第七章

机械波

●海洋中的机械波

声波	物理机制：可压缩性	周期：0.01—0.001S
毛细波	表面张力	小于0.1S
风浪涌浪	重力	1—25S
地震律波	重力	10分钟—2小时
内波	重力和密度分层	2分钟—10小时
风暴潮	重力和地球自转	1小时—10小时
潮波	同上	12小时—24小时
行星波	重力 地球自转 海洋深度变化	100天

●强大的破坏力

1883 年　印度尼西亚喀拉卡托火山爆发引起海啸，波高35m，死亡36140人

1960年　智利8.4级地震引发海啸，波高25m，909人死亡，海啸波经太平洋传至日本，波高仍达6m，120人死亡

1970年　孟加拉湾沿岸风暴潮，增水超6m，20余万死亡100万无家可归

……

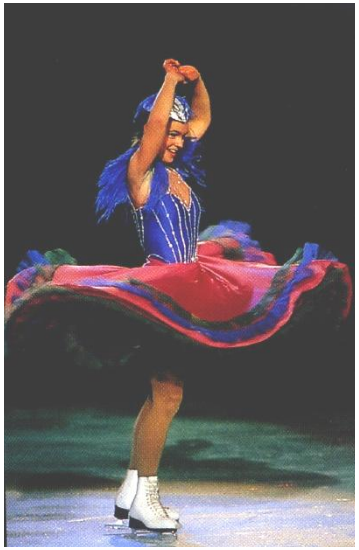
2004年　印度尼西亚印尼亚齐地区发生里氏7.9级地震，引发海啸，死亡人数292206人，50万人无家可归

2011年　日本附近海域9.0级地震引发海啸，1万多人死亡，2万失踪，核电站被冲毁……

……

记录：海浪可将1370吨混凝土推动10多米，万吨油轮推上岸

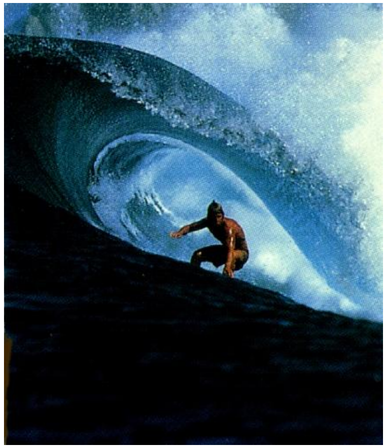
§ 7-1 机械波的产生和传播



波动是振动的传播过程。

机械波：机械振动在介质中的传播过程。

电磁波：变化的电场和变化的磁场在空间的传播过程。



1. 机械波的产生条件

波源 ———产生机械振动的振源

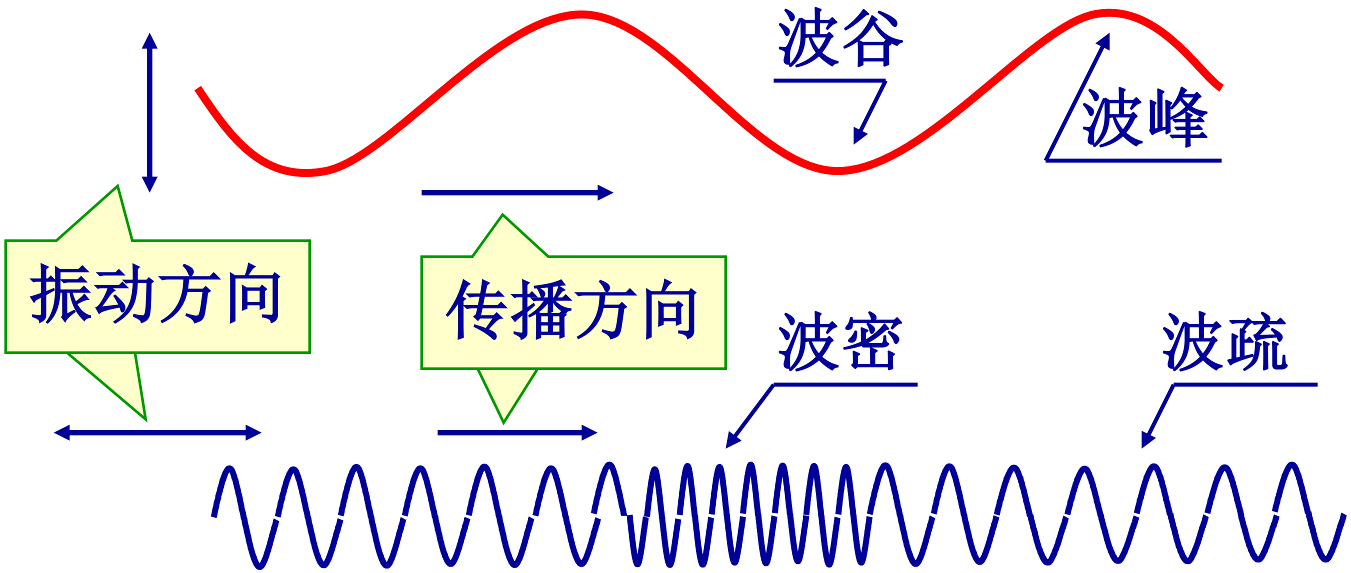
弹性介质 —— 传播机械振动的介质

注：波动是波源的振动状态或振动能量在介质中的传播，介质的质点并不随波前进。

2.横波和纵波

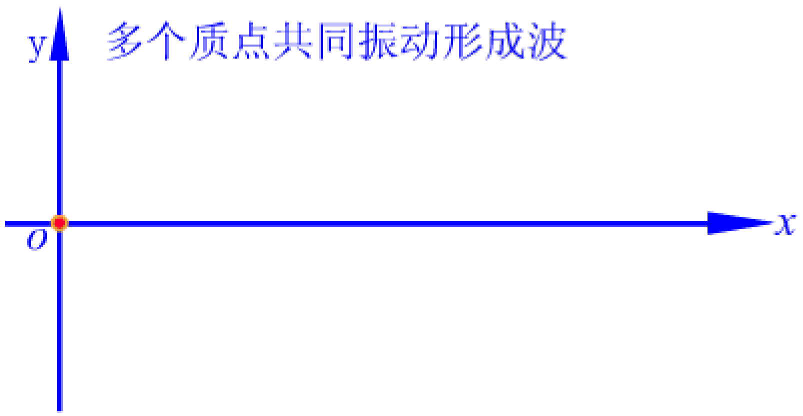
横波：质点的振动方向和波的传播方向垂直。

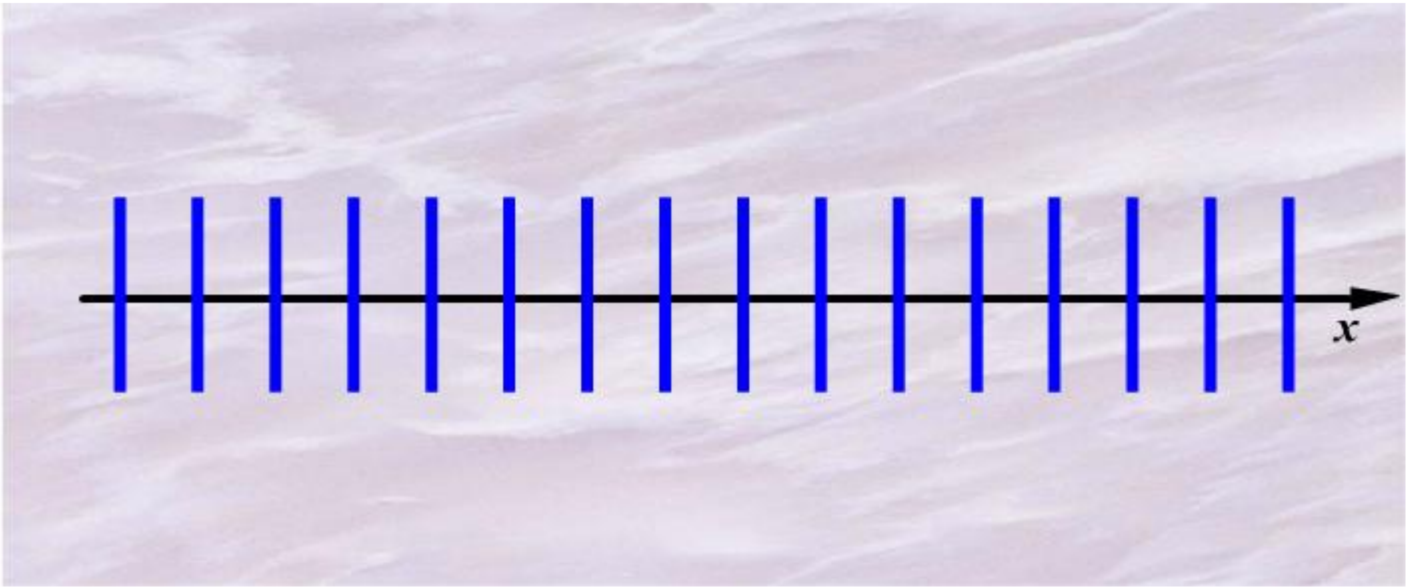
纵波：质点的振动方向和波的传播方向平行。



注：在固体中可以传播横波或纵波，在液体、气体(因无剪切效应)中只能传播纵波。

纵波和横波的传播过程：





当波源作简谐振动时，介质中各个质点也作简谐振动，这时的波动称为简谐波（正弦波或余弦波）。

3.波(阵)面和波线

波阵面：在波动过程中，把振动相位相同的点连成的面(简称波面)。

波前：在任何时刻，波面有无数多个，最前方的波面即是波前。波前只有一个。

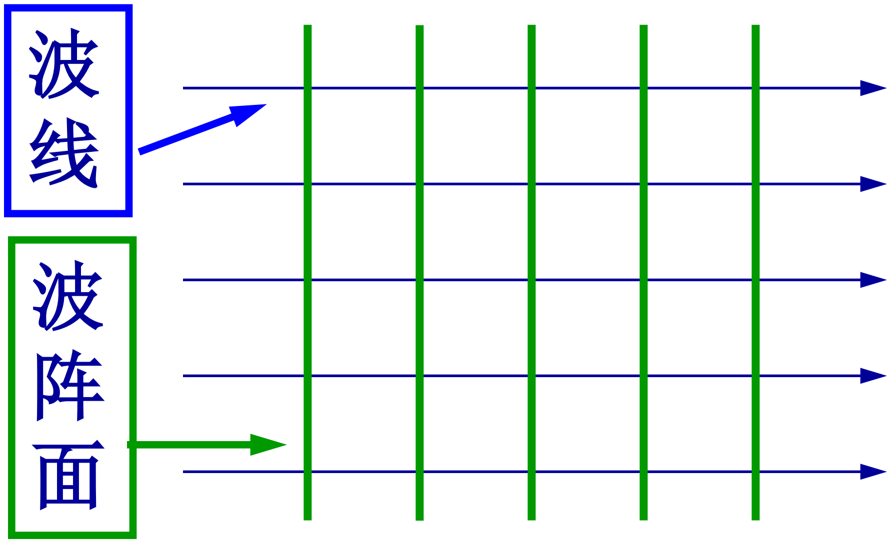
波线：沿波的传播方向作的一些带箭头的线。波线的指向表示波的传播方向。

平面波：波面为平面

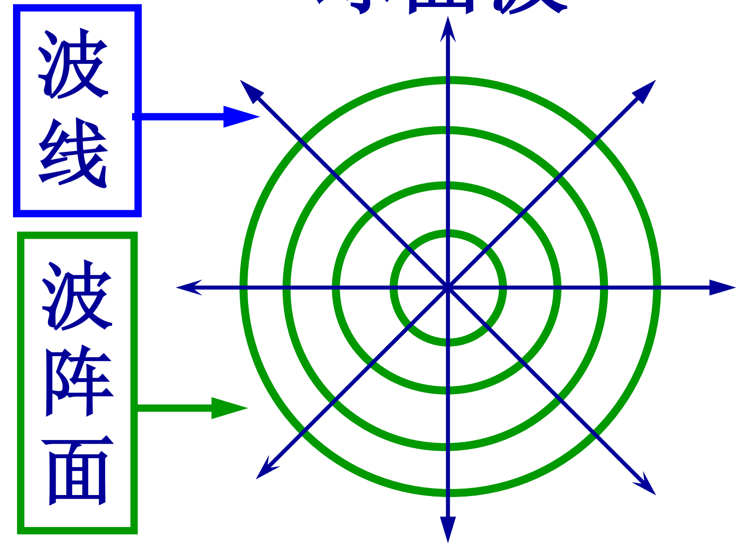
球面波：波面为球面

柱面波：波面为柱面

平面波



球面波

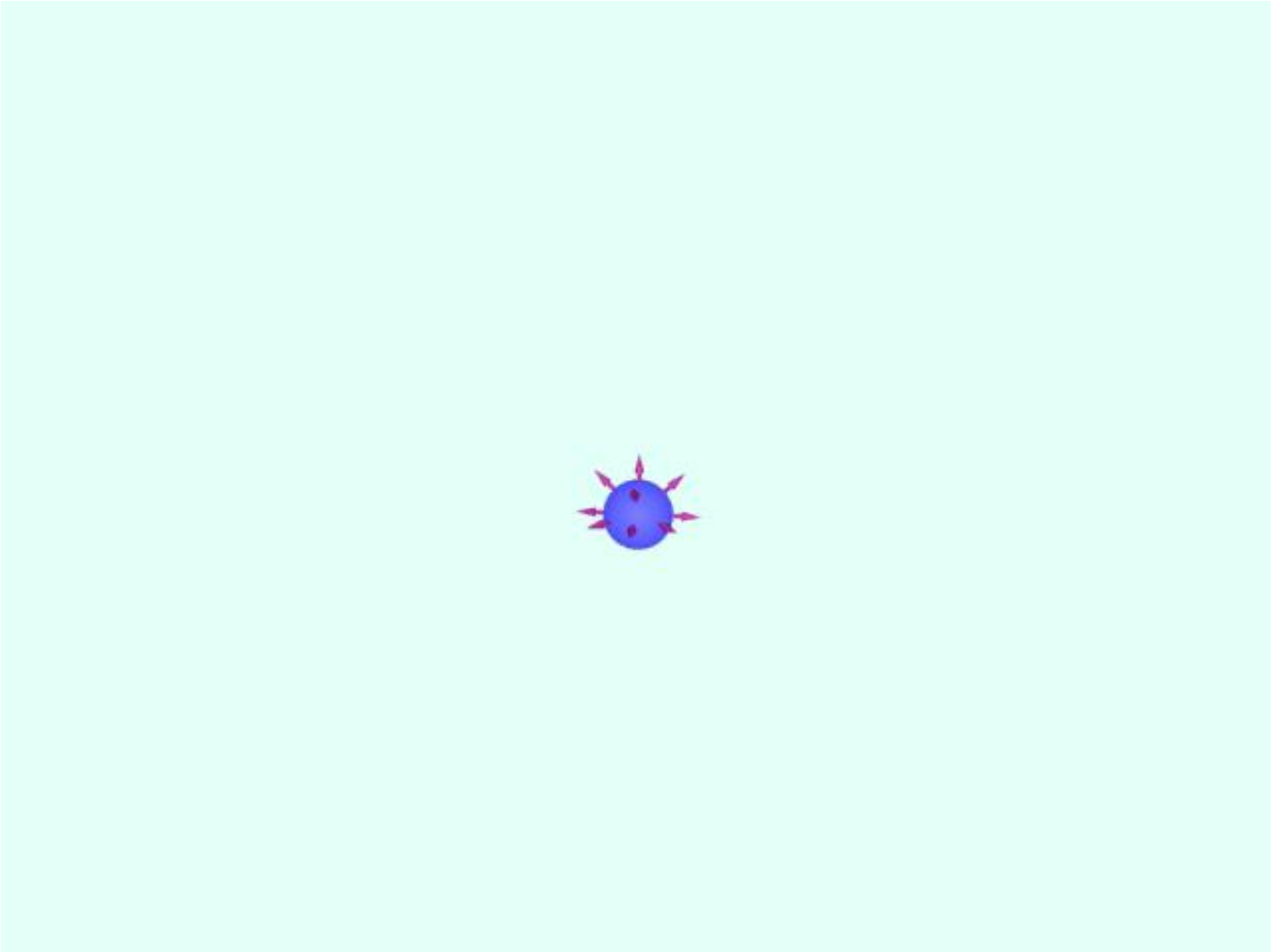


注：

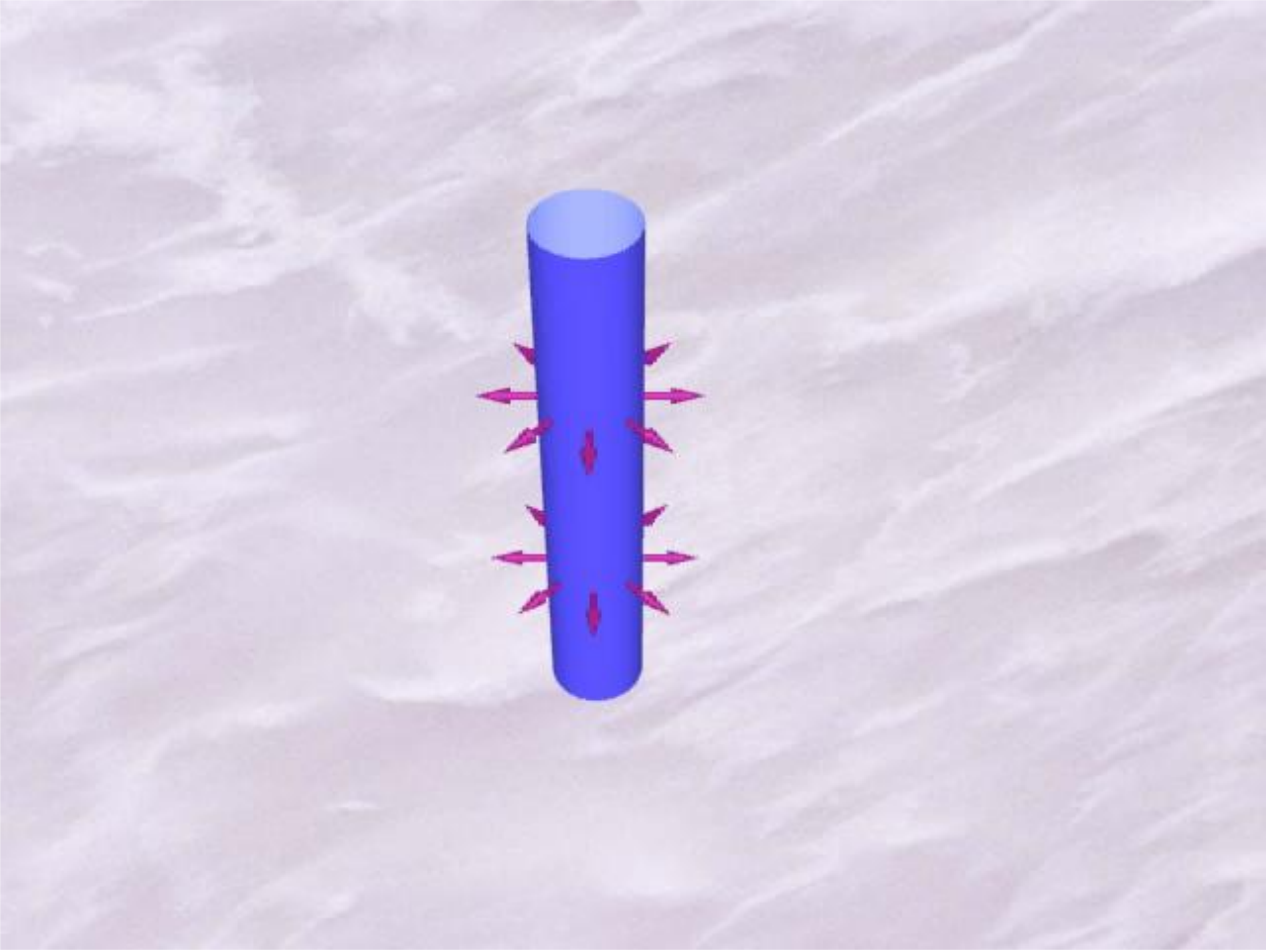
1、在各向同性介质中传播时，波线和波阵面垂直。

2、在远离波源的球面波波面上的任何一个小部份，都可视为平面波。

球面波的形成过程：



柱面波的形成过程：



第八次：第七章：13、19、21、22、23、24、25、27

4. 波长、周期、频率和波速

波长：在同一条波线上，相差为2π的质点间距离。

周期：传播一个波长距离所用的时间。

频率：周期的倒数。

<u>频率和周期只决定于波源，和介质种类无关。</u>

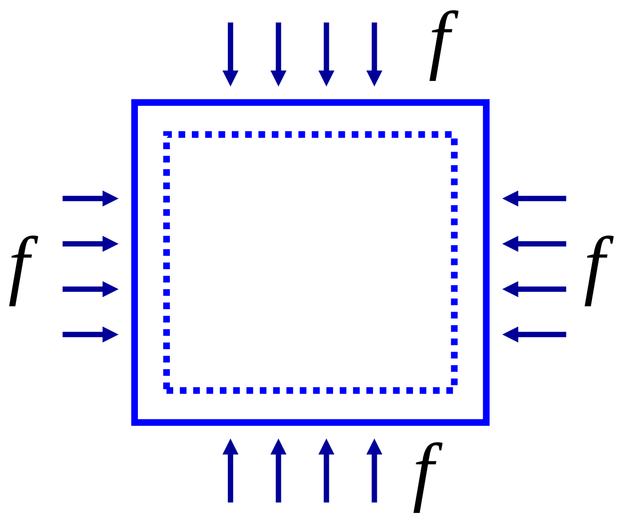
波速：单位时间内一定的振动状态所传播的距离，用*u*表示，是<u>描述振动状态在介质中传播快慢</u>程度的物理量。

注：波速 *u* 与质点的振动速度*v*是不同的！

波速*u*：通常取决于介质的<u>弹性模量</u>和质量密度。

波的传播速度——介质的体变模量

(容变情形)



f —正压力

S —受力面积

V —受力前立方体的体积

V' —受力后立方体的体积

$\Delta V = V' - V$—体积的增量

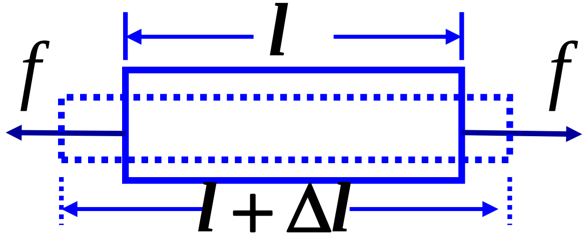
$p = f/S$—应力或胁强　　$\Delta V/V$—应变或胁变

定义：体变模量 $B = -\dfrac{p}{\Delta V/V}$

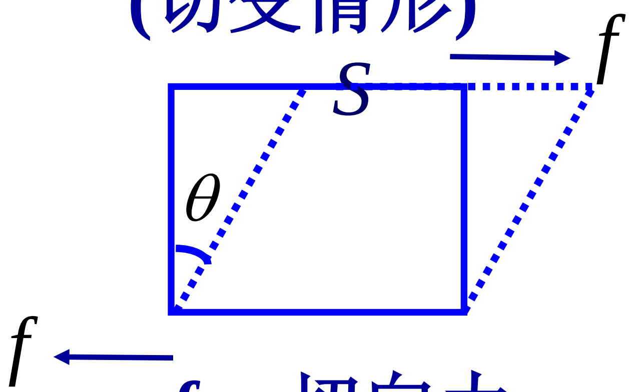
（对于流体 $B = -\dfrac{\Delta p}{\Delta V/V}$ ）

波的传播速度——介质的杨氏模量和剪切模量

(长变情形)



(切变情形)



S —柱体横截面积

$\Delta l/l$ —应变或胁变

$\sigma = f/S$ —应力或胁强

f —切向力

θ —应变或胁变

$\sigma = f/S$ —应力或胁强

定义:

杨氏模量 $Y = \dfrac{f/S}{\Delta l/l}$

定义:

切变模量 $G = \dfrac{f/S}{\theta}$

波的传播速度——不同介质内的波和波速

介质内能够传播的波的形式和相应的波速，与介质的性质紧密相关。

① 液体和气体：

一般只有体变弹性（无剪切效应），因此在其内部只能传播弹性纵波。

流体中纵波传播速度：$u=\sqrt{B/\rho}$ ，$\boldsymbol{B}$一体变模量

对于理想气体， $u=\sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$

γ---气体比热容比，$\boldsymbol{M}$---气体的摩尔质量，
$\boldsymbol{R}$----摩尔气体常量，$\boldsymbol{T}$---热力学温度。

波的传播速度——液体表面波

①b 液体的表面波：

液体的表面可出现由重力和表面张力所引起的表面波，其速度为：

$$u=\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi}+\frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right)\mathrm{th}\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

h—液体深度　　T—表面张力系数　　g—重力加速度

λ—波长　　ρ—液体密度　　th—双曲正切函数

若不考虑表面张力（则$T=0$）：

浅水波 ($h \ll l$)　$u=\sqrt{gh}$

深水波($h \gg l$)　$u=\sqrt{g\lambda/2\pi}$

波的传播速度——固体中的波

② 固体中的横波与纵波

固体可产生体变、长变、切变，因此既能传播横波（与切变相关），也能传播纵波（与体变长变相关）。

横波波速 $u=\sqrt{G/\rho}$ **G** --切变模量

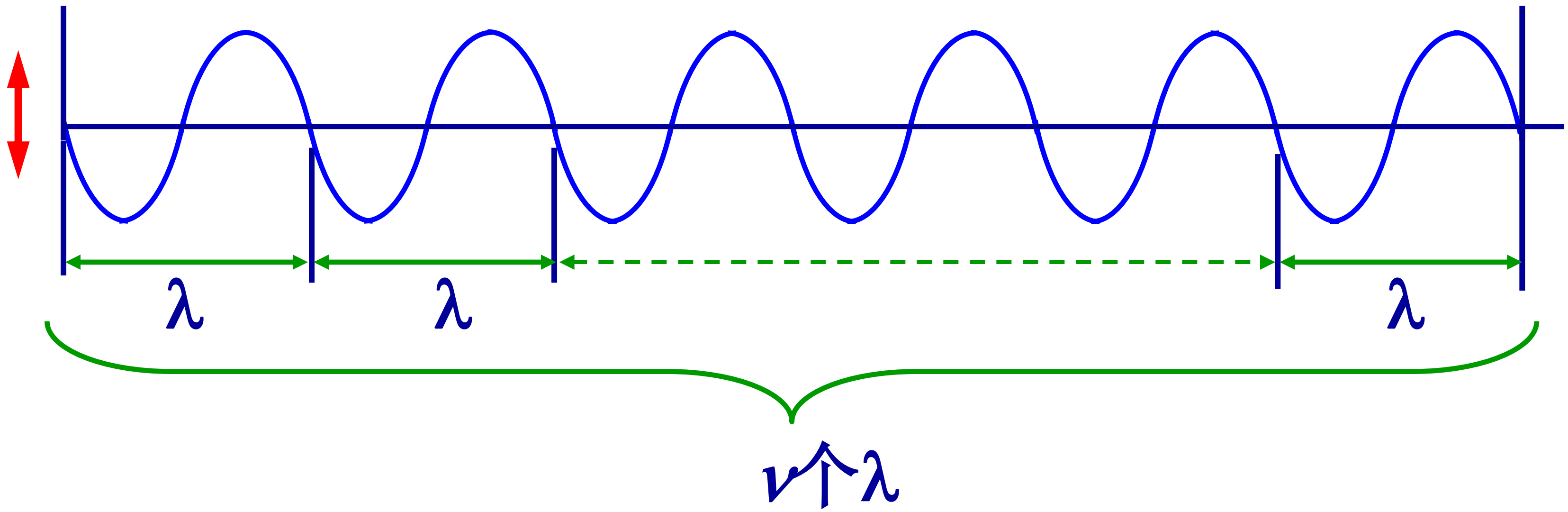
纵波波速 $u=\sqrt{Y/\rho}$ **Y** --杨氏模量

③ 柔软细索和弦线中横波的传播速度：

横波波速 $u=\sqrt{F/\mu}$

F—弦线中的张力 ***m***—弦线单位长度的质量

波长、频率和波速之间满足关系



质点完成1次振动——波向前传播λ距离；

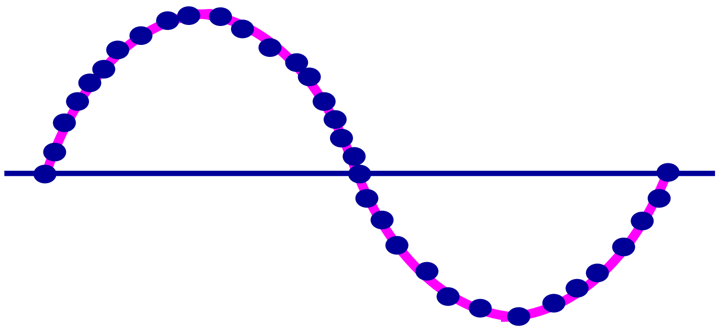
1秒内质点振动ν次——波向前推进ν个波长—— $\nu\lambda$；

波速 $u=\dfrac{\lambda}{T}=\nu\lambda$

波长和频率——关于连续介质的讨论

注： 前面讨论波的传播时，均假设介质是连续的。

原因： 波长>>分子间的距离时，一个波长距离内有无数个分子陆续振动。



是否连续？波长&分子间距

(1) 若波长小到分子间距尺度，介质不再具备连续性，此时不能传播波长如此之小弹性波。—— 频率上限

(2)若分子间距大到接近波长，介质不连续，无法传播弹性波。——高真空中无法传播声波

例　频率为3000Hz的声波，以1560m/s的传播速度沿一波线传播，经过波线上的*A*点后，再经13cm而传至*B*点。求(1) *B*点的振动比*A*点落后的时间。(2) 波在*A*、*B*两点振动时的相位差是多少？(3) 设波源作简谐振动，振幅为1mm，求振动速度的幅值，是否与波的传播速度相等？

解 (1) 波的周期 $T=\dfrac{1}{\nu}=\dfrac{1}{3000}\,\mathrm{s}$

波长 $\lambda=\dfrac{u}{\nu}=\dfrac{1.56\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{3000\,\mathrm{s^{-1}}}=0.52\,\mathrm{m}=52\,\mathrm{cm}$

*B*点比*A*点落后的时间为

$$\frac{0.13\,\mathrm{m}}{1.56\times10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=\frac{1}{12000}\,\mathrm{s}\qquad \text{即}\ \frac{T}{4}\text{。}$$

(2) ***A*、*B*** **两点相差**$\frac{13}{52}=\frac{\lambda}{4}$**，*B*点比*A*点落后的相差为**

$$\frac{\lambda}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$$

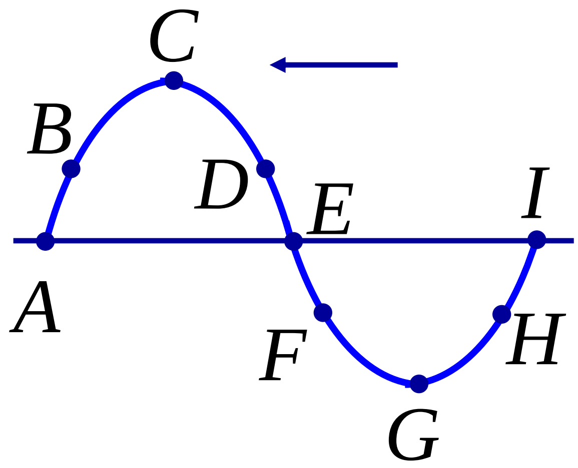
(3) 振幅 *A* = 1mm，则振动速度的幅值为

$$v_m=A\omega=0.1\text{cm}\times 3000\text{s}^{-1}\times 2\pi$$

$$=1.88\times 10^3\ \text{cm/s}=18.8\,\text{m/s}$$

振动速度是交变的，其幅值为18.8m/s，远小于波速。

例　设某一时刻绳上横波的波形曲线如下图所示，水平箭头表示该波的传播方向。试分别用小箭头表明图中*A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I*各质点的运动方向，并画出经过1/4周期后的波形曲线。



解　横波传播过程中各个质点在其平衡位置附近振动，且振动方向与传播方向垂直。

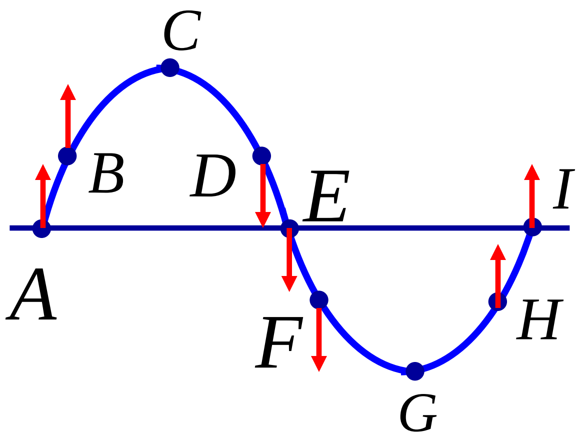
$$v_C = 0$$

根据图中的波动传播方向，可知在*C* 以后的质点*B*和*A*开始振动的时刻总是落后于*C* 点，而在*C* 以前的质点 *D*、*E*、*F*、*G*、*H*、*I* 开始振动的时刻却都超前于*C* 点。

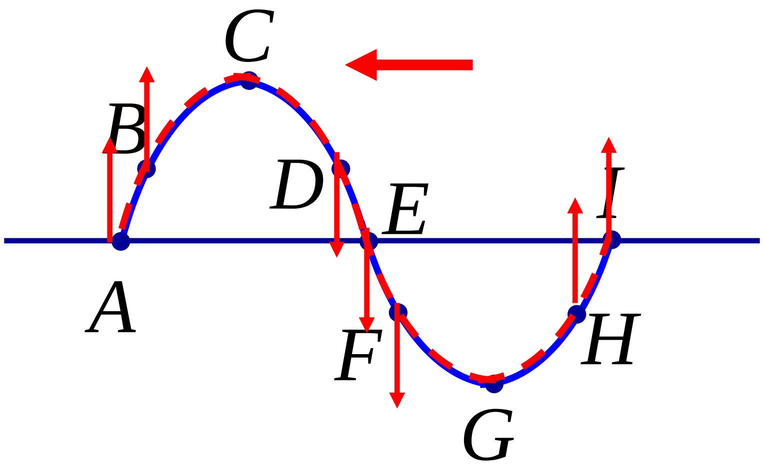
在*C* 达到正的最大位移时，质点*B* 和*A* 都沿着正方向运动，向着各自的正的最大位移行进，质点*B* 比*A* 更接近于自己的目标。

质点*F*、*E*、*D*已经过各自的正的最大位移，而进行向负方向的运动。

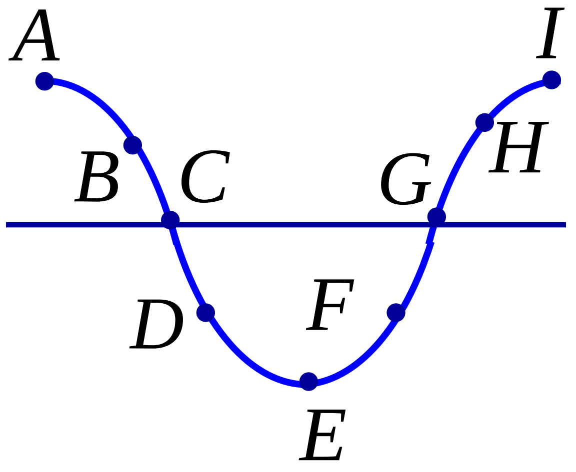
质点*I*、*H* 不仅已经过了自己的正的最大位移，而且还经过了负的最大位移，而进行着正方向的运动。质点*G* 则处于负的最大位移处。



经过*T*/4，波形曲线如下图所示，它表明原来位于*C* 和*I* 间的波形经过*T*/4，已经传播到*A*、*G* 之间来了。



$t = 0$ 初始波形

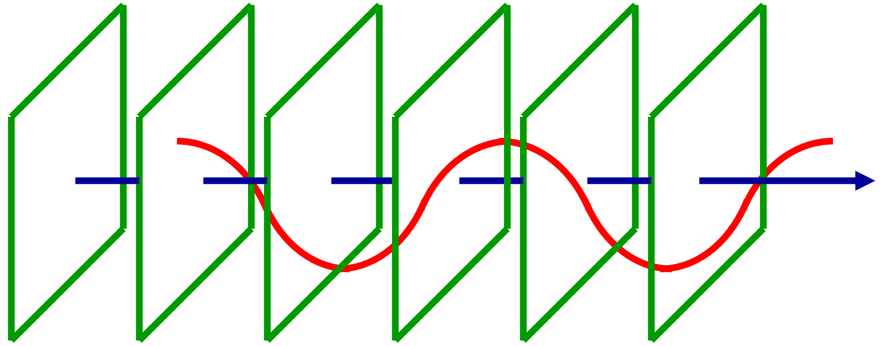


$t = T/4$

§7-2 平面简谐波

平面简谐波传播时，介质中各质点都作同一频率的简谐波动，在任一时刻，各点的振动相位一般不同，它们的位移也不相同。据波阵面的定义可知，任一时刻在同一波阵面上的各点有相同的相位，它们离开各自的平衡位置有相同的位移。

波函数：描述介质中各质点的位移随时间的变化关系。

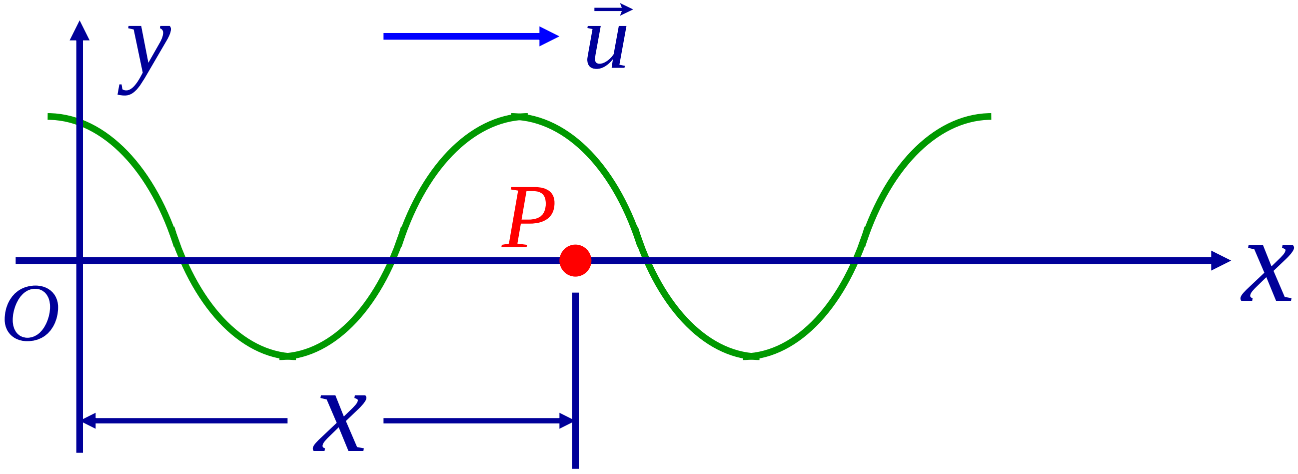


平面简谐波

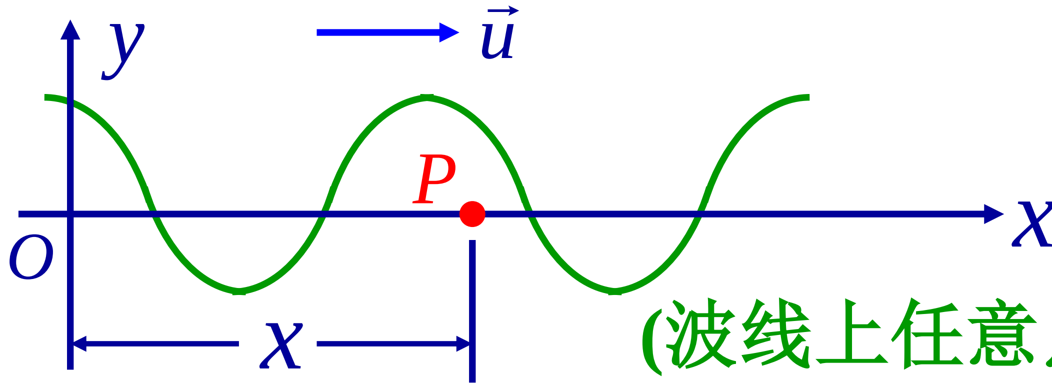
1. 平面简谐波的波函数

平面简谐行波，在无吸收的均匀无限介质中沿x轴的正方向传播，波速为u。取任意一条波线为x轴，取O作为x轴的原点。O点处质点的振动表式为

$$y_0(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$



波线上任意一点P处的位移随时间如何变化？



(波线上任意点P与O点距离x)

波向右传播，因此P点振动相位落后于O点 。

假设振动从O 传到P所需时间为t'。在t 时刻P点处质点的位移就是O 点处质点在 $t-t'$ 时刻的位移

P点处质点在 t 时刻的位移为：

$$y_P(t)=y_O(t-t')=A\cos\left[\omega\left(t-t'\right)+\phi_0\right]$$

$$\Rightarrow\quad y_P(t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]\qquad t'=\frac{x}{u}$$

$$y_P(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

波线上任一处质点在任一瞬时的位移由上式给出。

此即沿 x 轴正向传播的平面简谐波的波函数。

利用关系式 $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ 和 $uT = \lambda$，得：

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi(\nu t - x/\lambda) + \phi_0\right]$$

定义角波数：$k = 2\pi/\lambda$，单位长度上的相位变化

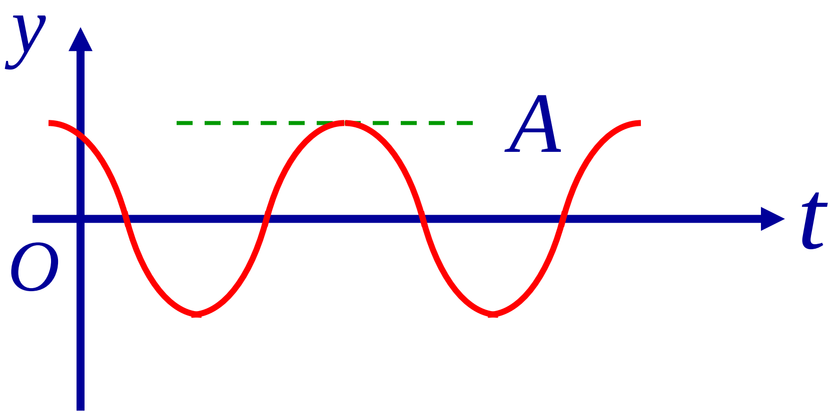
$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

波动表式的意义：

- x 一定。令 $x = x_1$，则质点位移 y 仅是时间 t 的函数。

即 $$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda}\right)$$

上式代表 x_1 处质点在其平衡位置附近以角频率 ω 作简谐运动。

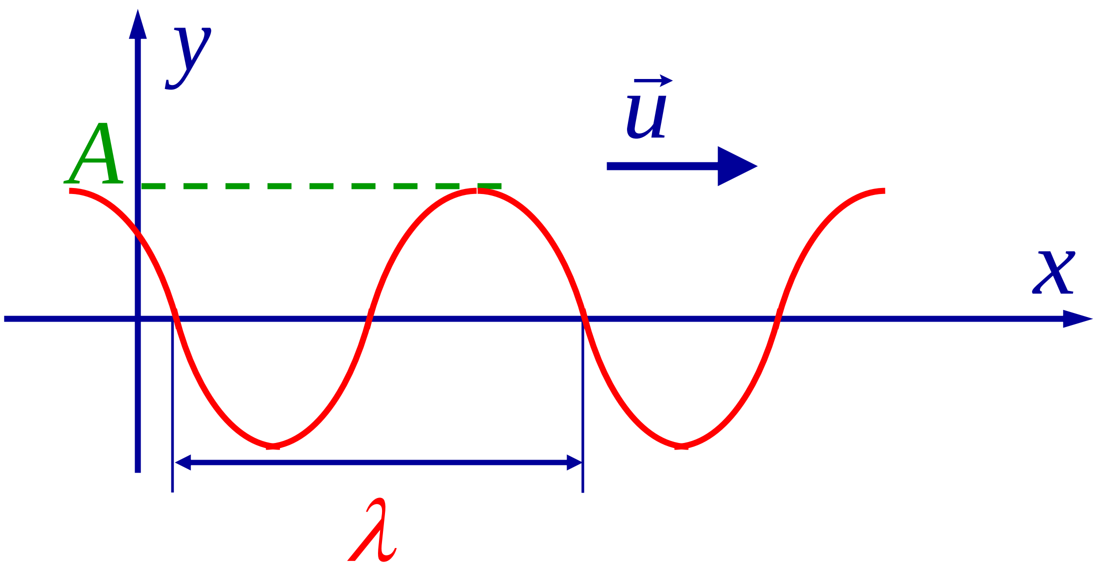


振幅：A　　　周期：$T = 2\pi/\omega$

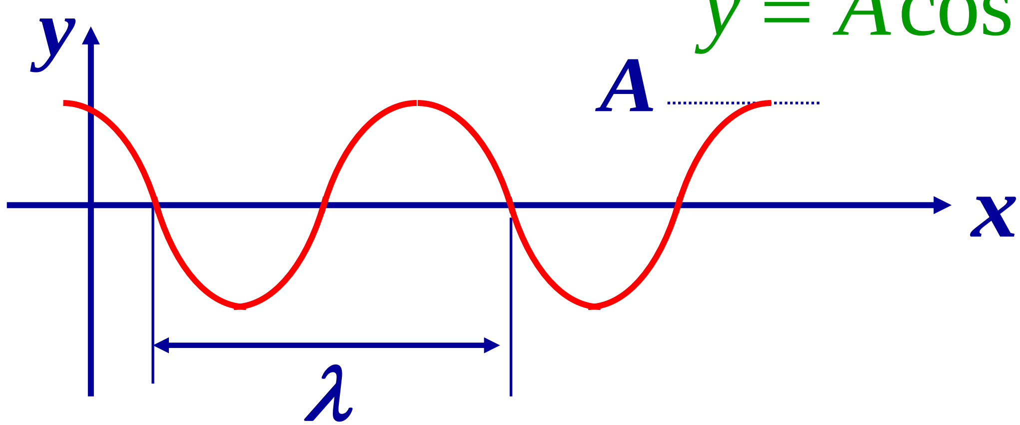
- **t 一定。**令$t=t_1$，则质点位移y仅是x的函数。

即 $$y = A\cos\left(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

以y为纵坐标、x为横坐标，得到一条余弦曲线，它是t_1时刻波线上各个质点偏离各自平衡位置的位移所构成的波形曲线(波形图)。



$$y = A\cos\left(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_0\right)$$



（1）波形曲线为余弦曲线，其“周期”为λ。

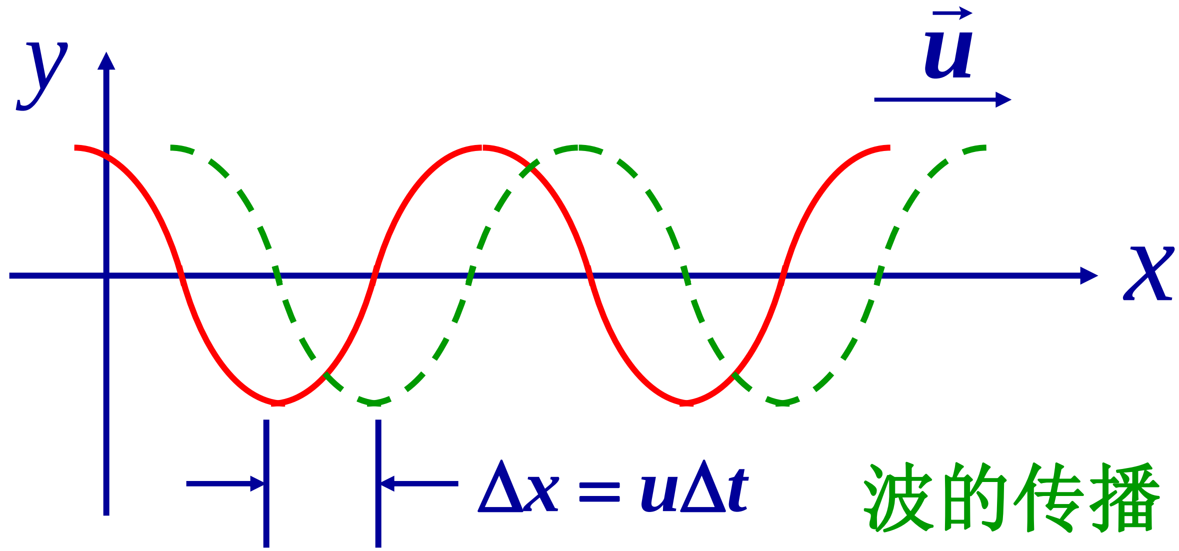
（2）沿波线（x轴）方向，两个距离相隔λ的质点的振动的相位差$\Delta\phi$为2π。

（3）沿波线方向，任意两点x_1、x_2的简谐振动相位差

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = -2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

- x、t 都变化。

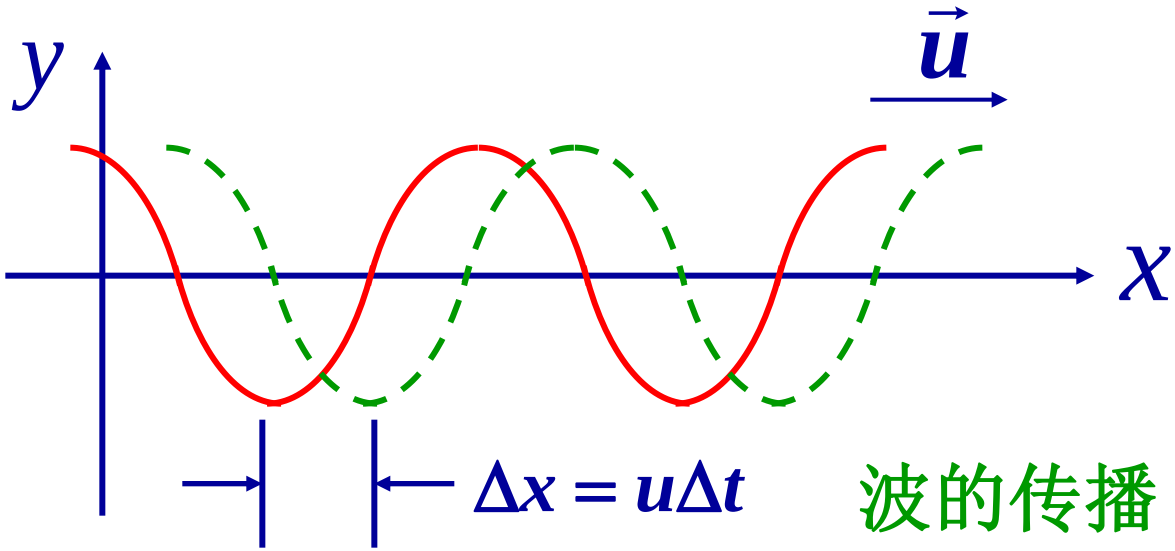
此时波函数表示波线上<u>不同质点</u>在<u>不同时刻的位移</u>。



y为纵坐标，x为横坐标，在t_1时刻得到一条波形曲线（实线），在$t_1+\Delta t$时刻得到另一条波形曲线（虚线）

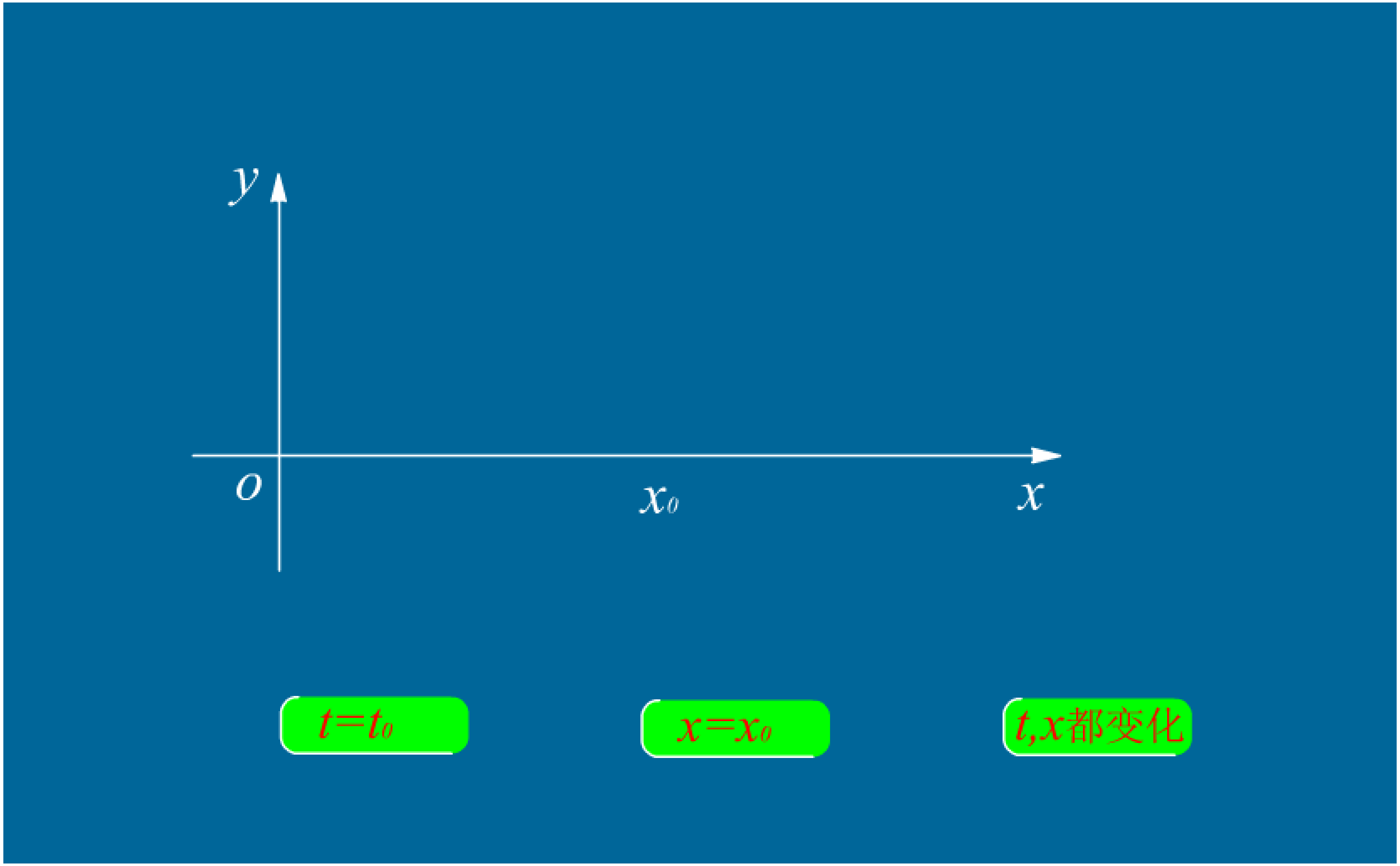
x、t 都变化。

两条波形曲线形状相似，位置平移，反映了波形的传播

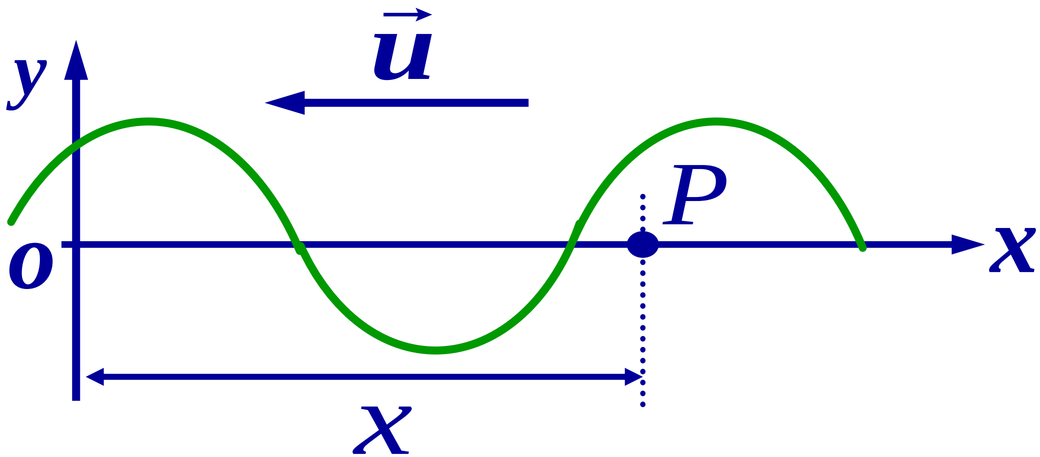


波速u 是整个波形向前传播的速度。

波函数反映了波形的传播，描述的是在跑动的波，称为行波。


y
o
x0
x
t=t0
x=x0
t,x都变化

沿*x*轴负方向传播的平面简谐波的表达式



O 点简谐运动方程：

$$y_0 = A\cos\left[\omega t + \varphi_0\right]$$

P 点的运动方程为：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

沿x轴正方向前进的平面简谐波

$$y(t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\phi_0\right]$$

利用关系式$\omega=2\pi/T=2\pi\nu$和$uT=\lambda$，$k=2\pi/\lambda$

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_0\right]$$

$$y(x,t)=A\cos\left[2\pi\left(\nu t-\frac{x}{\lambda}\right)+\phi_0\right]$$

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\phi_0)$$

沿x轴负方向前进的平面简谐波

$$y(t) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$$

利用关系式$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$和$uT = \lambda$，$k = 2\pi/\lambda$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \phi_0)$$

例1　一平面简谐波沿x轴正方向传播，已知其波函数为 $y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x)\mathrm{m}$。

求 (1)波的振幅、波长、周期及波速；(2)质点振动的最大速度。

解 方法一（比较系数法）

把波动方程改写成

$$y = 0.04\cos 2\pi(\frac{50}{2}t - \frac{0.10}{2}x)$$

比较标准波函数 $y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ ，得

振幅、周期、波长和波速为

$$A = 0.04 \text{ m}$$

$$T = \frac{2}{50} = 0.04 \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{2}{0.10} = 20 \text{ m}$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = 500 \text{ m/s}$$

方程 $y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x) \text{ m}$

方法二（由各物理量的定义解）

振幅A 即位移的最大值，所以 $A = 0.04\text{m}$

周期T 质点振动相位变化2π所经历的时间

设x处质点在$T = t_2 - t_1$的时间内相位变化2π

$$\pi(50t_2 - 0.10x) - \pi(50t_1 - 0.10x) = 2\pi$$

$$\therefore \quad T = t_2 - t_1 = 0.04\ \text{s}$$

波长 在同一波形图上相位差为2π的两点间的距离。

$$\pi(50t_2 - 0.10x_2) = \pi(50t_1 - 0.10x_1)$$

$$\lambda = x_2 - x_1 = 20\ \mathrm{m}$$

波速 单位时间内某一振动状态（相位）传播过的距离。

设时刻t_1，x_1处的相位在质点在时刻t_2传到x_2处，则

$$\pi(50t_2 - 0.10x_2) = \pi(50t_1 - 0.10x_1)$$

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 500\ \mathrm{m/s}$$

$$y = 0.04\cos\pi(50t - 0.10x) \ \ \mathrm{m}$$

(3) 质点的振动速度为

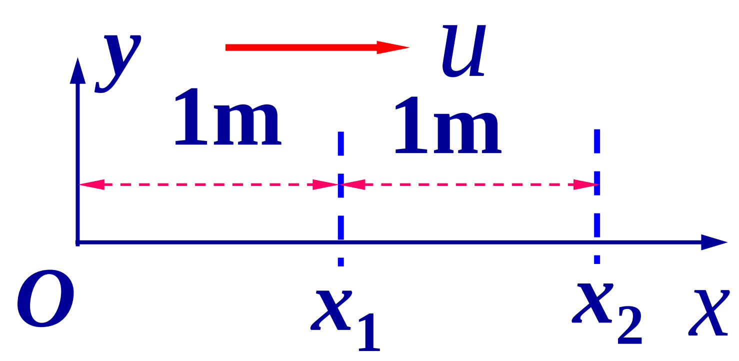
$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -0.04 \times 50\pi \sin\pi(50t - 0.10x)$$

最大值为

$$v_{\max} = 0.04 \times 50\pi = 6.28\ \mathrm{m/s}$$

例2 一平面简谐横波以400m/s的波速在均匀介质中沿直线传播。已知波源的振动周期为0.01s，振幅A = 0.01m。设以波源振动经过平衡位置向正方向运动时作为计时起点，求(1)以距波源2m处为坐标原点写出波函数。(2)以波源为坐标原点写出波函数。(3)距波源2m和1m两点间的振动相位差。

解 (1)以波源为坐标原点



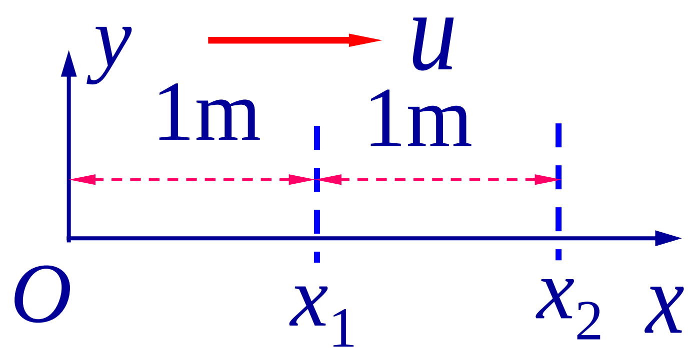
$t = 0$时，$y_0 = 0$，$u_0 > 0$，所以初相位为$-\pi/2$。

波源的振动方程为

$$y_0(t)=A\cos(\frac{4\pi}{T}t+\phi_0)=0.01\cos(200\pi t-\frac{\pi}{2})$$

波从O点传播到2m处质点所需要的时间为

$$\Delta t=\frac{x_2}{u}=\frac{2}{400}\ \mathrm{s}$$



距波源2m处质点的振动方程

$$y(t)=A\cos[\omega(t-\Delta t)+\phi_0]$$

$$=0.01\cos(200\pi t-200\pi\times\frac{2}{400}-\frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \quad y(t) = 0.01\cos(200\pi t - \frac{3}{2}\pi)$$

以距波源2m处为坐标原点的波函数为

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi]$$

$$= 0.01\cos[200\pi(t - \frac{x}{400}) - \frac{3}{2}\pi]$$

(2)波源的振动方程为

$$y = 0.01\cos(200\pi t - \frac{\pi}{2})$$

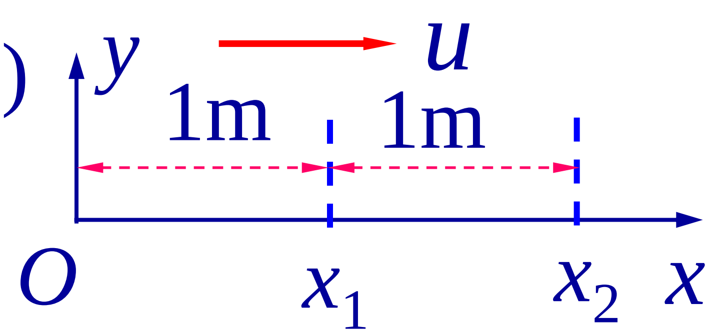
以波源为坐标原点的波函数为

$$y(x,t)=0.01\cos[200\pi(t-\frac{x}{400})-\frac{\pi}{2}]$$

(3) 将$x=2\mathrm{m}$和$x=1\mathrm{m}$分别代入(2)中的波函数

$$y_2(t)=0.01\cos(200\pi t-\frac{3}{2}\pi)$$

$$y_1(t)=0.01\cos(200\pi t-\pi)$$

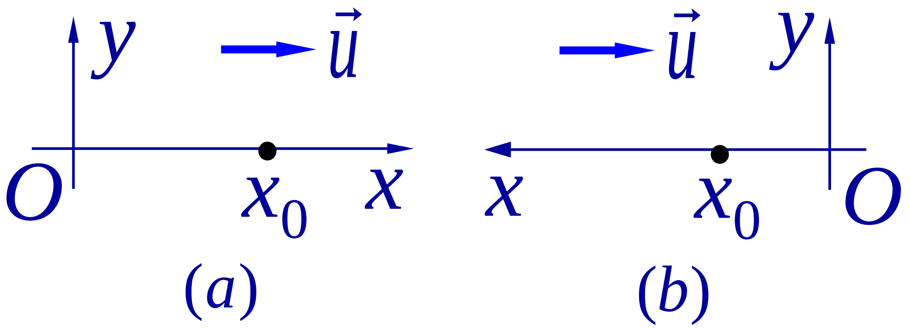


距波源2m和1m两点间的振动相位差为

$$\Delta\phi=(200\pi t-\frac{3}{2}\pi)-(200\pi t-\pi)=-\frac{\pi}{2}$$

例3　一平面简谐波，波速为u，已知在传播方向上x_0点的振动方程为$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$。试就图所示的(a)、(b)两种坐标取法分别写出各自的波函数。

解 (a) 坐标取法中，波的传播方向与 x 轴正方向相同。



O点的振动相位超前于x_0点$\omega x_0/u$，则O点的振动方程为

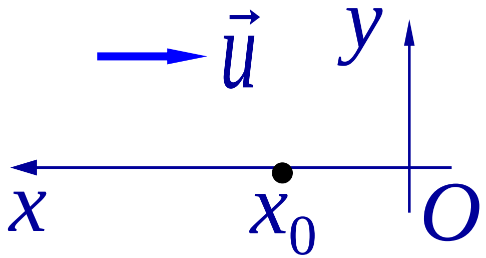
$$y_0 = A\cos[\omega(t + \frac{x_0}{u}) + \phi_0]$$

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数为

$$y_0 = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u} + \frac{x_0}{u}) + \phi_0]$$

$$= A\cos[\omega(t - \frac{x - x_0}{u}) + \phi_0]$$

(b) 坐标取法中，波的传播方向与x轴正方向相反。



(b)

波由O点传播到x_0点使得O点的振动相位落后于x_0点$\omega x_0/u$

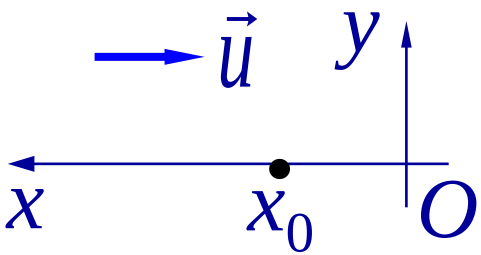
则O点的振动方程为

$$y_0 = A\cos[\omega(t - \frac{x_0}{u}) + \phi_0]$$

沿x轴反方向传播的平面简谐波的波函数为

$$y_0 = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u} - \frac{x_0}{u}) + \phi_0]$$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x - x_0}{u}) + \phi_0]$$



(b)

例题　频率为ν = 12.5kHz的平面余弦纵波沿细长的金属棒传播，波速为u = 5.0×10^{3}m/s。如以棒上某点取为坐标原点，已知原点处质点振动的振幅为A = 0.1mm，试求：(1)原点处质点的振动表式，(2)波函数，(3)离原点10cm处质点的振动表式，(4)离原点20cm和30cm处质点振动的相位差，(5)在原点振动0.0021s时的波形。

解：波长 $$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{5.0\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{12.5\times10^3\ \mathrm{s^{-1}}} = 0.40\,\mathrm{m}$$

周期 $$T = 1/\nu = 8\times10^{-5}\ \mathrm{s}$$

(1)原点处质点的振动表式

$$\begin{aligned} y_0 &= A\cos\omega t = 0.1\times10^{-3}\cos(2\pi\times12.5\times10^3 t)\ \mathrm{m} \\ &= 0.1\times10^{-3}\cos(25\times10^3\pi t)\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

(2)波动表式

$$y = A\cos\omega(t - x/u)$$

$$= 0.1\times10^{-3}\cos 25\times10^{3}\pi\left(t - \frac{x}{5\times10^{3}}\right)\text{m}$$

式中x 以m计，t 以s 计。

(3)离原点10cm处质点的振动表式

$$y = 0.1\times10^{-3}\cos 25\times10^{3}\pi\left(t - \frac{1}{5\times10^{4}}\right)\text{m}$$

$$= 0.1\times10^{-3}\cos\left(25\times10^{3}\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\text{m}$$

可见此点的振动相位比原点落后，相位差为$\pi/2$，或落后$T/4$，即2×10^{-5}s。

(4)该两点间的距离Δx = 10cm = 0.10m = $\lambda/4$，相应的相位差为

$$\Delta\phi = \pi / 2$$

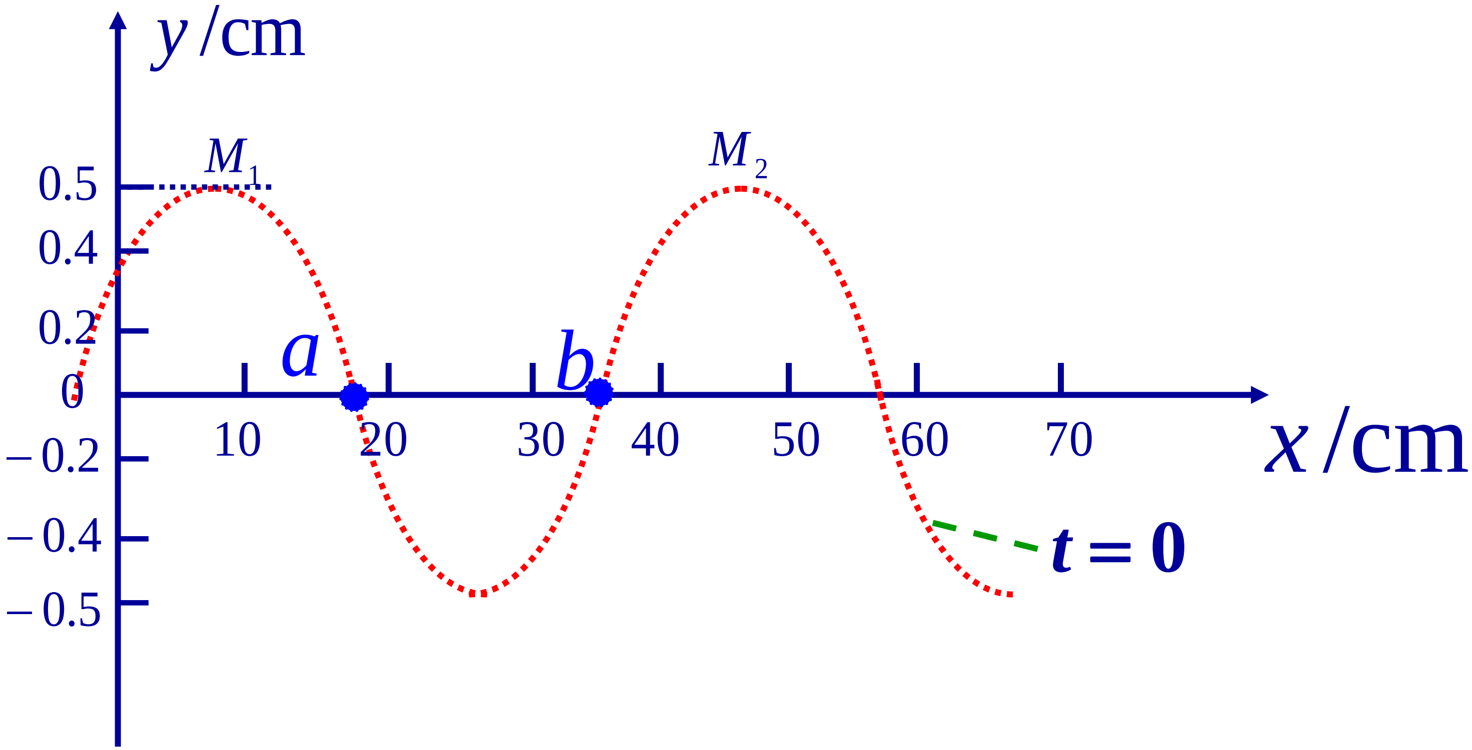
(5)t = 0.0021s时的波形为

$$y = 0.1\times10^{-3}\cos\left[25\times10^{3}\pi\left(0.0021-\frac{x}{5\times10^{3}}\right)\right]\mathrm{m}$$

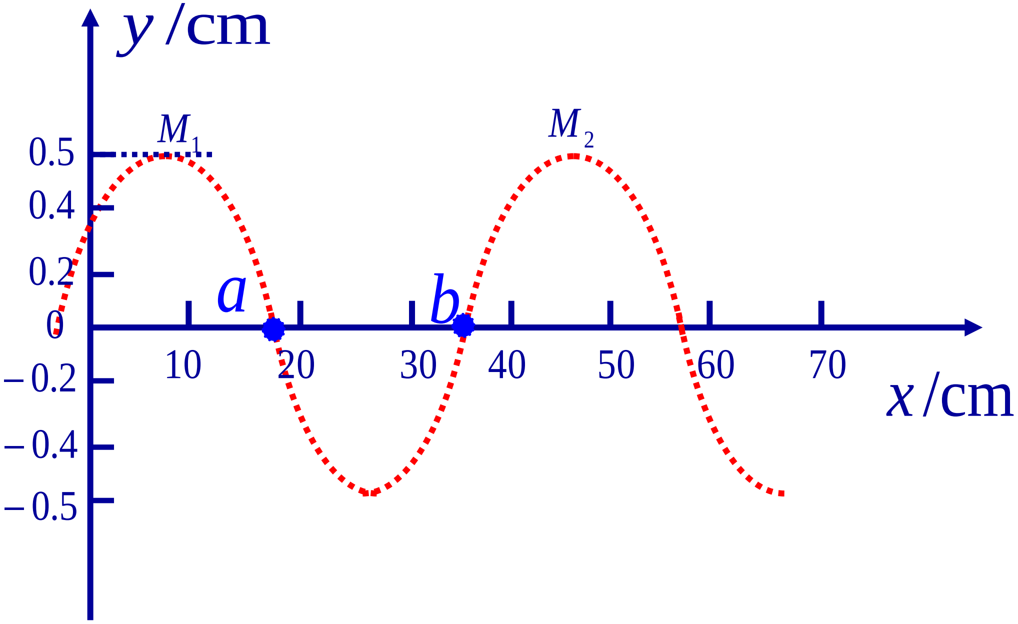
$$= 0.1\times10^{-3}\sin 5\pi x\ \mathrm{m}$$

式中x以m计。

例题　一横波沿一弦线传播。设已知$t=0$时的波形曲线如下图中的虚线所示。弦上张力为3.6N，线密度为25g/m，求(1)振幅，(2)波长，(3)波的周期，(4)弦上任一质点的最大速率，(5)图中a、b两点的相位差，(6)$3T/4$时的波形曲线。



解 由波形曲线图可看出：



(1) $A = 0.5\text{cm}$；

(2) $\lambda = 40\text{cm}$；

(3)波的周期

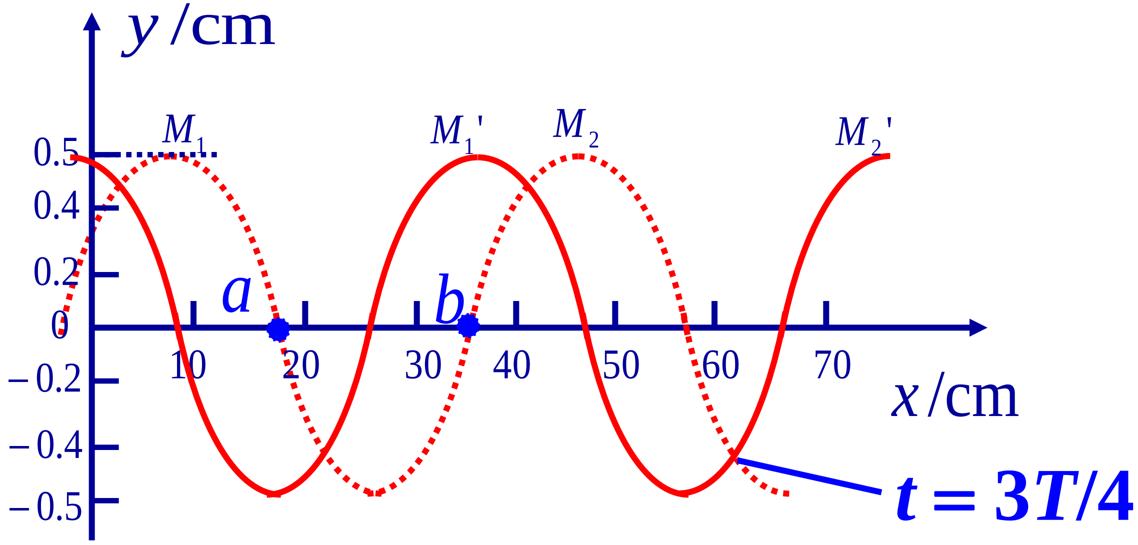
$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.4\,\text{m}}{12\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = \frac{1}{30}\text{s}$$

(4)质点的最大速率

$$v_m = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 0.5\times10^{-2}\times\frac{2\pi}{1/30}\,\mathrm{m/s} = 0.94\,\mathrm{m/s}$$

(5)*a*、*b*两点相隔半个波长，*b*点处质点比*a*点处质点的相位落后π。

(6)3*T*/4时的波形如下图中实线所示，波峰M_1和M_2已分别右移$3\lambda/4$而到达M_1'和M_2'处。



3. 波动微分方程

对 $y = A\cos\left[\omega(t - x/u) + \phi_0\right]$ 求 **x** 、**t** 的二阶偏导，得到

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right],$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

平面波的波动微分方程

任何物理量*y*，若它与时间、坐标间的关系满足上式，则这一物理量就按波的形式传播。

在三维空间中的一切波动过程，只要介质无吸收且各向同性，都适合下式：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ξ代表振动位移。

球面波的波动方程：$\dfrac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2}=\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2}$

球面波的余弦表式如下：

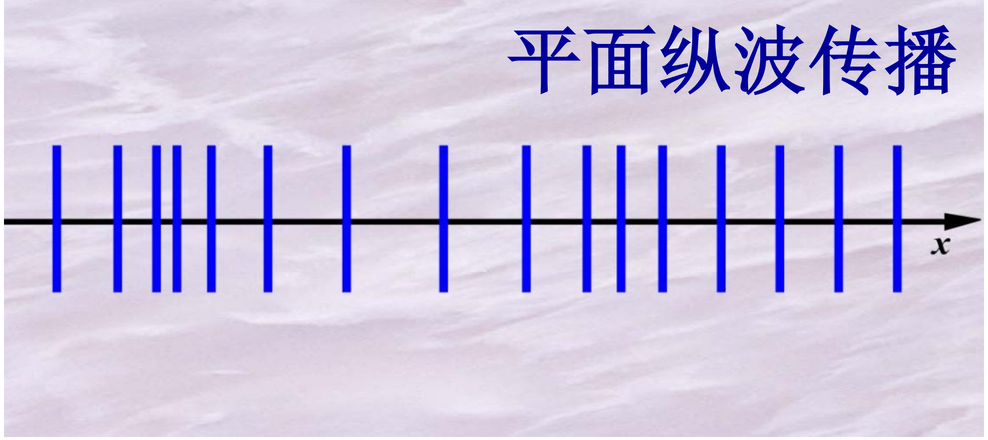
$$\xi=\frac{a}{r}\cos\omega\left[\left(t-\frac{r}{u}\right)+\phi_0\right]$$

a/r——振幅

§7-3 波的能量

弹性波传播到介质中的某处，该处将具有动能和势能。在波的传播过程中，能量从波源向外传播。

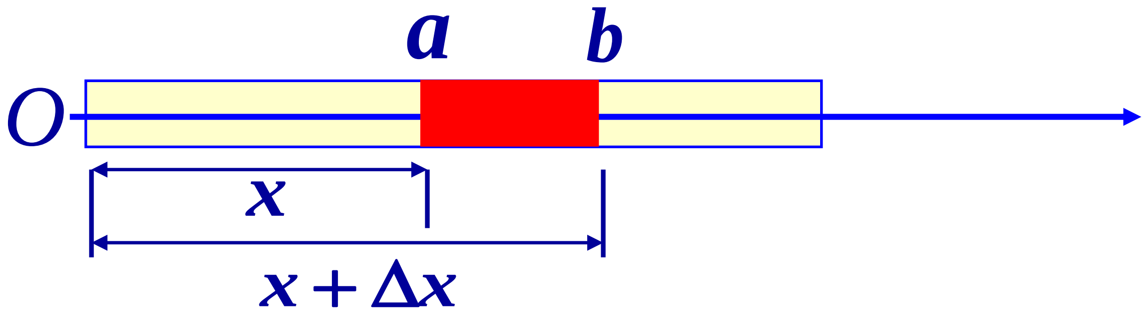
初始静止→→发生振动→→ 获得动能；
平衡位置→→发生形变→→获得势能。



振动状态在介质中由近及远传播，能量从波源向外传播出去。—— 波动的重要特征

1. 波的能量和能量密度

考虑介质中的体积ΔV，其质量为Δm （$\Delta m = \rho\Delta V$）。当波动传播到该体积元时，将具有动能ΔE_k和弹性势能ΔE_p。



平面简谐波 $y(x,t) = A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)$

可以证明

$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

体积元的总机械能**W**

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

对单个谐振子$\boldsymbol{\Delta E_k \neq \Delta E_p}$

在波的传播过程中，任一体积元都在不断地接受和放出能量，其值是时间的函数。与振动情形相比，波动传播能量，振动系统并不传播能量。

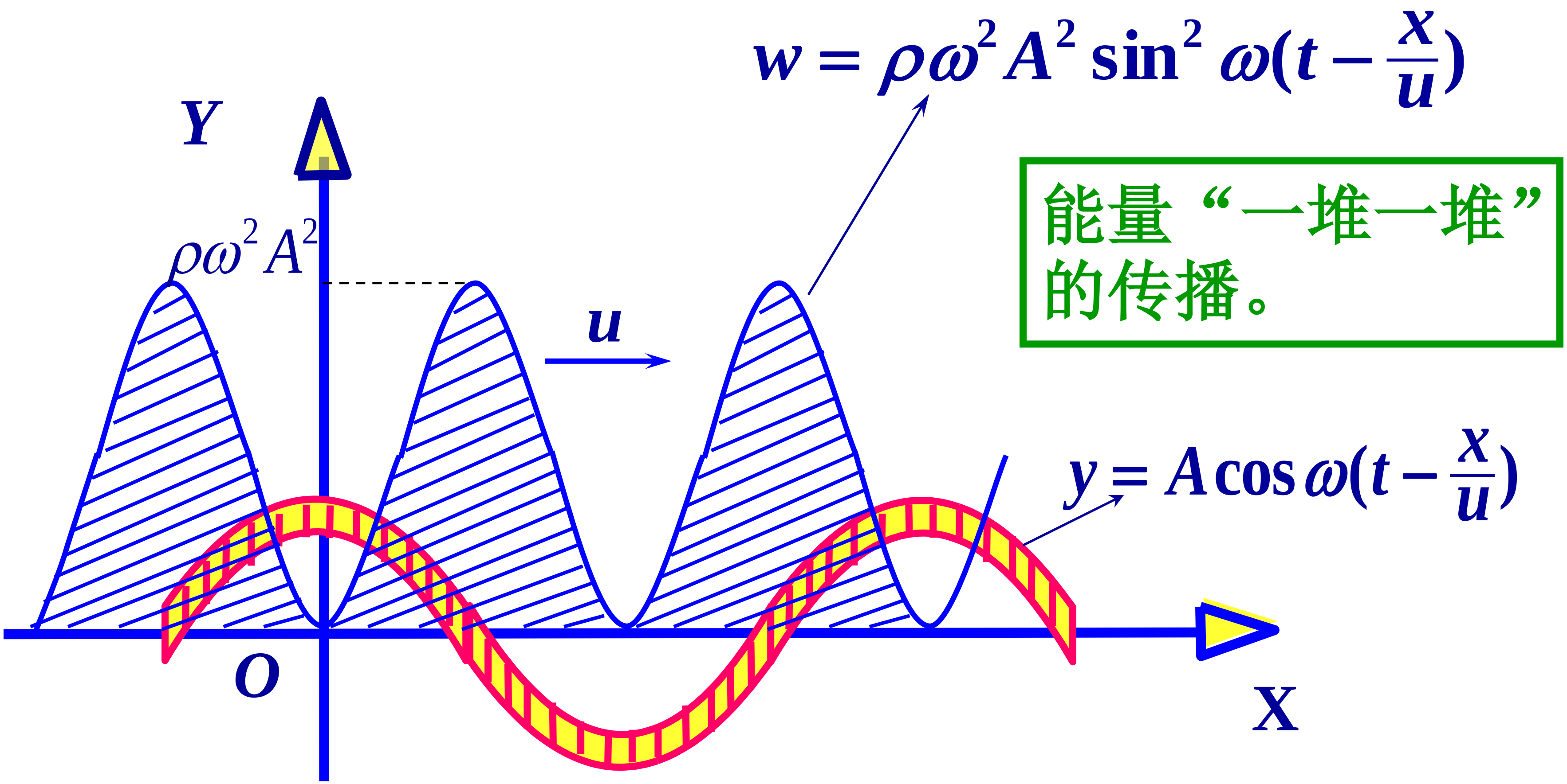
波的**能量密度*w*：**介质中单位体积的波动能量。

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

通常取能量密度在一个周期内的平均值 $\bar{w}$

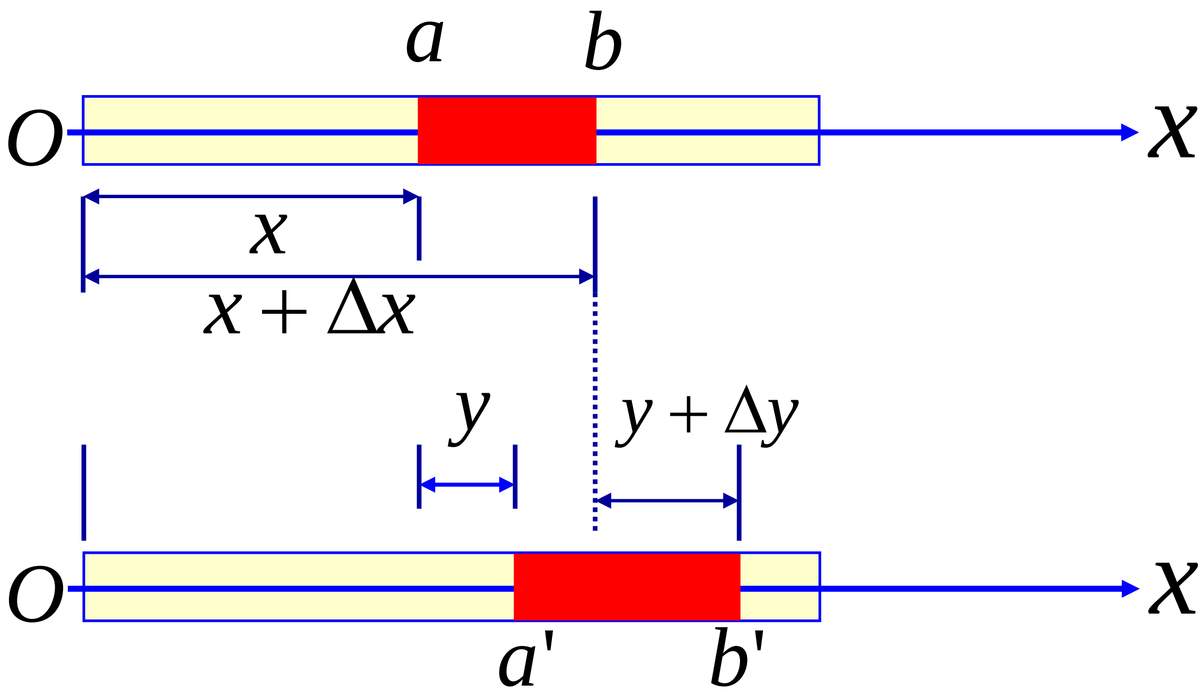
$$\bar{w} = \rho A^2 \omega^2 / 2$$

对于波动的任一体积元，$W_k = W_p$ ， $W_k + W_p \neq \text{const}.$



每个质元都与周围媒质交换能量。表明：波动传播能量，将能量从体积元传到另一体积元。

波动能量的推导（纵波为例）



位于***x*** 处的体积元***ab***的动能为

$$W_k = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 = \frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$$

体积元***ab***的振速 $v=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$

$$\Rightarrow\quad W_k=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

体积元***ab***的胁变 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

据杨氏模量定义和胡克定律，该积元所受弹性力为

$$f=YS\frac{\Delta y}{\Delta x}=k\Delta y$$

体积元弹性势能

$$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta X}(\Delta y)^2=\frac{1}{2}YS\,\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

由$\Delta V = S\Delta x$，$u = \sqrt{Y/\rho}$，结合波动表达式

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = A\frac{\omega}{u}\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

最后得：$W_p = \dfrac{1}{2}pu^2(\Delta V)A^2\dfrac{\omega^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right)$

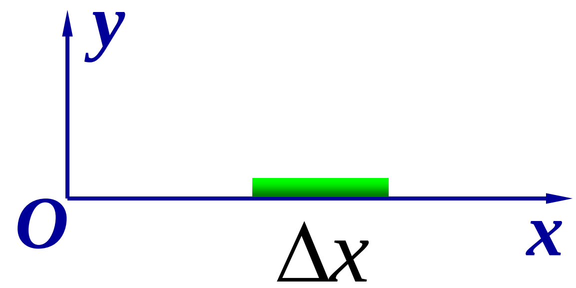
$$= \frac{1}{2}\rho(\Delta V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

若考虑平面余弦弹性横波，只要把上述计算中的$\Delta y/\Delta x$和 f 分别理解为体积元的切变和切力，用切变模量G 代替杨氏模量Y，可得到同样的结果。

波动能量的推导（横波为例）

设绳子的横截面积为ΔS，波的传播速度为u。取波的传播方向为 x 轴，绳子的振动方向为 y 轴，则简谐波的波函数为。

$$y = A\cos[\omega(t - x/u) + \phi_0]$$



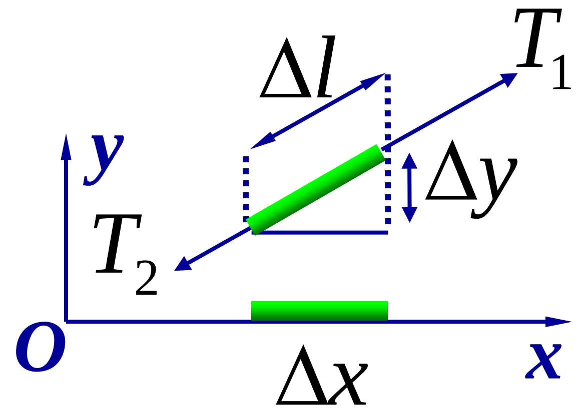
在绳子上x处取线元Δx，则

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

μ为绳子的质量线密度。

该线元的振动速度为

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$



(1) 线元的动能

$$W_\mathrm{k}=\frac{1}{2}\Delta m v^2 \ =\frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$

在波的传播过程中，由原长**Δ*x***变成**Δ*l***，形变为**Δ *l* – Δ*x***，线两端受张力$\boldsymbol{T=T_1=T_2}$。

张力做的功等于线元的势能

$$W_\mathrm{p}=T(\Delta l-\Delta x)$$

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x[1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]^{1/2}$$

$$\approx \Delta x[1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2]^{1/2}$$

用二项式定理展开，并略去高此项，得

$$\Delta l \approx \Delta x[1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2]$$

$$\therefore W_{\mathrm{p}} = T(\Delta l - \Delta x) = \frac{1}{2} T (\frac{\partial y}{\partial x})^2 \Delta x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \frac{\omega}{u} \sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \phi_0]$$

(2) 线元的势能

$$W_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$

(3) 线元的总机械能

$$W = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{p}} = \mu\Delta x A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$$

讨论

(1) 在波动传播的媒质中，任一线元的动能、势能、总机械能均随 x，t 作周期性变化，且变化是同相位的。

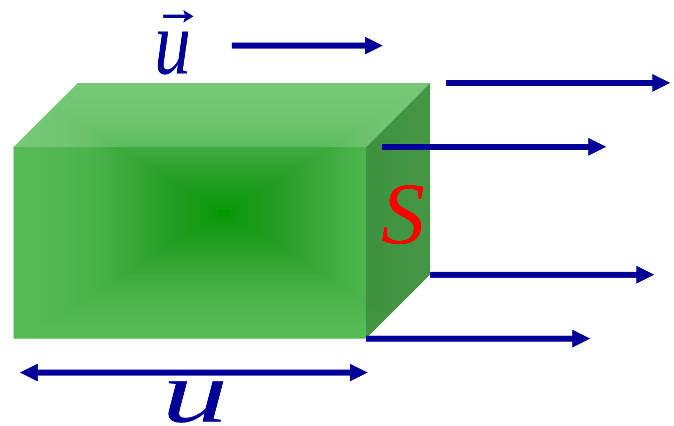
(2) 体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大。

(3) 体积元的位移最大时，三者均为零。

(4) 任一线元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量。 任一线元的机械能不守恒，随 t 作周期性变化，所以，波动过程是能量的传播过程。

2. 能流密度（波的强度）

能流 在介质中垂直于波速方向取一面积S，在单位时间内通过S的能量。



$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{wSu\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=wSu$$

$$=uS\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-x/u)$$

平均能流： $\overline{P}=\overline{w}Su=\frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$

平均能流密度或**波的强度** 通过与波传播方向垂直的单位面积的平均能流，用I来表示，即

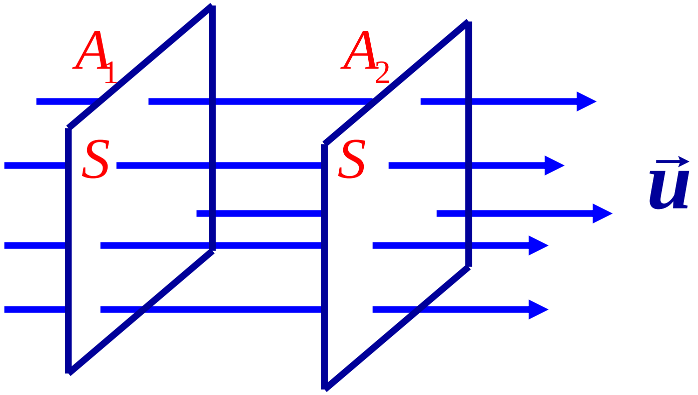
$$I=\overline{w}u=\rho u\omega^2A^2/2=z\omega^2A^2/2$$

介质的特性阻抗 $z=\rho u$ 。 $I=\bar{w}u=z\omega^2A^2/2$

I 的单位：瓦特/米^2 ($\mathrm{W\cdot m^{-2}}$)

平面余弦行波振幅不变的意义：

$$y=A\cos\omega\,(t-x/u)$$



$$\overline{P}_1=\overline{w}_1uS=\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2uS \qquad \overline{P}_2=\overline{w}_2uS=\frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2uS$$

若 $\overline{P}_1=\overline{P}_2$，有 $A_1=A_2$。

对于球面波，$S_1 = 4\pi r_1^2$，$S_2 = 4\pi r_2^2$，介质不吸收能量时，通过两个球面的总能流相等

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow \quad A_1/A_2 = r_2/r_1$$

球面波表达式：

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega\,(t - r/u)$$

式中a为波在离原点单位距离处振幅的数值。

例题　用聚焦超声波的方式，可以在液体中产生强度达120kW/cm²的大振幅超声波。设波源作简谐振动，频率为500kHz，液体密度为1g/cm³，声速为1500m/s。

求：这时液体质点振动的振幅。

解：因 $I=\rho u A^2\omega^2/2$

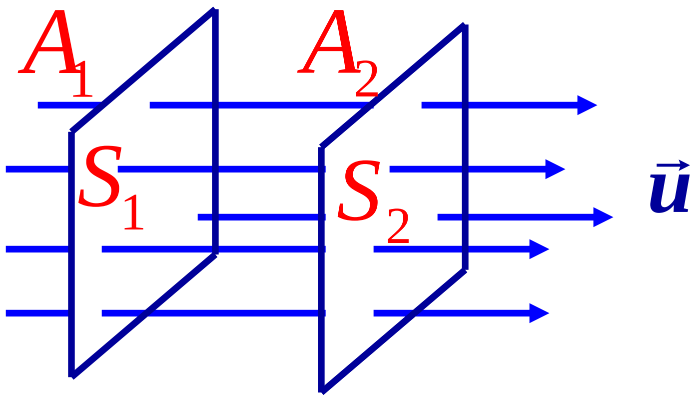
$$\therefore A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho u}}=\frac{1}{2\pi\times5\times10^5}\sqrt{\frac{2\times120\times10^7}{1\times10^3\times1.5\times10^3}}$$

$$=1.27\times10^{-5}\ \mathrm{m}.$$

可见液体中声振动的振幅实际上是极小的。

3. 平面波和球面波的振幅

平面余弦行波的波函数：$y = A\cos\omega\,(t - x/u)$



垂直于传播方向上两个平面S_1和S_2，面积均为S，且通过S_1的波都通过S_2，振幅分别为A_1和A_2。

通过S_1和S_2的平均能流分别为：

$$\bar{P}_1 = \bar{w}_1 uS = \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS,\quad \bar{P}_2 = \bar{w}_2 uS = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS$$

若平均能流满足 $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ ，则有振幅 $A_1 = A_2$ 。

成立条件：波动在介质内传播时，介质不吸收波能量。

平面简谐波在无吸收介质内传播时振幅不变的意义

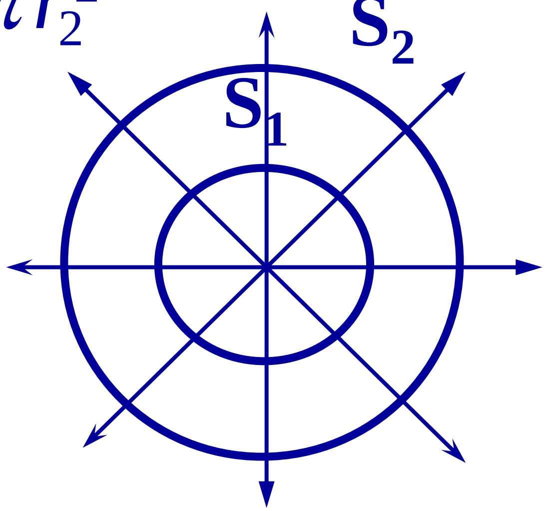
关于球面简谐波振幅的讨论

介质不吸收能量时，通过两个球面的总能流相等，

$$\boldsymbol{S_1 = 4\pi r_1^2}\text{，}\ \boldsymbol{S_2 = 4\pi r_2^2}\text{，}\ \overline{P}_1 = \overline{P}_2$$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\Rightarrow A_1/A_2 = r_2/r_1$$



∴振幅***A***与离开波源的距离***r***成反比。

∴ 球面简谐波的表达式可写成：

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega(t - r/u).$$

式中***a*** 为波在离原点单位距离处振幅的数值。

利用 $I=\frac{1}{2}z\omega^2A^2$ 和能量守恒，可以证明，

对无吸收介质，有：

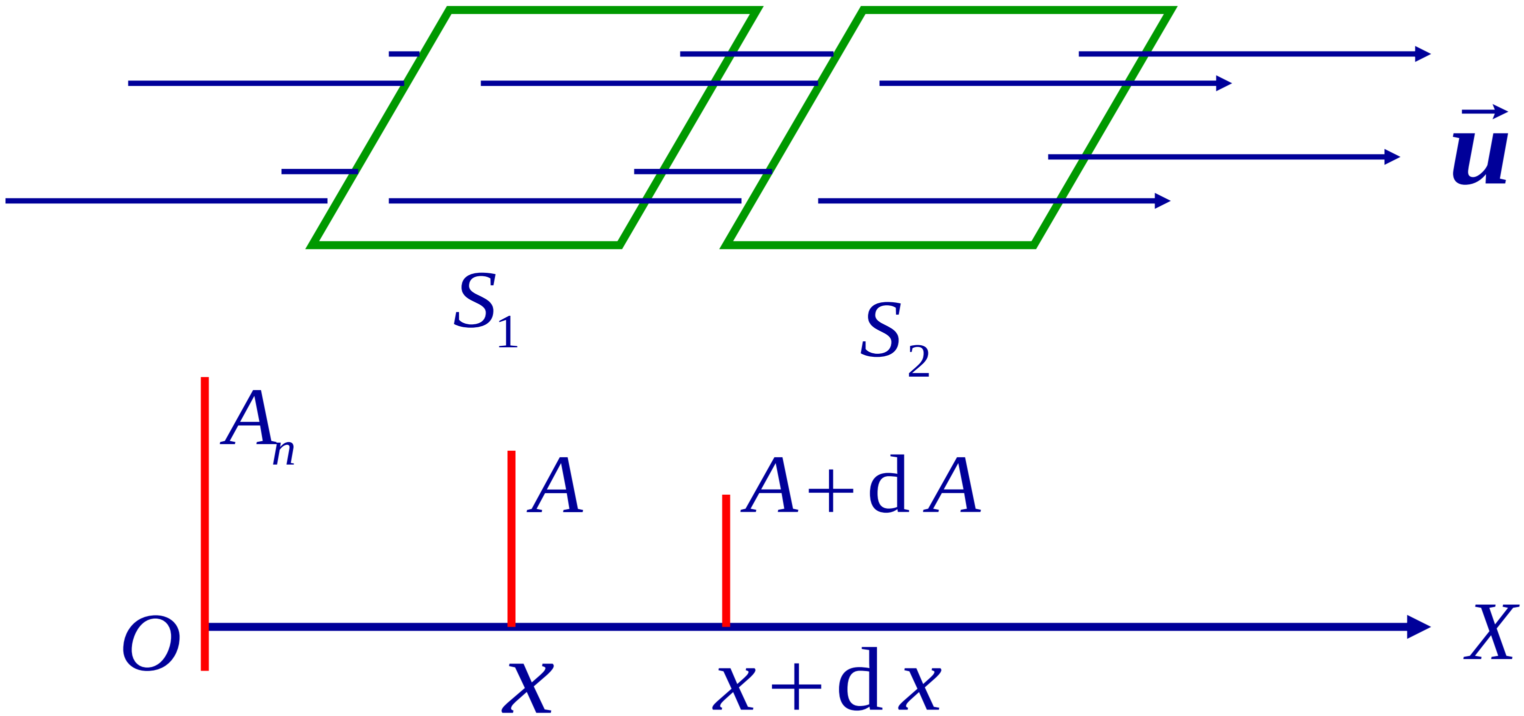
平面波 $A=\text{const}.$

球面波 $A\propto\frac{1}{r}$

柱面波 $A\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$

r —场点到波源的距离

4.波的吸收



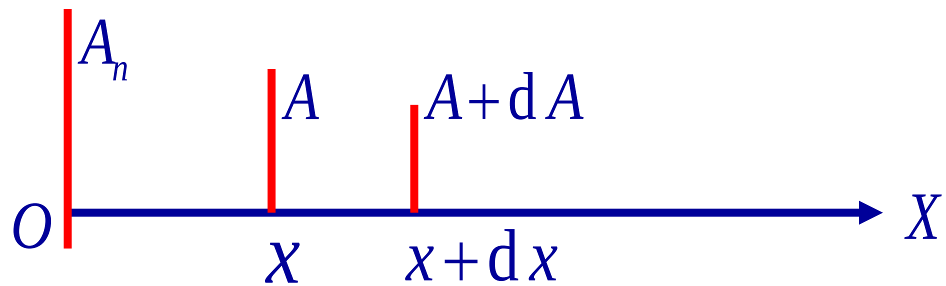
若波不被介质吸收，对于平面简谐波，S_1 和S_2 处振幅相同。若介质吸收机械波的能量，则波线上不同点处振幅是不相同的。上图的$\mathrm{d}A < 0$。

$-\mathrm{d}A = \alpha A \mathrm{d}x$, α ---介质的吸收系数。

若α为常数，则有 $A = A_0 e^{-\alpha x}$

A_0为$x=0$ 处的振幅。

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2} u\rho A^2\omega^2 = \frac{1}{2} u\rho A_0^2\omega^2 e^{-2\alpha x} \\ I_0 = \frac{1}{2} u\rho A_0^2\omega^2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow I = I_0 e^{-2\alpha x}$$

式中的I_0和I 分别为$x=0$ 和$x=x$ 处的波的强度。

例题　空气中声波吸收系数为$\alpha_1 = 2\times10^{-11}\nu^2\mathrm{m}^{-1}$，钢中的吸收系数为$\alpha_2 = 4\times10^{-7}\nu\mathrm{m}^{-1}$，式中$\nu$代表声波频率的数值。问5MHz的超声波透过多少厚度的空气或钢后，其声强减为原来的1%？

解　据题意，空气和钢的吸收系数分别为

$$\alpha_1 = 2\times10^{-11}\times(5\times10^6)^2\mathrm{m}^{-1} = 500\mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_2 = 4\times10^{-7}\times(5\times10^6)\mathrm{m}^{-1} = 2\mathrm{m}^{-1}$$

把α_1、α_2分别代入$I = I_0 e^{-2\alpha x}$或下式，

$$x = \frac{1}{2\alpha}\ln\frac{I_0}{I}$$

据题意有$I_0/I = 100$，得空气的厚度

$$x_1 = \frac{1}{1000}\ln 100\,\mathrm{m} = 0.0046\,\mathrm{m}$$

钢的厚度为

$$x_2 = \frac{1}{4}\ln 100\,\mathrm{m} = 1.15\,\mathrm{m}$$

可见高频超声波很难透过气体，但极易透过固体。

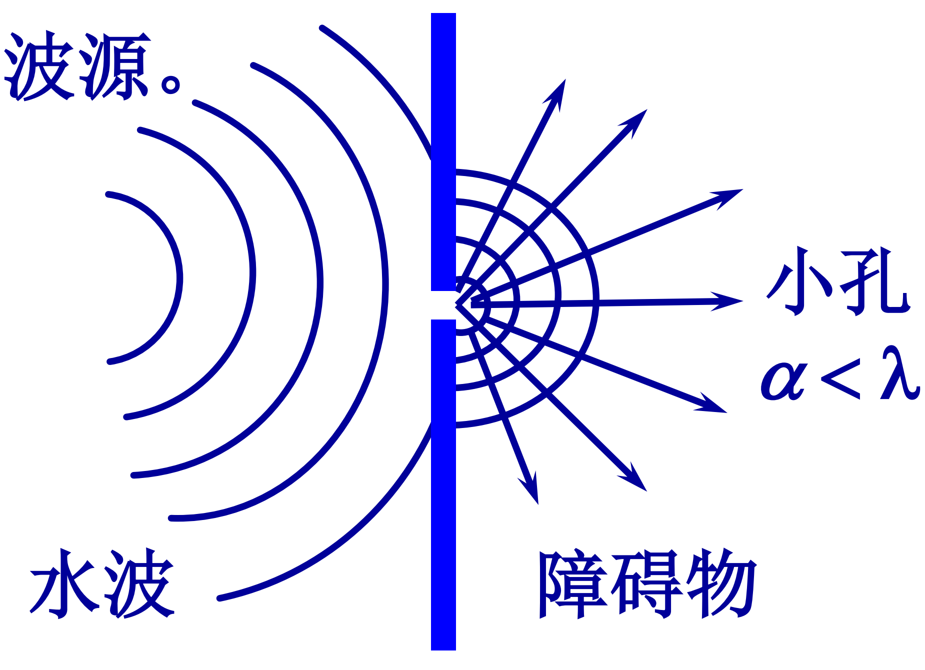
§7-4 惠更斯原理　波的衍射反射和折射

1、惠更斯原理（Huygens principle）

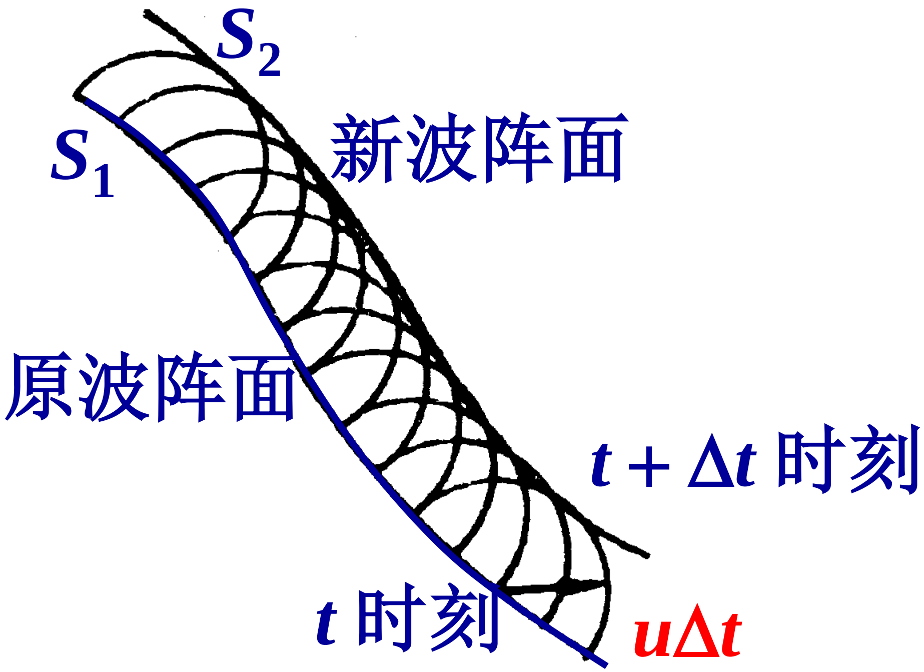
波在弹性介质中传播时，任一点*P* 的振动，将会引起邻近质点的振动。就此特征而言，振动着的 *P* 点与波源相比，除了在时间上有延迟外，并无其他区别。

任意*P* 点均可视为一个新的波源。

Eg，障碍物上的小孔成为新的波源



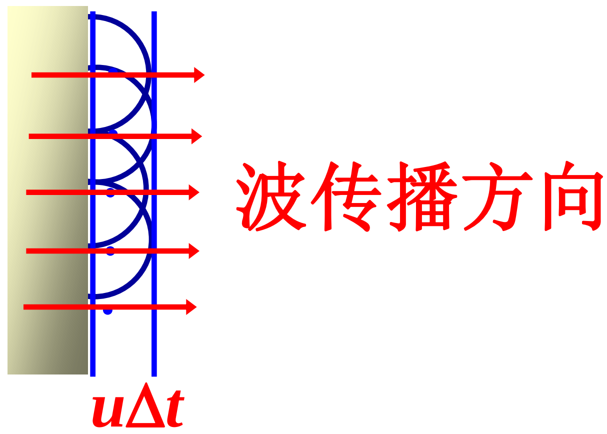
1678年，惠更斯总结出了以其名字命名的惠更斯原理：介质中波阵面（波前）上的每个点，都可看成是产生球面子波的波源；在其后的任一时刻，这些子波的包络面构成新的波阵面。



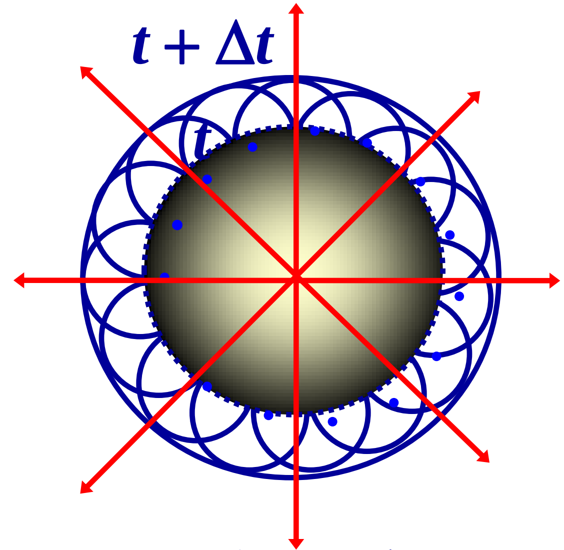
惠更斯

注：惠更斯原理对任何波动过程均适用；可帮助解决波的传播问题，解释波的衍射反射折射规律。

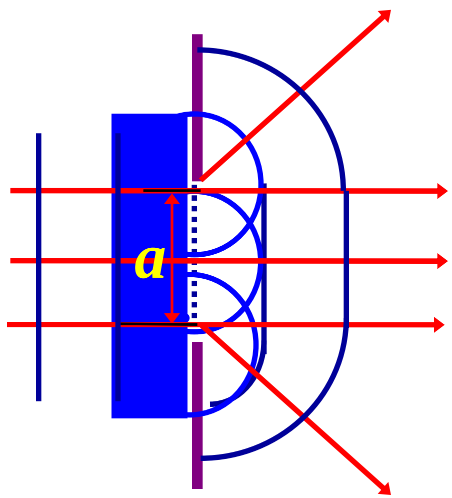
t 时刻波面　　*t* +Δ*t* 时刻波面

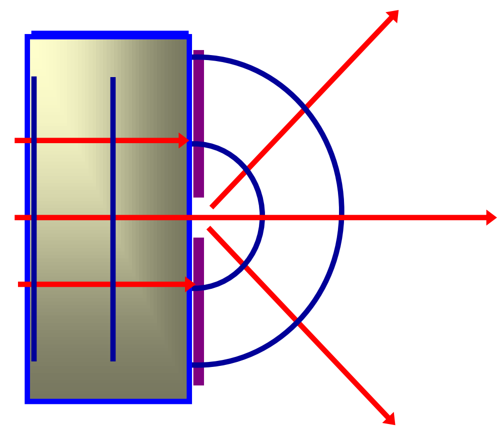


平面波



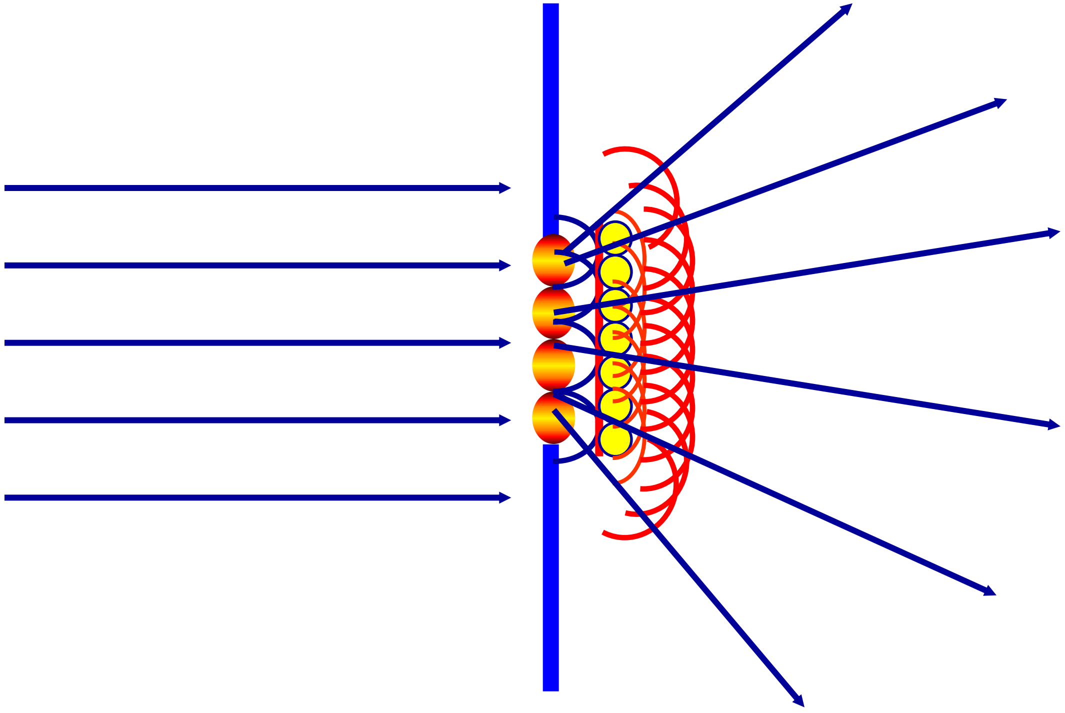
球面波





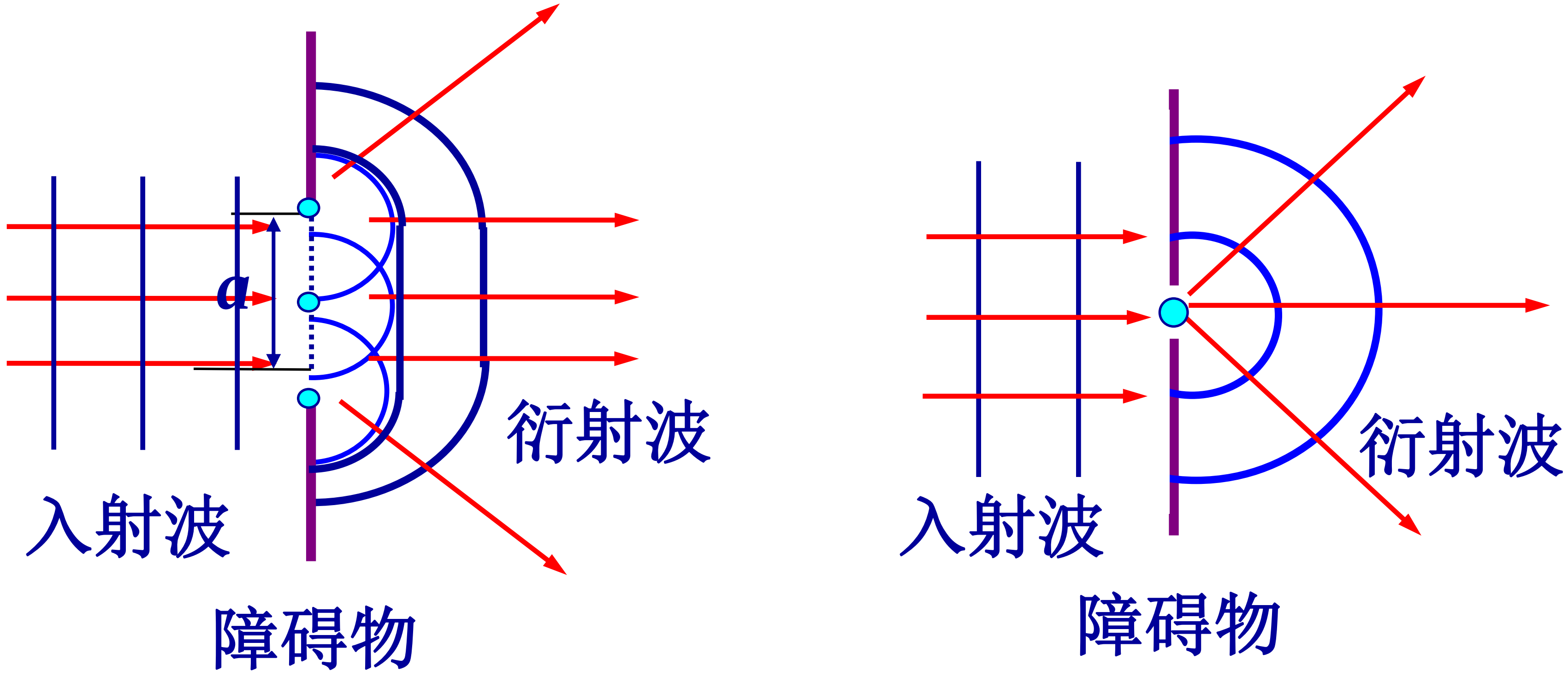
应用举例： 波的衍射

当波在传播过程中遇到障碍物时，其传播方向绕过障碍物发生偏折的现象，称为**波的衍射**。



波在窄缝的衍射效应

波的衍射vs.障碍物线度



相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

实例：水波通过狭缝的衍射图样

*应用举例：波的反射和折射

反射与折射也是波的特征。

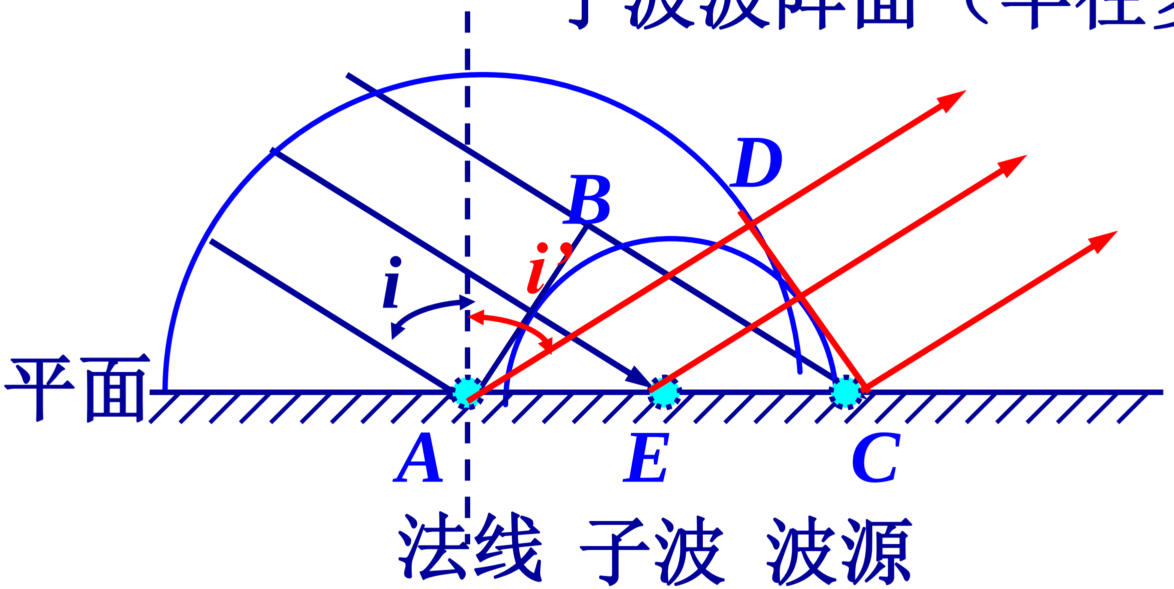
当波传播到两种介质的分界面时，波的一部分在界面返回，形成反射波，另一部分进入另一种介质形成折射波。

波的反射定律

波的折射定律

反射定律和折射定律可以利用惠更斯原理进行证明

利用惠更斯原理推导反射定律



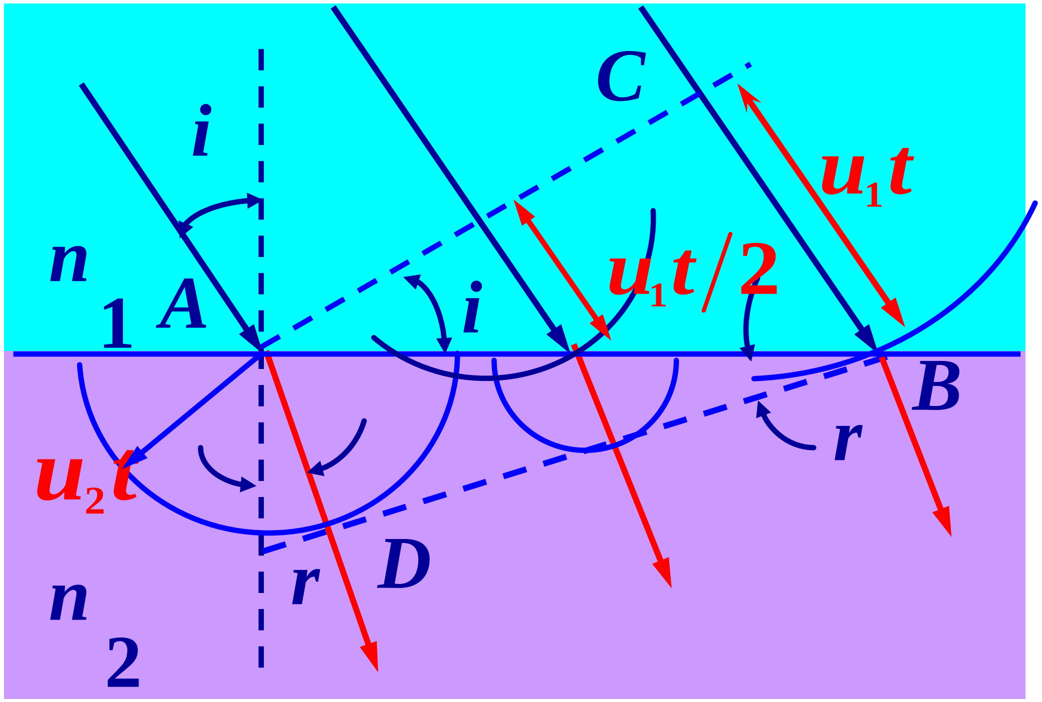
入射波波阵面AB，
反射波波阵面CD，
入射角i，反射角i'

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin \angle BAC}{\sin \angle DCA} = \frac{BC}{AC} \Big/ \frac{AD}{AC} \qquad (BC = u_1 \Delta t,\ AD = u_1 \Delta t)$$

$$= 1 \qquad \therefore\ i = i'$$

反射角等于入射角。

利用惠更斯原理推导折射定律



入射波波阵面AC，
折射波波阵面BD，
入射角i，折射角r

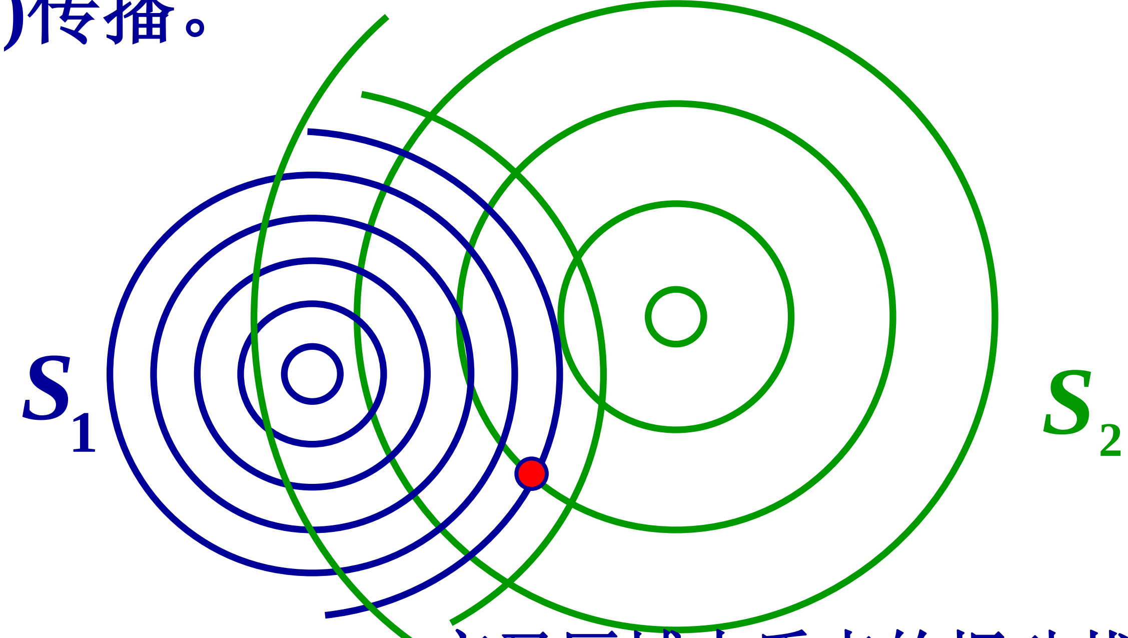
$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{\sin\angle CAB}{\sin\angle ABD}=\frac{CB}{AB}\Big/\frac{AD}{AB}=u_1t/u_2t=u_1/u_2=n_2/n_1\,.$$

入射角的正弦与折射角的正弦之比等于波动在入射介质内的波速与在折射介质内的波速的比值。

§7-5 波的干涉

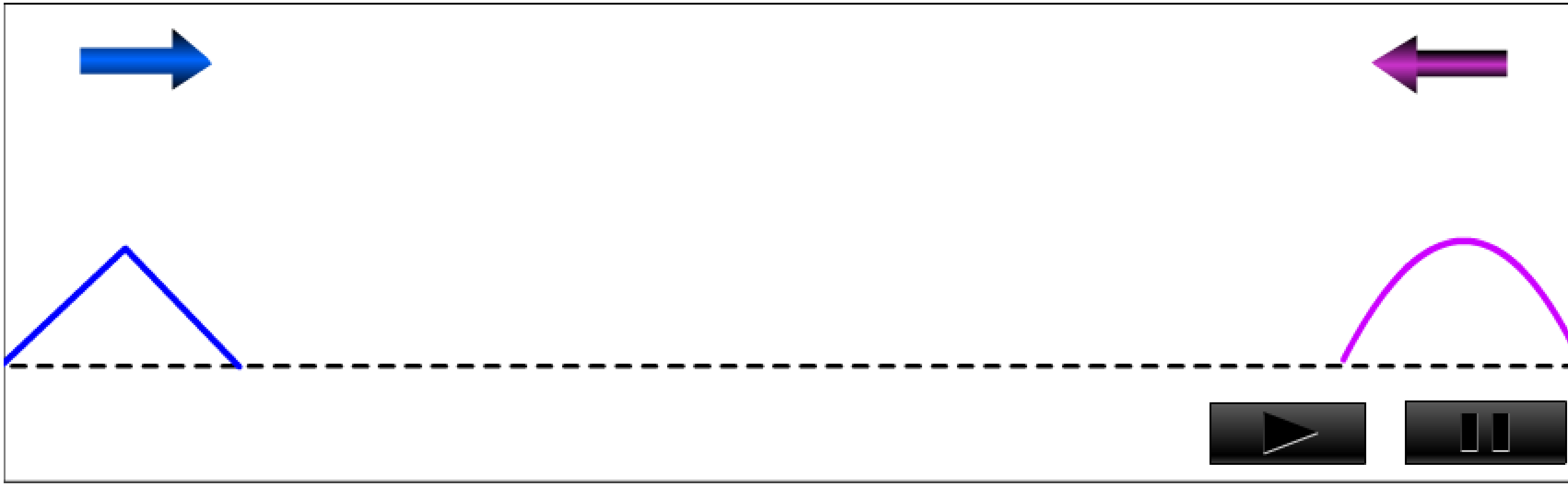
1. 波的叠加原理

波传播的独立性：几个波源产生的波，同时在一介质中传播，如果这几列波在空间某点处相遇，那么每一列波都将独立地保持自己原有的特性(频率、波长、振动方向等)传播。



交叉区域内质点的振动状态？

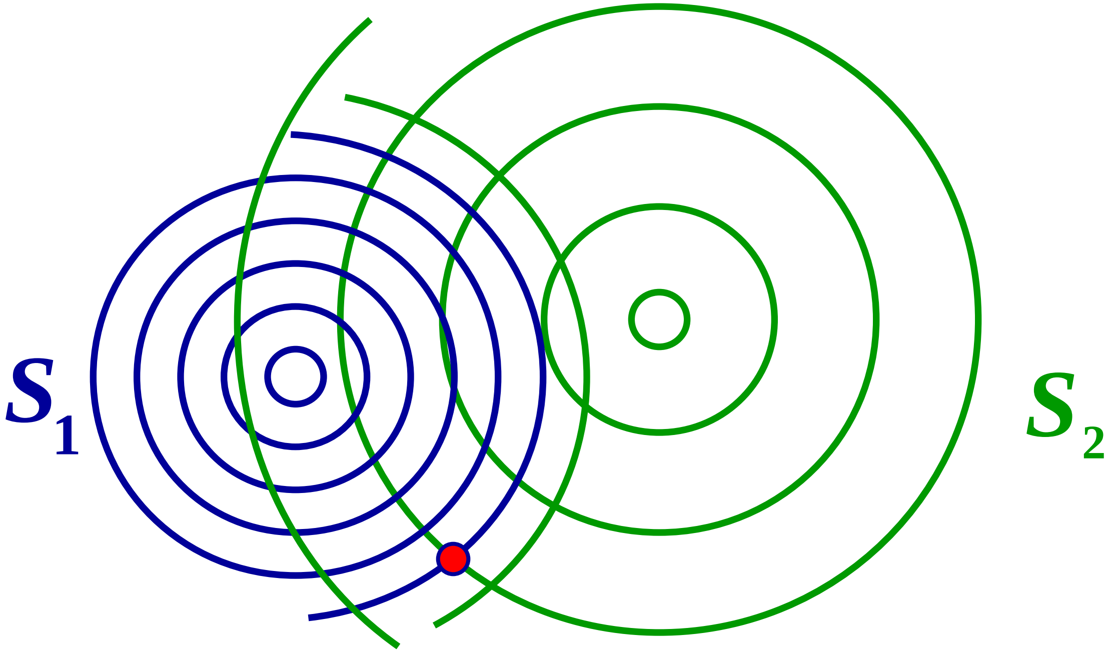
波的叠加原理



几列波相遇之后，仍然保持它们各自原有的特征（频率、波长、振幅、振动方向等）不变，并按照原来的方向继续前进，好象没有遇到过其他波一样。

波的叠加原理：有几列波同时在媒质中传播时，它们的传播特性（波长、频率、波速、波形）不会因其它波的存在而发生影响。在相遇区域，合振动是分振动的叠加。

叠加原理表明，可将任何复杂的波分解为一系列简谐波的组合。



交叉区域内质点的振动状态?

在相遇区域内，任一处质点的合振动是各列波单独在该点引起的分振动的叠加；位移为各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和。

2. 波的干涉

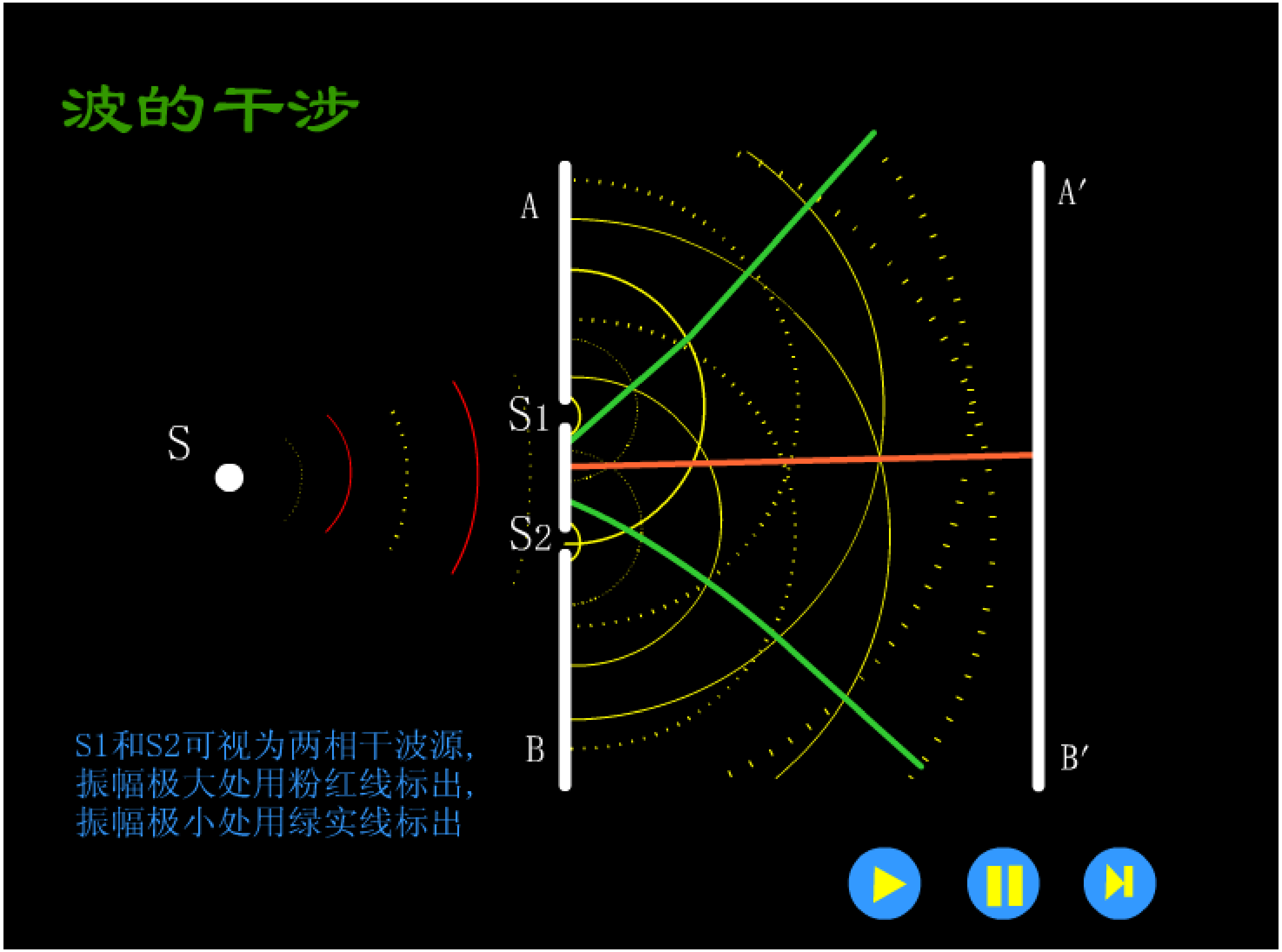
相干波

相干条件：
- 振动方向相同
- 频率相同
- 相位相同或相位差恒定

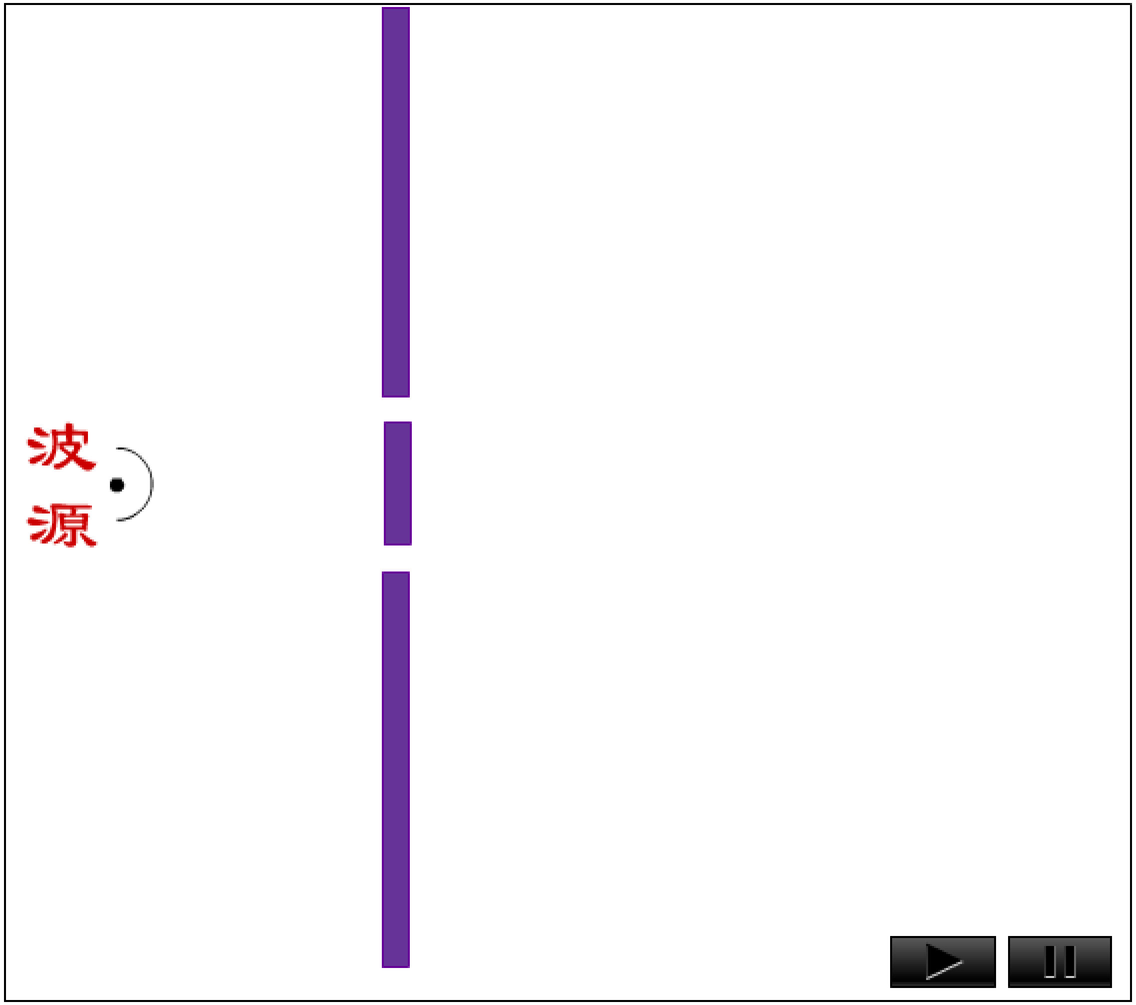
相干波：满足相干条件的几列波称为相干波。

相干波源：能发出相干波的波源称为相干波源。

波的干涉



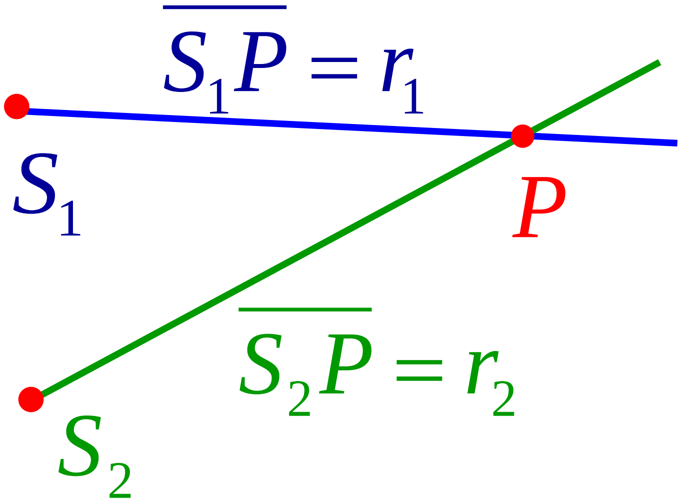
波的干涉



频率相同、振动方向平行、相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，使某些地方振动始终加强，而使另一些地方振动始终减弱的现象，称为**波的干涉现象**。

强弱分布规律

两个相干波源S_1和S_2的振动方程分别为：



$$y_{S1} = A_{10}\cos(\omega t + \phi_{10})$$

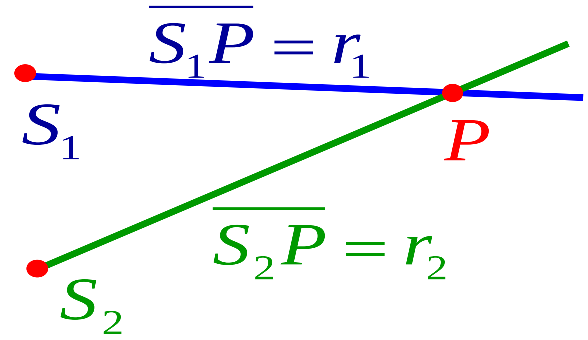
$$y_{S2} = A_{20}\cos(\omega t + \phi_{20})$$

S_1和S_2单独存在时，在P点引起的振动的方程为：

$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_{10} - 2\pi r_1/\lambda)$$

$$y_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_{20} - 2\pi r_2/\lambda)$$

P 点的合方程为：



$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

振幅A和相位ϕ_0

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda\right]}$$

$$tg\phi_0 = \frac{A_1\sin\left(\phi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2\sin\left(\phi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1\cos\left(\phi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2\cos\left(\phi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}$$

对于P点$\Delta\phi_0 = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$ 为恒量，因此 A 也是恒量，并与P点空间位置密切相关。

- 当$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2k\pi$时，得

$$A = A_1 + A_2$$ （合振幅最大）

- 当$\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10} - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = (2k+1)\pi$时，得

$$A = \left|A_1 - A_2\right|$$ （合振幅最小）

- 当$\Delta\phi$为其他值时，合振幅介于

$A = A_1 + A_2$和 $A = \left|A_1 - A_2\right|$之间

若$\phi_{10} = \phi_{20}$，上述条件简化为：

$\delta = r_1 - r_2 = k\lambda$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ （合振幅最大）

$\delta = r_1 - r_2 = (k + 1/2)\lambda$，$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$（合振幅最小）

波程差

$$\delta = r_1 - r_2$$

两列相干波源同相位时，在两列波叠加的区域内，波程差为零或等于波长整数倍的各点，振幅最大；波程差等于半波长奇数倍的各点，振幅最小。

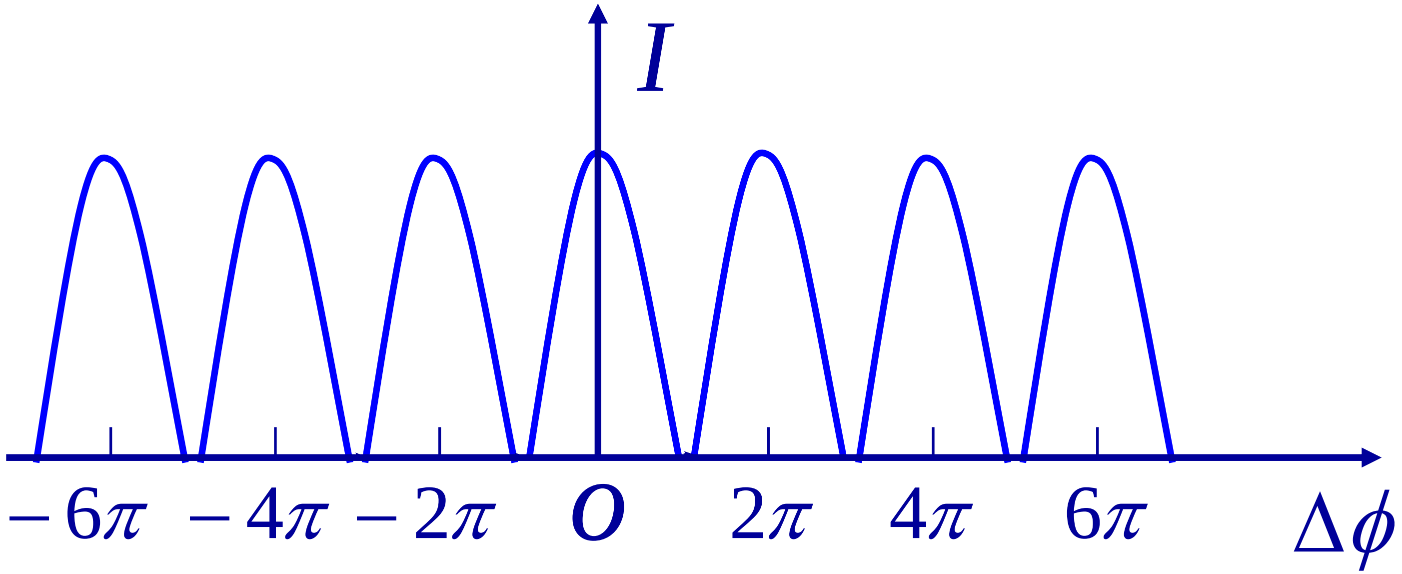
$$I \propto A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\phi$$

若$\boldsymbol{I_1 = I_2}$，叠加后波的强度：

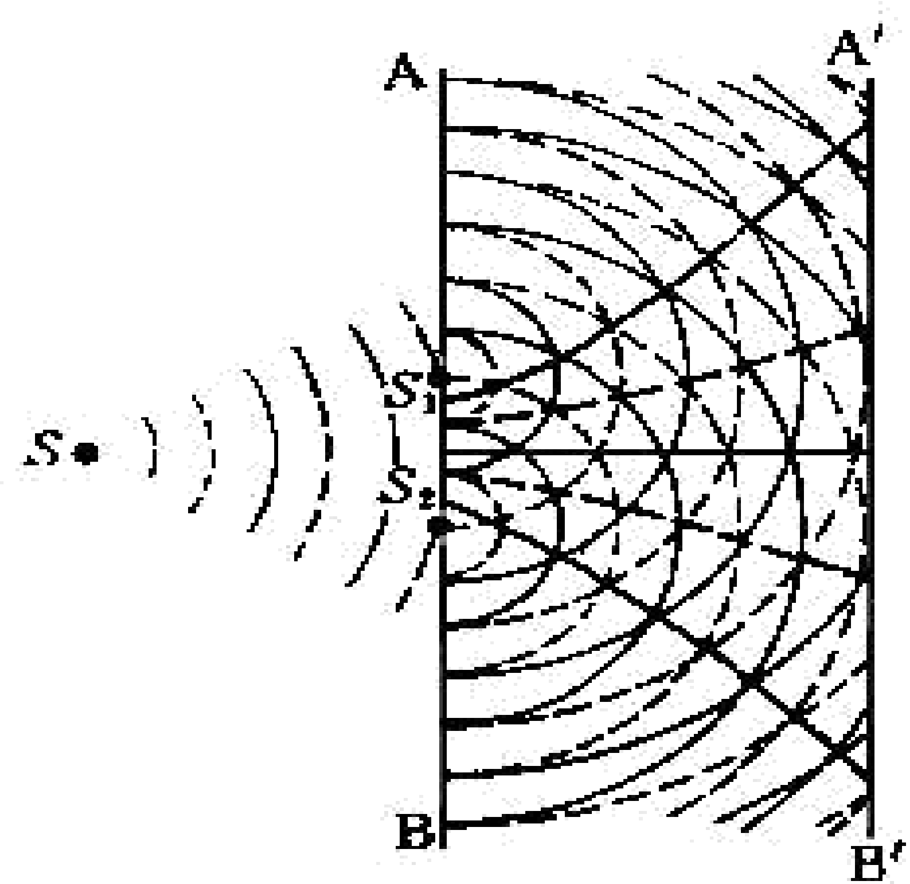
$$I = 2I_1[1+\cos(\Delta\phi)] = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}$$

$$\Delta\phi = 2k\pi,\ I = 4I;\quad \Delta\phi = (2k+1)\pi,\ I = 0$$



干涉现象的强度分布

同频率、同方向、相位差恒定的两列波，在相遇区域内，某些点处振动始终加强，另一些点处的振动始终减弱，这一现象称为波的干涉。



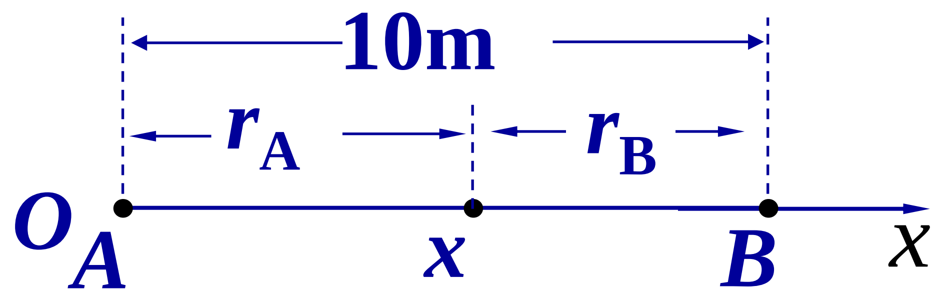
干涉现象的强度分布

例2 两波源分别位于同一介质A和B 处，振动方向相同，振幅相等，频率皆为100Hz，但A 处波源比 B 处波源相位落后π。若 A、B 相距10m，波速为4000m/s，试求由A、B之间连线上因干涉而静止的点。

解 建立所示的坐标系，任取一点x，则两波到该点的波程分别为

$$r_A = x$$

$$r_B = 10 - x$$



两波相位差为

$$\Delta\phi = \phi_{\mathrm{B}} - \phi_{\mathrm{A}} - 2\pi\frac{r_{\mathrm{B}} - r_{\mathrm{A}}}{\lambda}$$

$$= \pi - 2\pi\frac{\nu}{u}[(10 - x) - x]$$

$$\Delta\phi = \pi - 2\pi\frac{100}{400}(10 - 2x)$$

$$= \pi x - 4\pi$$

因干涉而静止的点，满足干涉相消条件

$$\Delta\phi = \pi x - 4\pi = \pm(2k+1)\pi \quad \text{其中} k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\therefore \quad x = 2k+1$$

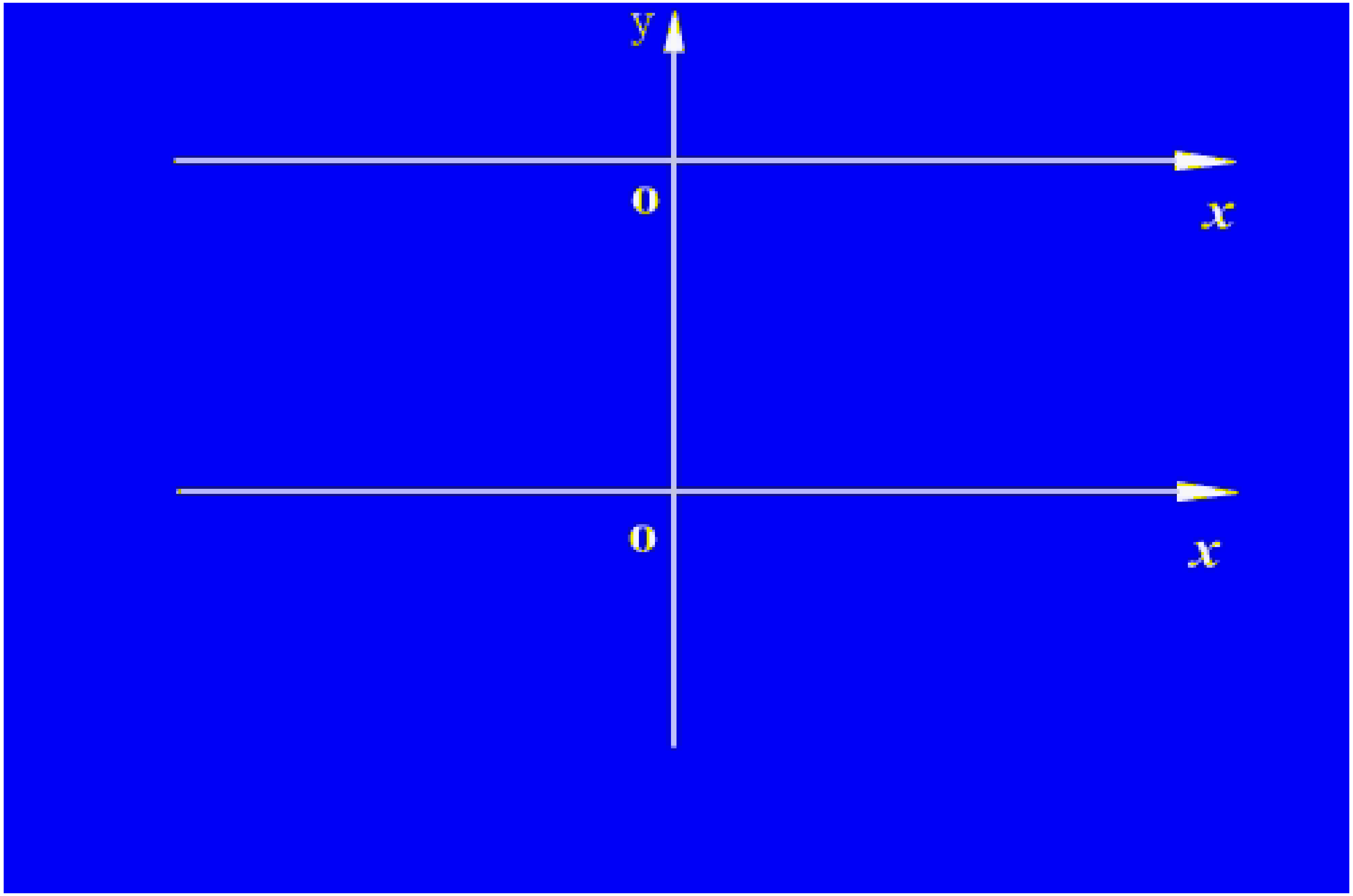
所以，因干涉而静止的点为

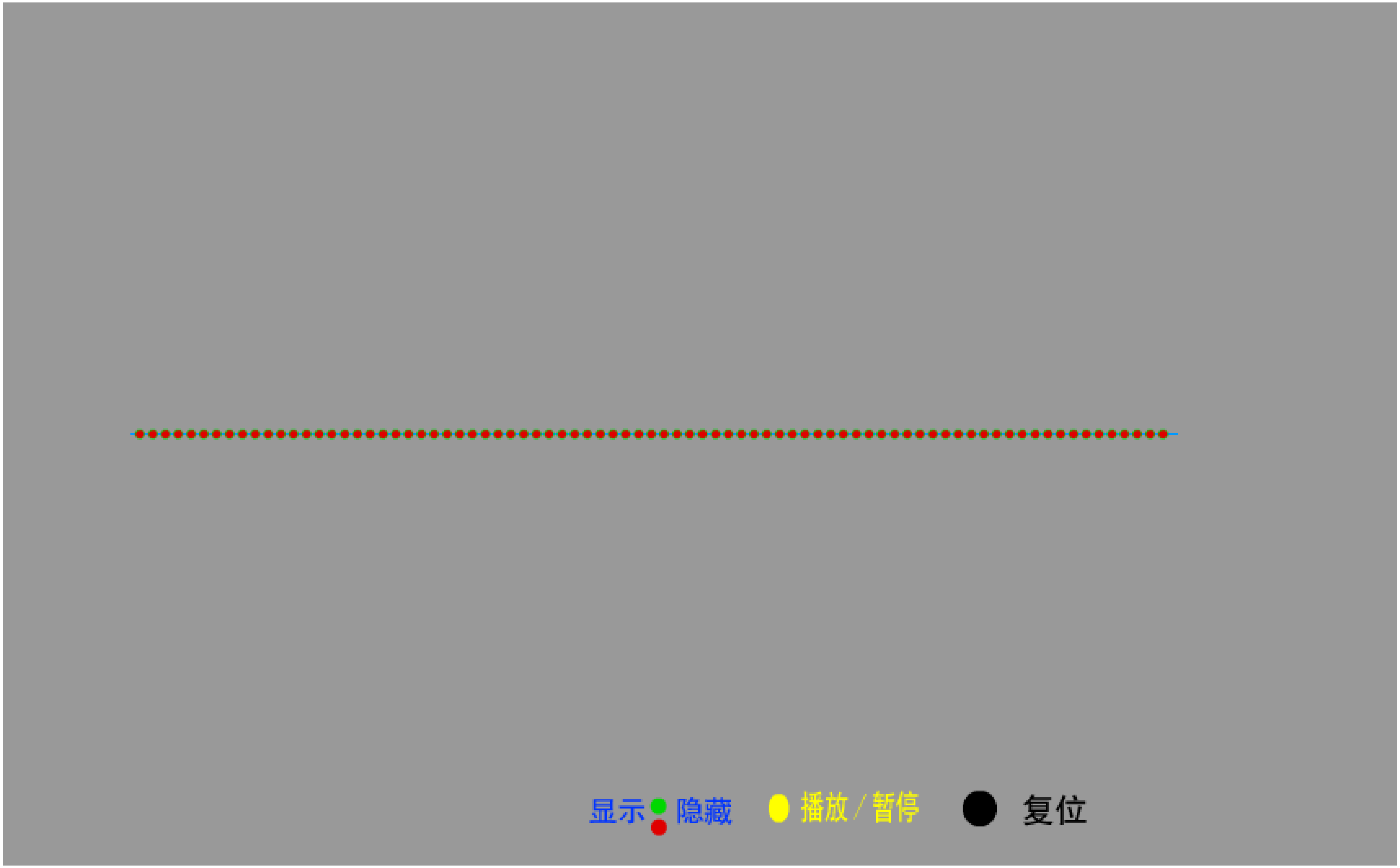
$$x = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots, \ \mathrm{m}$$

§7-6 驻波

驻波是两列振幅相同的相干波在同一条直线上沿相反方向传播时叠加而成的。

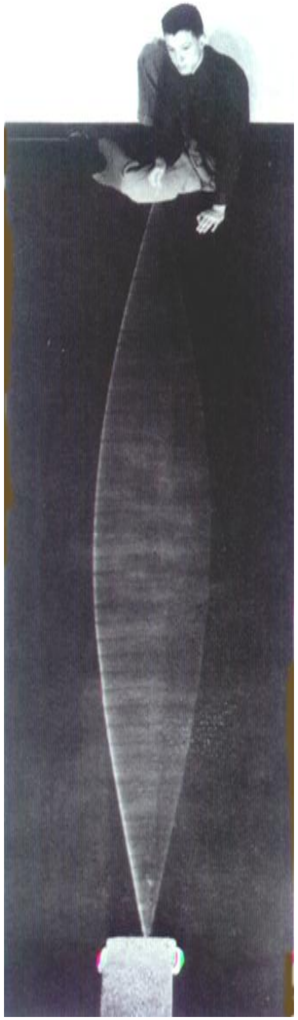
驻波的形成

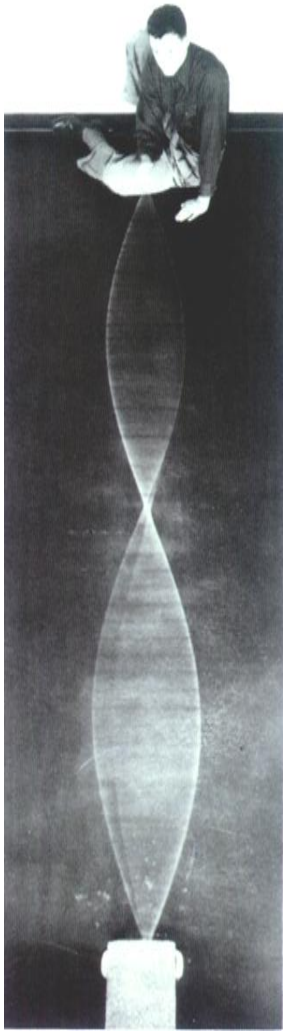


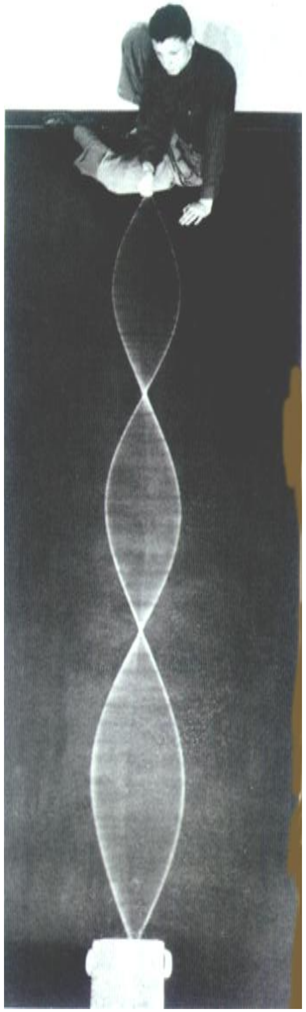


驻波的形成

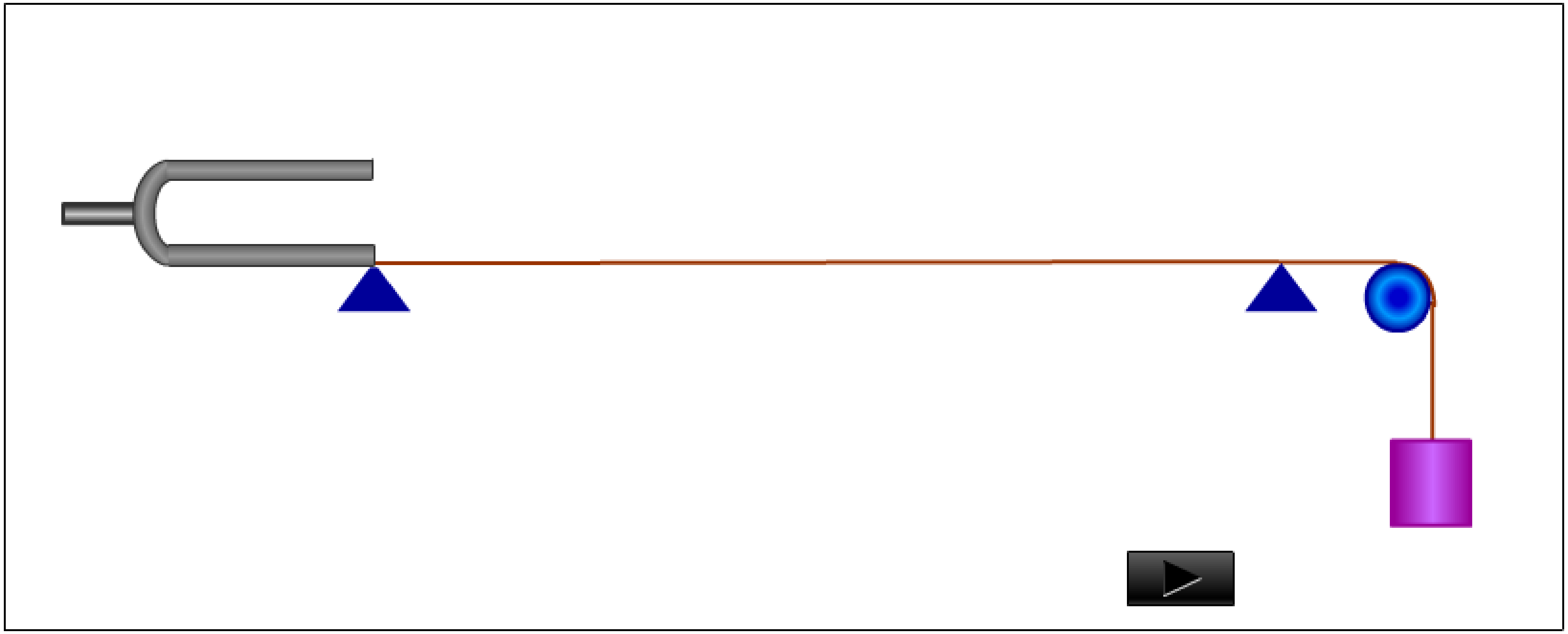
1. 弦线上的驻波实验



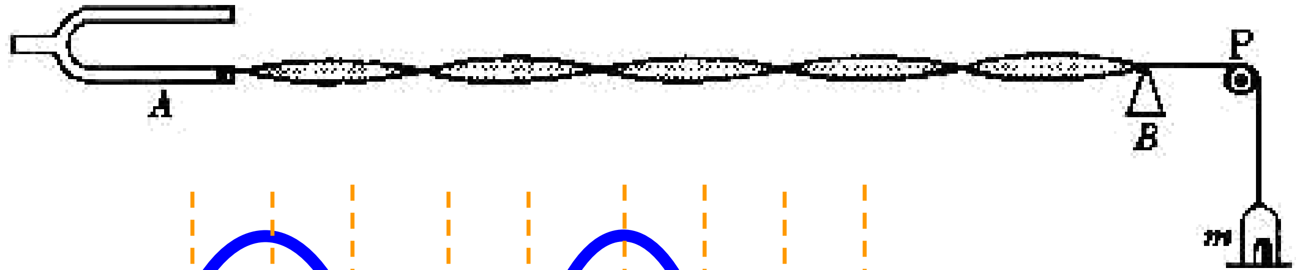




驻波现象：振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿相反方向传播时叠加而形成的一种特殊的干涉现象。



实验——弦线上的驻波：

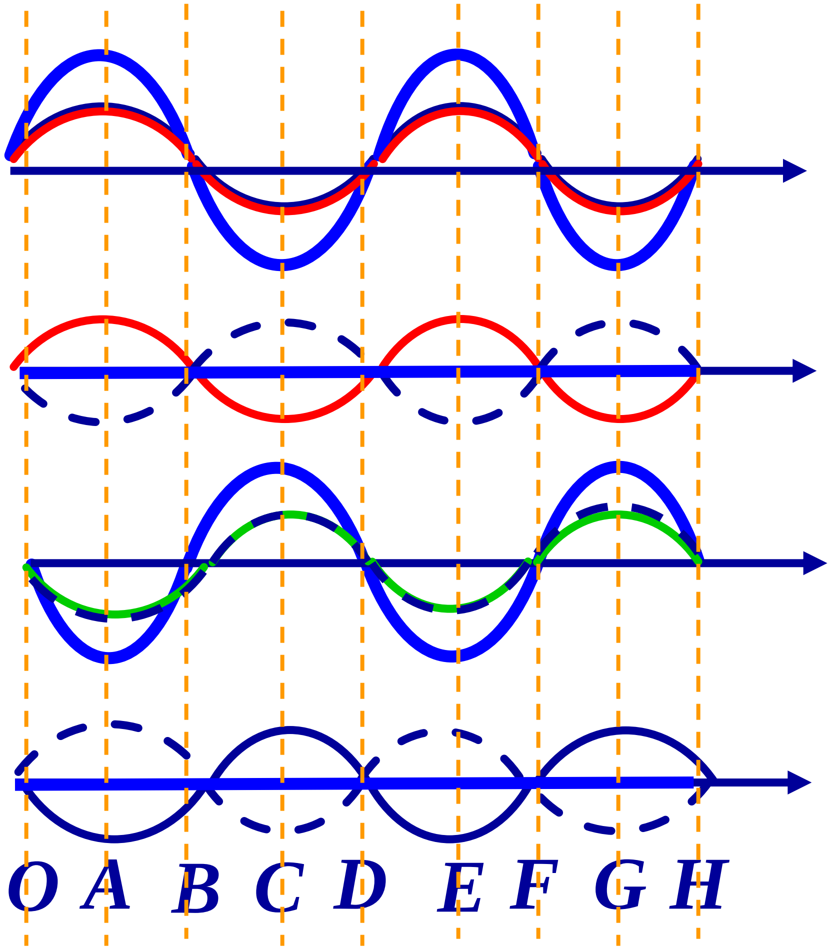


$t=0$

$t=T/4$

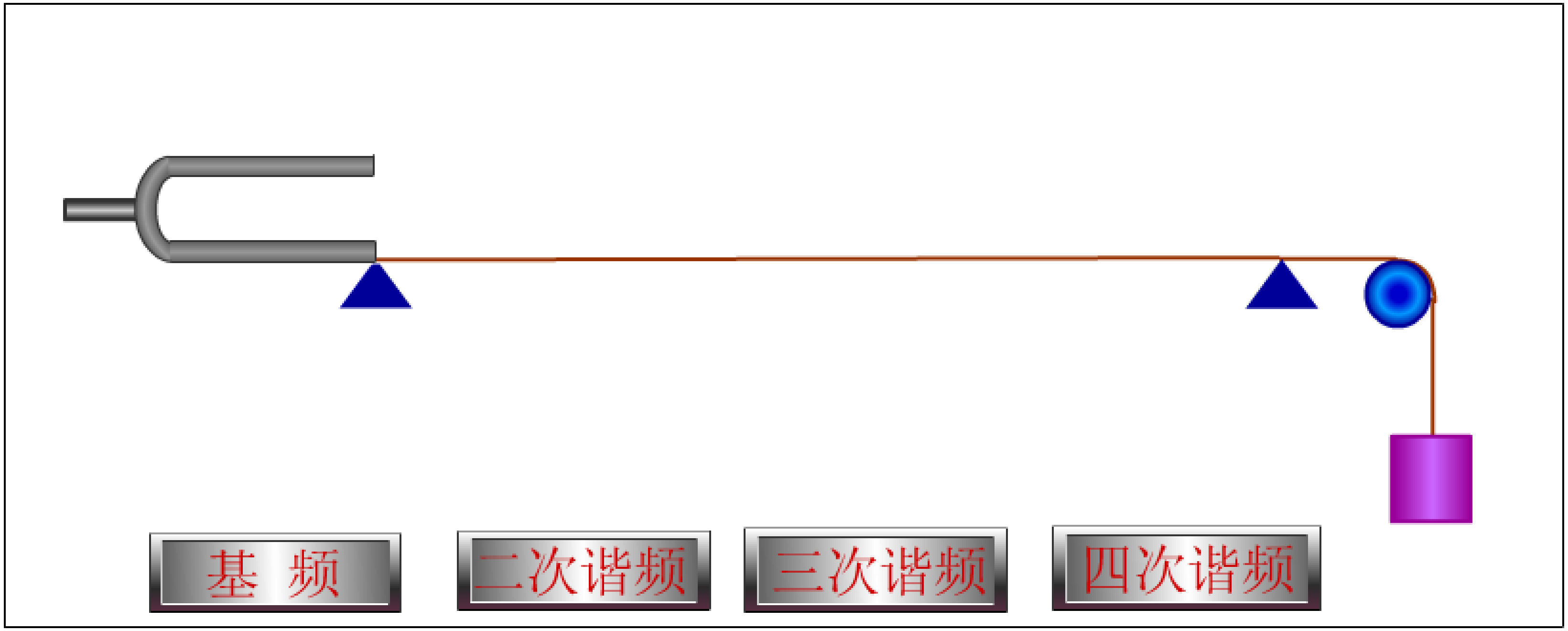
$t=T/2$

$t=3T/4$



波节*O B D F H*

波腹*A C E G*



用电动音叉在绳上产生驻波

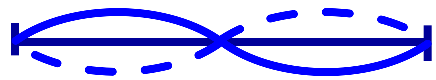
这一驻波是由音叉在绳中引起的向右传播的波和反射后向左传播的波合成的结果。改变拉紧绳子的张力，就能改变波在绳上的传播速度。

弦线长度等于半波长的整数倍时形成驻波。

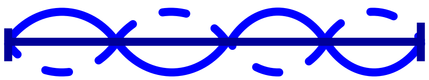
$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, n = 1,2\cdots \text{ —— 驻波条件}$$

两端固定

$n = 1$



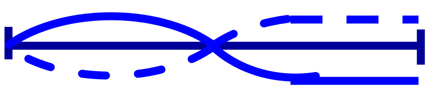
$n = 2$



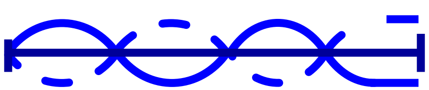
$n = 4$

一端固定

$n = 1$



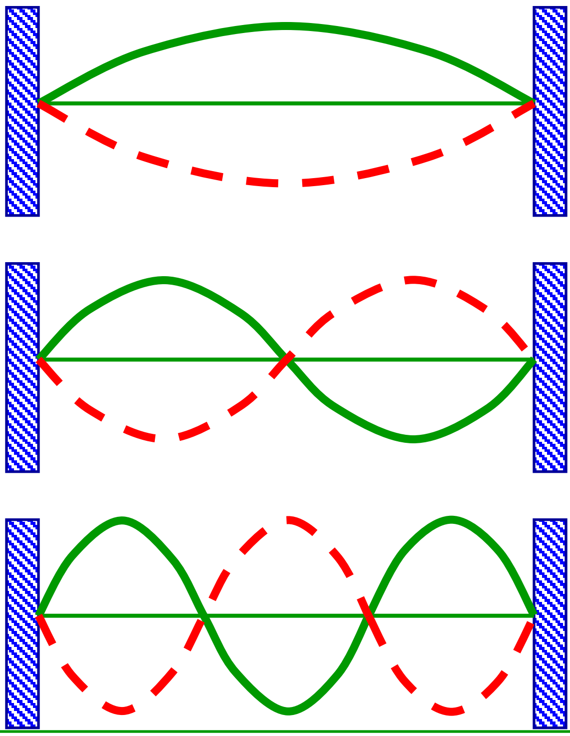
$n = 2$



$n = 4$

两端固定的弦振动的简正模式

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$



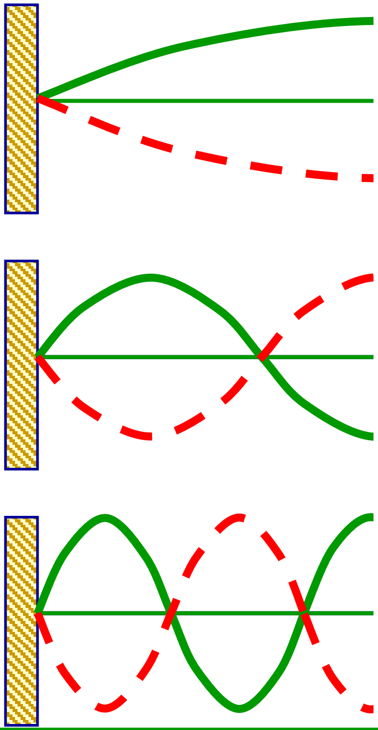
$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$l = \frac{2\lambda_2}{2}$$

$$l = \frac{3\lambda_3}{2}$$

一端固定一端自由的弦振动的简正模式

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$

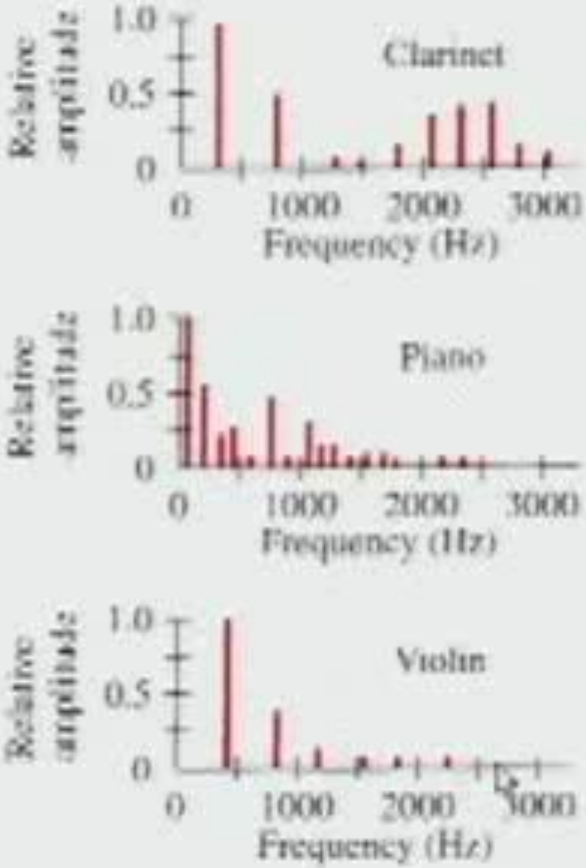


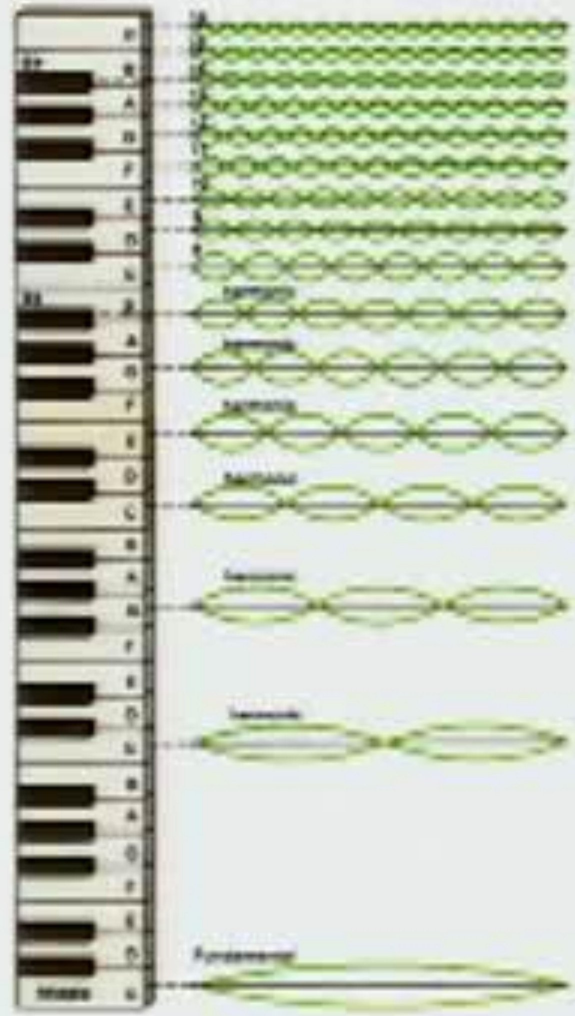
$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

$$l = \frac{3\lambda_2}{4}$$

$$l = \frac{5\lambda_3}{4}$$

The shapes of the spectra change as the instruments play different notes.





2. 驻波波函数

沿x轴的正、负方向传播的波

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \quad y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

合成波

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\frac{2\pi}{T}t$$

合成波的振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 与位置x有关。

合成波的振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 与位置x有关。

波腹位置 $\left|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$

$$\Rightarrow x = k\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$$

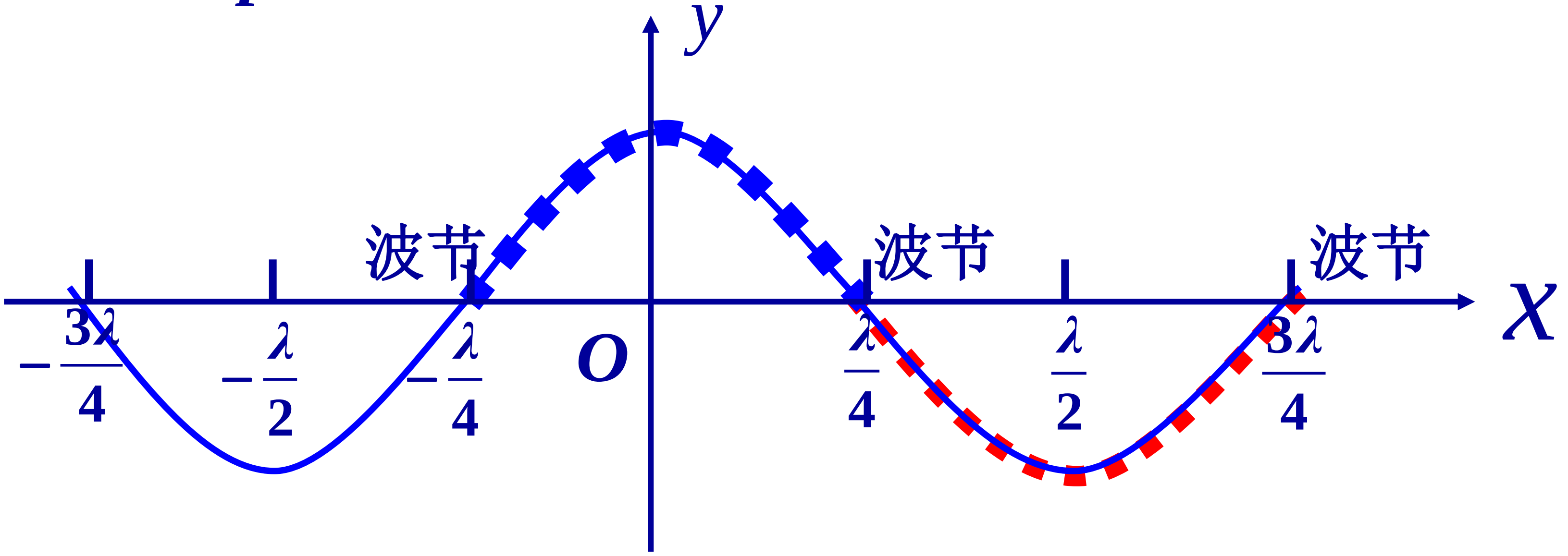
波节位置 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$$

相邻两波腹(节)距离为λ/2。

- 相位分布

振幅项$2A\cos(2\pi x/\lambda)$可正可负，时间项$\cos(\omega t)$对波线上所有质点有相同的值，表明驻波上相邻波节间质点振动相位相同，波节两边的质点的振动有相位差p 。



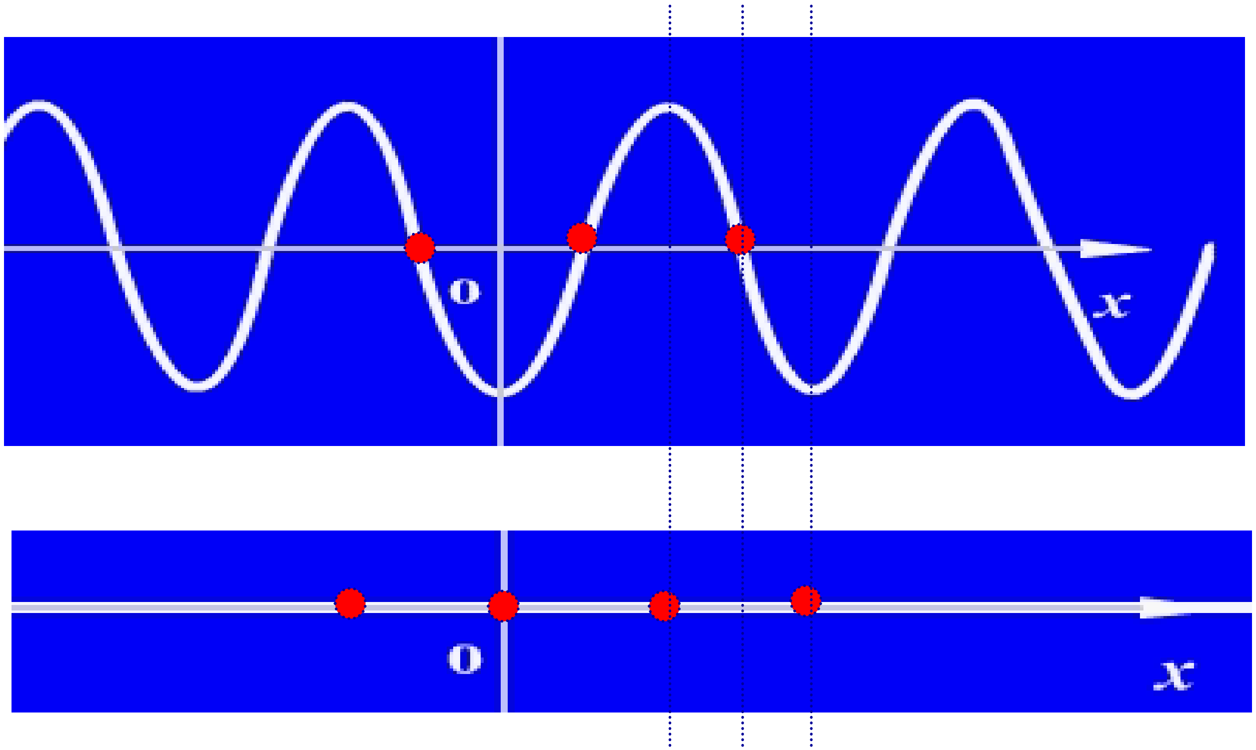
相位分布图

能量分布

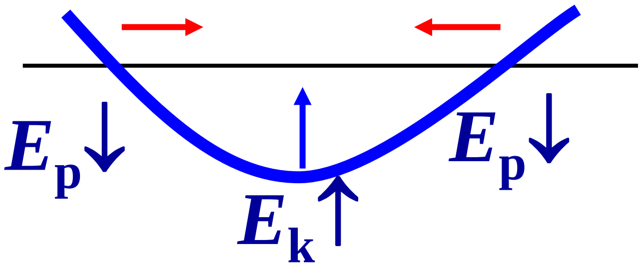
在驻波形成后，各个质点分别在各自的平衡位置附近作简谐运动。能量(动能和势能)在波节和波腹之间来回传递，无能量的传播。

$t=0$时刻：
各点$E_k=0$，
波节E_p最大

$t=T/4$时刻：
各点$E_p=0$，
波腹E_k最大

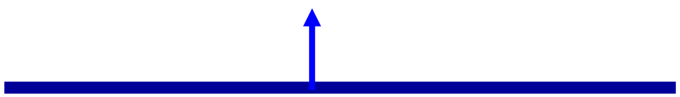


驻波能量流动特性



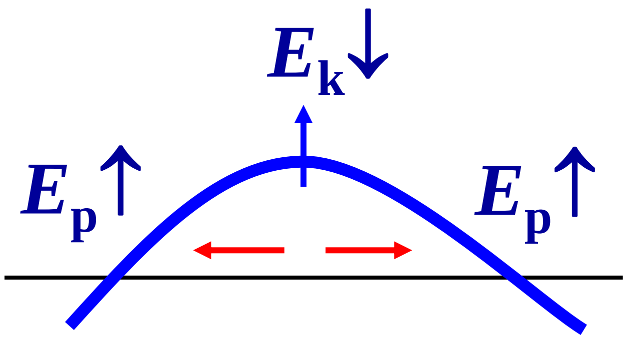
势能→动能

能量由波节向波腹流动



瞬时位移为0，势能为0，

动能最大。

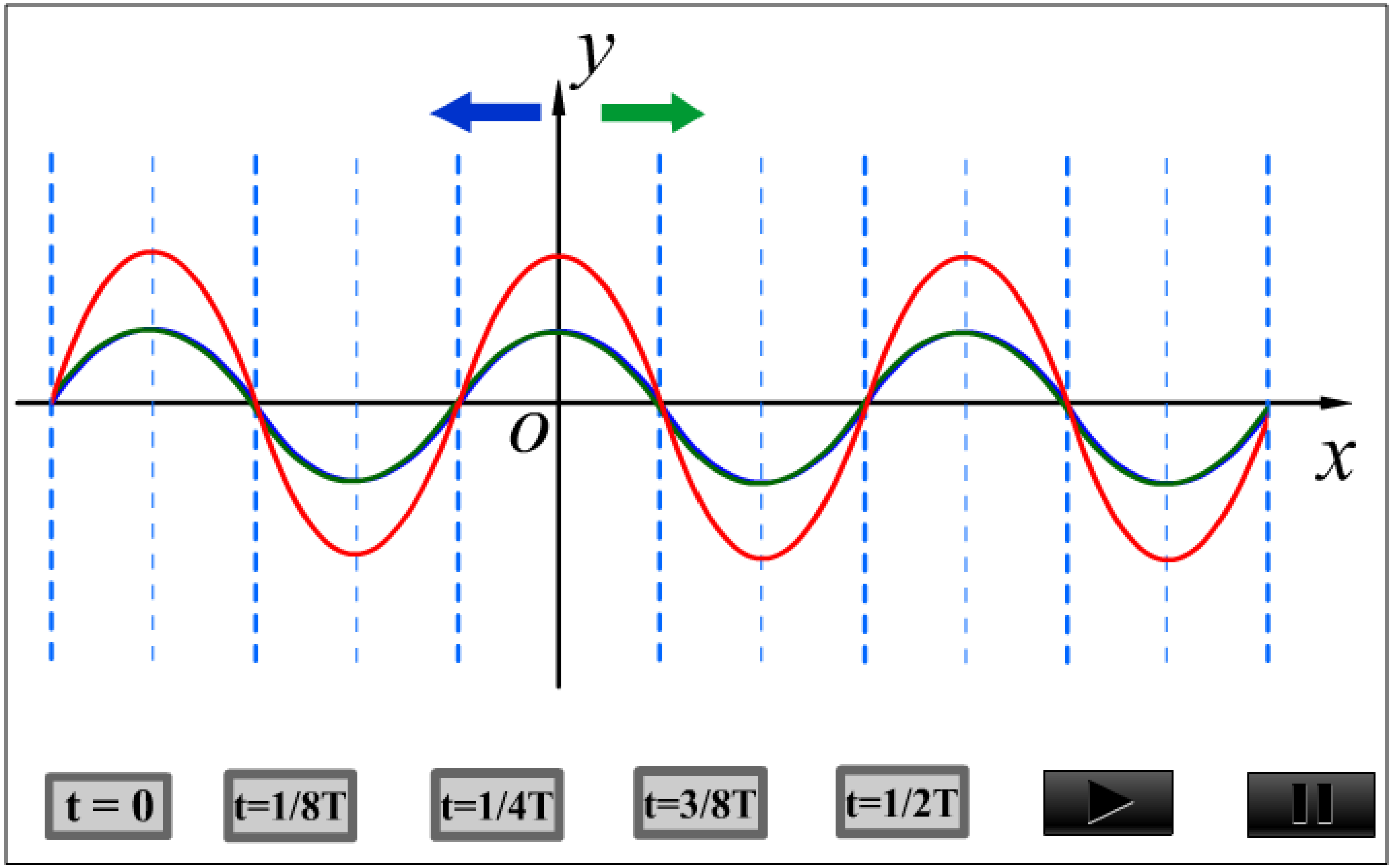


动能→势能

能量由波腹向波节流动

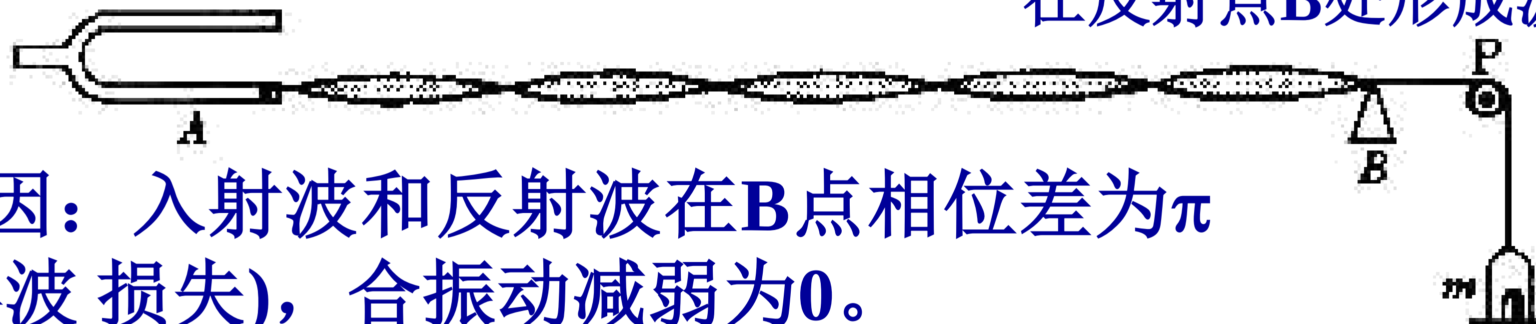
能量(动能和势能)在波节和波腹之间来回传递，但无能量的定向传播。

驻波的形成



半波损失的引入

在反射点B处形成波节

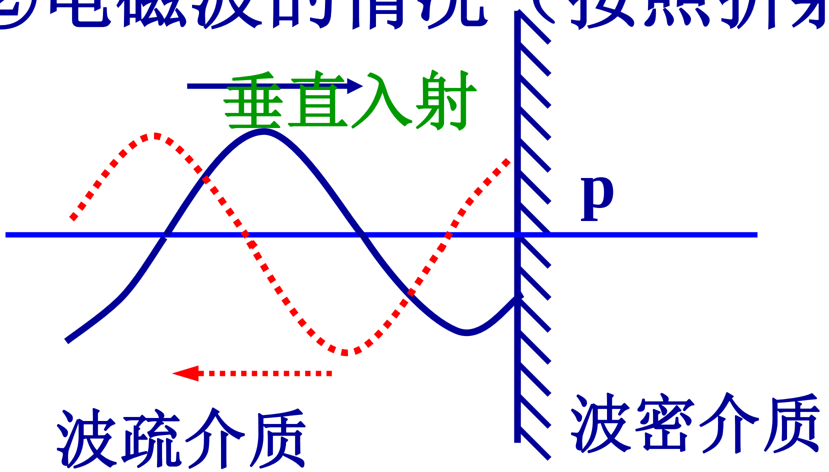


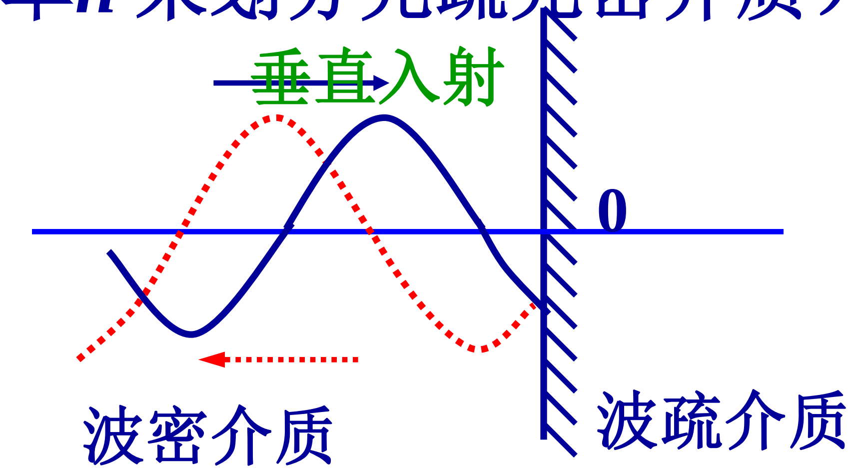
原因：入射波和反射波在B点相位差为π
(半波 损失)，合振动减弱为0。

推广：

①弹性波传播情况（按照$z=\rho u$ 来划分波疏波密介质）

②电磁波的情况（按照折射率n 来划分光疏光密介质）

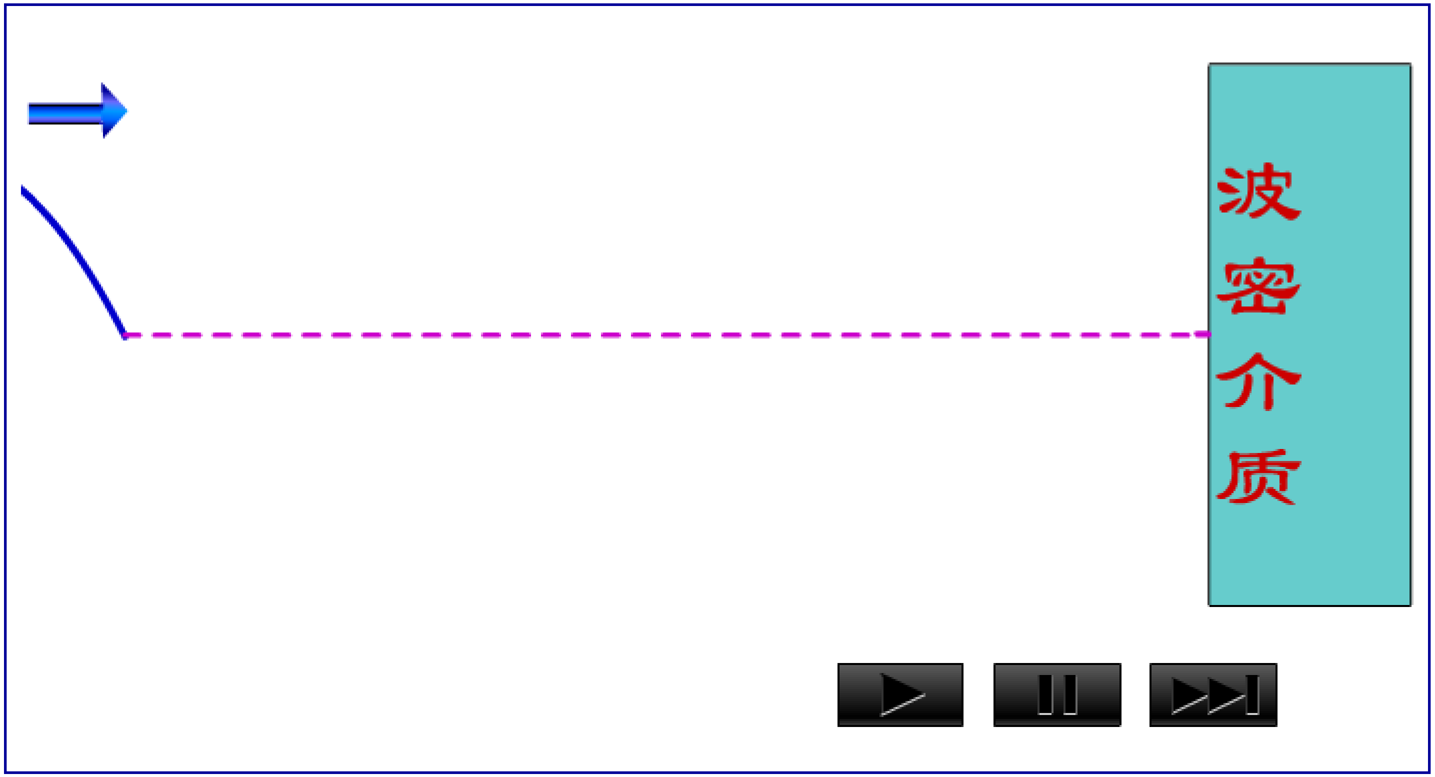




半波损失

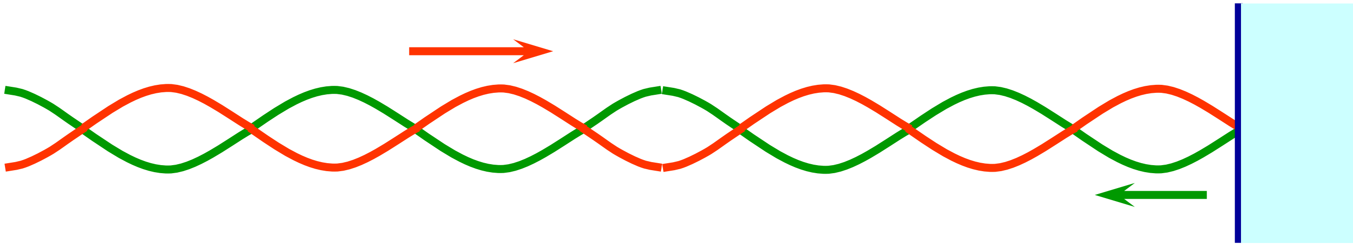
波疏介质

ρu 较小

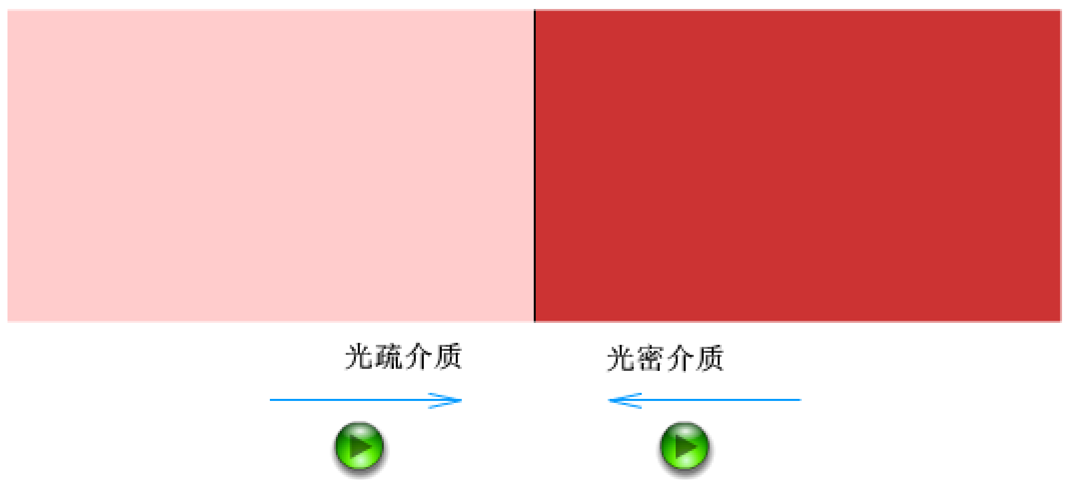


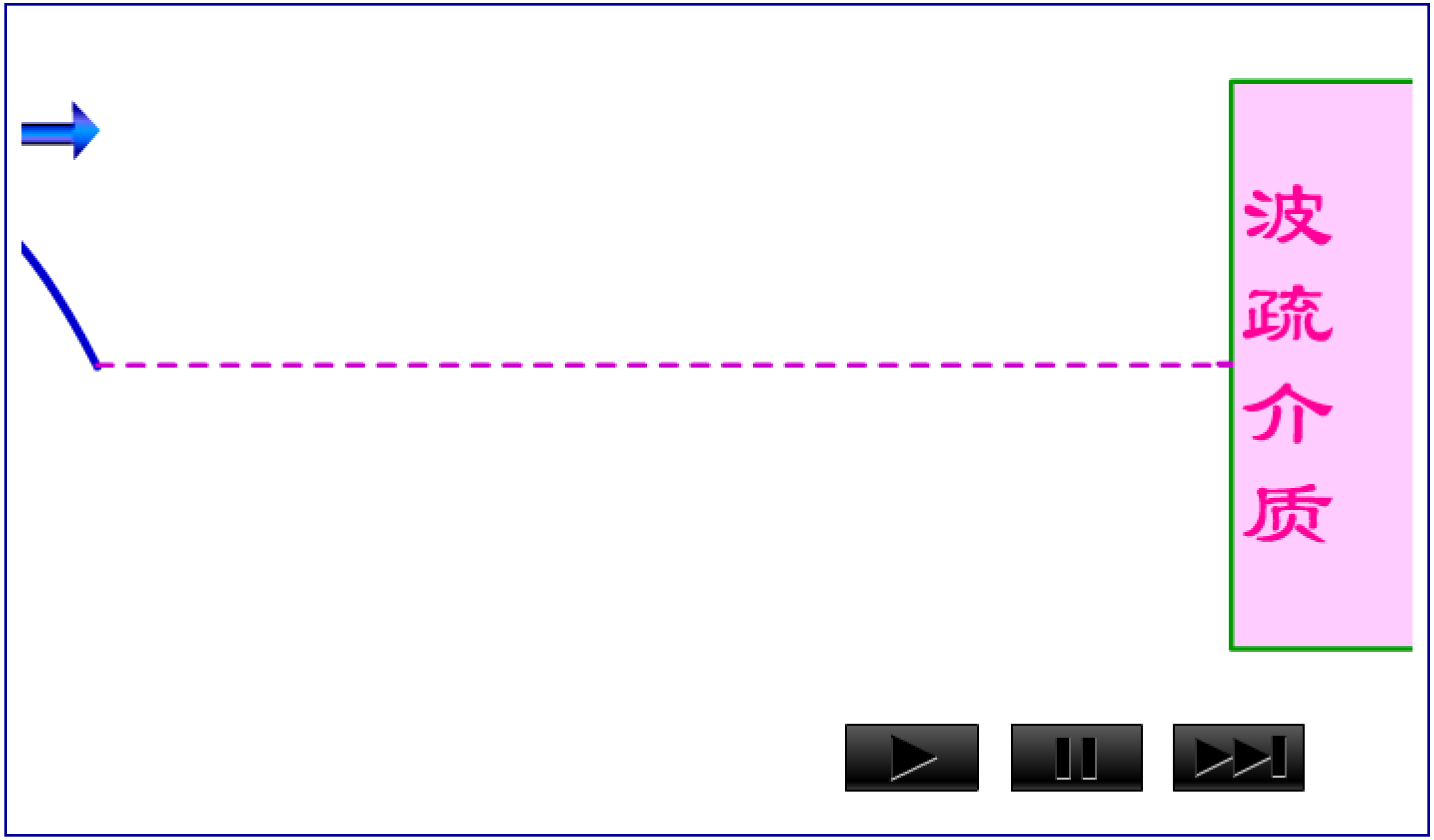
波密介质

ρu 较大



当波从波疏介质垂直入射到波密介质，被反射到波疏介质时形成波节。入射波与反射波在此处的相位时时相反，即反射波在分界处产生π的相位跃变，相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失。





当波从波密介质垂直入射到波疏介质，被反射到波密介质时形成波腹。入射波与反射波在此处的相位时时相同，即反射波在分界处不产生相位跃变。

例题 两人各执长为 l 的绳的一端，以相同的角频率和振幅在绳上激起振动，右端的人的振动比左端的人的振动相位超前ϕ，试以绳的中点为坐标原点描写合成驻波。由于绳很长，不考虑反射。绳上的波速设为u。

解 左端的振动 $y_1 = A\cos\omega t$

右端的振动 $y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$

右行波表达式：$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - x/u\right) + \phi_1\right]$

左行波表达式：$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + x/u\right) + \phi_2\right]$

$x = -l/2$时，$y_1 = A\cos\omega t$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \phi_1\right] = A\cos\omega t \Rightarrow \phi_1 = -\frac{\omega l}{2u}$$

$x = l/2$时，$y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t+\frac{l}{2u}\right)+\phi_2\right] = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2 = \phi - \frac{\omega l}{2u}$$

右行波、左行波表达式：

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}-\frac{l}{2u}\right)\right]$$

$$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}-\frac{l}{2u}\right)+\phi\right]$$

合成波 $y = y_1 + y_2 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right)\right]$

$$+ A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right) + \phi\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2A\cos\left(\frac{\omega x}{u} + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega l}{2u} + \frac{\phi}{2}\right)$$

当$\phi = 0$，$x = 0$处为波腹；当$\phi = \pi$时，$x = 0$处为波节。

例题　在弦线上有一简谐波，其表达式是：

$$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}](\mathrm{SI})$$

为了在此弦线上形成驻波，并且在$x = 0$处为一波节，此弦线上应有另一简谐波，试求其表达式。

解：设在弦线上的另一简谐波的表达式为：

$$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\phi_{20}]$$

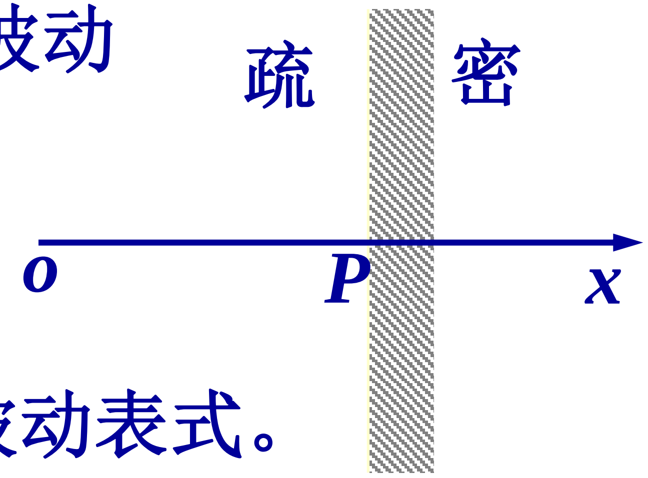
两波在$x = 0$处的振动相位，必须时刻相反，才可使相干波在此处为波节：$\phi_{20} = \phi_{10}+\pi = \frac{\pi}{3}+\pi = \frac{4}{3}\pi.$

将ϕ_{20}的结果代入y_2的表达式，即得。

例　一平面简谐波沿x轴正向传播，波动方程为：$Y = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\frac{11\pi}{6}]$

在$x=3\lambda/4$处有反射面如图。

求：在考虑半波损失时，反射波的波动表式。



解：先求入射波在P点的振动方程。

由已知条件，可知：

$$Y_{入射}(x=\frac{3\lambda}{4},t) = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{3\lambda}{4u})+\frac{11\pi}{6}]$$

$$= A\cos[2\pi\nu t-\frac{3\pi}{2}+\frac{11\pi}{6}] = A\cos[2\pi\nu t+\frac{\pi}{3}]$$

再求反射波在P点的振动方程。

由题意，在*P*点入射波与反射波相差相位π，

$$\therefore Y_{反射}(P)=A\cos[2\pi\nu t+\frac{\pi}{3}\underline{\underline{+\pi}}]=A\cos[2\pi\nu t+\frac{4\pi}{3}]$$

反射波以*P*点为波源，沿x轴负方向传播。

$$Y_{反射}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x-x_0}{u})+\phi_0]$$

$x_0=3\lambda/4$

$$=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x-3\lambda/4}{u})+\frac{4\pi}{3}]$$

$$=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})-\frac{\pi}{6}]$$

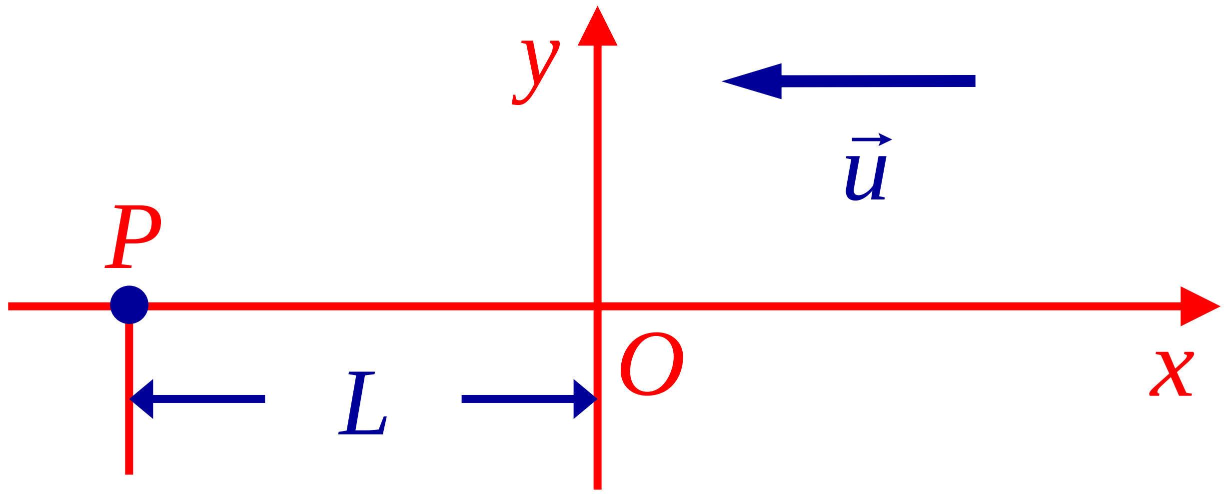
讨论：波节和波腹的 *x* 坐标？课后。

1． 如图，已知P点的振动方程为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

写出以O点为坐标原点的波动表示

写出O点质元的振动方程

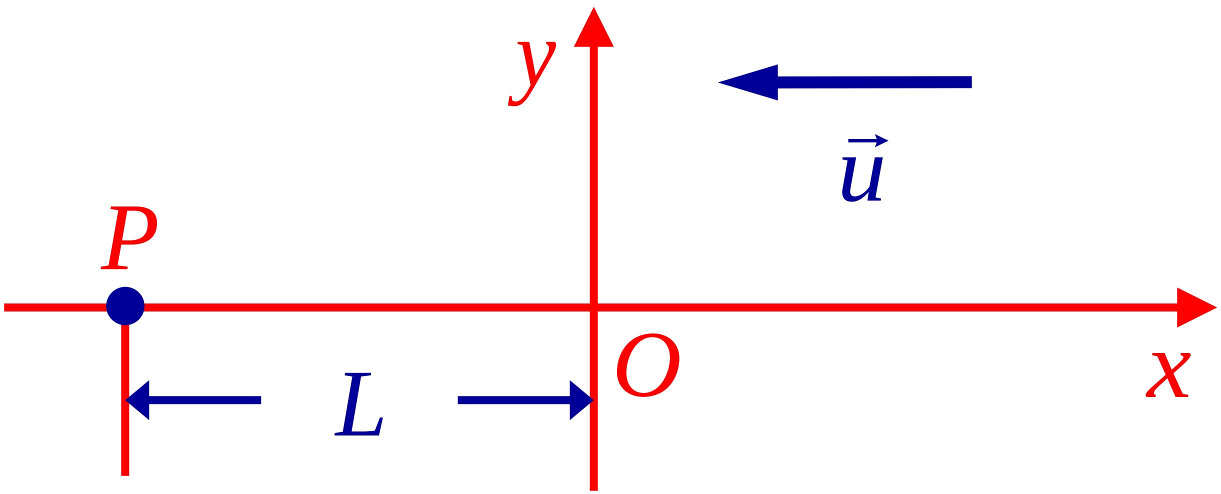


解：左行波，*P*点相位落后，故有

$$y = A\cos[\omega(t + \frac{L}{u} + \frac{x}{u}) + \varphi]$$

*O*点质元的振动方程

$$y = A\cos[\omega(t + \frac{L}{u}) + \varphi]$$



检查方法：将*P*点坐标代入波动表示，看是否和已知条件一致。

2．设有一波沿着绳子传播，其波函数为

$$y = A\cos 2\pi(t/T - x/\lambda)$$

(1) 若此波在$x = 0$处发生反射，反射点为自由端，求反射波波函数

(2) 若此波在$x = 0$处发生反射，反射点为固定点，求反射波波函数

设有一波沿着绳子传播，其波函数为

$y = A\cos 2\pi(t/T - x/\lambda)$

(1) 若此波在x = 0处发生反射，反射点为自由端，求反射波波函数为

$$y' = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

(2) 若此波在x = 0处发生反射，反射点为固定点，求反射波波函数

$$y' = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$$

例　一沿x 方向传播的入射波在 $x = 0$处发生反射，反射点为一波节。已知波函数为

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$

求 (1) 反射波的波函数；

(2) 求合成波（驻波）的波函数；

(3) 各波腹和波节的位置坐标。

解：(1)反射点为波节，说明波反射时有π的相位跃变，所以反射波的波函数为

$$y_2 = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})-\pi]$$

(2) 合成波（驻波）的波函数为

$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) - \pi]$$

$$= 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2})$$

$$= 2A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\frac{t}{T}$$

(3) 形成波腹的各点，振幅最大，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1 \qquad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k + \frac{1}{2})\pi$$

$$x_k = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

形成波节的各点，振幅为零，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1 \qquad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi$$

$$x_k = \pm k\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

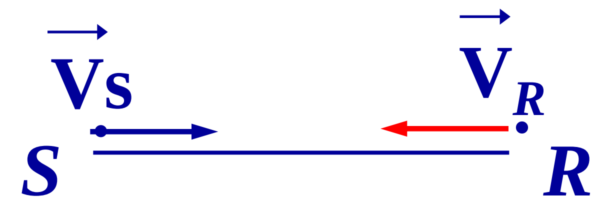
§ 7-7 多普勒效应

当波源*S*或观察者*R*相对于介质运动时，观察者所接收的频率 ν_R不等于波源振动频率 ν_S的现象。

§7-7 多普勒效应

当波源S或观察者R相对于介质运动时，观察者所接收的频率ν_R不等于波源振动频率ν_S的现象。

机械波的多普勒效应



参考系：介质

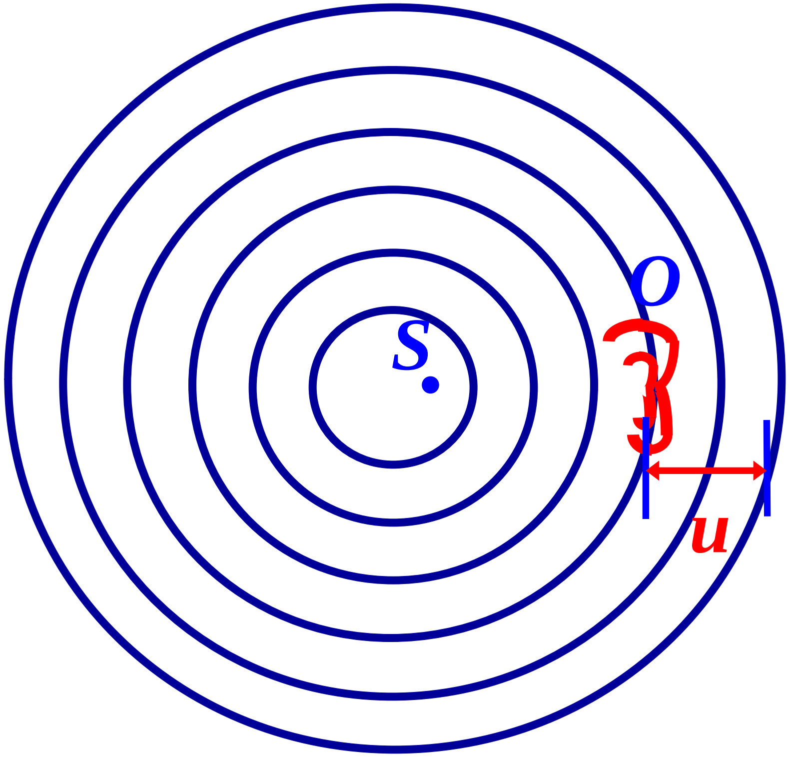
ν_S：波源振动频率；ν_R：观察者接收频率；ν_w：波的频率（单位时间内通过介质中某点的波的数目）

当波源和观察者都静止 $(V_S = 0$，$V_R = 0)$ $\nu_R = \nu_w = \nu_S$

(1) 波源不动，观察者以速度V_R相相对于介质运动

波源速度$V_S = 0$，观察者向波源运动的速度为$V_R (>0)$

波源S 静止，观察者O 以速度V_R相对介质运动

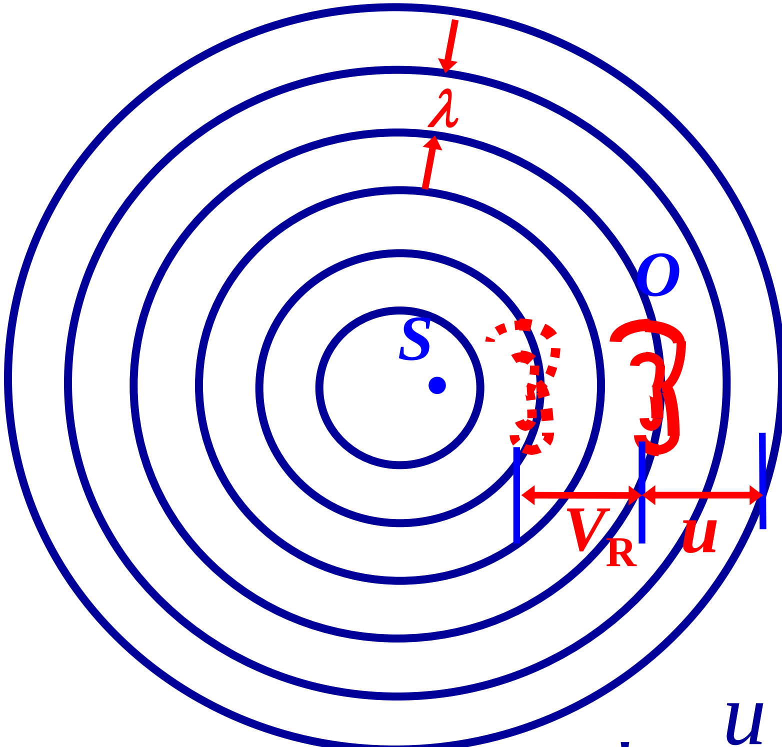


单位时间内，位于观察者左边的波源发出的波向右传播了距离u，

$\nu_w = \nu_S$,

$\nu_R \neq \nu_w$

波源S静止，观察者O以速度V_R相对介质运动



单位时间内，位于观察者左边的波源发出的波向右传播了距离u，同时观察者向左移动了距离V_R，这相当于波通过观察者的距离为$u+V_R$。

单位时间内，通过观察者的完整波的个数(频率)为：

$$\nu' = \frac{u+V_R}{\lambda} = \frac{u+V_R}{uT}$$

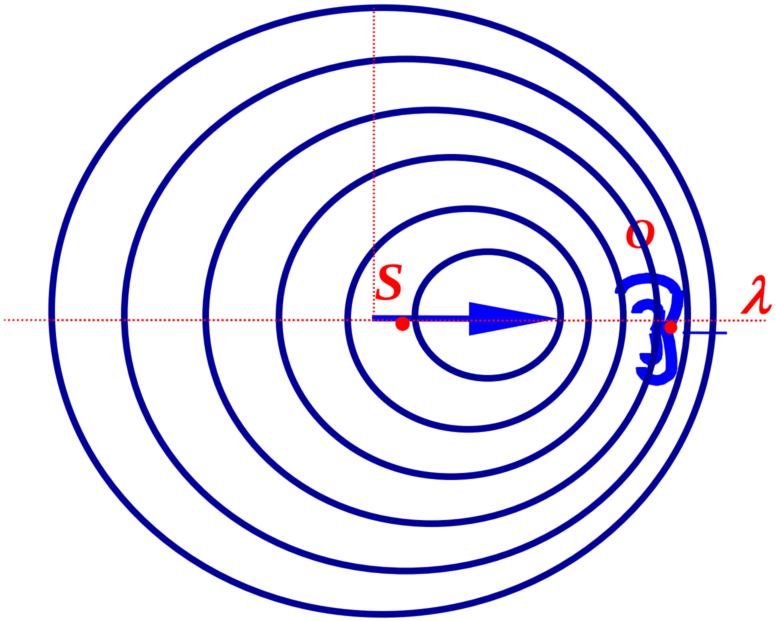
$\nu_w = \nu_S$,

$\nu_R \neq \nu_w$

$$\nu' = \frac{u+V_R}{u}\nu$$

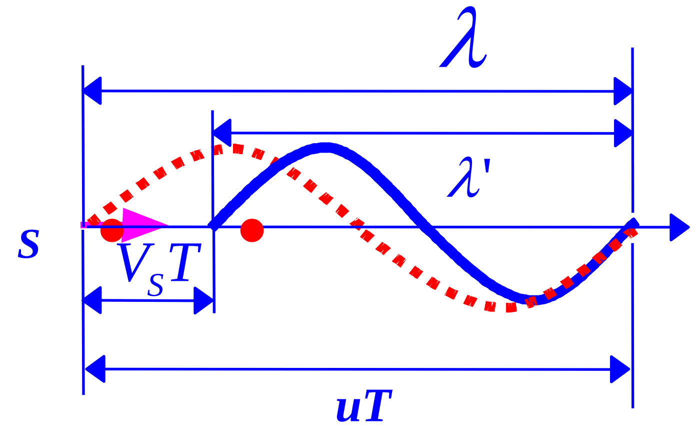
若O背离S运动，则以$-V_R$代替V_R。

(2)观察者不动，波源以速度v_S相对于介质运动



$\nu_R = \nu_w$

$\nu_w \neq \nu_S$



S 运动的前方波长缩短

观察者*O* 相对介质静止，波源*S* 以速度V_S相对介质运动，观察者测得的波长：$\lambda' = \lambda - V_S T$。

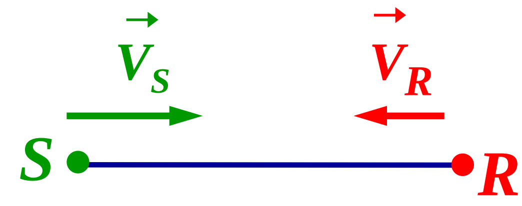
单位时间内通过观察者*O* 的完整的波的个数（频率）：

$$\nu' = \frac{u}{\lambda - V_S T} = \frac{u}{(u - V_S)T} \quad \Rightarrow \quad \nu' = \frac{u}{u - V_S}\nu$$

波源背离观察者运动时，以 $-V_S$ 代 V_S 即可。

(3)观察者与波源同时相对介质而运动

讨论波源与观察者相向运动的情形。



$$\nu_S \neq \nu_w \neq \nu_R$$

由于波源的运动，介质中波的频率：

$$\nu_w = \frac{u}{u - V_S}\nu_S$$

由于观察者的运动，观察者接收的频率：

$$\nu_R = \frac{u + V_R}{u}\nu_w = \frac{u + V_R}{u - V_s}\nu_S$$

当波源与观察者背离而去时，上式的 V_R 和 V_S 分别用 $-V_R$ 和 $-V_S$ 代替。

多普勒效应的应用

1）测量天体相对地球的视线速度

远处星体发光有红移现象--- 宇宙大爆炸

由红移可得恒星的退行速度

2）技术上，测量运动物体的视线速度

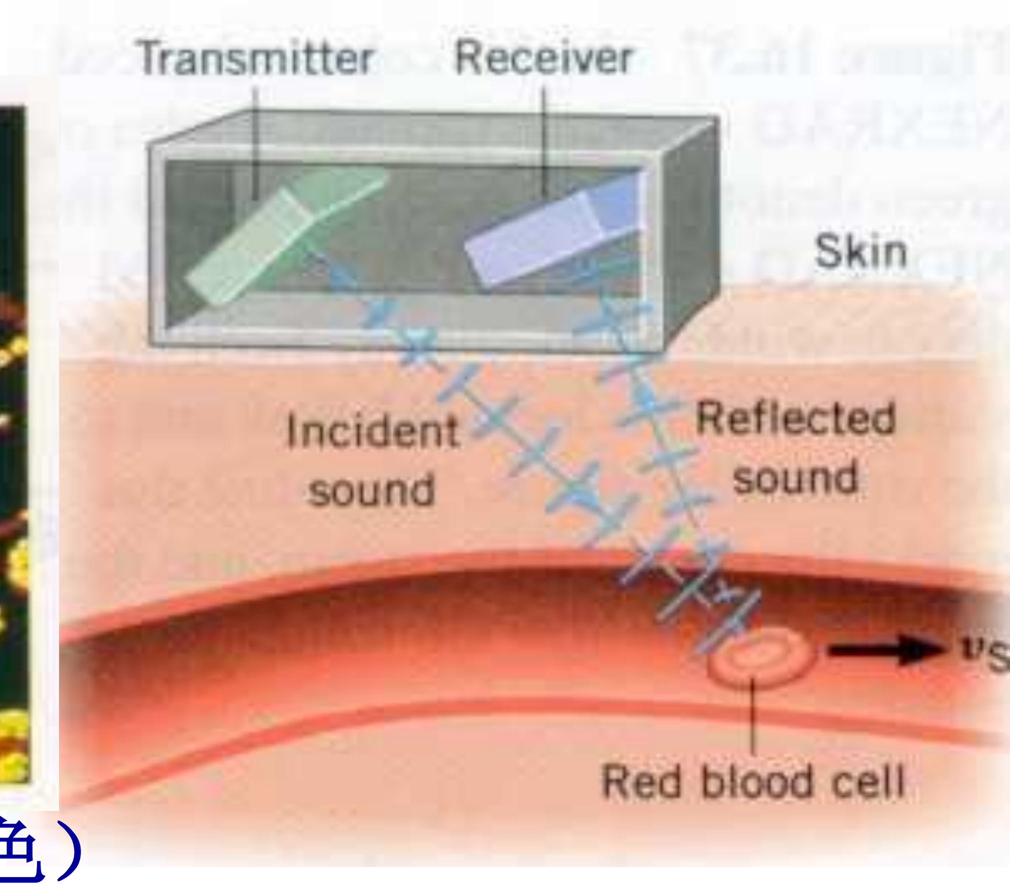
如飞机接近雷达的速度、汽车的行驶速度、人造卫星的跟踪、流体的流速。

警察用多普勒测速仪测速

3）医学上“超”

利用超声波的多普勒效应体检

胎儿的超声波影像（假彩色）



超声多普勒效应测血流速

例：一固定的超声源发出频率为**100MHz**的超声波。一汽车向超声源迎面驶来，在超声源处接收到从汽车反射回来的超声波，其频率为**110MHz**，设空气中的声速为**330m/s**，试计算汽车的行驶速度。

解：设汽车相对于空气速度为V_B，汽车接收到从超声源发来的超声波频率是：

$$\nu_1 = \frac{u + V_B}{u}\nu = \frac{330 + V_B}{330} \times 100$$

（观察者运动的情况）

超声波从汽车反射时，汽车又作为新的超声波源（惠更斯原理），这超声源相对于空气的运动速度是V_B。

又因为接收器相对于空气静止，所以其接收到的超声波频率是：

$$\nu_2 = \frac{u}{u - V_B}\nu_1 = \frac{330}{330 - V_B} \cdot \frac{330 + V_B}{330} \times 100$$

（波源运动的情况）

把已知条件 $\boldsymbol{\nu_2 = 110}$ **MHz** 代入上式，解得：

$$V_B = \frac{110 - 100}{110 + 100} \times 330 = 15.7 m/s (= 56.6\ \ km/h)$$

* 电磁波的多普勒效应

电磁波的传播不依赖弹性介质，波源和观测者之间的相对运动速度决定了接听到的频率。电磁波以光速传播，应考虑相对论时空变换关系。

当波源和观测者在同一直线上运动时，得到

$$\nu_R = \sqrt{\frac{c+V}{c-V}}\nu_S$$

V — 波源和接收器之间相对运动的速度。

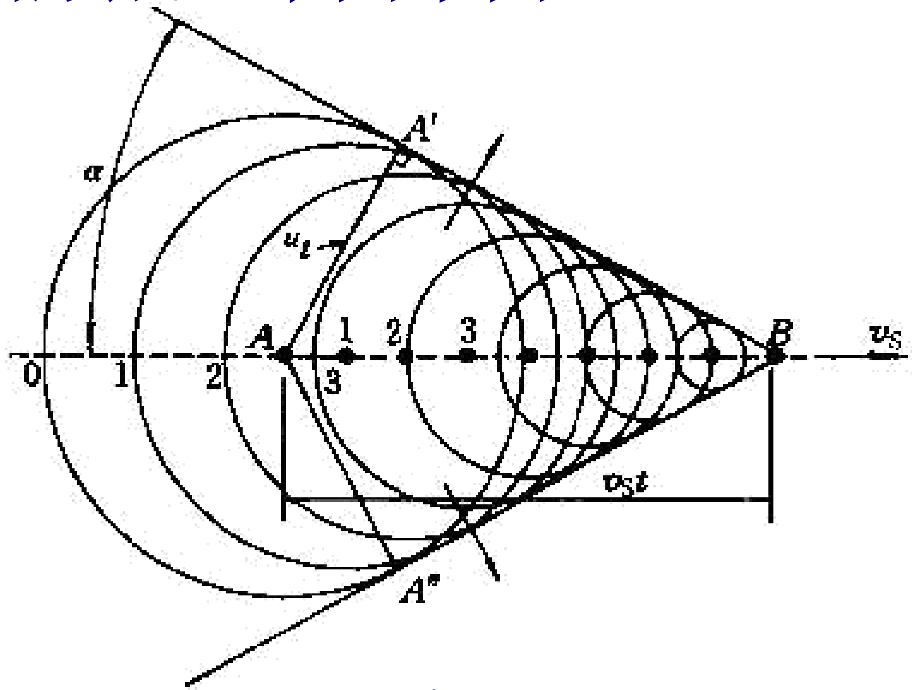
波源与观测者相互接近时，V 取正值；反之，V 取负值。前者接收到的频率比发射频率高，称为紫移；后者接收到的频率比发射频率低，称为红移。


汽车接近时 实际呈微蓝色
is actually very slightly blue as it approaches,

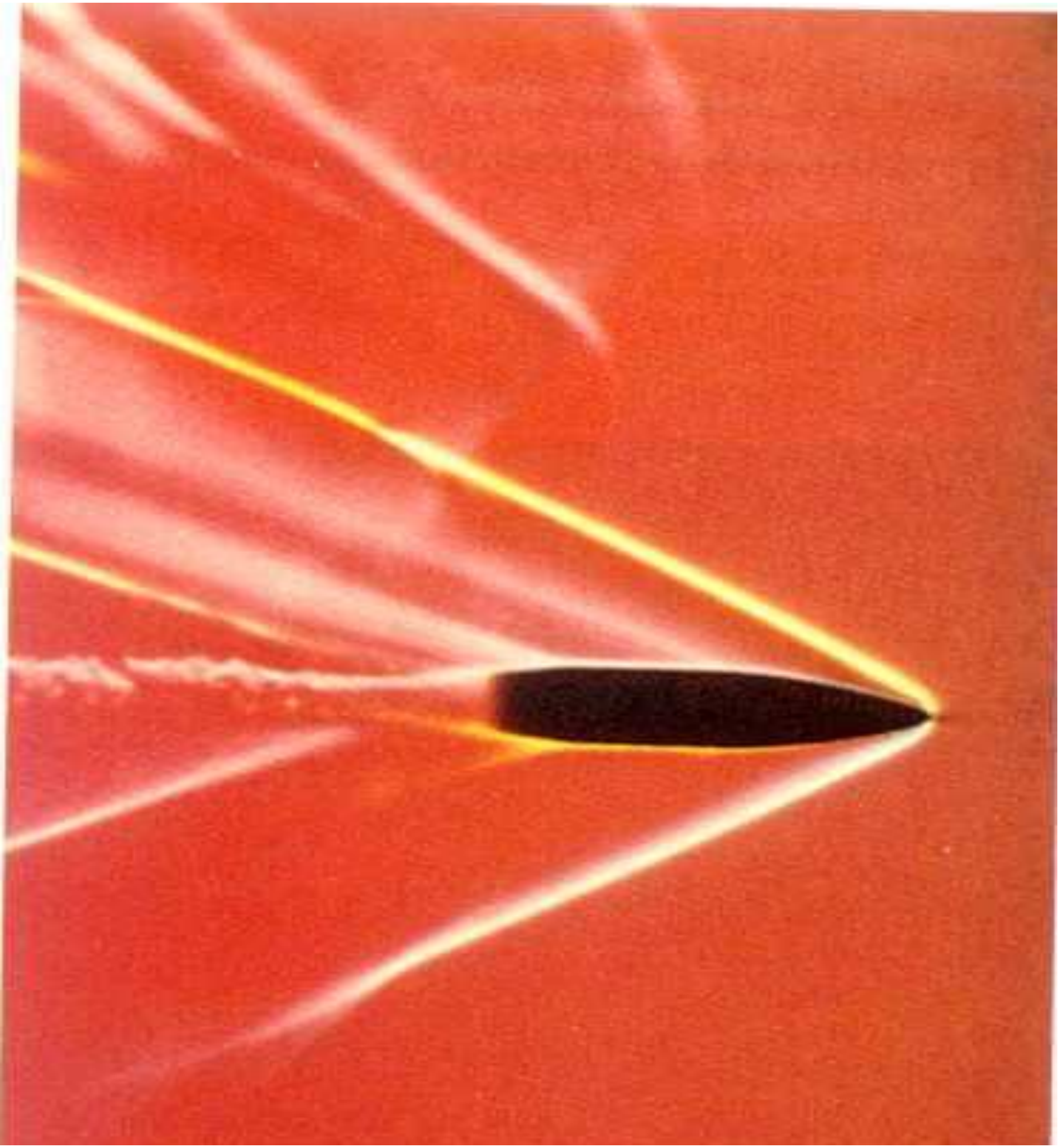

VHD238 GP
而离开时 则呈微红色
and very slightly red as it goes away.

* 冲击波

当波源运动的速度v_S超过波速时，波源将位于波前的前方，前述的计算公式不再有意义。波源发出的波的各波前的切面形成一个圆锥面。



锥形的顶角满足：$\sin a=\dfrac{ut}{v_S t}=\dfrac{u}{v_S}, v_S/u$—马赫数

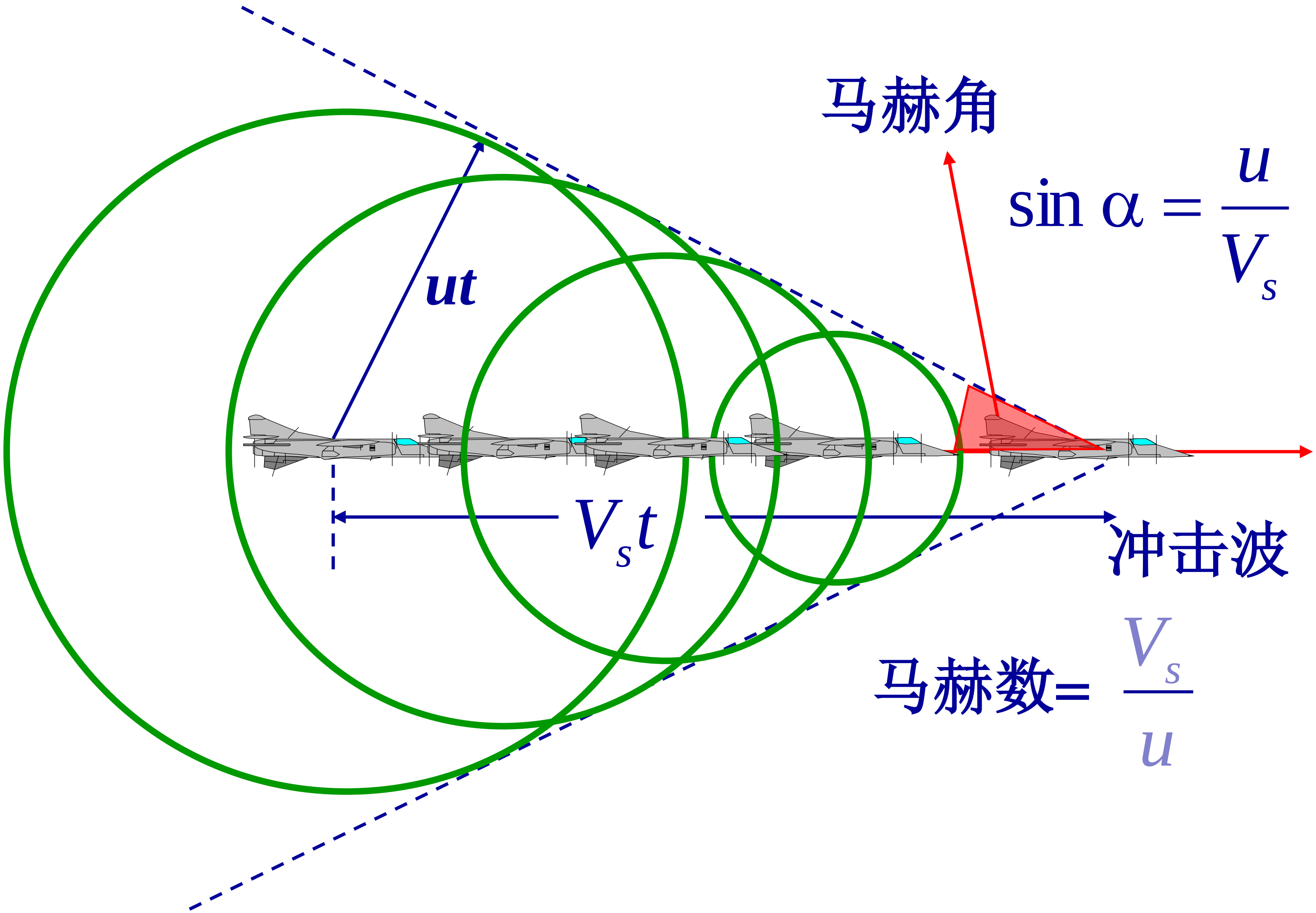


超音速的子弹在空气中形成的激波

（马赫数为2 ）

冲击波的形成过程

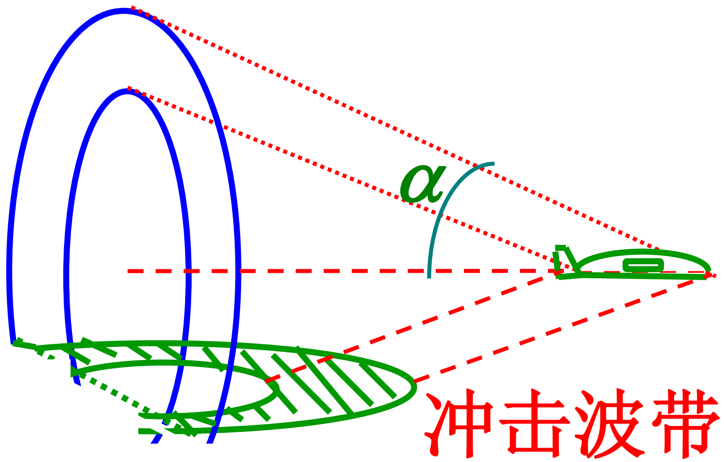
若波源的速度等于或大于波速，波源总在波阵面前面。



飞机冲破声障时将发出巨大声响，造成噪声污染


LINE1
0:50:14

对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制



***电磁激波—切伦柯夫辐射**

(Cherenkov radiation)：

高能带电粒子在介质中的速度超过光在介质中的速度时，将发生锥形的电磁波—切伦柯夫辐射。

它发光持续时间短（数量级10^{-10}s）。