Prof. Dr. Reinhard Klein
Elena Trunz

Universität Bonn
Institut für Informatik II
13.11.2020

Wintersemester 2020/2021

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 2

Abgabe der Lösungen als pdf-Datei bis Freitag, den 20.11.2020, 10:15 über die eCampus-Seite der entprechenden Übungspruppe.

Aufgabe 1 (Normen, *1+2+1=4 Punkte*)

a) Gegeben ist folgende Matrix:

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -7 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechne $\|B\|_1$, $\|B\|_\infty$ und

$$\|B\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} |B_{i,j}|^2}.$$

Bemerkung: $\|B\|_F$ wird Frobeniusnorm genannt.

b) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^m$. Beweise, dass für eine invertierbare Matrix $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$ die Funktion $\|x\|_W := \|W \cdot x\|$ ebenfalls eine Norm ist.

c) Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{0,5} : \mathbb{C}^m &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_m)^T &\mapsto \left(\sum_{j=1}^{m} \sqrt{|x_j|} \right)^2 \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung eine Norm? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2 (Äquivalenz von Normen, *1+1+1+1=4 Punkte*)

Vektor und Matrix p-Normen stehen durch verschiedene Ungleichungen in Beziehung. Im folgenden ist $x \in \mathbb{C}^m$ und $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

Beweise jede der folgenden Ungleichungen. Gebe außerdem jeweils ein Beispiel eines Vektors x oder einer Matrix A für beliebiges m, n an für die Gleichheit gilt.

a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$
b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$
c) $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$
d) $\|A\|_2 \leq \sqrt{m} \cdot \|A\|_\infty$

Hinweis: Nutze für c) und d) die Ungleichungen a) und b) zusammen mit der Definition induzierter Matrixnormen.

Aufgabe 3 (Spiegelungsmatrizen, *1+1+2=4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.

a) Sei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und

$$Q := I - \frac{2}{v * v} \cdot v \cdot v^*.$$

Zeige, dass für alle Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v * (Q \cdot w) = -v * w.$$

b) Was bedeutet diese Gleichung geometrisch? Zeichne für den zweidimensionalen Fall $n = 2$ mit $v * v = 1$ eine Skizze aus der die Relationen zwischen v, H, w und $Q \cdot w$ hervorgehen. Dabei bezeichnet H die Gerade orthogonal zu v:

$$H := \{w \in \mathbb{R}^n \mid w * v = 0\}$$

c) Zeige, dass Q unitär ist, d.h. $Q^* \cdot Q = I$.

Bonusaufgabe 4 (Orthogonalität, *2+2=4 Punkte*)

a) Wir bezeichnen mit $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}^8$ bzw. $c_1, \ldots, c_3 \in \mathbb{C}^4$ die Spalten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 4} \qquad C := \begin{pmatrix} -1-11i & 1 & -1 \\ -1 & 5+8i & 1 \\ 1 & 1-3i & -5+8i \\ -1 & -5 & -5-3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 3}$$

Sind die Spalten von A bzw. von C paarweise orthogonal?

b) Bestimme die Matrizen $A^* \cdot A$, $(A^* \cdot A)^{-1}$ und $(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$. Was fällt auf?

Bemerkung: Die Matrix $(A^* \cdot A)^{-1} \cdot A^*$ ist die sogenannte Pseudoinverse. Multipliziert man sie mit einem Vektor $b \in \mathbb{C}^8$ erhält man gemäß Normalengleichung die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|A \cdot x - b\|_2 \to \min$.