

# Blatt 4

Dienstag, 24. November 2020 16:16

Felix Lehmann, Jan Manhillen, Leo Kyster Oerter

## Aufgabe 4 Tensorberechnung für anisotropes inhomogenes Diffusionsfilter

Gegeben sei der folgende  $5 \times 5$ -Grauwertbildausschnitt:

10	10	10	10	20
10	10	10	20	20
10	10	20	20	20
10	20	20	20	20
20	20	20	20	20

Der Diffusionstensor wird durch Eigenwertzerlegung ermittelt (Folien 32 ff.)

- A. Berechnen Sie mit expliziter Herleitung die beiden Eigenvektoren und Eigenwerte für die Anwendung des Diffusionstensors im zentralen Pixel des obigen Ausschnitts. Die Intensitätsgradienten in  $x$ - und  $y$ -Richtung sind dabei durch Differenzen der Intensitäten zu approximieren:  $I(x+1,y) - I(x-1,y)$  bzw.  $I(x,y+1) - I(x,y-1)$ . (1,0 P)

Laut Aufgabenstellung:  $\lambda, \epsilon_0 = 1$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial I(2,2)}{\partial x} = I(3,2) - I(1,2) = 20 - 10 = 10$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial I(2,2)}{\partial y} = I(2,3) - I(2,1) = 10 - 20 = -10$$

$$\text{Also: } \nabla u = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(e_{1,1} \quad e_{1,2}) = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \frac{(10, -10)}{\|(10, -10)\|} = \frac{(10, -10)}{\sqrt{10^2 + (-10)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(e_{2,1} \quad e_{2,2}) = (e_{1,2} \quad -e_{1,1}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda_2 = 1$  (Laut Folie 34)

$$\lambda_1 = \epsilon_0 \frac{\lambda^2}{\|\nabla u\|^2 + \lambda^2} = 1 * \frac{1}{(\sqrt{10^2 + (-10)^2})^2 + 1} = \frac{1}{200 + 1} = \frac{1}{201}$$

B. Berechnen mit expliziter Herleitung den resultierenden Diffusionstensor für die Anwendung im zentralen Pixel des obigen Ausschnitts. Setzen Sie dabei der Einfachheit halber  $\epsilon_0 = 1$  und  $\lambda = 1$ . (0,5 P)

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{2,1} \\ e_{1,2} & e_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ e_{2,1} & e_{2,2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{201\sqrt{2}} & -\frac{1}{201\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{101}{201} & \frac{100}{201} \\ \frac{100}{201} & \frac{101}{201} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

C. Begründen Sie, warum der resultierende Diffusionstensor positiv definit ist. (0,5P)

Alle Eigenwerte haben Werte echt größer als Null.