Blatt 3

Donnerstag, 19. November 2020 17:16

Felix Lehmann, Jan Manhillen, Leo Kyster Oerter

Aufgabe 1 Scharr-Operator

Es gibt alternative Operatoren zum Sobel-Operator. So zeigt der Scharr-Operator eine etwas bessere Rotationssymmetrie. Der 3×3-Scharr-Operator zeigt die beiden folgenden Filter für die horizontale und vertikale Gradientenapproximation:

47	0	−47
162	0	−162
47	0	−47

47	162	47
0	0	0
−47	−162	−47

Völlig analog zur Anwendung des Sobel-Operators wenden Sie diesen Scharr-Operator auf die zentralen neun Pixel (kursiv gekennzeichnet) im folg. 5×5-Grauwertbild **I** wie folgt an:

0	0	0	100	100
0	*100*	*100*	*100*	100
0	*100*	*100*	*100*	0
100	*100*	*100*	*100*	0
100	100	0	0	0

A. Berechnen Sie durch Korrelation $\oplus$ die Approximationen der horizontalen Gradienten der zentralen neun Pixel. (0,5 P)

Formel Korrelation:

$(f \oplus g)(x,y) = \sum_u \sum_v f(u,v) \cdot g(x+u,y+v)$ mit $u,v = -(m-1)/2,\dots,(m-1)/2.$

M = 3 => u,v: -1, 0, 1

$$(f \oplus g)(x,y) = 47 * I(x-1,y-1) + 162 * I(x-1,y) + 47 * I(x-1,y+1)$$
$$+0 * I(x,y-1) + 0 * I(x,y) + 0 * I(x,y+1)$$
$$-47 * I(x+1,y-1) - 162 * I(x+1,y) - 47 * I(x+1,y+1)$$

Rechnungen für die erste Spalte (Berechnung der weiteren Pixel analog):

$$(f \oplus g)(-1,-1) = 47 * I(-2,-2) + 162 * I(-2,-1) + 47 * I(-2,0)$$
$$-47 * I(0,-2) - 162 * I(0,-1) - 47 * I(0,0)$$
$$= 47 * 100 + 162 * 100 + 47 * 0 - 47 * 0 - 162 * 100 - 47 * 100 = 0$$

$$(f \oplus g)(-1,0) = 47 * I(-2,-1) + 162 * I(-2,0) + 47 * I(-2,1)$$
$$-47 * I(0,-1) - 162 * I(0,0) - 47 * I(0,1)$$
$$= 47 * 100 + 162 * 0 + 47 * 0 - 47 * 100 - 162 * 100 - 47 * 100 = -20.900$$

$$(f \oplus g)(-1,1) = 47 * I(-2,0) + 162 * I(-2,1) + 47 * I(-2,2)$$
$$-47 * I(0,0) - 162 * I(0,1) - 47 * I(0,2)$$
$$= 47 * 0 + 162 * 0 + 47 * 0 - 47 * 100 - 162 * 100 - 47 * 0 = -20.900$$

Approximationen:

-20.900	-4.700	0
-20.900	0	20.900
0	4.700	20.900

B. Berechnen Sie durch Korrelation $\oplus$ die Approximationen der vertikalen Gradienten der zentralen neun Pixel. (0,5 P)

$$(f \oplus g)(x, y) = -47 * I(x-1, y-1) + 0 * I(x-1, y) + 47 * I(x-1, y+1)$$
$$-162 * I(x, y-1) + 0 * I(x, y) + 162 * I(x, y+1)$$
$$-47 * I(x+1, y-1) + 0 * I(x+1, y) + 47 * I(x+1, y+1)$$

Rechnungen für die erste Spalte (Berechnung der weiteren Pixel analog):

$$(f \oplus g)(-1, -1) = -47 * I(-2, -2) + 47 * I(-2, 0)$$
$$-162 * I(-1, -2) + 162 * I(-1, 0)$$
$$-47 * I(0, -2) + 47 * I(0, 0)$$
$$= -47 * 100 + 47 * 0 - 162 * 100 + 162 * 100 - 47 * 0 + 47 * 100 = 0$$

$$(f \oplus g)(-1, 0) = -47 * I(-2, -1) + 47 * I(-2, 1)$$
$$-162 * I(-1, -1) + 162 * I(-1, 1)$$
$$-47 * I(0, -1) + 47 * I(0, 1)$$
$$= -47 * 100 + 47 * 0 - 162 * 100 + 162 * 100 - 47 * 100 + 47 * 100 = -4.700$$

$$(f \oplus g)(-1, 1) = -47 * I(-2, 0) + 47 * I(-2, 2)$$
$$-162 * I(-1, 0) + 162 * I(-1, 2)$$
$$-47 * I(0, 0) + 47 * I(0, 2)$$
$$= -47 * 0 + 47 * 0 - 162 * 100 + 162 * 0 - 47 * 100 + 47 * 0 = -20.900$$

Approximationen:

-20.900	-20.900	0
-4.700	0	4700
0	20.900	20.900

C. Berechnen Sie die Gradientenbeträge der zentralen neun Pixel. (0,5 P)

Formel:

$$S \approx \sqrt{S_x(x, y)^2 + S_y(x, y)^2}$$

Rechnungen für die erste Spalte (Berechnung der weiteren Beträge analog):

$$S \approx \sqrt{S_x(-1, -1)^2 + S_y(-1, -1)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

$$S \approx \sqrt{S_x(-1, 0)^2 + S_y(-1, 0)^2} = \sqrt{(-20.900)^2 + (-4.700)^2} \approx 21.421,95$$

$$S \approx \sqrt{S_x(-1, 1)^2 + S_y(-1, 1)^2} = \sqrt{(-20.900)^2 + (-20.900)^2} \approx 29.557,06$$

Gradientenbeträge:

29.557,06	21.421,95	0
21.421,95	0	21.421,95
0	21.421,95	29.557,06

D. Berechnen Sie die Gradientenorientierungen der zentr. neun Pixel. (0,5 P)

Formel:

$$\Theta \approx \begin{cases} \arctan\left(S_y(x,y)/S_x(x,y)\right) & \text{für } S_x(x,y) \neq 0, \\ 90° & \text{für } S_x(x,y) = 0,\ S_y(x,y) \neq 0. \end{cases}$$

Rechungen für die erste Spalte (Berechnungen der weiteren Orientierungen analog):

Θ nicht definiert für $S_x(x,y) = S_y(x,y) = 0$

$$\Theta \approx \arctan(S_y(-1,0)/S_x(-1,0)) = \arctan((-20.900)/(-4.700)) = 12.67°$$

$$\Theta \approx \arctan(S_y(-1,1)/S_x(-1,1)) = \arctan((-20.900)/(-20900)) = 45°$$

Gradientenorientierungen:

45°	77.33°	---
12.67°	---	12.67°
---	77.33°	45°

Aufgabe 3 Laplace-Operator

Für eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion f ist $\nabla^2 f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Berechnen Sie $\nabla^2 f$ für

A. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\nabla^2 f = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = 2 + 2 + 2 = 6$$

B. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3$

$$\nabla^2 f = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = 2x_2^2 * x_3 + 2x_1^2 * x_3$$