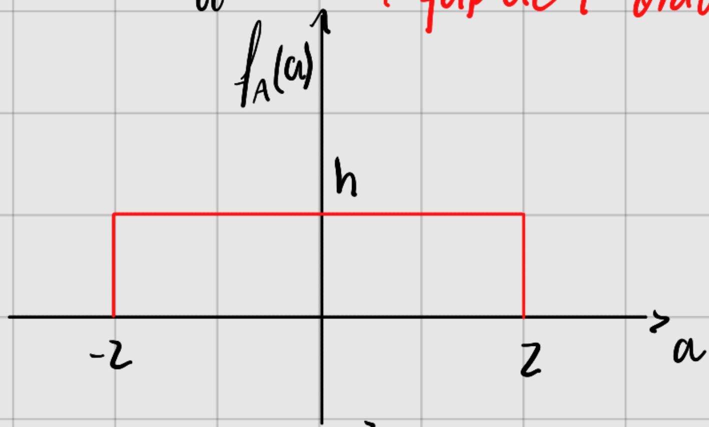
1) $X(t) = At^2$

A: variável aleatória uniformemente distribuída em $[-2, 2]$

a) $\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \underline{f_X(x,t)} dx = \overline{At^2} = \bar{A}t^2 = t^2 \int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a) da$

↳ fdp de 1ª ordem da v.a.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$\Rightarrow 4 \cdot h = 1$$

$$\therefore h = 1/4$$

$$\Rightarrow \overline{X(t)} = t^2 \int_{-2}^{2} a \cdot \frac{1}{4} da = \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{2} a^2 \Big|_{-2}^{2} = \frac{t^2}{8} \cancel{(2^2 - (-2)^2)}^{\,0}$$

$$\therefore \boxed{\overline{X(t)} = 0}$$

↳ Como a média se trata de uma estatística de 1ª ordem e seu valor é uma constante, $X(t)$ é estácionário para estatísticas de 1ª ordem.

b) Função de autocorrelação: $R_X(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) X(t_2)}$

$$\Rightarrow R_X(t_1, t_2) = \overline{At_1^2 At_2^2} = \overline{A^2} t_1^2 t_2^2$$

$$\overline{A^2} = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f_A(a) da = \int_{-2}^{2} a^2 \frac{1}{4} da = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} a^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{12} (2^3 - (-2)^3)$$

$$\therefore \overline{A^2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore R_X(t_1, t_2) = \frac{4}{3} t_1^2 t_2^2$$

Como $R_X(t_1,t_2) \neq R_X(t_2-t_1)$, $X(t)$ não é estacionário p/ 2ª ordem.

c) Não, pois a função de autocorrelação de $X(t)$ não depende de $\tau = t_2 - t_1$.

2) $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)$

θ: dist. uniforme em $[0, 2\pi]$

$A(t)$ é estacionário no sentido amplo $\Rightarrow \overline{A(t)} = K,\ K \in \mathbb{R}$

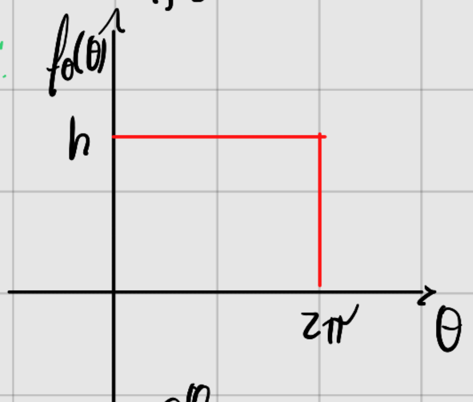
$$R_A(t_1,t_2) = R_A(t_2 - t_1) = R_A(\tau)$$

$$R_X(t_1,t_2) = \overline{A(t_1)\cos(2\pi f_c t_1 + \theta)\,A(t_2)\cos(2\pi f_c t_2 + \theta)}$$

$$= \underbrace{\overline{A(t_1)\,A(t_2)}}_{*}\ \underbrace{\overline{\cos(2\pi f_c t_1 + \theta)\cos(2\pi f_c t_2 + \theta)}}_{*}$$

$*$: $R_A(t_1,t_2) = \overline{A(t_1)A(t_2)} = R_A(\tau)$

$*$:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(\theta)\,d\theta = 1$$

$$2\pi h = 1 \ \therefore\ h = \frac{1}{2\pi}$$

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t_1 + \theta)\cos(2\pi f_c t_2 + \theta)\, f_\theta(\theta)\,d\theta =$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\cos(2\pi f_c t_1 + \cancel{\theta} - 2\pi f_c t_2 - \cancel{\theta}) + \cos(2\pi f_c t_1 + \theta + 2\pi f_c t_2 + \theta)\right]\frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_c(t_1-t_2)]\,d\theta + \int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_c(t_1+t_2)+2\theta]\,d\theta\right] \cdot \frac{2}{2}$$

$\tau = t_1 - t_2$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\cos(2\pi f_c \tau)\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}[2\pi f_c(t_1+t_2)+2\theta]\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\cos(2\pi f_c \tau)\,2\pi + \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\left[\text{sen}(2\pi f_c(t_1+t_2)+4\pi) - \text{sen}(2\pi f_c(t_1+t_2))\right]}}_{*}\right] \to 0$$

$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore * = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$ $\qquad$ $\therefore * = 0$

$$\therefore R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau) = \frac{R_A(\tau)}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$