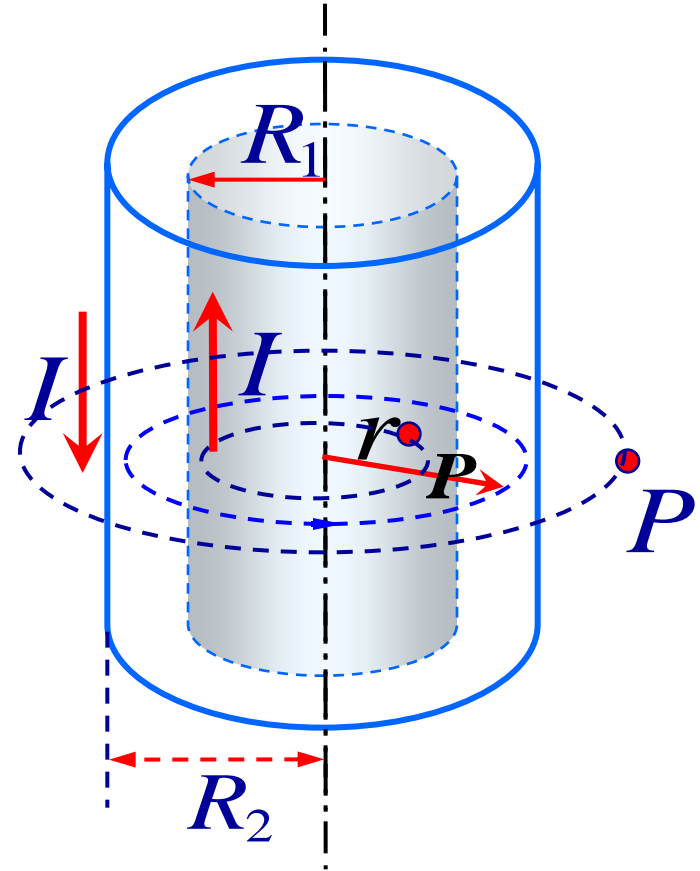
应用 $H$  的环路定理，可知：

①在内圆筒之内( $r < R_1$ )， $B = 0$ 。

②在外圆筒之外( $r > R_2$ )， $B = 0$ 。

③在内外两圆筒间( $R_1 < r < R_2$ )，  
离轴线距离为 $r$  处：

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}.$$



**step2:** 计算通过导体的磁通量（磁链）。

在内外圆筒间，取如图截面PQRS计算磁通量。

$B$ 不均匀， $\Phi$ 无法直接计算

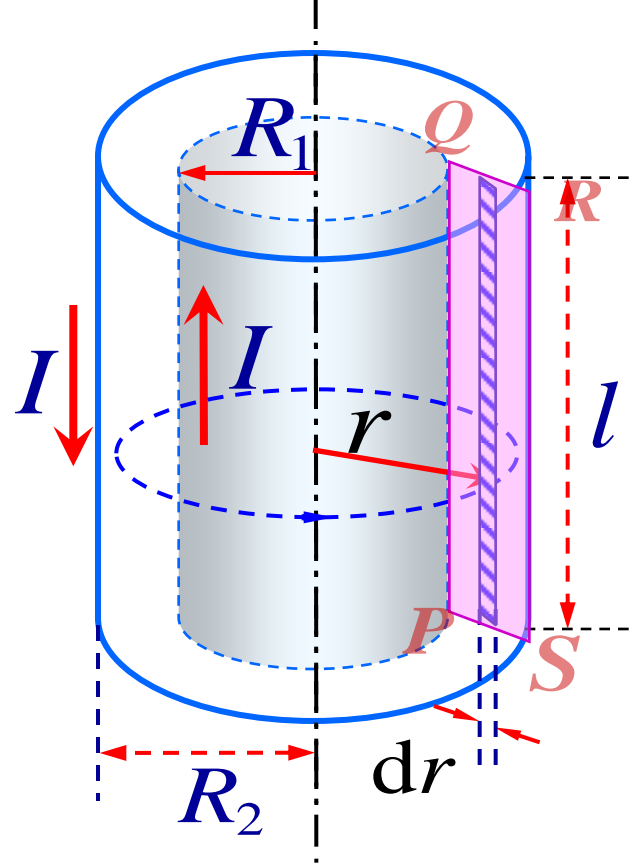
将截面分割成许多小面元，

$$d\Phi = B dS = B l dr = \frac{\mu I}{2\pi r} l dr,$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

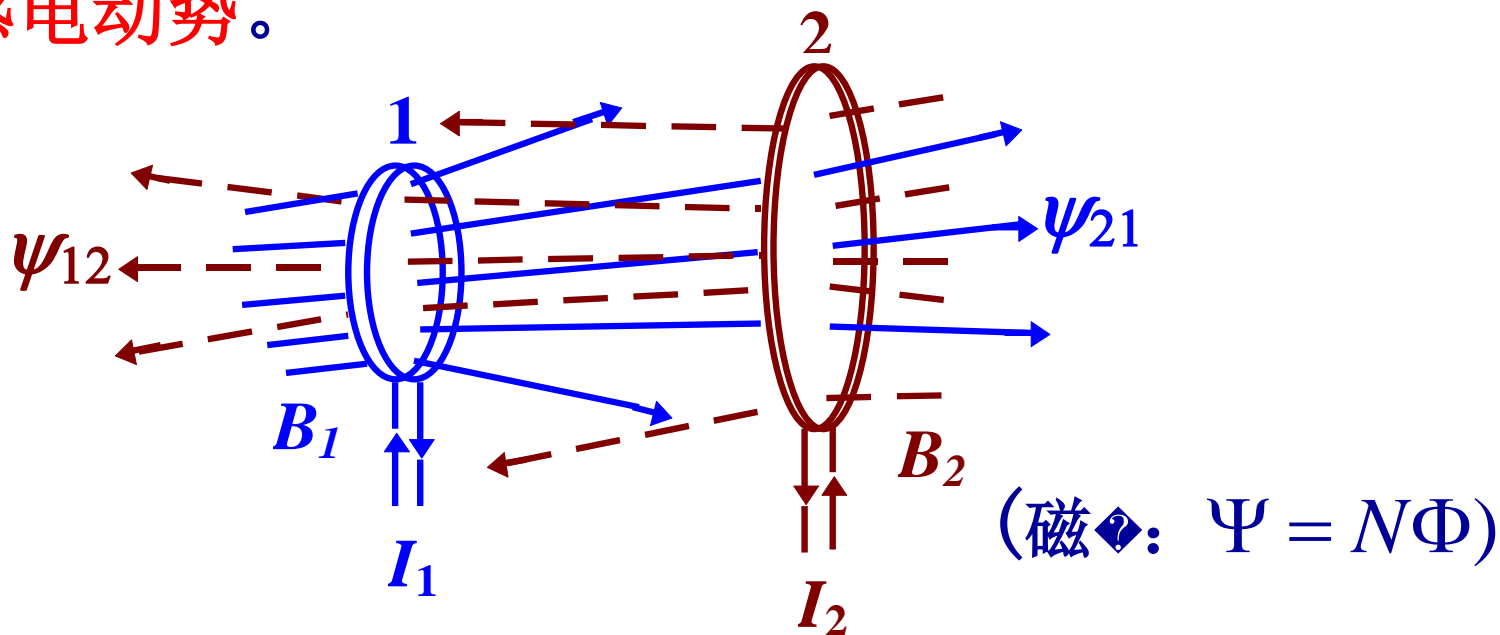
**step3:** 根据自感定义  $L = \Psi / I$ ，  
计算自感。

电缆单位长度的自感为：
$$L' = \frac{\Psi}{I} \frac{1}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



## 2. 互感应

由一个回路中电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象，叫做**互感现象**。这种感应电动势叫做**互感电动势**。



用 $\Psi_{21}$ 表示线圈1产生的磁场 $B_1$ 穿过线圈2的磁链；

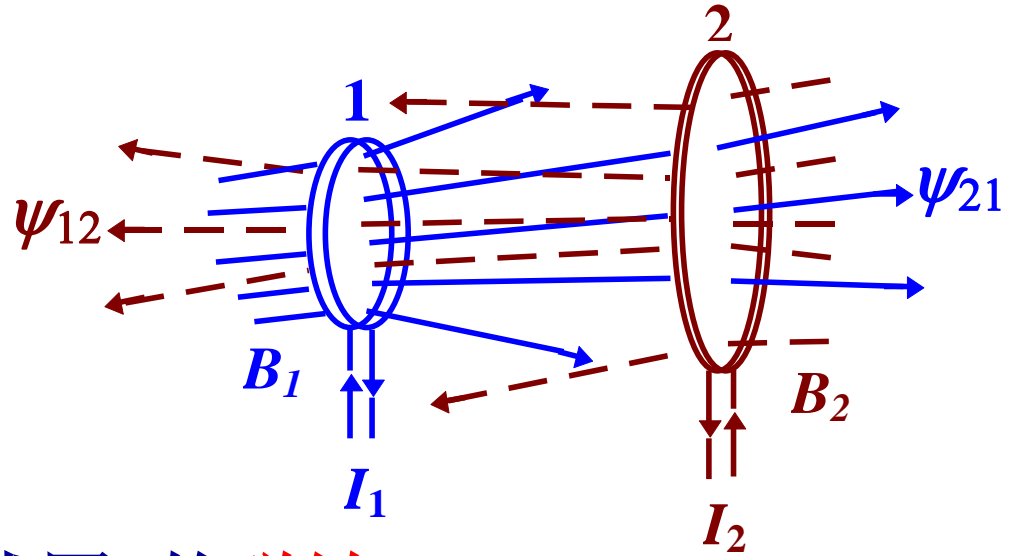
用 $\Psi_{12}$ 表示线圈2产生的磁场 $B_2$ 穿过线圈1的磁链。



线圈1电流 $I_1$ 变化

→线圈2感生电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt},$$



$\Psi_{21}$  —  $I_1$  的磁场  $B_1$  通过线圈2的磁链

由毕奥—萨定理： $\Psi_{21} = \underline{M_{21}} I_1$  (周围没有铁磁材料)

比例系数  $M_{21}$  —— 线圈1对2 的互感系数

∴ 感生电动势：
$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\underline{M_{21}} \frac{dI_1}{dt}.$$

线圈2 电流 $I_2$ 变化  $\rightarrow$  线圈1感生电动势

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -\underline{M}_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

比例系数 $M_{12}$  ——线圈2对1 的互感系数  
可以证明：

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = M$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}}$$

互感的单位： 亨利（H）

$$1H = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1}, \quad 1H = 10^3 \text{ mH} = 10^6 \mu\text{H}$$

# 互感的应用：

通过互感线圈使信号或能量由一个线圈传递到另一个线圈。

例如电源变压器、中周变压器、以及电压和电流互感器等。

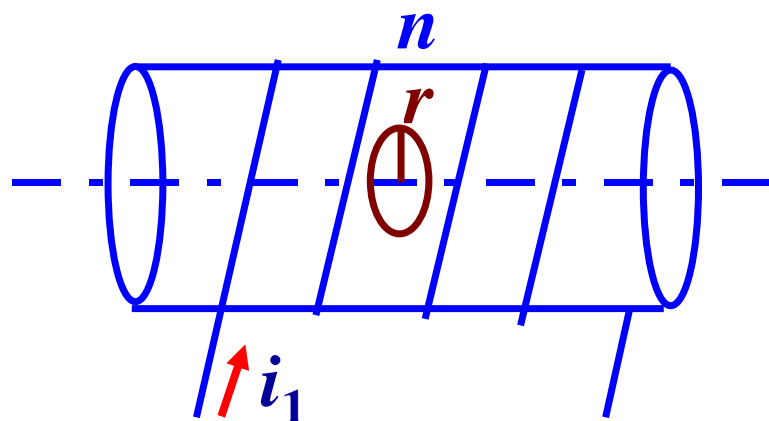
影响：由于互感，电路之间会互相干扰。可采用磁屏蔽等方法来减小这种干扰。

例： 一长直螺线管，单位长度上的匝数为 $n$ 。螺线管内垂直放置一半径为 $r$ 的圆环。

求：螺线管与圆环的互感系数。

思路分析：

（设螺线管电流为 $i_1$ ）



step1: 分析螺线管在空间激发的磁场。

step2: 计算螺线管激发的磁场通过圆环 $r$ 的磁链 $\Psi_{21}$ 。

step3: 根据互感定义  $M_{21} = \Psi_{21} / i_1$ ，计算互感。

解：①计算螺线管内磁场 $B_1$ ,

$$B_1 = \mu_0 n i_1,$$

②计算通过圆环的磁链为：

圆环为单匝，

$$\therefore \Psi_{21} = \Phi_{21} = B_1 \pi r^2 = \mu_0 n i_1 \pi r^2.$$

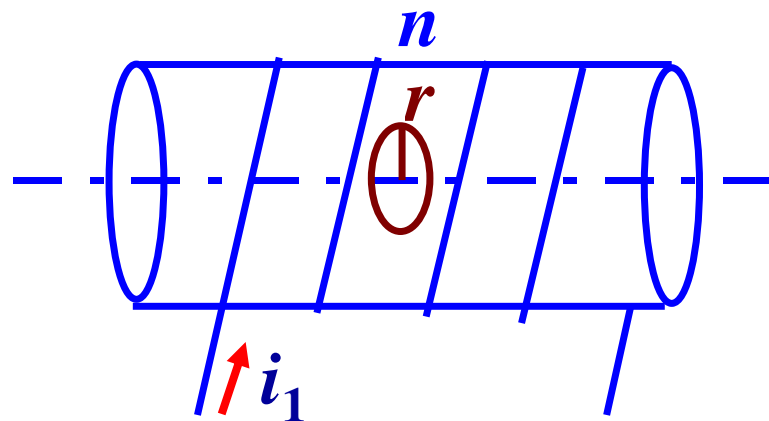
③由互感系数的定义式 ( $\Psi_{21} = M_{21} i_1$ )

$$\text{得: } M_{21} = \Psi_{21} / i_1 = \pi r^2 \mu_0 n.$$

由于 $M_{21} = M_{12} = M$ ，所以螺线管与圆环的互感系数

$$M = \pi r^2 \mu_0 n.$$

【思考】设圆环通过电流 $i_2$ ，求线圈的磁通量。





例： 有两个长度均为 $l$ ，匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ，半径为 $r_1$ 和 $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ) 的同轴长直密绕螺线管。

求：两个螺线管的互感系数 $M$ 。

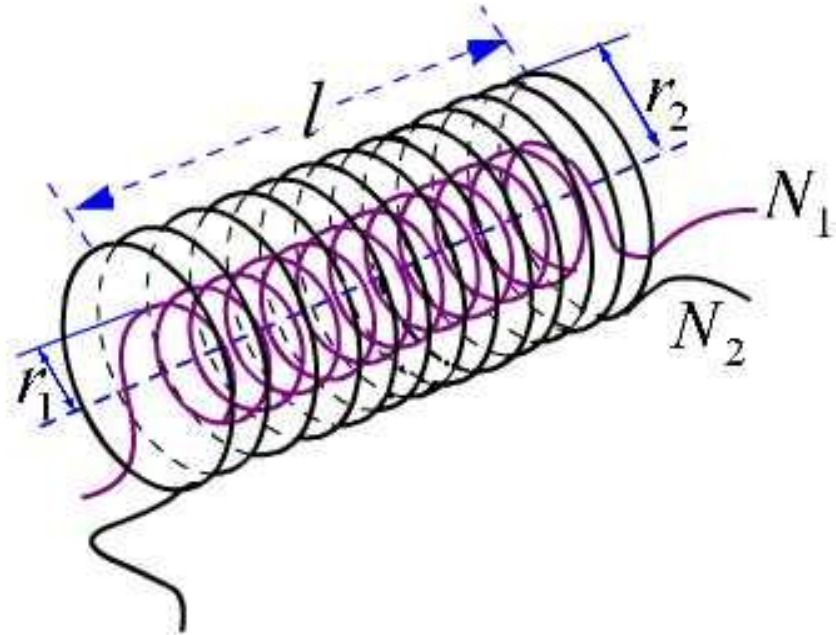
思路分析：

(设小螺线管1电流为 $I_1$ )

step1: 计算螺线管1在空间激发的磁场。

step2: 计算螺管1激发的磁场通过螺管2的磁链 $\Psi_{21}$ 。

step3: 根据互感定义  $M_{21} = \Psi_{21} / I_1$ ，计算互感。



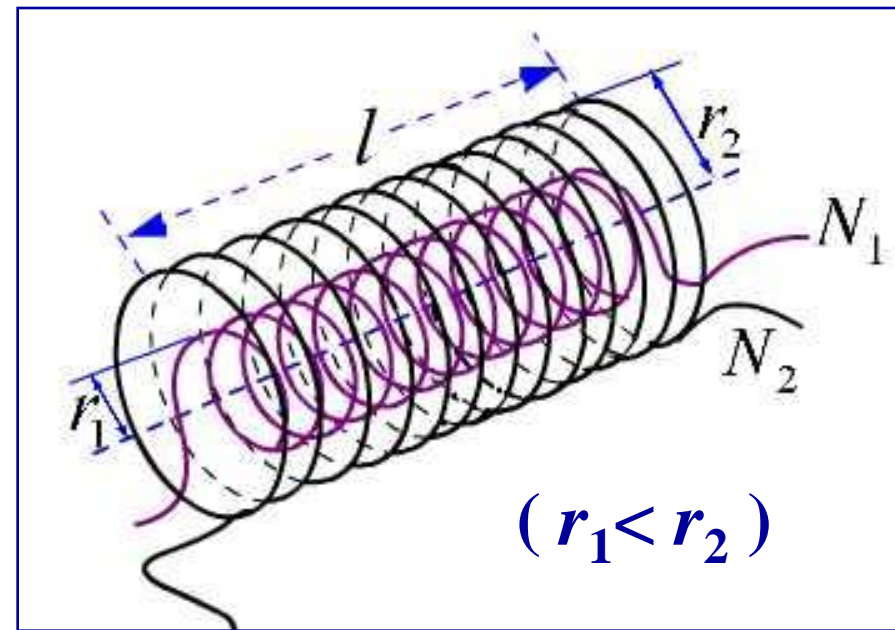
① 设半径为  $r_1$  的螺线管中通有电流  $I_1$ ，则

a,  $r < r_1$ ,

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1,$$

b,  $r > r_1$ ,

$$B_1 = 0.$$



②  $B_1$  穿过半径为  $r_2$  的螺线管的磁链数为:

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= \Psi_{(r < r_1)} + \Psi_{(r > r_1)} = \Psi_{(r < r_1)} + 0 \\ &= N_2 B_1 (\pi r_1^2) = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} I_1 \cdot \pi r_1^2\end{aligned}$$



$$\Psi_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} I_1 \cdot \pi r_1^2$$

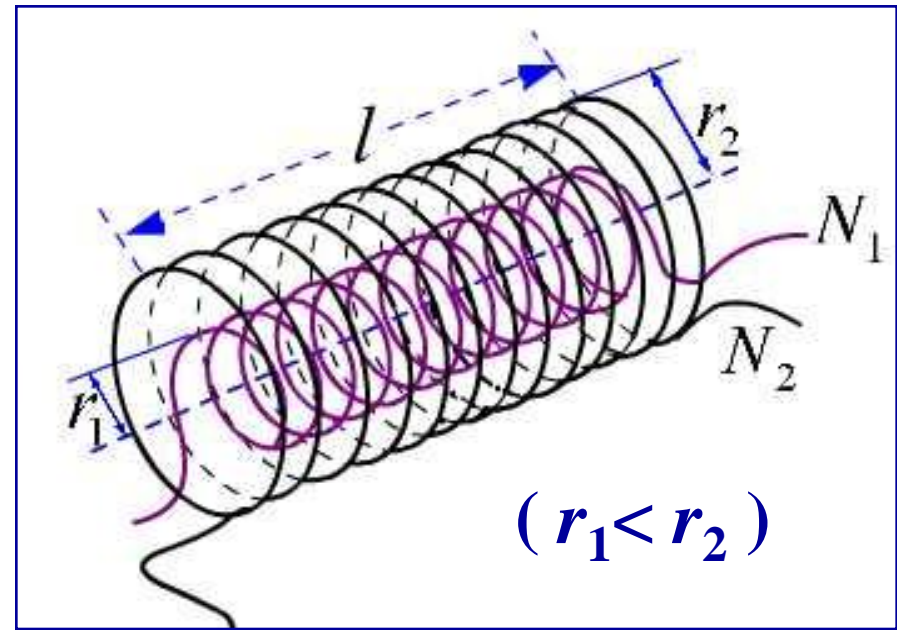
③根据互感系数定义：

$$(\Psi_{21} = M_{21} I_1)$$

$$\therefore M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} \pi r_1^2.$$

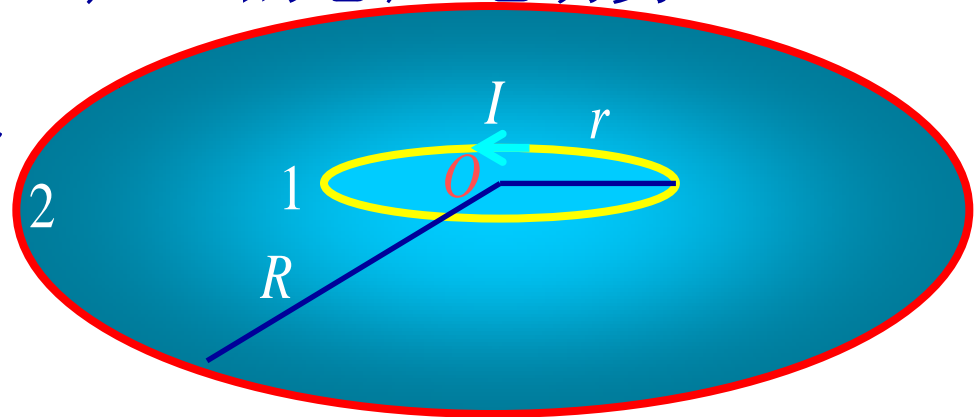
$$\because M_{21} = M_{12} = M,$$

两个螺线管的互感系数：  $M = M_{21} = \mu_0 \frac{N_2 N_1}{l} \pi r_1^2.$



例题：如图所示。两只水平放置的同心圆线圈1和2，半径分别为 $r$ 和 $R$ ， $R \gg r$ ，已知小线圈1内通有电流 $I_1 = I_0 \cos \omega t$ ，求在大线圈2上产生的感应电动势。

解：由于小线圈通电流后在大线圈平面内产生的磁场是不均匀的磁场，因此很难求得通过大线圈的磁通量，不能应用法拉第电磁感应定律求得大线圈上的感应电动势。如能求出两线圈的互感系数则可以求出互感电动势，但基于



和上面同样的原因，以小线圈通有电流来计算互感系数是困难的。由于两线圈互感系数是相同的，可通过假设线圈2通有电流 $I_2$ 来计算互感。

假设线圈2通有电流 $I_2$ ,则线圈中心磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2R}$$

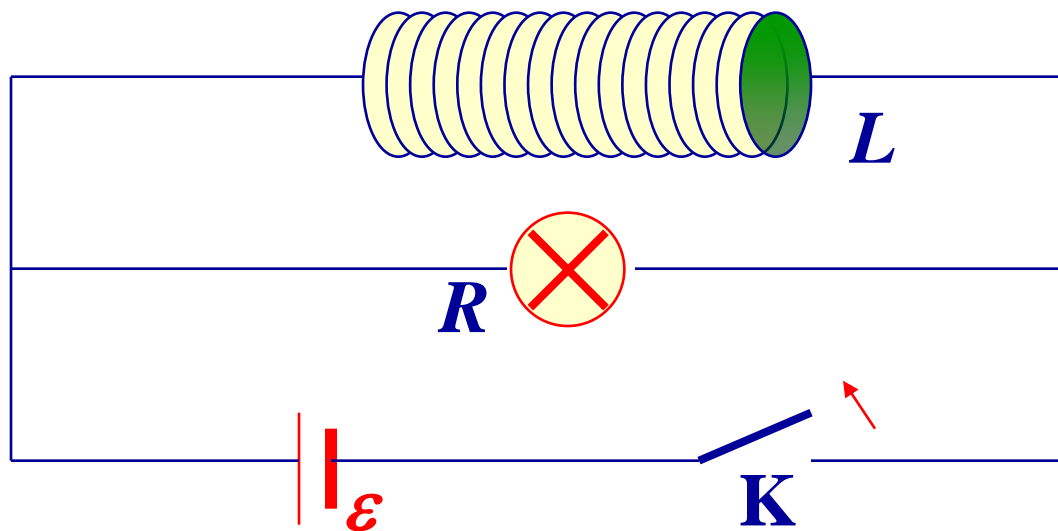
由于 $R \gg r$ ,小线圈面积内磁场可看作是均匀的,大小即为线圈中心的磁感应强度大小。则穿过小线圈平面内的磁通量为

$$\Phi_{12} = BS = \frac{\mu_0 I_2}{2R} \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$$

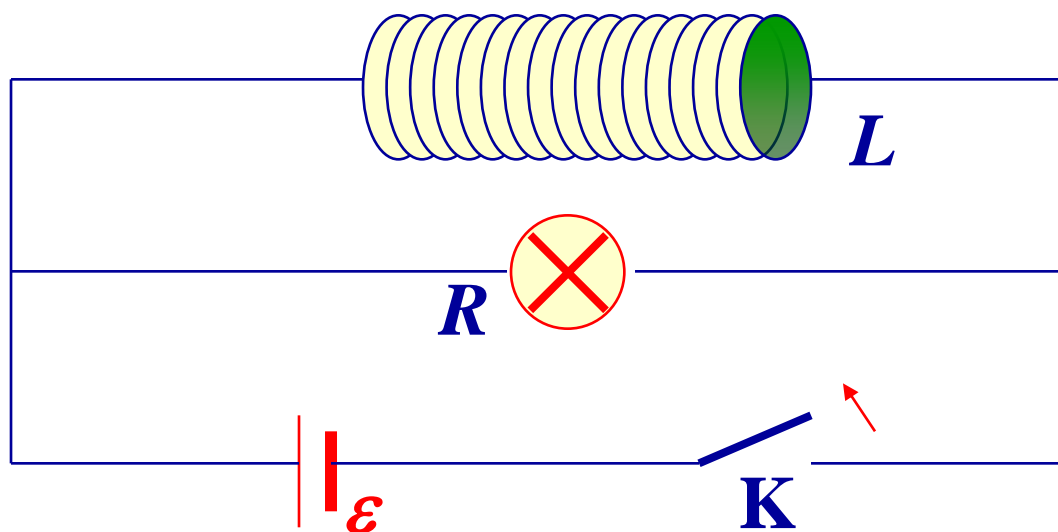
所以,在大线圈中感应电动势为

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R} I_0 \omega \sin \omega t$$

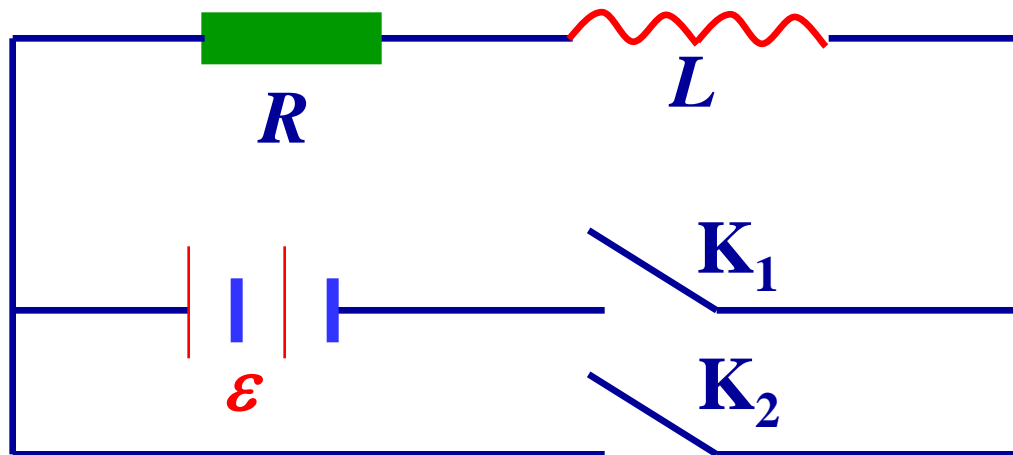
## § 12-4 磁场的能量



当电键打开后，电源已不再向灯泡供应能量了。它突然闪亮一下，所消耗的能量从哪里来的？



由于使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流，而这电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失，所以，可以认为使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的，或者说是储存在线圈内的磁场中，称为磁能。



设电路接通后回路中某瞬时的电流为  $I$ ，自感电动势为  $-L \frac{dI}{dt}$ ，由欧姆定律得

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\int_0^t \varepsilon I dt = \int_0^{I_0} LI dI + \int_0^t RI^2 dt$$

在自感和电流无关的情况下

$$\int_0^t \varepsilon I \, dt = \frac{1}{2} LI_0^2 + \int_0^t RI^2 \, dt$$

$\int_0^t RI^2 \, dt$  是时间 $t$ 内电源提供的部分能量转化为消耗在电阻 $R$ 上的焦耳-楞次热；

$LI_0^2 / 2$ 是回路中建立电流的暂态过程中电源电动势克服自感电动势所作的功，这部分功转化为载流回路的能量；

当回路中的电流达到稳定值后，断开 $K_1$ ，并同时接通 $K_2$ ，这时回路中的电流按指数规律衰减，此电流通过电阻时，放出的焦耳-楞次热为

$$Q = \int_0^{\infty} RI^2 dt = RI^2 \int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

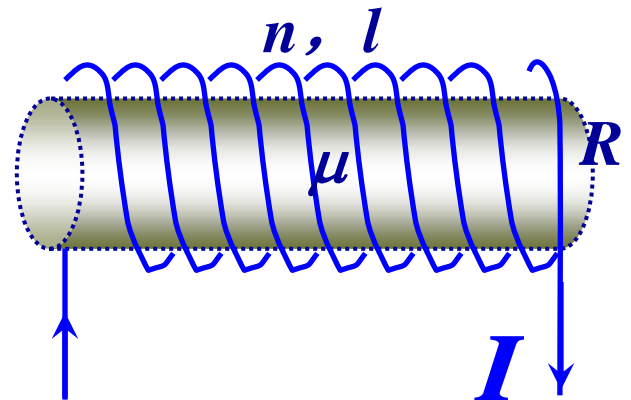
$$W_m = \frac{1}{2} LI_0^2$$

磁能

## 磁能的另一种表示

对于一个很长的直螺线管，磁场可近似认为全部集中于管内，且管内磁场近似均匀，

$$B = \mu nI, \quad L = \mu n^2 V$$





$$\therefore W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} BHV$$

$$\therefore w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{2} BH dV$$



磁能密度

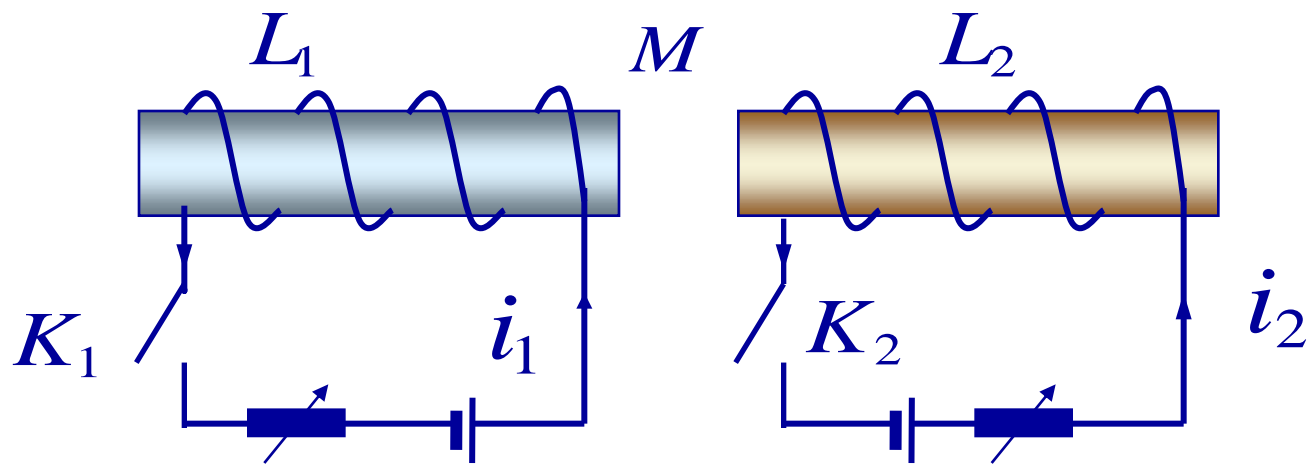
在任何磁场中，某点的磁场能量密度，只与该点的磁感应强度 $B$ 和介质性质有关。

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint BH dV$$

总磁能

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \iiint BH dV$$

例：求两个相互邻近的电流回路的磁场能量，这两个回路的电流分别是 $I_1$ 和 $I_2$ 。

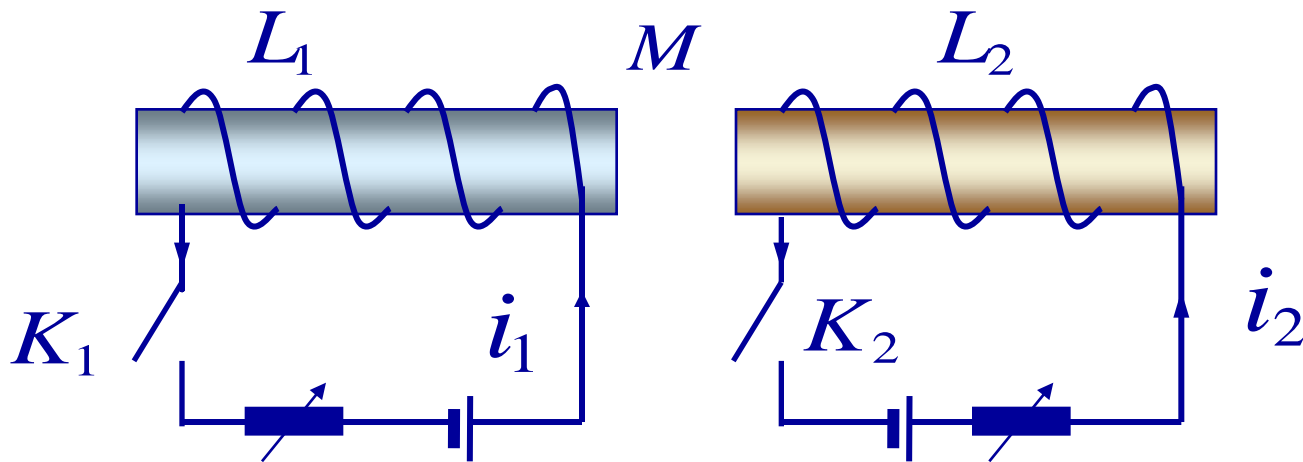


解：为求出此状态时的磁能，设想 $I_1$ 和 $I_2$ 是按下述步骤建立的：

(1) 先合上电键 $K_1$ ，使 $i_1$ 从0增大到 $I_1$ 。

这一过程中由于自感 $L_1$ 的存在，由电源  $\mathcal{E}_1$  作功而储藏到磁场中的能量为：

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2,$$



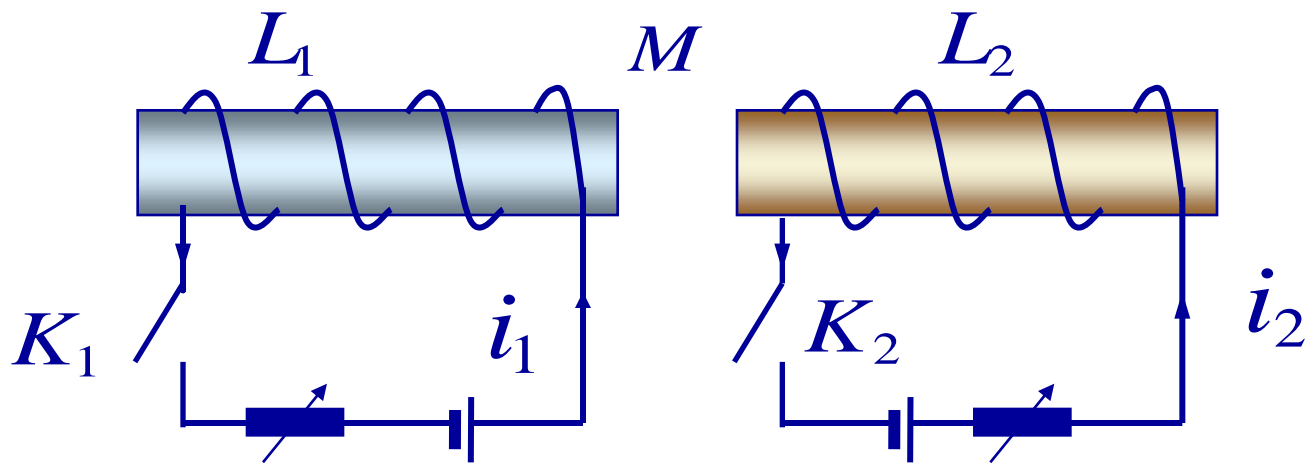
(2) 再合上电键 $K_2$ ，调节 $R_1$ 使 $I_1$ 保持不变，这时 $i_2$ 由0增大到 $I_2$ 。

这一过程中由于自感 $L_2$ 的存在，由电源 $\varepsilon_2$  作功而储藏到磁场中的能量为：

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2,$$

**注意：** 当 $i_2$ 增大时，在回路1中会产生互感电动势 $\varepsilon_{12}$ ，

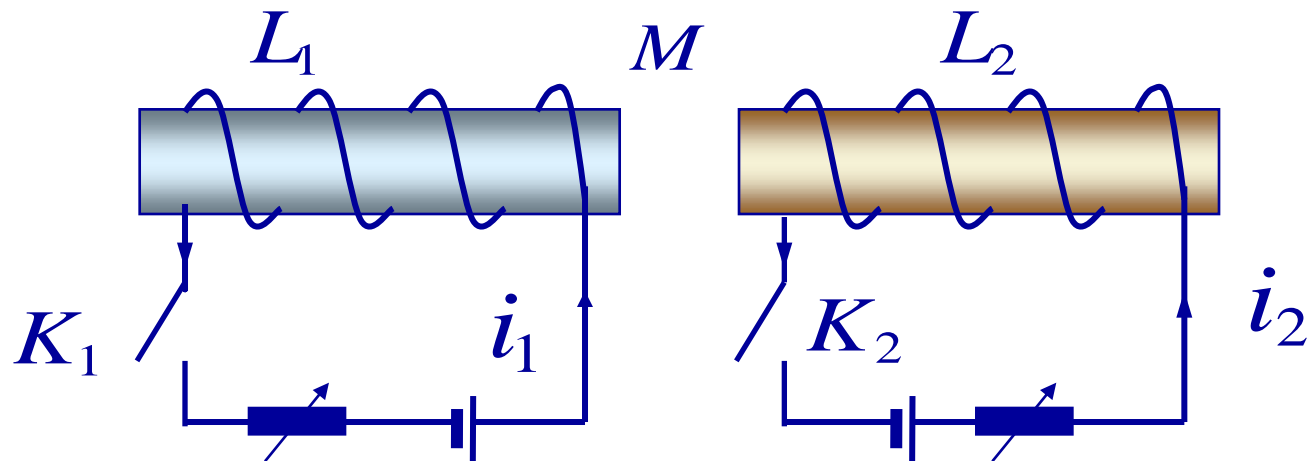
$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$



要保持电流  $I_1$  不变，电源  $e_1$  还必须反抗此感应电动势作功。

由于互感的存在，由电源  $e_1$  作功而储藏到磁场中的能量为：

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= \int \varepsilon_{12} I_1 \, dt = \int M_{12} \frac{di_2}{dt} I_1 \, dt \\
 &= \int_0^{I_2} M_{12} I_1 \, di_2 = M_{12} I_1 I_2
 \end{aligned}$$



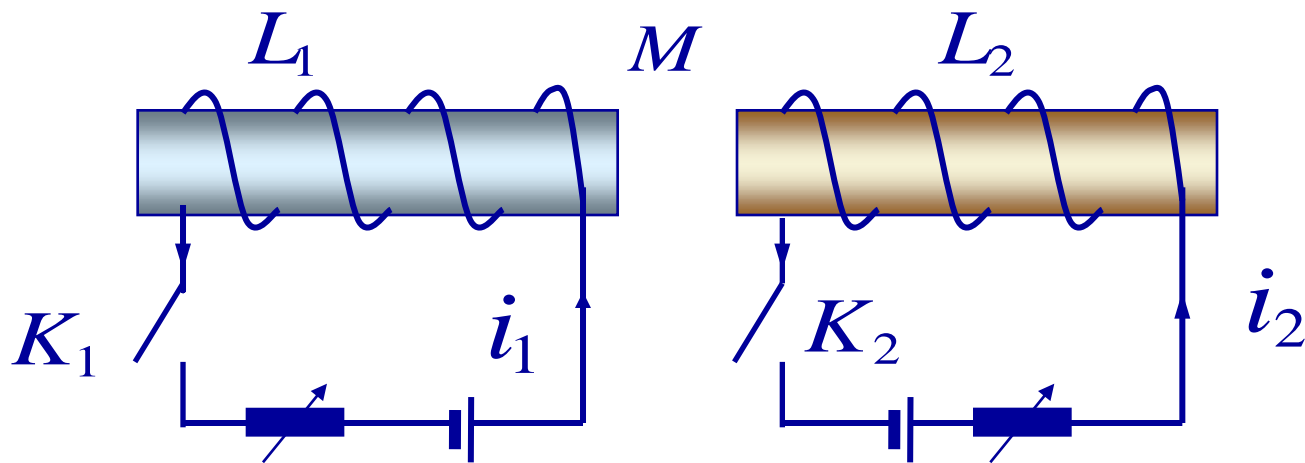
(3) 经过上述两个步骤后，系统达到电流分别是 $I_1$ 和 $I_2$ 的状态。

这时储藏到磁场中的能量为：

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2.$$

若上述两个步骤反向进行，则储藏到磁场中的能量为：

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$



由于两种通电方式的最后状态相同，所以

$$W_m = W'_m, \quad M_{12} = M_{21} = M$$

最后储藏到磁场中的总能量为：

$$W'_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

## § 12-5 麦克斯韦电磁场理论简介

### 静电场和恒定磁场的基本规律

(1) 静电场的高斯定理:

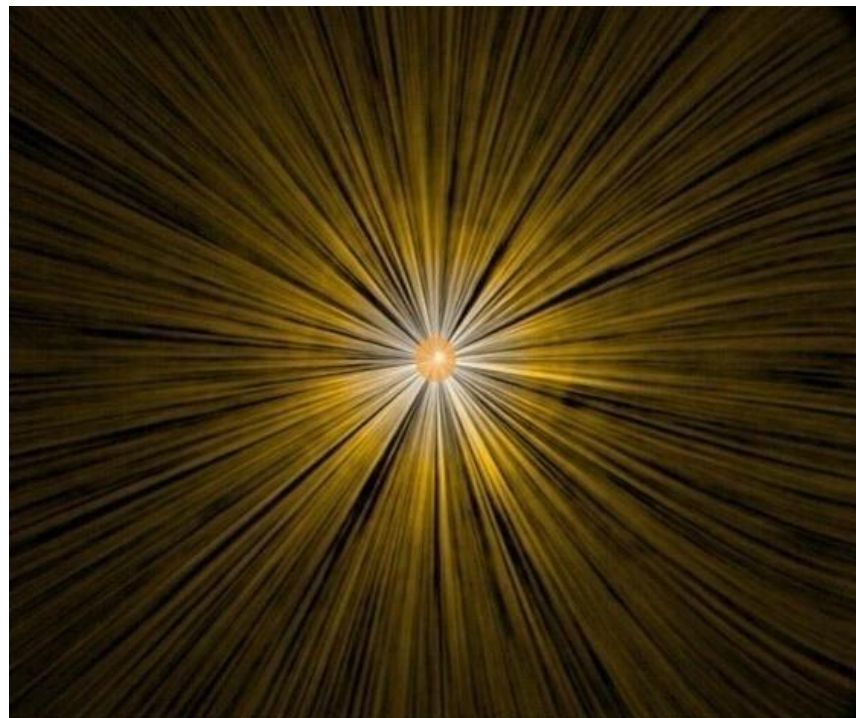
$$\oiint_s \vec{D}^{(1)} \cdot d\vec{S} = \sum q$$

表明: 静电场是有源场。

(2) 静电场的环路定理:

$$\oint_s \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{l} = 0$$

表明: 静电场是保守 (无旋、有势) 场。



### (3) 恒定磁场的高斯定理

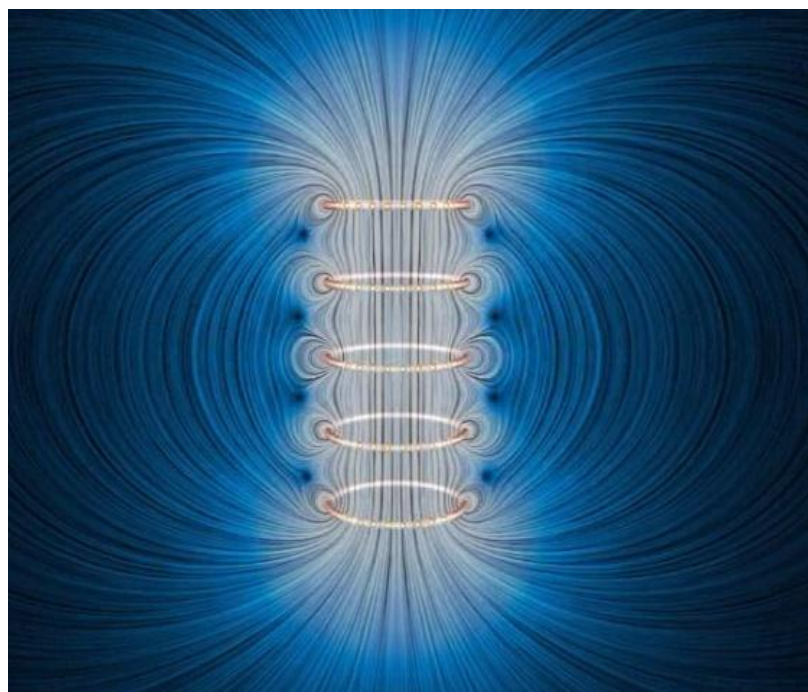
$$\oiint_S \vec{B}^{(1)} \cdot d\vec{S} = 0.$$

表明：恒定磁场是无源场。

### (4) 恒定磁场的环路定理

$$\oint_L \vec{H}^{(1)} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

表明：恒定磁场是非保守（有旋）场。



上面四个式子中 $\vec{D}^{(1)}$ 、 $\vec{E}^{(1)}$ 、 $\vec{B}^{(1)}$ 和 $\vec{H}^{(1)}$ 各量分别表示由静止电荷和恒定电流产生的场， $q$ 为高斯面 $S$ 内自由电荷的代数 and， $I$ 为穿过闭合回路 $L$ 的传导电流的代数 and。



## 法拉第电磁感应定律:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

涡旋电场的环流和变化磁场的关系:

$$\oint_L \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

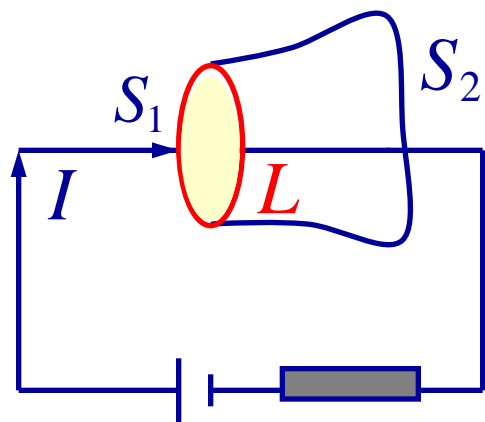
$\vec{E}^{(2)}$ 表示变化磁场所激发的感生涡旋电场。

→ 变化的磁场可以产生感生涡旋电场。

那么，变化的电场能否产生磁场？

# 1. 位移电流

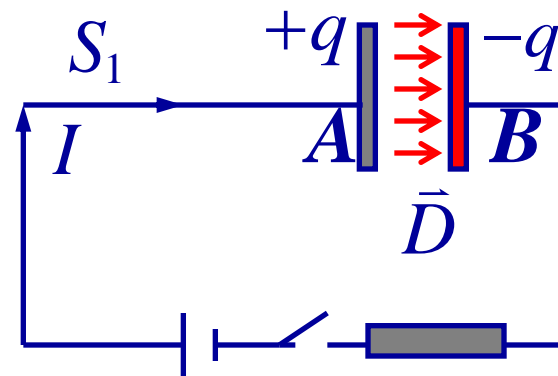
电流连续



磁场遵循环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_{\text{任意} S} \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S}$$

电流不连续

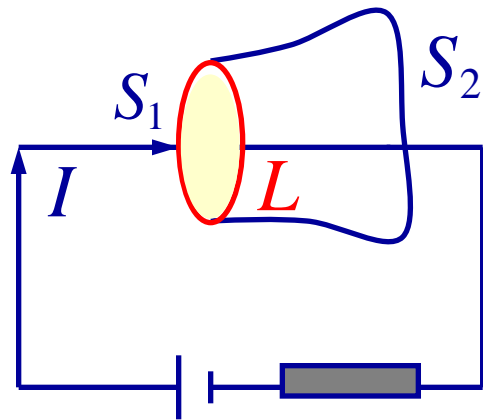


是否仍遵循环路定理？

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = ?$$

# 1. 位移电流

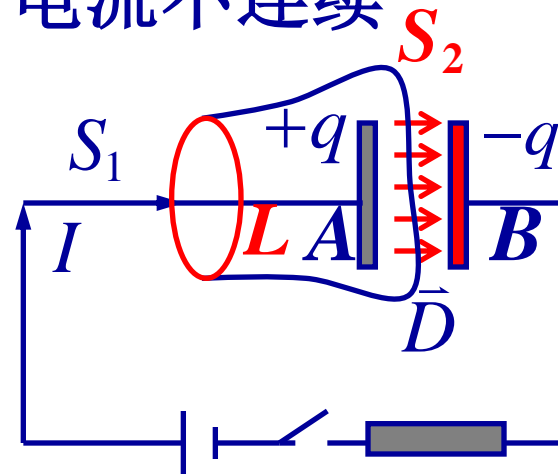
电流连续



磁场遵循环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_{\text{任意} S} \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S}$$

电流不连续



是否仍遵循环路定理？

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = ?$$

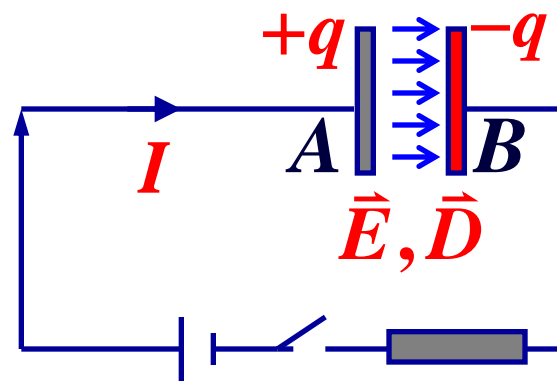
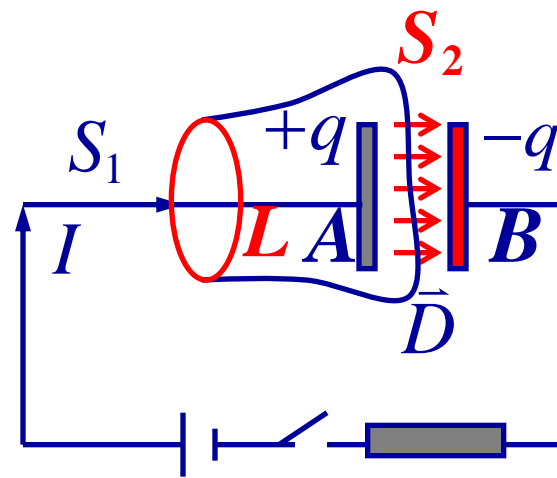
原因：传导电流不连续  **$I \neq 0$**

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \iint_{\text{任意} S} \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S}$$

是在连续电流激发的静磁场的情况下得出 —— 特殊规律

在电流不连续的情况下，需要对这一H的环路定理进行修正！

$$I \text{ —— } q, \sigma \text{ —— } \vec{E}, \vec{D}$$



分析：设充电过程的某一时刻，电路中电流为 $I$ ，

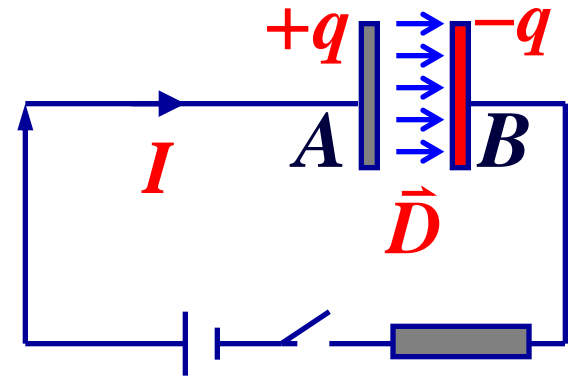
$$\text{有： } I = \frac{dq}{dt}$$

此刻电容器 $A$ 、 $B$ 板带电量 $\pm q$ ，电荷面密度为 $\pm\sigma$ 。

电容器极板间电位移矢量的大小为：

$$D = \sigma = \frac{q}{S}$$

$$\therefore \underline{I} = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$



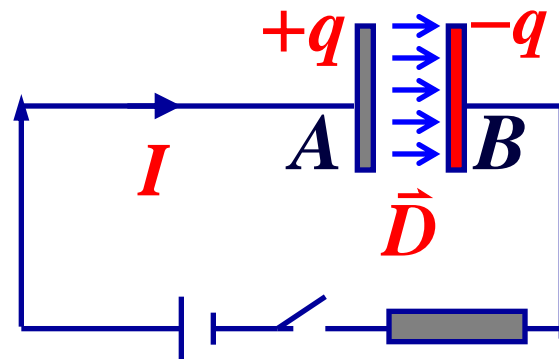
即：电路中的电流，借助于电容器内的电场变化，仍然可以看作是连续的。

Maxwell 提出了建设性的假说:

变化的电场也是一种电流, 称为位移电流  $I_d$ 。

$$I_d = S \frac{dD}{dt}$$

位移电流密度:  $\vec{j}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$



虽然传导电流  $I$  不连续, 但传导电流  $I$  和位移电流  $I_d$  的和 (称为全电流  $I_r$ ) 是连续的。

$$I_{\text{全}} = I + I_d = I + S \frac{dD}{dt}$$

导线中,  $I_{\text{全}} = ?$       极板间,  $I_{\text{全}} = ?$

## 全电流安培环路定理：

磁场中，沿任意闭合回路  $\vec{H}$  的线积分，在数值上等于：穿过以该闭合回路为边线的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和。

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma(I + I_d) = \iint_S \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

讨论:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma(I + I_d) = \iint_S \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

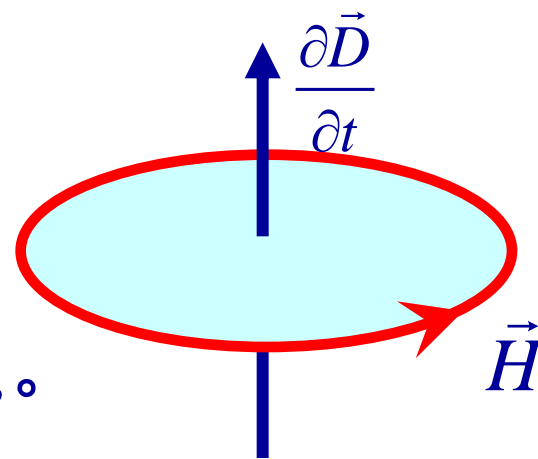
① 传导电流，位移电流（变化的电场） 均能激发磁场；

② 传导电流、位移电流激发的磁场，均为涡旋磁场；

位移电流激发磁场 $\vec{H}$ 的方向判断：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{H}^{(2)}$  与回路 $L$ 中  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  成右手螺旋关系。



③ 揭示了电场与磁场的内在联系：变化的电场→磁场

法拉第电磁感应：变化的磁场→感生电场



# 位移电流与传导电流的比较

- (1) 位移电流与传导电流在产生磁效应上是等效的。
- (2) 产生的原因不同：传导电流是由自由电荷运动引起的，而位移电流本质上是变化的电场。
- (3) 热效应不同：传导电流  $I$  通过导体时产生焦耳热，而位移电流 
$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

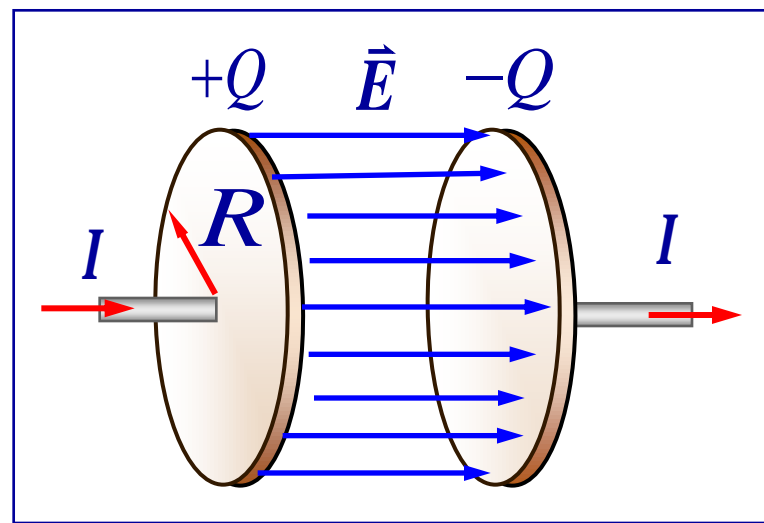
例题：半径 $R$ 的两圆板构成平行板电容器，内部充满介质（介电常数 $\varepsilon$ ，磁导率 $\mu$ ），由圆板中心引两根长直导线给电容器匀速充电，使板间电场满足  $\frac{dE}{dt} = \text{const.}$

求：1) 电容器两板间的位移电流。

$$\begin{aligned}\text{解： } I_d &= S \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \frac{d(\varepsilon E)}{dt} \\ &= \pi R^2 \varepsilon \frac{dE}{dt}\end{aligned}$$

分析：若  $\frac{dE}{dt} > 0$ ， $I_d$  方向向右，

若  $\frac{dE}{dt} < 0$ ， $I_d$  方向向左，



充电

放电

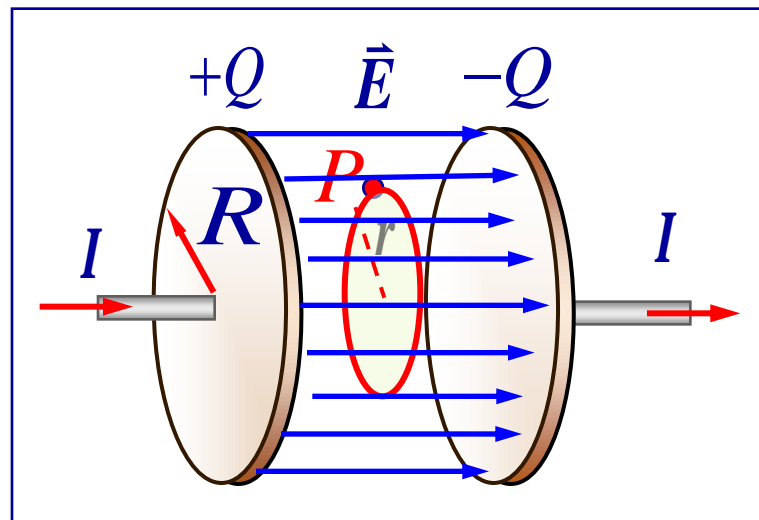
求：2)  $P$ 点 ( $r < R$ ) 处的磁感应强度。

分析电流分布：

可近似认为，位移电流均匀分布在圆柱体上。

分析磁场分布：

磁场具有轴对称性。



由全电流安培环路定理：
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_{\text{全}}$$

过 $P$ 点垂直轴线做圆形回路，

$$\therefore H \cdot 2\pi r = \sum_{in} I_d = \pi r^2 \epsilon \frac{dE}{dt}.$$

$$\therefore H = \frac{\epsilon r}{2} \frac{dE}{dt}, \quad \therefore B = \mu H = \frac{\mu \epsilon r}{2} \frac{dE}{dt}.$$

## 2. 麦克斯韦方程组

静电场、恒定磁场的性质；

电磁感应的规律；

——特定条件，具有局限性；

麦克斯韦总结了库仑、安培和法拉第等人的电磁学研究成果，归纳出了普遍的电磁场的基本方程组。



麦克斯韦  
(1831--1879)

基本概念：  
位移电流；  
有旋电场。

# 麦克斯韦方程组的积分形式

(1) 电场的性质  $\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma q_0 = \iiint_V \rho_f dV$

(2) 磁场的性质  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

(3) 变化电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint_S \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S} + \iint_S \underline{\underline{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}} \cdot d\vec{S}.$$

---

(4) 变化磁场和电场的联系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \underline{\underline{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}} \cdot d\vec{S}.$$

# (1) 电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Sigma q_0 = \iiint_V \rho_f dV$$

一般情况下，

电场 { 静止电荷——静电场 $E_{\text{静}}$   
恒定电流——恒定电场 $E_{\text{恒}}$   
变化的磁场——感生电场 $E_{\text{感}}$

在任何电场中，通过闭合曲面的电位移通量，都等于这一闭合曲面内的自由电荷量的代数和。

## (2) 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

一般情况下，

磁场 { 传导电流——涡旋磁场  
变化的电场——涡旋磁场

在任何磁场中，通过闭合曲面的磁通量，  
总是等于0。

### (3) 变化电场和磁场的联系

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \underline{\underline{I_{\text{全}}}}.$$
$$= \iint_S \vec{j}_{\text{传导}} \cdot d\vec{S} + \iint_S \underline{\underline{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}} \cdot d\vec{S}.$$

在任何磁场中，磁场强度沿任意闭合路径的线积分，等于通过一闭合路径为边线的任意曲面的全电流。



## (4) 变化磁场和电场的联系

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

一般情况下，

电场	{	静止电荷——静电场 $E_{\text{静}}$
		恒定电流——恒定电场 $E_{\text{恒}}$
		变化的磁场——感生电场 $E_{\text{感}}$

在任何电场中，电场强度沿任意闭合曲线的路径积分，等于通过闭合曲线所围面积的磁通量的变化率的负值。

引入哈密顿算符：
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

上述麦克斯韦方程组描述的是在某区域内以积分形式联系各点的电磁场量（ $D$ 、 $E$ 、 $B$ 、 $H$ ）和电流、电荷之间的依存关系，而不能给出某一点上这些量之间的关系。通过数学变换可以得到麦克斯韦方程组的微分形式，它给出了电磁场中逐点的上述量之间的相互依存关系。

# 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_f$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

# “物质方程”

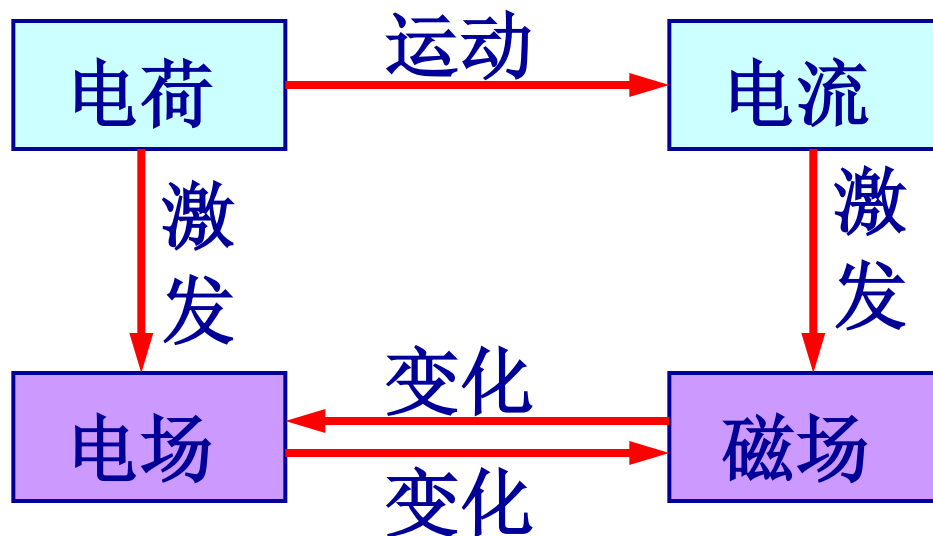
(介质性质方程)

(对于各向同性的线性介质)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} & \text{介电常数 } \varepsilon_r \\ \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} & \text{磁导率 } \mu_r \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} & \text{电导率 } \gamma \end{array} \right.$$

介电常数、磁导率、电导率体现了物质的电磁属性。

# 电场和磁场的本质及内在联系



电场和磁场紧密联系；  
是同一物质——电磁场的两个方面。

# 麦克斯韦方程的意义

a. 完善了宏观的、统一的电磁场理论，并经受了实践的检验

b. 预言了变化的电磁场以波的形式按一定速度在空间传播——电磁波

1862年，麦克斯韦预言了电磁波的存在，论证了光是一种电磁波。

1888年，赫兹用实验证实电磁波的存在。

# 麦克斯韦电磁场理论的适用性

(1) 麦克斯韦方程可用于高速领域。

(2) 麦克斯韦电磁理论在微观区域里不完全适用，它可以看作是量子电动力学在某些特殊条件下的近似规律。

# 电磁场的物质性

1. 电磁场具有实物物质的基本特性：  
能量,质量和动量

a. 电磁场的电磁能量密度为:

$$w = \frac{1}{2} (DE + BH).$$

b. 单位体积的场的质量: (电磁场不为零)

$$m = \frac{w}{c^2} = \frac{1}{2c^2} (DE + BH)$$



# 实物和场在某些情况下可以相互转化

正负电子湮灭  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ .

$$2\gamma \rightarrow e^+ + e^-.$$

实物和场都是物质存在的形式，它们分别从不同方面反映了客观真实。同一实物可以反映出场和粒子两个方面的特性。