Prof. Dr. Reinhard Klein
Elena Trunz

Universität Bonn
Institut für Informatik II
04.12.2020

Wintersemester 2020/2021

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 5

Die Abgabe der Lösungen zu den Aufgaben 1,2 und 3 erfolgt als pdf-Datei und zur Aufgabe 4 als .py-Dateien bis Freitag, den 11.12.2020, 10:15 über die eCampus-Seite der entprechenden Übungspruppe.

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme mit QR lösen, *2+2=4 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Rang, sei $b \in \mathbb{C}^m$ und $x \in \mathbb{C}^n$. In der Vorlesung haben wir gesehen, wie sich das Gleichungssystem $Ax = b$ im Fall $m = n$ lösen lässt. Nun betrachten wir die anderen Fälle.

a) *(Überbestimmte Gleichungssysteme)* Sei $m > n$ und sei x die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Sei $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitär und sei $R \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = QR$ eine QR-Zerlegung ist. Sei $R_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c := Q^*b$, $c_1 \in \mathbb{C}^n$ und $c_2 \in \mathbb{C}^{m-n}$ so, dass

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Beweise, dass gilt

$$R_1 x = c_1, \qquad \|Ax - b\|_2 = \|c_2\|_2.$$

Skizziere einen effektiven Algorithmus, um mit gegebenem Q, R, b die optimale Lösung x zu berechnen. Welche Teile der Matrizen Q, R benötigt dieser Algorithmus?
Hinweis: Verwende zum Beweis die Normalengleichung.

b) *(Unterbestimmte Gleichungssysteme)* Sei $m < n$, sei $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und sei $R \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A^* = QR$ eine QR-Zerlegung der Adjungierten ist. Sei $R_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, analog zum obigen Fall. Sei $y_1 \in \mathbb{C}^m$ mit $R_1^* y_1 = b$ und sei $y_2 \in \mathbb{C}^{n-m}$ beliebig. Beweise, dass

$$x := Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des unterbestimmten linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist und dass zu jeder Lösung dieser Gleichung ein passendes y_2 existiert. Skizziere einen effektiven Algorithmus, um mit gegebenem Q, R, b eine einzelne Lösung x zu berechnen. Welche Teile der Matrizen Q, R benötigt dieser Algorithmus?

Aufgabe 2 (QR-Zerlegung von Hand berechnen, *4 Punkte*)

Berechne die QR-Faktorisierung der Matrix $\mathbf{A}$ von Hand mittels des Gram-Schmidt Verfahrens. Gib die Matrizen Q, R und alle wichtigen Zwischenschritte an.

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung, *3 Punkte*)

Seien die Matrizen Q, R und der Vektor b gegeben mit

$$Q := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -1 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 3}, \qquad R := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \qquad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 6 \\ 2i \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5}\,.$$

Finde von Hand einen Vektor $x \in \mathbb{C}^3$, der das lineare Ausgleichsproblem

$$\|QRx - b\|_2 \to \min$$

löst.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass die Spalten von Q paarweise orthonormal sind.

Aufgabe 4 (Lineare Ausgleichsprobleme mit Gram-Schmidt, *3+2=5 Punkte*)

Implementiere im beiliegenden Framework eine Funktion `LeastSquares(A,b)`, die zu einem gegebenen linearen Ausgleichsproblem $\|A \cdot x - b\|_2 \to \min$ mit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^m$ die optimale Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ berechnet und zurückgibt. Dazu solltest du die folgenden Teilaufgaben lösen:

a) Schreibe eine Funktion `QR(A)`, die das klassische Gram-Schmidt-Verfahren verwendet, um eine QR-Zerlegung von A zu berechnen.

b) Schreibe eine Funktion `BackSubstitution(R,y)`, die durch Rückwärtseinsetzen $R \cdot x = y$ nach x löst. Verwende diese in `LeastSquares(A,b)` und gebe $x = R^{-1} \cdot Q^* \cdot b$ zurück.