

Nome: Renan Sthel Duque Matrícula: \_\_\_\_\_

 Curso: ~~EEB~~ ~~EEC~~ ~~ECA~~ ~~EE~~ ~~ET~~

1ª Questão (20 pontos): Um processo ruído Gaussiano branco com  $N_0 = 4 \text{ nW/Hz}$  é inserido na entrada de um filtro linear invariante no tempo com resposta ao impulso  $h(t) = \pi \cdot e^{-4\pi 10^3 t} u(t)$ . Pede-se:

a) (8 pontos) A densidade espectral de potências na saída do filtro.

$$S_x(f) = \frac{N_0}{2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ W/Hz} \quad \xleftrightarrow{e^{-at} u(t)} \frac{K}{a + j2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{\pi}{4\pi \cdot 10^3 + j2\pi f} \quad |H(f)|^2 = \frac{\pi^2}{(4\pi \cdot 10^3)^2 + (2\pi f)^2}$$

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 \quad S_Y(f) = \frac{2 \pi^2 \cdot 10^{-9}}{(4\pi \cdot 10^3)^2 + (2\pi f)^2}$$

b) (8 pontos) A função de autocorrelação do processo na saída do filtro.

$$S_Y(f) = \frac{2 \pi^2 \cdot 10^{-9}}{8\pi \cdot 10^3} \cdot \frac{8\pi \cdot 10^3}{(4\pi \cdot 10^3)^2 + (2\pi f)^2} \text{ W/Hz}$$

$$R_Y(\tau) \xleftrightarrow{S_Y(f)} e^{-a|\tau|} \xleftrightarrow{2a} \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-12} \cdot e^{-4\pi \cdot 10^3 \cdot |\tau|}$$

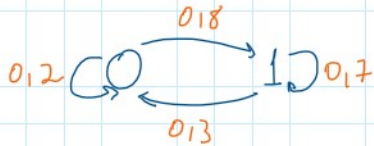
 c) (4 pontos) A potência média do ruído na saída do filtro em  $\text{pW}$ .

$$P_Y = \overline{Y^2} = R_Y(0) \quad P_Y = \frac{\pi}{4} \cdot 10^{-12} \text{ W} = \frac{\pi}{4} \text{ pW}$$

**2ª Questão (20 pontos):** Suponha que um aluno chega na hora ou atrasado nos dias de aula e que os eventos de chegar na hora ou se atrasar em dias sucessivos formam uma Cadeia de Markov. Sabe-se que se ele está atrasado em um determinado dia, a probabilidade de ele chegar na hora no dia seguinte é de 0,8. Se ele chega em tempo em um determinado dia, a probabilidade de não se atrasar no dia seguinte é de 0,7. Supondo que não há mudanças para estas probabilidades de transições de um dia para o outro, e que em um período de um mês de aula a cadeia de Markov que modela esta análise já esteja operando em regime permanente, determine a probabilidade deste aluno chegar na hora e a probabilidade do mesmo se atrasar após um mês de aula.

chegar atrasado - 0

chegar na hora - 1



$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \quad \pi = (\pi_0 \quad \pi_1)$$

$$\pi \cdot P = \pi \quad (\pi_0 \quad \pi_1) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (\pi_0 \quad \pi_1)$$

$$\begin{cases} 0,2\pi_0 + 0,3\pi_1 = \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\pi_0 - 3\pi_1 = 0 \\ 3\pi_0 + 3\pi_1 = 3 \end{cases}$$

$$11\pi_0 = 3 \quad \pi_0 = \frac{3}{11} = 0,27 \rightarrow \text{chegar atrasado após 1 mês}$$

$$\pi_1 = \frac{8}{11} = 0,73 \rightarrow \text{chegar na hora após 1 mês}$$

**3ª Questão (20 pontos):** Por volta de 5 minutos antes de elaborar esta questão, eu (Renan) estava no intervalo de aula após uma aula de M008-B observando a fila de distribuição de pipocas na semana da Engenharia de Produção, quando ao conversar com o Rubens e depois com a Mariana, pensei: por que não elaborar uma questão para os meus alunos? Elaborei esta que você lê neste momento e agora peço a sua ajuda para resolver. O atendimento consiste no fato da única senhora que distribui as pipocas abrir o saquinho de papel, encher o mesmo de pipoca e entregar para o aluno. Observei que o tempo médio de atendimento por aluno era de 10 segundos e que existiam em média 19 alunos em todo o sistema de filas. A área de convivência do Inatel é grande o suficiente para abrigar quantas pessoas desejarem entrar nesta fila. Pede-se:

u u u u

a) (5 pontos) A taxa de chegada de alunos, em alunos por minuto.

$$E[t_s] = 10s = \frac{1}{6} \text{ min} \quad E[Q] = 19 \quad E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$19 = \frac{\rho}{1-\rho} \quad 19 - 19\rho = \rho \quad 20\rho = 19 \quad \rho = 0,95$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot E[t_s] \quad 0,95 = \lambda \cdot \frac{1}{6} \quad \lambda = 5,7 \text{ alunos/min}$$

b) (5 pontos) A porcentagem do tempo que a senhora atende os alunos.

$$U = \rho \quad (\text{Para u u u u}) \quad U = 0,95 = 95\%$$

c) (5 pontos) O tempo médio de espera de um aluno na fila.

$$\mu = \frac{1}{E[t_s]} = 6 \text{ alunos/min}$$

$$E[t_q] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6 - 5,7} = 3,33 \text{ min}$$

$$E[t_w] = E[t_q] - E[t_s] = 3,33 - \frac{1}{6} = 3,17 \text{ min}$$

d) (5 pontos) A probabilidade de um aluno ficar mais do que 2 minutos neste sistema de filas.

$$P(t_q \geq T) = e^{-(\mu - \lambda)T} \quad P(t_q > 2) = e^{-(6 - 5,7) \cdot 2} = 0,5488$$

4ª Questão (40 pontos): Você irá implementar um call center em sua pequena empresa para atender os clientes via telefone. A previsão é que em um período de 8 horas de atendimento por dia, a empresa receba em média 102 chamadas. A duração média de cada chamada é de 8 minutos. Existem duas formas diferentes de implementar este serviço:

$$\lambda = \frac{102}{8} = 12,75 \text{ ch/h} = 0,2125 \text{ ch/min}$$

$$E[t_s] = 8 \text{ min} \quad \rho = \lambda \cdot E[t_s] = 0,2125 \cdot 8 = 1,7$$

Configuração 1: Contratar 3 atendentes e não colocar chamadas em espera, quando os mesmos estiverem ocupados.

$$\mu = 3 \quad \rho = 0 \quad M|M|3|0|3|00|FIFO$$

Configuração 2: Contratar 2 atendentes e poder colocar 2 chamadas em espera, quando os mesmos estiverem ocupados.

$$\mu = 2 \quad \rho = 2 \quad M|M|2|2|4|00|FIFO$$

Pede-se:

a) (10 pontos) Para cada configuração, determine a probabilidade dos atendentes estarem ociosos.

Configuração 1:  $\mu = 3 \quad \rho = 1,7$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1,7 + \frac{1,7^2}{2!} + \frac{1,7^3}{3!}} = \frac{1}{4,964} = 0,2015$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}}$$

Configuração 2:  $m=2$   $J=2$   $\rho=1,7$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 1,7 + \frac{1,7^2}{2!} + \frac{1,7^3}{2! \cdot 2^1} + \frac{1,7^4}{2! \cdot 2^2}} = \frac{1}{6,417} = 0,1558$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{J+m} \frac{\rho^k}{m! \cdot m^{k-m}}}$$

b) (10 pontos) Para cada configuração, determine a probabilidade de um cliente não ser atendido. Esse critério faz diferença na escolha da configuração? Justifique.

Configuração 1:

$$P_B = P_3 = \frac{1,7^3}{3!} \cdot 0,2015 = 0,165$$

$$P_B = P_m = \frac{\rho^m}{m!} \cdot P_0$$

Configuração 2:

$$P_B = P_4 = \frac{1,7^4}{2^2 \cdot 2!} \cdot 0,1558 = 0,1626$$

$$P_B = P_{J+m}$$

Conclusão: Não, pois as probabilidades de bloqueio são praticamente iguais.

$$P_k = \frac{\rho^k}{m^{k-m} \cdot m!} \cdot P_0$$

c) (10 pontos) Para cada configuração, determine o tempo médio que um cliente gasta do momento que faz a ligação até o momento que a chamada termina.

Configuração 1:

$$E[t_q] = E[t_s] = 8 \text{ min}$$

Configuração 2:

$$P_0 = 0,1558 \quad P_1 = 0,2649 \quad P_2 = 0,2252$$

$$P_3 = 0,1914 \quad P_4 = 0,1626$$

$$E[q] = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 1,9399$$

$$E[t_q] = \frac{1,9399}{0,2125(1 - 0,1626)} = 10,9 \text{ min}$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, k \leq m$$

$$P_k = \frac{\rho^k}{m^{k-m} \cdot m!} \cdot P_0, m \leq k \leq J+m$$

$$E(q) = E(w) + E(S) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k$$

$$E(t_q) = \frac{E(q)}{\lambda(1 - P_B)}$$

d) (10 pontos) Para cada configuração, determine o tempo médio que um cliente espera por atendimento, depois que faz a ligação.

Configuração 1:

$$E[t_w] = 0$$

Configuração 2:

$$E[t_w] = E[t_a] - E[t_s] = 10,9 - 8 = 2,9 \text{ min}$$