

Wintersemester 2020/2021

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 9

Die Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1 und 2 erfolgt als pdf-Datei und zur Aufgabe 3 als .py-Dateien bis Freitag, den 22.01.2021, 10:15 über die eCampus-Seite der entsprechenden Übungsgruppe.

Aufgabe 1 (Lineare Ausgleichsprobleme lösen, 8 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{C}^m$ wobei $m > n$. Gib alle effizienten Verfahren an, die du zum Lösen des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ kennst. Beschreibe das Verfahren jeweils mit einem groben Pseudo-Code (nur für die Lösung des Ausgleichsproblems, nicht für das Berechnen der Matrixzerlegungen oder die einzelnen Unterschritte) und einer Beschreibung der Voraussetzungen, unter denen dieser Ansatz verwendet werden kann. Gib zu jedem Verfahren einen Korrektheitsbeweis an (verifiziere die Normalengleichung).

Aufgabe 2 (Cholesky-Zerlegung von Hand, 3+1=4 Punkte)

Es seien:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Bestimme die Cholesky-Zerlegung der Matrix A . Gib die Matrix R und alle wichtigen Zwischenschritte an.
- Löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der berechneten Matrix R mit Vorwärts- und Rückwärts-Substitution.

Aufgabe 3 (Einzelne Eigenwerte berechnen, 4(+1) Punkte)

Implementiere die einfache Potenziteration (Algorithmus 7.1 im Skript) und die Rayleigh-Quotienten-Iteration (Algorithmus 7.2 im Skript) in zwei Funktionen. Berechne jeweils mit beiden Verfahren die Eigenwerte und vergleiche die Konvergenzgeschwindigkeiten für die gegebenen Matrizen mit dem gegebenen Startvektor. Plote dazu den Verlauf der Rayleigh-Quotienten für beide Verfahren jeweils über die ersten 100 Iterationen. (+1 **Bonuspunkt**) Was stellst du fest und wie lassen sich die Unterschiede zwischen den beiden Matrizen erklären?

Hinweis: Code um die Matrizen.mat Datei in das Programm zu laden und die Plots anzufertigen, wird in FrameworkEigenvalue.zip bereitgestellt.