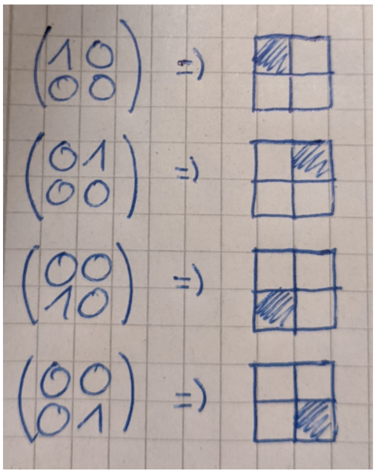
Blatt 7

15 December 2020 15:53

Felix Lehmann, Jan Manhillen, Leo Kyster Oerter

Aufgabe 1 Ortsbasis

Bitte geben Sie eine Ortsbasis für 2×2 Bilder nach Vorlesung 7, Folie 6 an.



Aufgabe 2 Korrespondierende Kosinus-Funktionen

Beweisen Sie die Aussage von Vorlesung 7, Folie 23:
Für zwei an N Orten abgetastete Funktionen $\cos(u_1\ n)$ und $\cos(u_2\ n)$ mit $\frac{u_1}{u_0} = N - \frac{u_2}{u_0}$, gilt: $\cos(u_1\ n) = \cos(u_2\ n)$ für alle $n = 0, \dots, N-1$.

Es sei $u_0 = \frac{2\pi}{N}$ mit $\frac{u_1}{u_0} = N - \frac{u_2}{u_0}$ nach den Folien und der Aufgabenstellung.

$$\frac{u_1}{u_0} = N - \frac{u_2}{u_0} \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_0}u_0 = Nu_0 - u_2 \Leftrightarrow u_1 = Nu_0 - u_2 \Leftrightarrow u_1 + u_2 = Nu_0$$

Einsetzen von $u_0 = \frac{2\pi}{N}$:

$$N\frac{2\pi}{N} = u_1 + u_2 \Leftrightarrow 2\pi = u_1 + u_2 \Leftrightarrow 2\pi - u_2 = u_1$$

$$\Rightarrow cos(u_1 * n) = cos((2\pi - u_2) * n) = cos(2n\pi - u_2 n)$$

$2n$ ist immer gerade, $2n\pi$ kann also wegen Periodizität weggekürzt werden

$$\Rightarrow cos(2n\pi - u_2 n) \quad = \quad cos(-u_2 n) = cos(u_2 n)$$

Aufgabe 4 Fourier-Transformation

Beantworten Sie folgende Fragen zur Fourier-Transformation und begründen Sie Ihre Antworten:

1. Wie würde sich das rücktransformierte Bild ändern, wenn alle Amplituden im Frequenzraum verdoppelt würden?

$$\text{Amplitude verdoppeln: } F'(u,v) = 2F(u,v); e^{ix} = 2e^{ix}$$

$$\Rightarrow f'(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} 2F(u,v)*e^{i2\pi(\dots)} = 2*\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)*e^{i2\pi(\dots)}$$

Der Teil hinter der ersten 2 ist gleich $f(m,n)$

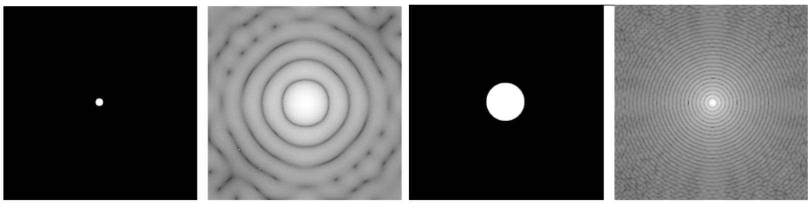
$$\Rightarrow 2*\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)*e^{i2\pi(\dots)} = 2f(m,n)$$

$\Rightarrow$ Die Intensitäten im Ursprungsbild werden verdoppelt

2. Wie sieht die Frequenzraumpräsentation eines um 90° rotierten Bildes im Vergleich zum nicht rotierten Bild aus?

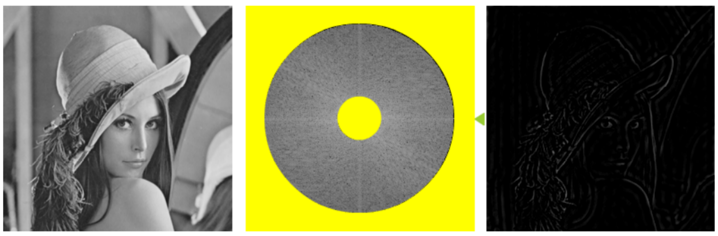
Die Frequenzraumpräsentation dreht sich ebenfalls um 90°.

3. Erklären und begründen Sie die Unterschiede in den Frequenzbildern vom kleinen bzw. großen Kreis:



Der kleine Kreis hat weniger scharfe Kanten als der große Kreis. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Repräsentation von scharfen Kanten sehr viele hohe Frequenzanteile benötigt, also haben wir im Frequenzbild des großen Kreises mehr hohe Frequenzanteile als im Frequenzbild des kleinen Kreises.

4. Erklären und begründen Sie das Ergebnis der dargestellten die Fourier-Transformation inklusive Bandpassfilterung anhand des Frequenzbildes mit Originalbild, Filterbild und Rücktransformation.



Bandpass: Kombination von Tiefpass und Hochpass, lässt also die "mittleren" Frequenzen (der graue Bereich des mittleren Bildes) passieren und reduziert oder eliminiert sehr niedrige und sehr hohe Frequenzen (die gelben Teile des mittleren Bildes).

Einerseits sorgt der Tiefpassfilter dafür, dass das Bild etwas verschmiert wirkt. Tiefpassfilter sind glättend, wodurch die Kanteninformationen des Bildes abgeschwächt werden und das Bild verschmiert wird.
Andererseits sorgt der Hochpassfilter dafür, dass Konturen und damit auch die Kanteninformationen hervorgehoben werden.

Unser Ergebnisbild zeigt uns also die **Kanten des Originalbildes** (dank des Hochpass-Teils der Bandpassfilterung), diese sind allerdings **etwas verschmiert** (dank des Tiefpass-Teils der Bandpassfilterung).