Prof. Dr. Reinhard Klein
Elena Trunz

Universität Bonn
Institut für Informatik II
22.11.2019

Wintersemester 2020/2021

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 7

Die Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1,2 und 3 erfolgt als pdf-Datei und zur Aufgabe 4 als .py-Dateien bis Freitag, den 29.11.2019, 10:15 über die eCampus-Seite der entprechenden Übungspruppe.

Aufgabe 1 (Projektoren, *4 Punkte*)

Sei $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^m$ ein System orthonormaler Vektoren. Sei $I \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Einheitsmatrix und sei

$$P := I - \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot v_i^* \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Zeige $P^* = P$, $P^2 = P$, bestimme den Kern und das Bild von P und gib den Rang von P an.

Bemerkung: Wenn $P^* = P$ und $P^2 = P$ gilt, ist P laut Vorlesung ein orthogonaler Projektor.

Aufgabe 2 (Spiegelungs- und Rotationsmatrizen, *2+2=4 Punkte*)

Gib jeweils die Matrizen im 3D für eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung mit der Normalen $\mathbf{n}$ und die Rotation um die X-Achse um den Winkel α an. Leite diese Matrizen her, indem du jeweils die Bilder der Vektoren der kanonischen Einheitsbasis berechnest und aus diesen die Matrizen aufstellst. Zeige, dass die Matrizen beide orthogonal sind und berechne die Determinante für die Rotationsmatrix.

Aufgabe 3 (QR-Zerlegung mit Householder berechnen, *4 Punkte*)

Berechne eine QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ von Hand mittels des Householder-Verfahrens. Gib die Matrizen Q, R und alle wichtigen Zwischenschritte an.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Householder-Verfahren, *3+1=4 Punkte*)

Implementiere im beiliegenden Framework die QR Zerlegung mittels Householder-Spiegelungen für reelle Matrizen.

a) Schreibe eine Funktion `Householder`, welche eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ entgegennimmt und als Rückgabewert eine Liste von Normalenvektoren der Spiegelungsmatrizen $v_1 \in \mathbb{R}^m, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{m-(n-1)}$ und die rechte obere Dreiecksmatrix R zurückgibt.

b) Schreibe eine Funktion `ComputeQ`, die die Liste $v_1, \ldots, v_n$ von `Householder` entgegennimmt und die entsprechende orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ berechnet.
Hinweis: Um die optimale asymptotische Komplexität zu erzielen, sollten keine Produkte von $m \times m$-Matrizen verwendet werden (Zeit $O(m^3)$). Stattdessen kann man die Multiplikation eines Spaltenvektors $w \in \mathbb{R}^m$ mit der durch $v \in \mathbb{R}^m$ gegebenen Householder-Matrix durch

$$w - 2 \cdot \frac{v^* \cdot w}{v^* \cdot v} \cdot v$$

in Zeit $O(m)$ berechnen. Für m Vektoren (d.h. eine $m \times m$-Matrix) braucht man dann $O(m^2)$.