

Wintersemester 2020/2021

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 8

Die Abgabe der Lösungen zur Aufgabe 1 erfolgt als pdf-Datei und zu den Aufgaben 2 und 3 als .py-Dateien bis Freitag, den 15.01.2021, 10:15 über die eCampus-Seite der entsprechenden Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (LU-Zerlegung von Hand berechnen, 4+4=8 Punkte)

Es sei:

$$A = \begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1.0 \\ 1.4 & 1.1 & -0.7 \\ 0.8 & 4.3 & 2.1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -2.1 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

und die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist gegeben durch (Angabe mit fünfstelliger Genauigkeit):

$$x \approx \begin{pmatrix} 0.34995 \\ -0.98023 \\ 2.1595 \end{pmatrix}$$

- Berechne die LU -Zerlegung der Matrix A ohne Pivotisierung (dreistellige Rechnung), s. Algorithmus 6.1 der Vorlesung. Gib die Matrizen L, U und alle wichtigen Zwischenschritte an. Löse anschließend das Gleichungssystem mit den berechneten L und U durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Berechne den relativen Fehler deiner Lösung.
- Berechne nun die LUP -Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung (dreistellige Rechnung), s. Algorithmus 6.2 der Vorlesung. Gib die Matrizen L, U, P und alle wichtigen Zwischenschritte an (die Schritte, die gleich denen aus a) sind, müssen nicht nochmal angegeben werden). Löse anschließend das Gleichungssystem mit den berechneten L, U und P durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Berechne den relativen Fehler deiner Lösung und vergleiche den mit dem relativen Fehler aus a). Diskutiere das Ergebnis kurz.

Aufgabe 2 (Gaußsches Eliminationsverfahren, 2+1+1(+1)=4(+1) Punkte)

Im folgenden betrachten wir lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $x, b \in \mathbb{C}^m$.

- Implementiere im beiliegenden Framework eine Funktion `LUP`, die eine LU -Zerlegung mit Pivotisierung zu einer gegebenen Matrix A berechnet.
- Schreibe Funktionen `BackSubstitution` und `ForwardSubstitution`, die quadratische lineare Gleichungssysteme zu gegebenen rechten, oberen bzw. linken, unteren Dreiecksmatrizen lösen.
- Schreibe aufbauend auf den oben geschriebenen Funktionen eine Funktion `SolveLinearSystemLUP`, die ein gegebenes Gleichungssystem $Ax = b$ nach x löst.
- (Bonusaufgabe) Implementiere eine Funktion `LeastSquares(B,c)`, die ein lineares Ausgleichsproblem $\|B \cdot x - c\|_2 \rightarrow \min$ für $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$ und $b \in \mathbb{C}^m$ löst. Die Funktion soll intern die gaußsche Normalengleichung und `SolveLinearSystemLUP` benutzen.

Aufgabe 3 (Cholesky-Zerlegung, $3+1(+1)=4(+1)$ Punkte)

- a) Programmiere in Python eine Funktion `Cholesky(A)`, die die Cholesky-Faktorisierung einer symmetrischen, positiv definiten Matrix **A** ausrechnet und die berechnete Matrix *R* ausgibt. Schreibe dazu ein kleines Gerüst zum Testen deiner Funktion.
- b) Probiere die Zerlegung auch an nicht positiv definiten Matrizen aus. Was geht in diesen Fällen schief? (+1 **Bonuspunkt**) Fällt dir eine Möglichkeit (andere Faktorisierung) ein, das Problem zu umgehen?