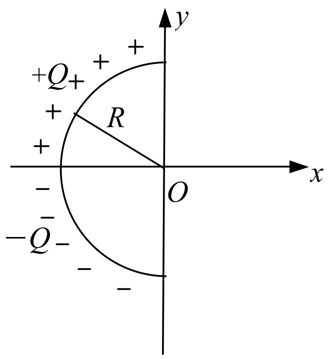
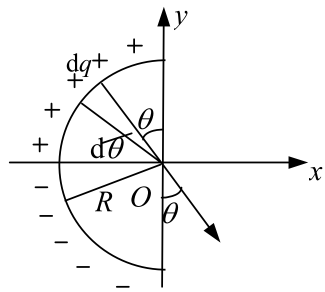
第十章 静电场

1. 一个细玻璃棒被弯成半径为 R 的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电荷 $+Q$，沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$，如图所示。试求圆心 O 处的电场强度。



解：在 θ 处取微小电荷： $dQ=\lambda dl=2Qd\theta/\pi$



它在 O 处产生场强：

$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}\theta$$

按 θ 角变化，将 dE 分解成二个分量：

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\cos\theta=-\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

对各分量分别积分，积分时考虑到一半是负电荷

$$E_x = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right]$$

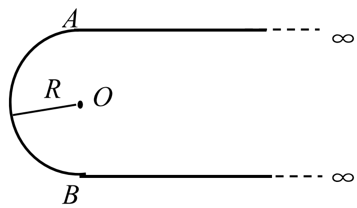
$$=0$$

$$E_y = \frac{-Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}\left[\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right] = -\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

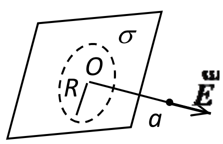
所以：

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = \frac{-Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\vec{j}$$

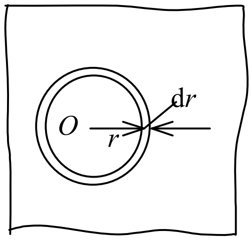
*2. 电荷线密度为 λ 的“无限长”均匀带电细线，弯成图示形状。若半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的半径为 R，试求圆心 O 点的场强。



3. 如图所示，一电荷面密度为 σ 的“无限大”平面，在距离平面 A 处的一点的场强大小的一半是由平面上的一个半径为 R 的圆面积范围内的电荷所产生的（AO 连线垂直于平面）。试求该圆半径的大小。



解：电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平面在任意点的场强大小为 $E=\sigma/(2\varepsilon_0)$



以图中 O 点为圆心，取半径为 $r \to r + \mathrm{d}r$ 的环形面积，其电量为：

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

它在距离平面为 A 的一点处产生的场强：

$$\mathrm{d}E = \frac{\sigma a r \mathrm{d}r}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + r^2\right)^{3/2}}$$

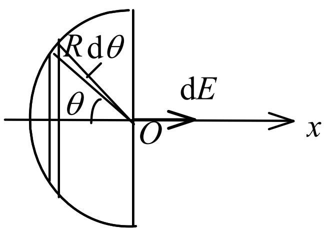
则半径为 R 的圆面积内的电荷在该点的场强为：

$$E = \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{\left(a^2 + r^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right)$$

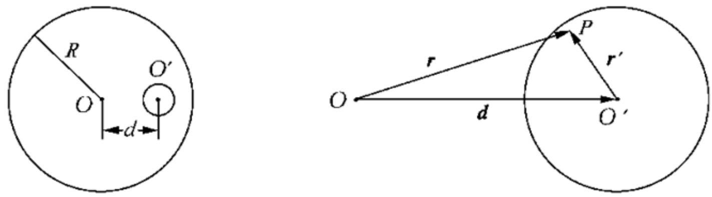
由题意,令 $E = \sigma/(4\varepsilon_0)$，得到

$$R = \sqrt{3}a$$

*4. 一半径为 R 的半球面，均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ，求球心 O 处的电场强度。



5. 半径为R的均匀带电球体内的电荷体密度为ρ,若在球内挖去一块半径为$r < R$的小球体，如图所示．试求：两球心O与O'点的场强，并证明小球空腔内的电场是均匀的．



（a）　　　　　　　　　　　　　　　（b）

解: 将此带电体看作带正电ρ的均匀球与带电$-\rho$的均匀小球的组合，
如图(a)所示：

(1) $+\rho$球在O点产生电场$\vec{E}_{10}=0$，

$-\rho$球在O点产生电场$\vec{E}_{20}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$

∴ O点电场$\vec{E}_0=\frac{r^3\rho}{3\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$；

(2) $+\rho$在O'产生电场$\vec{E}_{10'}=\frac{\frac{4}{3}\pi d^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\overrightarrow{OO'}$

$-\rho$球在O'产生电场$\vec{E}_{20'}=0$

∴ O' 点电场 $\vec{E}_{0'}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$

(3) 设空腔任一点P相对O'的位矢为$\vec{r'}$，相对O点位矢为$\vec{r}$ (如图(b))

则 $\vec{E}_{PO}=\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$，$\vec{E}_{PO'}=-\frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0}$,

∴ $\vec{E}_P=\vec{E}_{PO}+\vec{E}_{PO'}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}=\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0}$

∴腔内场强是均匀的.

6. 半径为 R_1 和 $R_2(R_2>R_1)$的两无限长同轴圆柱面，单位长度上分别带有电量 λ 和-λ, 试求:(1) $r<R_1$；(2) $R_1<r<R_2$；(3) $r>R_2$ 处各点的场强.

解: 高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

取同轴圆柱形高斯面，侧面积$S=2\pi rl$，则

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=E2\pi rl$$

(1) $r<R_1$：$\sum q=0, E=0$

(2) $R_1 < r < R_2$：$\sum q = l\lambda$

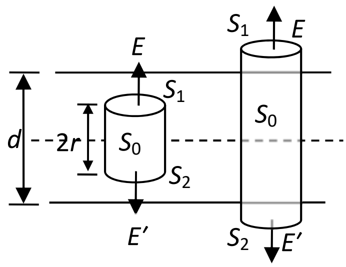
$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\text{沿径向向外}$$

(3) $r > R_2$：$\sum q = 0$

$$\therefore E = 0$$

7. 一厚度为 d 的均匀带电无限大平板，电荷体密度为 ρ，求板内外各点的场强。

解：**方法一**：高斯定理法。



(1) 板内点：由于平板具有面对称性，因此产生的场强的方向与平板垂直且对称于中心面：E=E'。

在板内取一底面积为 S，高为 $2R$ 的圆柱面作为高斯面，场强与上下两表面的法线方向平等而与侧面垂直，通过高斯面的电通量为

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_0} \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

$$= ES + E`S + 0 = 2ES\ ,$$

高斯面内的体积为 V=2rS，包含的电量为 Q=ρV=2ρrS，

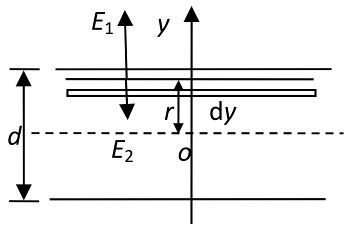
根据高斯定理 Φ_e=Q/ε_0，

可得场强为 E=$\rho r/\varepsilon_0$，(0≤r≤d/2)，①

(2) 板外点：穿过平板作一底面积为 S，高为 $2r$ 的圆柱形高斯面，通过高斯面的电通量仍为Φ_e=2ES，高斯面在板内的体积为 V=Sd，包含的电量为 Q=ρV=ρSd，根据高斯定理Φ_e=q/ε_0，

可得场强为 E=$\rho d/2\varepsilon_0$，(r ≥ d/2)，②

方法二：场强叠加法。



(1) 由于平板的可视很多薄板叠而成的，以 r 为界，下面平板产生的场强方向向上，上面平板产生的场强方向向下。在下面板中取一薄层 dy，面电荷密度为 $\mathrm{d}\sigma=\rho \mathrm{d}y$，产生的场强为 $\mathrm{d}E_1=\mathrm{d}\sigma/2\varepsilon_0$，积分得

$$E_1=\int_{-d/2}^{r}\frac{\rho \mathrm{d}y}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(r+\frac{d}{2})$$ ，③

同理，上面板产生的场强为

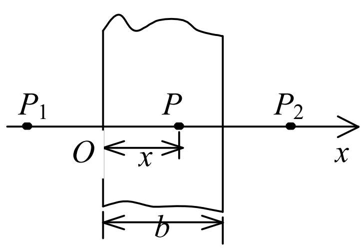
$$E_2=\int_{r}^{d/2}\frac{\rho \mathrm{d}y}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\frac{d}{2}-r)$$ ，④

r 处的总场强为 $E=E_1-E_2=\rho r/\varepsilon_0$。

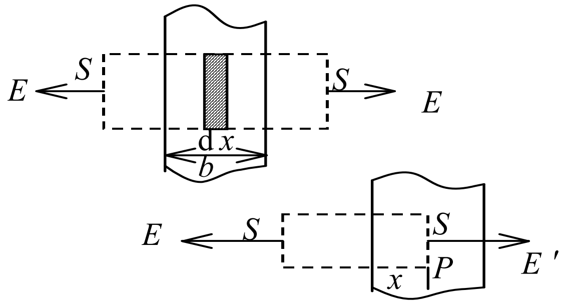
(2) 在公式③和④中，令 $r=\mathrm{d}/2$，得 $E_2=0$、$E=E_1=\rho \mathrm{d}/2\varepsilon_0$，$E$ 就是平板表面的场强。

平板外的场强是无数个无限薄的带电平板产生的电场叠加的结果，是均强电场，方向与平板垂直，大小等于平板表面的场强。

8. 如图所示，一厚为 B 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为：$\rho=kx$ $(0\le x\le B)$，式中 k 为一正的常量。求：(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；(2) 平板内任一点 P 处的电场强度；(3) 场强为零的点在何处？



解：(1) 由对称分析知，平板外两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且背离平面．设场强大小为 E



作一柱形高斯面垂直于平面．其底面大小为 S，如图所示。按高斯定理：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum q/\varepsilon_0$$

即：

$$2SE=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b \rho S\,\mathrm{d}\,x=\frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^b x\,\mathrm{d}\,x=\frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$E=kb^2/(4\varepsilon_0)$　　(板外两侧)

(2)　过 P 点垂直平板作一柱形高斯面，底面为 S．设该处场强为 E'，如图所示．按高斯定理有：

$$\left(E'+E\right)S=\frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^x xdx=\frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到：

$$E'=\frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2-\frac{b^2}{2}\right)\qquad(0\le x\le b)$$

(3)　$E'=0$，必须是

$$x^2-\frac{b^2}{2}=0$$

可得

$$x=b/\sqrt{2}$$

9. 用高斯定理重新求解教材中的【例 10.20】: 电荷 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内，试证明离球心 r（$r<R$）处的电势为 $U=\dfrac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$。

证明：球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，电荷的体密度为 $\rho=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$。

球内外的电场强度大小为 $E=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$，（$r\le R$）；

$E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，（$r\ge R$）。

取无穷远处的电势为零，则 r 处的电势为

$$U=\int_r^\infty \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_r^R E\mathrm{d}r+\int_R^\infty E\mathrm{d}r$$

$$=\int_r^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r\mathrm{d}r+\int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2\Bigg|_r^R+\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_R^\infty$$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2-r^2)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}。$$

10. 一半径为 R 的带电球体，其电荷体密度分布为：$\rho=\dfrac{qr}{\pi R^4}$ ($r\le R$) (Q 为一正的常量)，$\rho=0 \quad (r>R)$。试求：

(1) 带电球体的总电荷；

(2) 球内、外各点的电场强度；

(3) 球内、外各点的电势。　　注：第(3)问在讲完电势后做！

解：(1) 在球内取半径为 r、厚为 dr 的薄球壳，该壳内所包含的电荷为：

$$\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V=qr\,4\pi r^2\mathrm{d}r/(\pi R^4)=4qr^3\mathrm{d}r/R^4$$

则球体所带的总电荷为：

$$Q = \int_V \rho \mathrm{d} V = \left(4q / R^4\right) \int_0^r r^3 \mathrm{d} r = q$$

(2) 在球内作一半径为 r_1 的高斯球面，按高斯定理有：

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r_1} \frac{qr}{\pi R^4} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d} r = \frac{q r_1^4}{\varepsilon_0 R^4}$$

得：

$$E_1 = \frac{q r_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} \quad (R1 \le R), \quad \vec{E}_1 \text{方向沿半径向外}$$

在球体外作半径为 r_2 的高斯球面，按高斯定理：$4\pi r_2^2 E_2 = q / \varepsilon_0$ 得：

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad (R_2 > R), \quad \vec{E}_2 \text{方向沿半径向外}$$

(3) 球内电势：

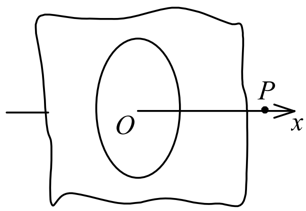
$$U_1 = \int_{r_1}^R \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d} \vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d} \vec{r} = \int_{r_1}^R \frac{q r^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4} \mathrm{d} r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d} r$$

$$= \frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q r_1^3}{12\pi\varepsilon_0 R^4} = \frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}\left(4 - \frac{r_1^3}{R^3}\right) \quad \left(r_1 \le R\right)$$

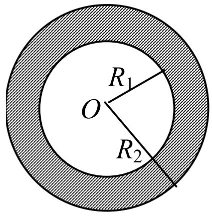
球外电势：

$$U_2 = \int_{r_2}^R \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d} \vec{r} = \int_{r_2}^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d} r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad \left(r_2 > R\right)$$

*11. 一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为 σ。如图所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势(选 O 点的电势为零)。

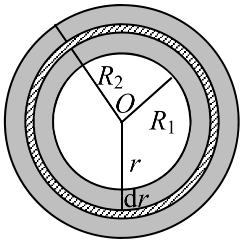


12. 一个均匀带电，内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀带电球壳，所带电荷体密度为 ρ，求：(1) 半径为 r_A（$r<R_1$）和半径为 r_B（$R_1<r<R_2$）处的电势，(2) 半径为 r_A（$r<R_1$）和半径为 r_B（$R_1<r<R_2$）处的场强。



解：**方法一：电势叠加。**

(1) 电势



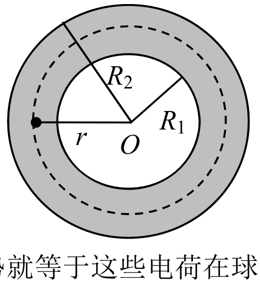
① $r<R_1$：在半径为 r 的球壳处取一厚度为 dr 的薄壳，其体积为 $\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$，包含的电量为 $\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V=4\pi\rho r^2\mathrm{d}r$，在其内部任意一点（内部为等势）产生的电势为

$$\mathrm{d}U_O=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\mathrm{d}r\ ,$$

球心处的总电势为

$$U_O=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}r\mathrm{d}r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)\ ,$$

② $R_1<r<R_2$：如图，r 处的电势是该球面（虚线）外的电荷和球面内的电荷共同产生的。



球面外的电荷在 r 处产生的电势就等于这些电荷在球心处产生的电势，根据上面的推导可得

$$U_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - r_B^2)$$ 。

球面内的电荷在 r 处产生的电势等于这些电荷集中在球心对 r 处产生的电势。球壳在球面内的体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi(r_B^3 - R_1^3)$$ ，

包含的电量为 $Q=\rho V$，这些电荷集中在球心时对 r 处产生的电势为

$$U_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r_B}(r_B^3 - R_1^3)$$ 。

总电势为 $U_B=U_1+U_2$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2 - r_B^2 - 2\frac{R_1^3}{r_B})$$ 。

(2) 场强

① $r<R_1$：

$$E_A = -\frac{\partial U_A}{\partial r_A} = 0$$ 。

② $R_1<r<R_2$：

$$E_B = -\frac{\partial U_B}{\partial r_B} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_B - \frac{R_1^3}{r_B^2})$$ 。

方法二：高斯定理。

(1) 场强

过空腔中一点作一半径为 r 的同心球形高斯面，由于面内没有电荷，根据高斯定理，可得空腔中场强为 $E=0$，$(r \le R_1)$。过球壳中一点作一半径为 r 的同心球形高斯面，面内球壳的体积为

$$V = \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$ ，

包含的电量为 $q=\rho V$，根据高斯定理得方程 $4\pi r^2 E=q/\varepsilon_0$，可得场强为

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})$$，$(R_1\le r\le R_2)$。

在球壳外面作一半径为 r 的同心球形高斯面，面内球壳的体积为

$$V=\frac{4}{3}\pi(R_2^3-R_1^3)$$，

包含的电量为 $q=\rho V$，根据高斯定理得可得球壳外的场强为

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$，$(R_2\le r)$。

(2) 电势

$r<R_1$ 处的电势为

$$U_A=\int_{r_A}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_{r_A}^{\infty}E\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r_A}^{R_1}0\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)$$。

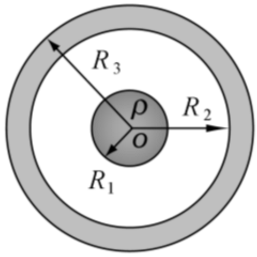
$R_1<r<R_2$ 处的电势为

$$U_B=\int_{r_B}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=\int_{r_B}^{\infty}E\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r_B}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r-\frac{R_1^3}{r^2})\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R_2^2-r_B^2-2\frac{R_1^3}{r_B})$$

13．半径为 R_1 的均匀带电球体的电荷体密度为 ρ，球外有一内外半径分别为 R_2、R_3 的同心导体球壳。试计算空间电场强度和电势分布。



解：要求电场强度分布，需先确定电荷的分布．因为处于静电平衡状态的导体内部场强处处为零，所以由高斯定理和电荷守恒定律可知，球壳内表面带电量为$-Q$，外表面带电量为Q($Q=\rho R_1^3\pi 4/3$) 。由于带电体是球对称的，所以电荷必是球对称分布的．作半径为r的同心球面为高斯面，则由高斯定理可知

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

当 $r \leqslant R_1$ 时

$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

当 $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

当 $R_2 < r < R_3$ 时

$$\sum q = 0$$

$$E_3 = 0$$

当 $r > R_3$ 时

$$\sum q = Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_4 = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

电场分布的矢量形式为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_1=\dfrac{\rho \boldsymbol{r}}{3\varepsilon_0}, & r\leqslant R_1 \\
\boldsymbol{E}_2=\dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0, & R_1\leqslant r\leqslant R_2 \\
\boldsymbol{E}_3=0, & R_2<r<R_3 \\
\boldsymbol{E}_4=\dfrac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0, & r>R_3
\end{cases}
$$

选无穷远处为电势零参考点，由电势定义可求得各区域的电势为

当 $r\geq R_3$ 时

$$
u=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{R_3}\boldsymbol{E}_4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}
$$

当 $R_2\leq r\leq R_3$ 时

$$
u=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{R_3}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_3}^{\infty}\boldsymbol{E}_4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{R_3}^{\infty}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_3}
$$

当 $R_1\leq r\leq R_2$ 时

$$
\begin{aligned}
u&=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{R_3}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_3}^{\infty}\boldsymbol{E}_4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&=\int_r^{R_2}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+0+\int_{R_3}^{\infty}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)
\end{aligned}
$$

当 $0\leq r\leq R_1$ 时

$$
\begin{aligned}
u&=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{R_1}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{R_3}\boldsymbol{E}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_3}^{\infty}\boldsymbol{E}_4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\
&=\int_r^{R_1}\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+0+\int_{R_3}^{\infty}\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r\\
&=\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

另解：

对电势分布也可直接用电势叠加原理求解，具体解法如下：若求空间任意一点 P 的电势，设 P 点距离球心为 r ，则以半径为 r 的球面为界面，将电荷分为内、外两部分．内部电荷在场点 P 产生的电势就如同内部电荷全部集中在球心处的点电荷在 P 点产生的电势；而外部电荷可以视为由许多极薄的带电同心球壳叠加而成，每一个薄球壳在 P 点产生的电势就是此带电薄球壳单独存在时其本身的电势．所以

当 $r \ge R_3$ 时

$$u = u_{内} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$$

当 $R_2 \le r \le R_3$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = 0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0 R_3}$$

当 $R_1 \le r \le R_2$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

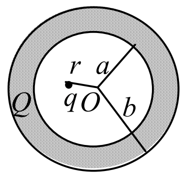
$$= \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

当 $0 \le r \le R_1$ 时

$$u = u_{内} + u_{外} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r} + \int_r^{R_1} \frac{\rho \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'}{4\pi\varepsilon_0 r'} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$= \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\ \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}$$

*14. 如图所示，一内半径为 A、外半径为 B 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q。设无限远处为电势零点，试求：

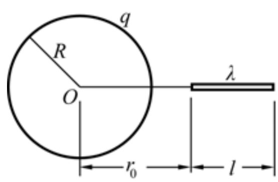


(1) 球壳内外表面上的电荷。

(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。

(3) 球心 O 点处的总电势。

*15. 如图所示，半径为 R 的均匀带电球面，带有电荷 q．沿某一半径方向上有一均匀带电细线，电荷线密度为 λ，长度为 l，细线左端离球心距离为 r_0．设球和线上的电荷分布不受相互作用影响，试求细线所受球面电荷的电场力和细线在该电场中的电势能(设无穷远处的电势为零)．

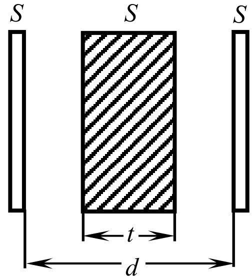


16. 一空气平行板电容器，两极板面积均为 S，板间距离为 d（d 远小于极板线度），在

两极板间平行地插入一面积也是 S，厚度为 t (t<d)的金属片，如图所示。试求:

(1) 电容 C 的值;

(2) 金属片放在两极板间的位置对电容值有无影响？



解：设极板上分别带电荷$+q$ 和$-q$；金属片与 A 板距离为 d_1，与 B 板距离为 d_2；金属片与 A 板间场强为$E_1=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$

金属板与 B 板间场强为 $E_2=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$

金属片内部场强为 $E'=0$

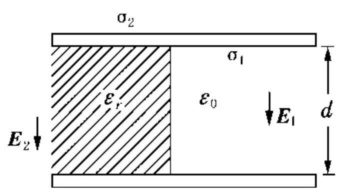
则两极板间的电势差为

$$U_A-U_B=\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}=E_1 d_1+E_2 d_2=\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d_1+d_2)=\frac{q}{\varepsilon_0 S}(d-t)$$

由此得$C=\frac{q}{U_A-U_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$

因 C 值仅与 d、t 有关，与 d_1、d_2 无关，故金属片的安放位置对电容值无影响。

17. 如图所示，在平行板电容器的一半容积内充入相对介电常数为 ε_r 的电介质．试求：在有电介质部分和无电介质部分极板上自由电荷面密度的比值．



解: 如图所示，充满电介质部分场强为$\vec{E}_2$，真空部分场强为$\vec{E}_1$，自由电荷面密度分别为σ_2与σ_1，由

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum q_0$$

得

$$D_1 = \sigma_1，\ D_2 = \sigma_2$$

而

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1, D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2$$

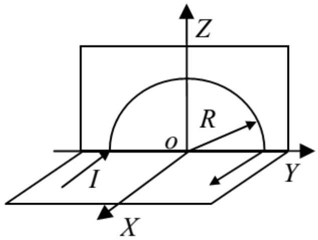
于是

$$E_1 = E_2 = \frac{U}{d}$$

$$\therefore \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{D_2}{D_1} = \varepsilon_r$$

第十一章 静磁场

1. 如图所示的载流导线，图中半圆的半径为 R，直线部分伸向无限远处。求圆心 O 处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。



解：在直线磁场公式

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

中，令$\theta_1=0$、$\theta_2=\pi/2$，或者$\theta_1=\pi/2$、$\theta_2=\pi$，就得半无限长导线在端点半径为 R 的圆周上产生的磁感应强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$

两无限长半直线在 O 点产生的磁场方向都向着 Z 方向，大小为$B_z=\mu_0 I/2\pi R$

半圆在 O 处产生的磁场方向沿着 X 方向，大小为 $B_x=\mu_0 I/4R$

O 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B}=-B_x\mathbf{i}-B_z\mathbf{k}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\mathbf{i}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathbf{k}$$

场强大小为

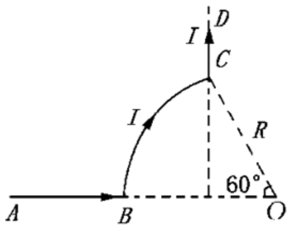
$$B=\sqrt{B_x^2+B_z^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\sqrt{4+\pi^2}$$

与 X 轴的夹角为

$$\theta=\arctan\frac{B_z}{B_x}=\arctan\frac{2}{\pi}$$

2. 如图所示，AB、CD为长直导线，$\hat{BC}$为圆心在O点的一段圆弧形导线，其半径为R. 若

通以电流I，求O点的磁感应强度。



解：O点磁场由AB、$\hat{B}C$、CD三部分电流产生．其中

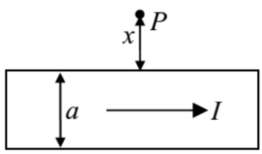
AB 产生$\vec{B}_1 = 0$

$\hat{B}C$ 产生$B_2 = \frac{\mu_0 I}{12R}$，方向垂直向里

CD 段产生 $B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\frac{R}{2}}(sin\,90^\circ - sin\,60^\circ) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$，方向⊥向里

$\therefore B_0 = B_1 + B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6})$，方向⊥向里．

3. 如图所示，宽度为 a 的薄长金属板中通有电流 I，电流沿薄板宽度方向均匀分布。求在薄板所在平面内距板的边缘为 x 的 P 点处的磁感应强度。



解：电流分布在薄板的表面上，单位长度上电流密度，即面电流的线密度为$\delta = I/a$，

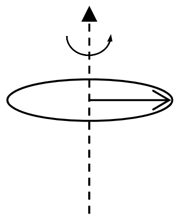
以板的下边缘为原点，在薄板上取一宽度为 $\mathrm{d}l$ 的通电导线，电流强度为$\mathrm{d}I = \delta \mathrm{d}l$。在 P 点产生磁感应强度为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \delta \mathrm{d}l}{2\pi(x+a-l)}$$

磁场方向垂直纸面向外。由于每根电流产生的磁场方向相同，总磁场为

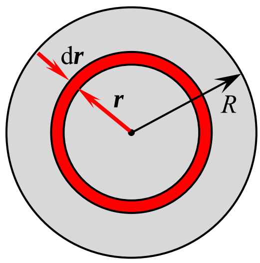
$$B = \int_0^a \frac{\mu_0 \delta \mathrm{d}l}{2\pi(x+a-l)} = -\frac{\mu_0 \delta}{2\pi}\ln(x+a-l)\Bigg|_{l=0}^{a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln(1+\frac{a}{x})$$

4．一个圆盘半径为 R，电荷 q 均匀分布于表面，圆盘绕通过圆心垂直盘面的轴转动，角速度为ω。求圆盘中心处的磁感应强度。



解：在圆盘上取半径为 r、宽度为 dr 的同心圆环，其带电量为

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr$$



圆环上的电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr$$

dI 在圆心处激发的磁感强度大小为

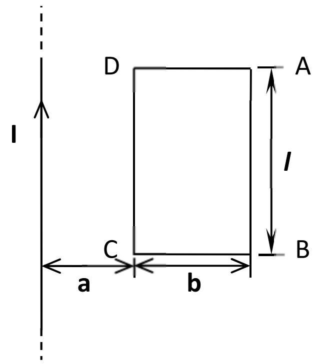
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0}{2r} \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

圆盘中心处的磁感强度大小

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

方向垂直于纸面。

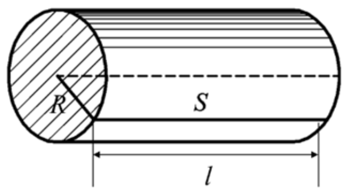
5．如图所示，载流长直导线中的电流为 I，求穿过矩形回路的磁通量。



解：$B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$，$d\varphi_m=B_x dS=B_x l dx=\frac{\mu_0 Il}{2\pi x}dx$，

$$\varphi_m=\int d\varphi_m=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 Il}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}ln\frac{a+b}{a}$$

6．一无限长直圆柱状导体，半径为 R，其中通有电流 I，并且在其横截面上电流密度均匀分布。(1) 求导体内、外磁感应强度的分布。(2) 在导体内部作一长度为 l 的平面S，如图所示，试计算通过平面的磁通量。



解：(1) 圆柱体轴对称，以轴上一点为圆心取垂直轴的平面内半径为 r 的圆为安培环路

$$\because \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=2\pi rB=\mu_0\sum I$$

当$r\geq R$　　$\sum I$=I

$$\therefore B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当$r\leq R$　　$\sum I$=$\frac{Ir^2}{R^2}$

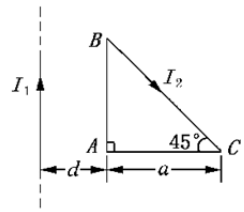
$$\therefore \oint_r \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\frac{Ir^2}{R^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

(2) 磁通量

$$\Phi_m=\int_{(s)}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_0^R\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}l\,dr=\frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$

7. 如图所示，长直电流I_1附近有一等腰直角三角形线框，通以电流I_2，二者共面．求△ABC的各边所受的磁力。



解：

$$\vec{F}_{AB}=\int_B^A I_2 d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$F_{AB}=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}$$

方向垂直AB向左

$$\vec{F}_{AC}=\int_A^C I_2 d\vec{l}\times\vec{B}$$

方向垂直AC向下，大小为

$$F_{AC}=\int_d^{d+a}I_2 dr\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}ln\frac{d+a}{d}$$

同理$\vec{F}_{BC}$方向垂直BC向上，大小

$$F_{Bc}=\int_d^{d+a}I_2 dl\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\because dl=\frac{dr}{cos\,45^\circ}$$

$$\therefore F_{BC}=\int_a^{d+a}\frac{\mu_0 I_2 I_1 dr}{2\pi r\,cos\,45^\circ}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{2}\pi}ln\frac{d+a}{d}$$

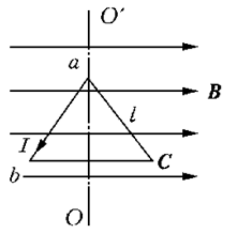
8. 边长为l=0.1m的正三角形线圈放在磁感应强度B=1T的均匀磁场中，线圈平面与磁场

方向平行.如图所示，使线圈通以电流I=10A，求：

(1) 线圈每边所受的安培力；

(2) 对OO'轴的磁力矩大小；

(3) 从所在位置转到线圈平面与磁场垂直时磁力所作的功。



解：(1)$\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$

$\vec{F}_{bc} = I\vec{l} \times \vec{B} = 0$方向⊥纸面向外，大小为

$$F_{ab} = IlB\sin 120^\circ = 0.866\ \ N$$

$\vec{F}_{ca} = I\vec{l} \times \vec{B}$方向⊥纸面向里，大小

$$F_{ca} = IlB\sin 120^\circ = 0.866\ \ N$$

(2) $P_m = IS$

$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$　沿$\overrightarrow{OO'}$方向，大小为

$$M = ISB = I\frac{\sqrt{3}l^2}{4}B = 4.33 \times 10^{-2}\quad N \cdot m$$

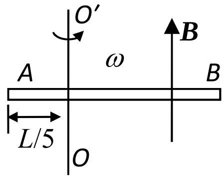
(3) 磁力功$A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$

$$\because \Phi_1 = 0 \quad \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2B$$

$$\therefore A = I\frac{\sqrt{3}}{4}l^2B = 4.33 \times 10^{-2}J$$

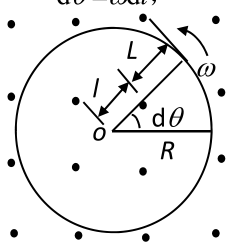
第十二章 电磁感应

1．一条铜棒长为 L，水平放置，可绕距离 A 端为 $L/5$ 处和棒垂直的轴 OO'在水平面内旋转，每秒转动一周。铜棒置于竖直向上的匀强磁场中，如图所示，磁感应强度 B。求铜棒两端 A、B 的电势差，何端电势高。



解：设想一个半径为 R 的金属棒绕一端做匀速圆周运动，角速度为ω，经过时间 dt 后转过的角度为

$d\theta = \omega dt$，



扫过的面积为 $dS=R^2 d\theta/2$，

切割的磁通量为 $d\Phi=BdS=BR^2 d\theta/2$，

电动势的大小为$\varepsilon=d\Phi/dt=\omega BR^2/2$。

根据右手螺旋法则，圆周上端点的电势高。

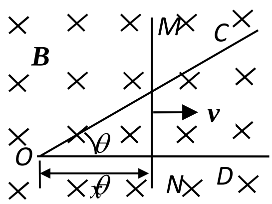
AO 和 BO 段的动生电动势大小分别为

$$\varepsilon_{AO}=\frac{\omega B}{2}\left(\frac{L}{5}\right)^2=\frac{\omega BL^2}{50}，\quad \varepsilon_{BO}=\frac{\omega B}{2}\left(\frac{4L}{5}\right)^2=\frac{16\omega BL^2}{50}。$$

由于 $BO > AO$，所以 B 端的电势比 A 端更高，A 和 B 端的电势差为

$$\varepsilon=\varepsilon_{BO}-\varepsilon_{AO}=\frac{3\omega BL^2}{10}。$$

2．如图，有一弯成θ角的金属架 COD 放在磁场中，磁感应强度 B 的方向垂直于金属架 COD 所在平面，一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度 v 向右滑动，v 与 MN 垂直，设 $t=0$ 时，$x=0$，求下列两情形，框架内的感应电动势ε_i。（1）磁场分布均匀，且 B 不随时间改变；（2）非均匀的交变磁场 $B=Kx\cos\omega t$。



解：（1）经过时间 t，导体杆前进的距离为 $x = vt$，杆的有效长度为 $l=\tan\theta=(\tan\theta)t$，电动势由 N 指向 M，M 点电势高，大小为$\varepsilon_i=Blv=Bv^2(\tan\theta)t$。

（2）取顺时针为回路绕向的正方向，则通过该面的磁通量为

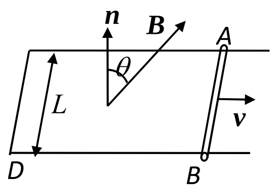
$$\Phi=\int_0^x Kx^2\tan\theta\cos\omega t dx=\frac{Kx^3\cos\omega t\tan\theta}{3}$$

感应电动势为

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{Kx^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3}-Kx^2v\cos\omega t\tan\theta$$

$$=\frac{Kv^3t^3\omega\sin\omega t\tan\theta}{3}-Kv^3t^2\cos\omega t\tan\theta$$

3．如图所示，匀强磁场 B 与矩形导线回路的法线 n 成θ =60°角，$B=kt$（k 为大于零的常数）。长为 L 的导体杆 AB 以匀速 v 向右平动，求回路中 t 时刻的感应电动势的大小和方向（设 $t = 0$ 时，$x = 0$）。



解：经过时间 t，导体杆运动的距离为 $x=vt$，

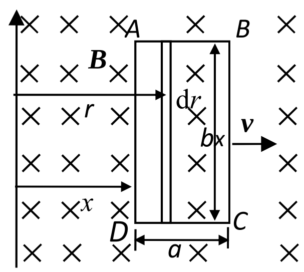
扫过的面积为 $S=Lx=Lvt$，

通过此面积的磁通量为 $\Phi=\mathrm{BS}=BS\cos\theta=Lvkt^2/2$。

感应电动势的大小为 $\varepsilon=\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t=Lvkt$。

由于回路中磁通量在增加，而感应电流的磁通量阻碍原磁通量增加，其磁场与原磁场的方向相反，所以感应电动势的方向是顺时针的。

4．长为 b，宽为 a 的矩形线圈 $ABCD$ 与无限长直截流导线共面，且线圈的长边平行于长直导线，线圈以速度 v 向右平动，t 时刻 AD 边距离长直导线为 x；且长直导线中的电流按 $I=I_0\cos\omega t$ 规律随时间变化，如图所示。求回路中的电动势ε。



解：电流 I 在 r 处产生的磁感应强度为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$，

穿过面积元 dS=bdr 的磁通量为 $$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi r}\mathrm{d}r,$$

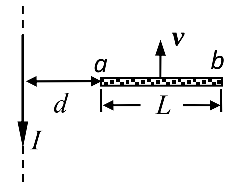
穿过矩形线圈 $ABCD$ 的磁通量为 $$\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_x^{x+a}\frac{1}{r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln(\frac{x+a}{x}),$$

回路中的电动势为

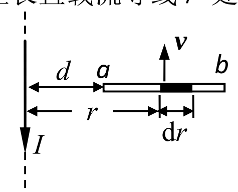
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi}[\ln(\frac{x+a}{x})\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + I(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]$$
$$= \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}[\omega\ln(\frac{x+a}{x})\sin\omega t + \frac{av\cos\omega t}{x(x+a)}]。$$

显然，第一项是由于磁场变化产生的感生电动势，第二项是由于线圈运动产生的动生电动势。

5．如图，导线 ab 以速率 v 沿平行于长直载流导线的方向运动，ab 与直导线共面，且与它垂直。导线中电流强度为 I，ab 长 L，a 端到直导线的距离为 d，求导线 ab 中的动生电动势，并判断哪端电势较高。



解：在导线 ab 所在直线上距长直载流导线 r 处取一线元 dr，方向向右。

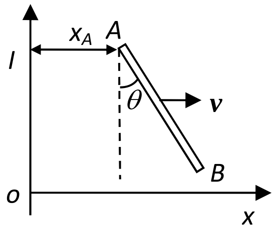


$$\mathrm{d}\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r,$$

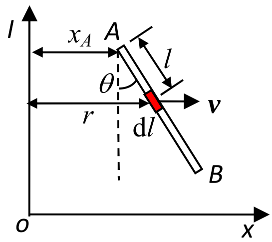
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}\varepsilon = \int_d^{d+L}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{d+L}{d}$$

ε_{ab}>0，电动势的方向由 a 指向 b，b 端电势较高。

6．如图所示，一长直载流导线电流强度为 I，铜棒 AB 长为 L，A 端与直导线的距离为 x_A，AB 与直导线的夹角为θ，以水平速度 v 向右运动。铜棒与载流直导线共面，求 AB 棒的电动势为多少，何端电势高？



解：在棒上长为 l 处取一线元 $\mathrm{d}l$，在垂直于速度方向上的长度为 $\mathrm{d}l_\perp=\mathrm{d}l\cos\theta$；线元到直线之间的距离为 $r=x_A+l\sin\theta$，



直线电流在线元处产生的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x_A+l\sin\theta)}\text{。}$$

由于 B，v 和 $\mathrm{d}l_\perp$ 相互垂直，线元上动生电动势的大小为

$$\mathrm{d}\varepsilon=Bv\mathrm{d}l_\perp=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta\mathrm{d}l}{2\pi(x_A+l\sin\theta)},$$

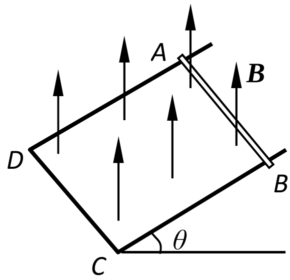
棒的动生电动势为

$$\varepsilon=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta}{2\pi}\int_0^L\frac{\mathrm{d}l}{x_A+l\sin\theta}=\frac{\mu_0 Iv\cos\theta}{2\pi\sin\theta}\int_0^L\frac{\mathrm{d}(x_A+l\sin\theta)}{x_A+l\sin\theta}$$

$$=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\cot\theta\ln\frac{x_A+L\sin\theta}{x_A},$$

A 端的电势高。

7．如图所示，质量为 m，长为 l，电阻为 R 的金属棒 AB 放置在一个倾斜的光滑 U 形框架上，并由静止下滑，磁场 $\mathbf{B}$ 垂直向上。求：（1）U 形框架为绝缘时，AB 棒内的动生电动势与时间的函数关系；（2）U 形框架为导体时（不计电阻），AB 棒下滑速度随时间的变化关系，最大速度为多少？



解：（1）$\varepsilon_i=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{BA}=vB\sin\alpha\cdot l=vBl\cos\theta$

$\because$ 在斜面上，$mg\sin\theta=ma$，$\therefore a=g\sin\theta$

$$v=at=gt\sin\theta,\quad \therefore \varepsilon_i=gt\sin\theta\cdot Bl\cos\theta=\frac{1}{2}Bglt\sin 2\theta$$

（2）此时，在 BADC 回路中产生感应电流，所以 AB 还受安培力作用，大小为

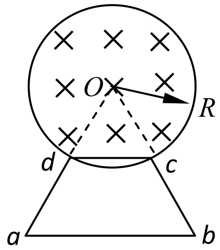
$$F_i=BlI=Bl\frac{\varepsilon_i}{R}=\frac{B^2l^2}{R}v\cos\theta$$，方向水平向右。

沿斜面，$$mg\sin\theta-F_i\cos\theta=ma=m\frac{dv}{dt}$$，

即 $$mg\sin\theta-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{R}v=m\frac{dv}{dt}$$

解得 $$v_{\max}=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}\left(1-e^{-\frac{B^2l^2\cos^2\theta}{mR}t}\right)$$，$$v_{\max}=\frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}$$。

8．在半径为 R 的细长螺线管内有 $\frac{dB}{dt}>0$ 的均匀磁场，一等腰梯形金属框 $abcd$ 如图放置。已知，ab＝$2R$，cd＝R，求：（1）各边产生的感生电动势；（2）线框的总电动势。



解：（1）径向上的电动势为零，即 $\varepsilon_{ad}=\varepsilon_{cd}=0$，在 ΔOdc 中，以 dc 为底，设 h_1 为高

$$\Phi_1=\frac{1}{2}Rh_1\cdot B=\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot B=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2B$$

$$\therefore\ \varepsilon_1=\varepsilon_{cd}=\left|\frac{d\Phi_1}{dt}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{dB}{dt}$$ 方向 $d\to c$

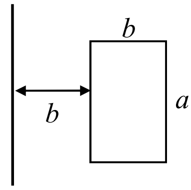
在 ΔOab 中，$\Phi_2=\dfrac{1}{6}\pi R^2\cdot B$，

$$\therefore\ \varepsilon_2=\varepsilon_{ab}=\left|\frac{d\Phi_2}{dt}\right|=\frac{\pi R^2}{6}\frac{dB}{dt}$$ 方向 $a\to b$

（2）线框总电动势

$$\varepsilon_i=\varepsilon_2-\varepsilon_1=(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2\frac{dB}{dt}$$

9．如图，边长分别为 a、b 的矩形线圈，放在一无限长导线的旁边且二者共面。求：线圈与长直导线间的互感。

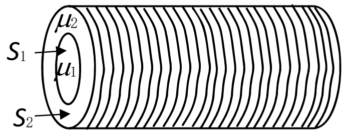


解：设长直电流为 I，它产生的磁场通过矩形线圈的磁通为

$$\boldsymbol{\Phi}_{12}=\int_{(S)}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0Ia}{2\pi}\int_b^{2b}\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{\mu_0Ia}{2\pi}\ln 2$$

$$M=\frac{\boldsymbol{\Phi}_{12}}{I}=\frac{\mu_0a}{2\pi}\ln 2\ \text{(H)}$$

10．管长 l，匝数 N 的螺线管，管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面面积分别为 S_1 和 S_2，磁导率分别为μ_1 和μ_2，如图所示。求该螺线管的自感系数。



解：设通电流 I，则两介质中的磁场分别为 $B_1=\mu_1\dfrac{N}{l}I$，$B_2=\mu_2\dfrac{N}{l}I$

$$\therefore \Phi_1=B_1S_1=\frac{\mu_1 NI}{l}S_1,\quad \Phi_2=B_2S_2=\frac{\mu_2 NI}{l}S_2$$

$$\Psi=N(\Phi_1+\Phi_2)=\frac{N^2I}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2),\quad \therefore L=\frac{\Psi}{I}=\frac{N^2}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2)$$