Abgabe - Übungsblatt [11]

Angewandte Mathematik: Numerik

[Felix Lehmann] [Markus Menke]

5. Februar 2021

Aufgabe 1

Here comes your text ...

Aufgabe 2

Wir interpretieren die Übergänge als Matrizenmultiplikation:
$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$
Sei A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$
Wir berechnen die Eigenwerte:
$det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & 12-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 17\lambda + 66 \rightarrow \lambda_1 = 11, \lambda_2 = 6$
Die Eigenvektoren lauten:
$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dadurch ergibt sich eine Eigenwertzerlegung:
$A = V \Lambda \dot{V}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -6/5 & 1/5 \end{pmatrix}$
Jetzt verwenden wir das Ergebnis von Blatt 10 Aufgabe 1:
$A^n = V * diag(11^n, 6^n) * V^{-1} = \begin{pmatrix} -11^n/5 - 6^{n+1}/5 & -11^n/5 - 6^n/5 \\ 6/5 * 11^n - 6^{n+1}/5 & 6/5 * 11^n + 6^n/5 \end{pmatrix} \rightarrow$
$A^n * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * (-11^n/5 - 6^{n+1}/5) + 4(-11^n/5 - 6^n/5) \\ 2 * (6 * 11^n/5 - 6^{n+1}/5) + 4(6 * 11^n/5 + 6^n/5) \end{pmatrix}$
Die explizite Darstellung der Folgen sind die Zeilen dieses Vektors (Zeile 1: Folge a, Zeile 2: Folge b)

Aufgabe 3

And even more text ...

Aufgabe 4

a)

$$f = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta}{\delta\theta} f = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)(-sin\theta) \\ (R + r\cos\varphi)(\cos\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} f = \begin{pmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$f' = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)(-sin\theta) & -r\cos\theta\sin\varphi \\ (R + r\cos\varphi)(\cos\theta) & -r\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)' &= f'(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) \\
&= \begin{pmatrix} (R + r\cos(bt^2))(-\sin(at^2)) & -r\cos(at^2)\sin(bt^2) \\ (R + r\cos(bt^2))(\cos(at^2)) & -r\sin(at^2)\sin(bt^2) \\ 0 & r\cos(bt^2) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2at \\ 2bt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2at(R + r\cos(bt^2))(-\sin(at^2)) + (-2btr\cos(at^2)\sin(bt^2)) \\ 2at(R + r\cos(bt^2))(\cos(at^2)) + (-2btr\sin(at^2)\sin(bt^2)) \\ 2btr\cos(bt^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2t(a(R + r\cos(bt^2))(-\sin(at^2)) + (-br\cos(at^2)\sin(bt^2))) \\ 2t(a(R + r\cos(bt^2))(\cos(at^2)) + (-br\sin(at^2)\sin(bt^2))) \\ 2btr\cos(bt^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$