Abgabe - Übungsblatt [2]
Angewandte Mathematik: Numerik

[Felix Lehmann] [Markus Menke]

19. November 2020

Aufgabe 1

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -7 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a)

$||B||_1 = 13$
$||B||_\infty = 11$
$||B||_F = 2\sqrt{41}$

b)

1. Zu zeigen: $||x||_W \geq 0, ||x||_W = 0$ gdw. $x = 0$

Der Beweis erfolgt in drei Schritten.
Wir zeigen zunächst, dass $||x||_W \geq 0$: Laut Definition ist $||x||_W := ||W * x||$. Da $|| * ||$ eine Norm ist, muss $||x|| \geq 0$ gelten. Somit ist gilt auch $||W * x|| \geq 0$. Damit ist die erste Bedingung erfüllt.

Als nächsten Schritt zeigen wir die Hinrichtung der Äquivalenz.
Hierbei nutzen wir die absorbierende Eigenschaft von 0 und die Eigenschaft $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ der Norm $|| * ||$:
$x = 0 \Rightarrow ||x||_W = ||0||_W := ||W * 0|| = ||0|| = 0$

Als letzten Schritt zeigen wir die Rückrichtung der Äquivalenz.
$||x||_W = 0 \Rightarrow ||x||_W := ||W * x||$
Sei y das Ergebnis von $W * x$, dann ist $y_i := \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * x_j$.
Da W invertierbar ist, sind auch alle Zeilen von W linear unabhängig. Somit ist der Vektor $x = 0$ eindeutig bestimmt. Damit sind alle Bedingungen für Schritt 1 erfüllt.

2. Zu zeigen: $||\alpha x||_W = |\alpha| * ||x||_W$

$||\alpha * x||_W := ||W * (\alpha * x)||$
Sei y das Ergebnis von $W * (\alpha * x)$, dann gilt aufgrund der Kommutativität von $*$ in $\mathbb{C}$:

$y_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * (\alpha * x_j) = \alpha * \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * x_j$.
Somit ist $w * (\alpha * x) = \alpha * (w * x)$

Da $|| * ||$ eine Norm ist, gilt $||\alpha * A|| = |\alpha| * ||A||$.
Sei $A := W * x$, so gilt aufgrund der Eigenschaft der Norm $|| * ||$ auch $||\alpha * (W * x)|| = |\alpha| * ||W * x|| == |\alpha| * ||x||_W$. Dies galt zu zeigen.

3. Zu zeigen: $||x + y||_W \leq ||x||_W + ||y||_W$

Sei y' das Ergebnis von $W * (x + y)$, dann ist $y'_i = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * (x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * x_j + \sum_{j=1}^{m} w_{ij} * y_j$ somit ist $W * (x + y) = Wx + Wy$. Aufgrund der Eigenschaft der Norm $|| * ||$ gilt dann auch $||Wx + Wy|| \leq ||Wx|| + ||Wy||$.
Da alle 3 Eigenschaften für eine Norm erfüllt sind, bildet $||x||_W$ eine Norm.

c)

Eine Norm muss drei Eigenschaften erfüllen:
$||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
$||\alpha * A|| = |\alpha| * ||A||$
$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
Die gegebene Abbildung erfüllt diese, und ist damit eine Norm.

Aufgabe 2

a)

Ist für $m = 1$ immer gleich. Für $m \geq 2$ das größte element allein ist immer $\leq$ als das größte element $+x \epsilon R_0^+$.

b)

Ist für $m = 1$ immer gleich.

c)

Ist für $m, n = 1$ immer gleich.

d)

Ist für $m, n = 1$ immer gleich.

Aufgabe 3

a)

$v * ((I - \frac{2}{v * v} \cdot v \cdot v^*) \cdot w) = -v * w$
v^* wird ist nicht eindeutig definiert, Aufgabe daher nicht lösbar

Aufgabe 4

a)

$a_1 \cdot a_2 = 0$
$a_1 \cdot a_3 = 0$
$a_1 \cdot a_4 = 0$
$a_2 \cdot a_3 = 0$
$a_2 \cdot a_4 = 0$
$a_3 \cdot a_4 = 0$
damit ist A paarweise orthogonal $c_1 \cdot c_2 = -22i$
$c_1 \cdot c_3 = 22i$
$c_2 \cdot c_3 = 48 + 46i$
damit ist C nicht paarweise orthogonal

b)

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A^* \cdot A)^{-1}$ ist nicht definiert

$$(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$