Blatt 4

Dienstag, 24. November 2020 16:16

1	2	3	4
1	2	5	2

Schön :)

Felix Lehmann, Jan Manhillen, Leo Kyster Oerter

Aufgabe 4 Tensorberechnung für anisotropes inhomogenes Diffusionsfilter

Gegeben sei der folgende 5×5-Grauwertbildausschnitt:

10	10	10	10	20
10	10	10	20	20
10	10	**20**	20	20
10	20	20	20	20
20	20	20	20	20

Der Diffusionstensor wird durch Eigenwertzerlegung ermittelt (Folien 32 ff.)

A. Berechnen Sie mit expliziter Herleitung die beiden Eigenvektoren und Eigenwerte für die Anwendung des Diffusionstensors im zentralen Pixel des obigen Ausschnitts. Die Intensitätsgradienten in x- und y-Richtung sind dabei durch Differenzen der Intensitäten zu approximieren: I(x+1,y) - I(x-1,y) bzw. I(x,y+1) - I(x,y-1). (1,0 P)

$$\text{Laut Aufgabenstellung: } \lambda, \epsilon_0 = 1$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial I(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial I(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial I(2,2)}{\partial x} = I(3,2) - I(1,2) = 20 - 10 = 10$$

$$\frac{\partial I(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial I(2,2)}{\partial y} = I(2,3) - I(2,1) = 10 - 20 = -10$$

$$\text{Also: } \nabla u = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(e_{1,1} \quad e_{1,2}) = \frac{\nabla u}{||\nabla u||} = \frac{(10,-10)}{||(10,-10)||} = \frac{(10,-10)}{\sqrt{10^2 + (-10)^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$(e_{2,1} \quad e_{2,2}) = (e_{1,2} \quad -e_{1,1}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\lambda_2 = 1 \text{ (Laut Folie 34)}$$

$$\lambda_1 = \epsilon_0 \frac{\lambda^2}{||\nabla u||^2 + \lambda^2} = 1 * \frac{1}{(\sqrt{10^2 + (-10)^2})^2 + 1} = \frac{1}{200 + 1} = \frac{1}{201}$$

B. Berechnen mit expliziter Herleitung den resultierenden Diffusionstensor für die Anwendung im zentralen Pixel des obigen Ausschnitts. Setzen Sie dabei der Einfachheit halber $\epsilon_0 = 1$ und $\lambda = 1$. (0,5 P)

$$D = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{2,1} \\ e_{1,2} & e_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} \\ e_{2,1} & e_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{201} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{201\sqrt{2}} & -\frac{1}{201\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{101}{201} & \frac{100}{201} \\ \frac{100}{201} & \frac{101}{201} \end{pmatrix}$$

C. Begründen Sie, warum der resultierende Diffusionstensor positiv definit ist.(0,5P)

Alle Eigenwerte haben Werte echt größer als Null.