

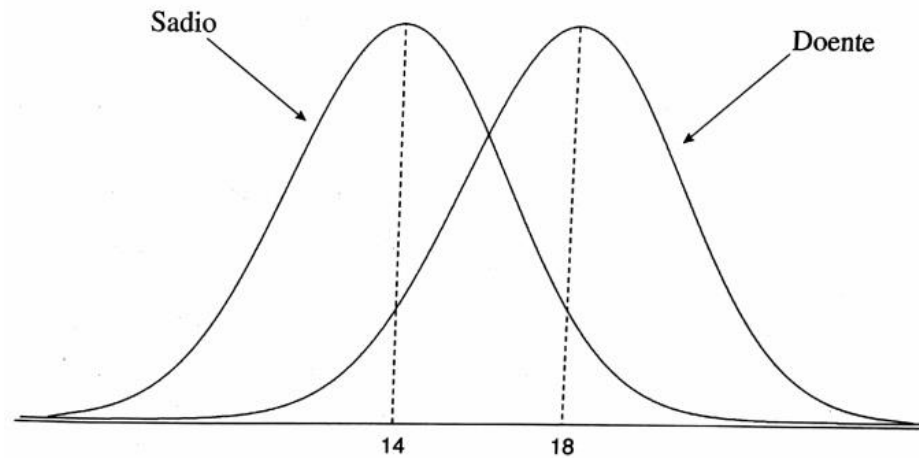
Inferência Estatística I

TESTES DE HIPÓTESES

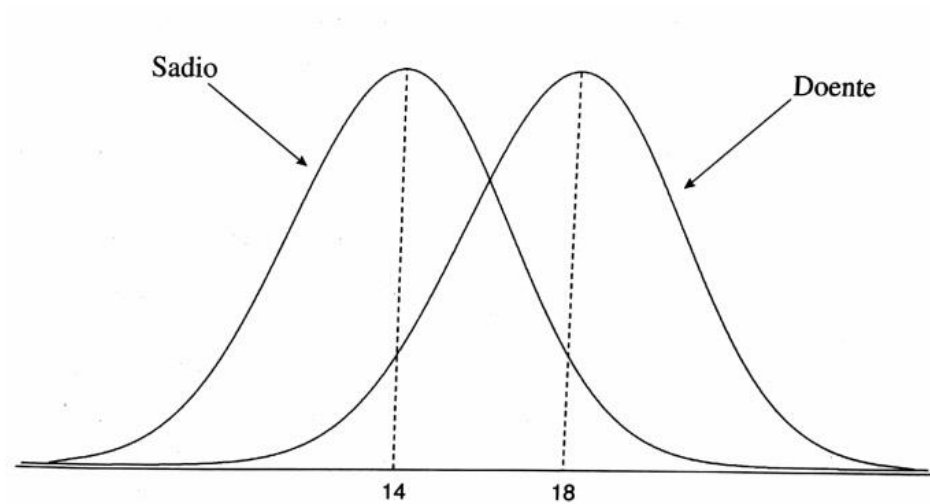
TUANY CASTRO

Testes de Hipóteses

Exemplo 1: Suponha que, entre pessoas sadias, a concentração de certa substância no sangue se comporta segundo um modelo Normal com média 14 unidades/ml e desvio-padrão 6 unidades/ml. Pessoas sofrendo de uma doença específica têm a concentração média da substância alterada para 18 unidades/ml. Admitimos que o modelo Normal, com desvio-padrão 6 unidades/ml, continua representando de forma adequada a concentração da substância em pessoas com a doença. A figura a seguir ilustra a situação descrita.



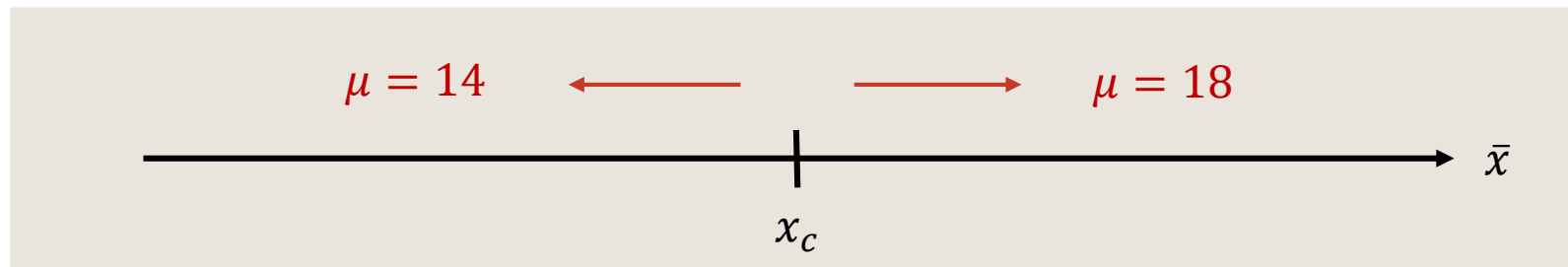
Testes de Hipóteses



- As curvas se cruzam em algum momento, fazendo com que uma proporção, mesmo que baixa, de indivíduos da população sadia tenha valores de concentração tão altos quanto doentes;
- Coletamos uma amostra de 30 pessoas doentes e aplicamos um medicamento. Como saber sua eficácia?
- Se o número de médio da concentração da substância na amostra for “próximo” de 18, teremos evidência de que o tratamento não é eficaz;
- Por outro lado, se próximo de 14, o tratamento poderia ser considerado satisfatório;
- Ser “próximo” depende, entre outros fatores, da variabilidade da concentração na população.

Teste para a Média Populacional

- Consideremos que a média de concentração da substância após o tratamento seja μ ;
- Queremos testar se $\mu = 14$ ou $\mu = 18$;
- Temos uma amostra de 30 pessoas e observamos a concentração média da substância na amostra: \bar{x} ;
- Uma maneira de tomar essa decisão é determinar um valor crítico, x_c , tal que se $\bar{x} > x_c$, concluímos que $\mu = 18$ e, portanto, o tratamento não é eficaz;
- Por outro lado, se $\bar{x} \leq x_c$, concluímos que $\mu = 14$ e o tratamento é eficaz;



Teste para a Média Populacional

- As duas hipóteses do estudo:

H_0 : o tratamento não é eficaz

H_1 : o tratamento é eficaz

Que podem ser reescritas como:

$$H_0: \mu = 18$$

$$H_1: \mu = 14$$

As hipóteses acima são chamadas hipóteses simples. Porém é mais comum o uso de hipóteses compostas:

$$H_0: \mu = 18$$

$$H_1: \mu < 18$$

Teste para a Média Populacional

- Os dois erros associados ao teste de hipóteses:
 - **Erro do tipo I:** Rejeitar a hipótese H_0 , quando ela é verdadeira
 - **Erro do tipo II:** Aceitar a hipótese H_0 , quando ela é falsa.

		Situação	
		H_0 verdadeira	H_0 falsa
Decisão	Rejeitar H_0	Erro Tipo I	Sem erro
	Aceitar H_0	Sem erro	Erro Tipo II

Teste para a Média Populacional

- Chamamos ainda:

$$\alpha = \mathbb{P}[\textit{erro tipo I}] = \mathbb{P}[\textit{rejeitar } H_0 | H_0 \textit{ é verdadeira}]$$

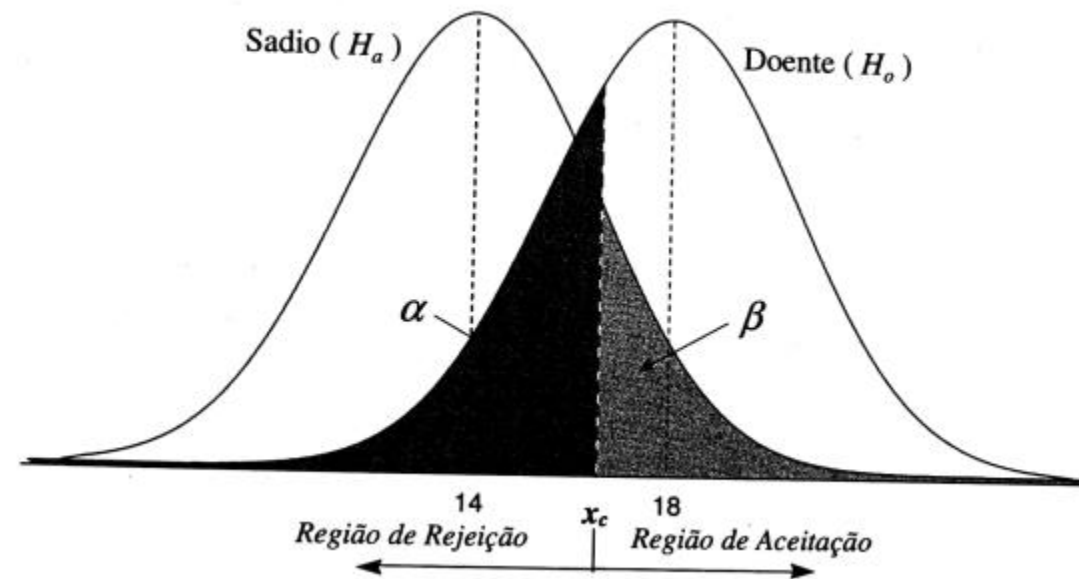
$$\beta = \mathbb{P}[\textit{erro tipo II}] = \mathbb{P}[\textit{aceitar } H_0 | H_0 \textit{ é falsa}]$$

- Interpretação para o exemplo

$$\alpha = \mathbb{P}[\textit{concluir que o tratamento é eficaz quando na verdade ele não é}]$$

$$\beta = \mathbb{P}[\textit{concluir que o tratamento não é eficaz quando na verdade ele é}]$$

Teste para a Média Populacional



A situação ideal é quando ambas as probabilidades, α e β são próximas de zero. Entretanto, à medida que diminuirmos uma, a outra tende a aumentar. Levando isso em conta, devemos definir as hipóteses tomando cuidado para que **o erro mais importante a ser evitado seja o erro do tipo I.**

Teste para a Média Populacional

- Definimos o valor crítico, fixando uma probabilidade de erro do tipo I (α):

$$\alpha = \mathbb{P}[\text{erro tipo I}] = \mathbb{P}[\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}]$$

$$\alpha = \mathbb{P}[\text{Afirmar que } \mu < 18 \mid \text{Quando } \mu = 18]$$

$$\alpha = \mathbb{P}[\bar{X} < x_c \mid \mu = 18]$$

Como vimos que $\bar{X} \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$:

$$\alpha = \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{x_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 18\right] = \mathbb{P}\left[Z < \frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}} \mid \mu = 18\right]$$

com $Z \sim N(0,1)$.

Teste para a Média Populacional

- Se quisermos $\alpha = 0,05$:

$$\frac{x_c - 18}{6/\sqrt{30}} = -1,64 \rightarrow x_c = 18 - 1,64 * \frac{6}{\sqrt{30}} \rightarrow x_c = 16,20$$

- Portanto, colhida a amostra, se $\bar{x} < 16,20$, rejeitamos a hipótese H_0 e concluimos que o tratamento é eficaz ($\mu = 14$).
- A região de valores que levam à rejeição de H_0 é chamada Região Crítica e representada como:

$$RC = \{\bar{x} < 16,20\}$$

Teste para a Média Populacional

Exemplo 2: Um pesquisador deseja estudar o efeito de certa substância no tempo de reação de seres vivos a um certo tipo de estímulo. Um experimento é desenvolvido com cobaias que são inoculadas com a substância e submetidas a um estímulo elétrico, com seus tempos de reação (em segundos) anotados. Os seguintes valores foram obtidos: 9.1, 9.3, 7.2, 7.5, 13.3, 10.9, 7.2, 9.9, 8.0, 8.6. Admite-se que o tempo de reação segue, em geral, o modelo Normal com média 8 e desvio-padrão $\sigma = 2$ segundos. O pesquisador desconfia, entretanto, que o tempo médio sofre alteração por influência da substância. Neste caso, as hipóteses de interesse são:

H_0 : as cobaias apresentam tempo de reação padrão

H_0 : as cobaias têm o tempo de reação alterado

Em termos estatísticos:

$$H_0: \mu = 8$$

$$H_0: \mu \neq 8$$

Teste para a Média Populacional

- Como o teste é bilateral, a região crítica será da forma:

$$RC = \{\bar{x} < x_{c1} \text{ ou } \bar{x} > x_{c2}\}$$

- Fixando $\alpha = 0,05$:

$$\alpha = \mathbb{P}[\bar{X} < x_{c1} \text{ ou } \bar{X} > x_{c2} \mid \mu = 8] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{x_{c1} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ ou } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{x_{c2} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 8\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[Z < \frac{x_{c1} - 8}{2/\sqrt{10}} \text{ ou } Z > \frac{x_{c2} - 8}{2/\sqrt{10}} \mid \mu = 8\right] = 0,05$$

Teste para a Média Populacional

- Então:

$$\frac{x_{c1} - 8}{2/\sqrt{10}} = -1,96 \text{ e } \frac{x_{c2} - 8}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = 1,96 \rightarrow$$

$$x_{c1} = 8 - 1,96 * \frac{2}{\sqrt{10}} \text{ e } x_{c2} = 8 + 1,96 * \frac{2}{\sqrt{10}} \rightarrow x_{c1} = 6,76 \text{ e } x_{c2} = 9,24$$

- Portanto, a região crítica:

$$RC = \{\bar{x} < 6,76 \text{ ou } \bar{x} > 9,24\}$$

- Calculando a média na amostra obtida, temos $\bar{x} = 9,1$. Como não pertence à região crítica, temos indícios para aceitar H_0 a um nível de significância de 5% e concluir que o tempo de reação das cobaias submetidas à substância não fica alterado.

Teste para a Média Populacional

Etapas de um teste de hipóteses:

1. Estabelecer as hipóteses nula e alternativa.
2. Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa.
3. Identificar a distribuição do estimador \bar{X} e obter sua estimativa.
4. Fixar um valor para α e obter a região crítica.
5. Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica.

Exercícios

Exercício 1: Suponha que queiramos testar $H_0: \mu = 50$ versus $H_1: \mu > 50$, onde μ é a média de uma variável aleatória Normal com desvio-padrão igual a 10. Extraída uma amostra de tamanho $n = 36$ elementos da população, observou-se $\bar{x} = 53$. Faça o teste com nível de 5%.

Exercício 2: Um estudo foi desenvolvido para avaliar o salário de empregadas domésticas na cidade de São Paulo. Foram sorteadas e entrevistadas 200 trabalhadoras. Admita que o desvio-padrão dessa variável na cidade é de 0,8 salários mínimos.

- a) Você conhece a distribuição do estimador \bar{X} ?
- b) Deseja-se testar se a média é igual a 3 salários mínimos ou é menor. Formule as hipóteses adequadas.
- c) Para um nível de significância de 5%, construa a região crítica.
- d) Se a amostra forneceu média de 2,5 salários mínimos, qual seria a conclusão?

Exercícios

Exercício 3: O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 km/litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo em 25 desses veículos, escolhidos ao acaso, e constatou consumo médio de 14,3 km/litro. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual a 9 (km/litro)². Teste, ao nível de significância de 5%, a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15 km/litro, contra ser menor do que esse valor.

Exercício 4: A vida média de uma amostra de 100 lâmpadas de certa marca é de 1615 horas. Por similaridade com outros processos de fabricação, supomos o desvio padrão igual a 120 horas. Utilizando $\alpha = 5\%$, desejamos testar se a duração média de todas as lâmpadas dessa marca é igual ou é diferente de 1600 horas. Qual é a conclusão?

Exercícios

Exercício 5: Uma máquina deve produzir peças com diâmetro de 2 cm. Entretanto, variações acontecem e vamos assumir que o diâmetro dessas peças siga o modelo Normal com variância igual a $0,09 \text{ cm}^2$. Para testar se a máquina está bem regulada, uma amostra de 100 peças é coletada.

- a) Formule o problema como um teste de hipóteses.
- b) Qual seria a região crítica para $\alpha = 1\%$?
- c) Qual seria a região crítica para $\alpha = 10\%$?
- d) Se para essa amostra, $\bar{x} = 1,94$, qual a decisão em b? E em c?

Exercícios

Exercício 6: O nível de colesterol no sangue é uma variável aleatória com distribuição normal, de média desconhecida μ e desvio-padrão $\sigma = 60$ mg/100 ml.

Entregar até dia 15/04.

- a) Qual um estimador para a média μ ?
- b) Você conhece a distribuição desse estimador?
- c) Em uma amostra de 50 pacientes, observou-se uma média amostral $\bar{x} = 268$. Qual seria uma estimativa pontual para μ ?
- d) Considerando a amostra do item anterior, construa um intervalo de confiança para a média desconhecida com nível de confiança de 95%.
- e) Teste a hipótese de que $\mu = 260$, contra a alternativa de que $\mu > 260$ com base na mesma amostra. Utilize um nível de 5%.
- f) Qual deve ser o tamanho da amostra para que o intervalo de confiança tenha um erro de 15 unidades? Use 95% de confiança.

Teste para a Proporção Populacional

Exemplo 3: Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida, através de poços artesianos no nordeste, é salobra. Há muitas controvérsias sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para dirimir as dúvidas, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 120 deles, água salobra. Qual seria a conclusão a um nível de 5%?

1. Definição das hipóteses

$$H_0: p = 0,40$$

$$H_1: p \neq 0,40$$

Teste para a Proporção Populacional

2. Definição da Região Crítica

Sabemos que o melhor estimador para p é a proporção amostral \hat{p} . Então, como o teste é bilateral:

$$RC = \{\hat{p} < p_{c1} \text{ ou } \hat{p} > p_{c2}\}$$

3. Identificação da distribuição do estimador e obtenção de sua estimativa.

Sabemos que a distribuição de \hat{p} pode ser aproximada pela distribuição Normal com média p e variância $p(1 - p)/n$. Sua estimativa na amostra:

$$\hat{p} = \frac{120}{400} = 0,30$$

Teste para a Proporção Populacional

4. Fixar α e obter a região crítica.

Para $\alpha = 0,05$:

$$\mathbb{P}[\hat{p} < p_{c1} | p = 0,40] = 0,05/2 = 0,025 \rightarrow \mathbb{P}\left[\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{p_{c1}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} | p = 0,40\right] = 0,025 \rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left[Z < \frac{p_{c1}-0,4}{\sqrt{0,4*0,6/400}}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{p_{c1}-0,4}{\sqrt{0,4*0,6/400}} = -1,96 \rightarrow p_{c1} = 0,352$$

$$\mathbb{P}[\hat{p} > p_{c2} | p = 0,40] = 0,05/2 = 0,025 \rightarrow \mathbb{P}\left[\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} > \frac{p_{c2}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} | p = 0,40\right] = 0,025 \rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left[Z > \frac{p_{c2}-0,4}{\sqrt{0,4*0,6/400}}\right] = 0,025 \rightarrow \frac{p_{c2}-0,4}{\sqrt{0,4*0,6/400}} = 1,96 \rightarrow p_{c2} = 0,448$$

Teste para a Proporção Populacional

Portanto, a região crítica:

$$RC = \{\hat{p} < 0,352 \text{ ou } \hat{p} > 0,448\}$$

5. Conclusão do teste

Como observamos na amostra $\hat{p} = 0,30 < 0,352$, este valor está na região crítica e portanto rejeitamos H_0 e concluímos que o relatório não está correto.

Exercícios

Exercício 7: Uma empresa não pode produzir mais do que 5% de unidades defeituosas de um artigo num mesmo lote. Seja p a proporção de unidades defeituosas em um certo lote e suponha que, nesse lote, 100 artigos são sorteados para serem inspecionados. Responda às seguintes questões:

- a) Qual o parâmetro que se deseja testar?
- b) Qual o estimador a ser utilizado e sua distribuição?
- c) Indique as hipóteses a serem testadas e interprete-as.
- d) Determine o critério de decisão com nível de significância de 5%.
- e) Com o critério obtido, conclua o teste para um lote com 7% de defeituosos.

Exercícios

Exercício 8: Suponha que se deseje estimar a proporção p de indivíduos com certa doença em uma dada região. Selecionou-se uma amostra aleatória de 100 pessoas e constatou-se que 25 eram portadoras da doença.

- a) Calcule a estimativa pontual da proporção p .
- b) Construa o intervalo de confiança para p com coeficiente de confiança de 95%. Qual o comprimento do intervalo?
- c) Um pesquisador acredita que a proporção de doentes é superior a 20%. Teste essa hipótese ao nível $\alpha = 0,05$. Formule as hipóteses nula e alternativa.

Entregar até dia 15/04.

Teste para a Média com Variância Desconhecida

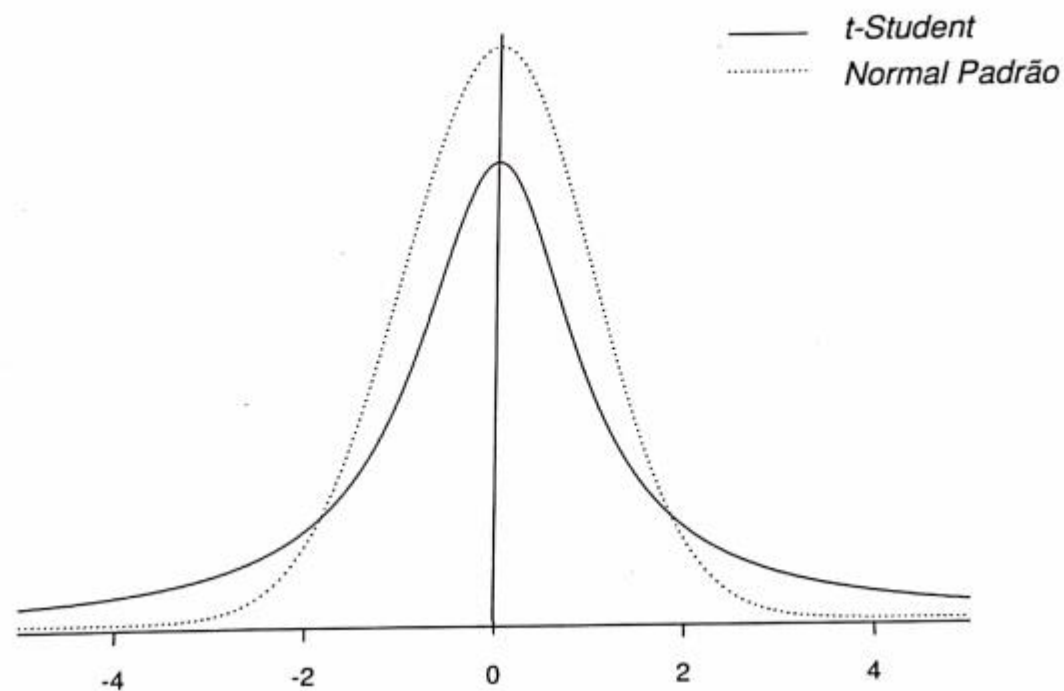
- Se o desvio-padrão é desconhecido, ele precisa ser estimado.
- Vimos que o melhor estimador para a variância é $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
- Temos que:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

em que t_{n-1} corresponde à distribuição t-student com n-1 graus de liberdade. A t-student também tem densidade em forma de sino, entretanto as caudas tem mais massa do que a Normal(0,1).

A distribuição t-student se aproxima da distribuição normal conforme aumenta o tamanho da amostra. Para graus superiores a 120, voltamos a usar a distribuição normal.

Teste para a Média com Variância Desconhecida



Teste para a Média com Variância Desconhecida

Exemplo 4: Deseja-se investigar se uma certa doença que ataca o rim altera o consumo de oxigênio desse órgão. Para indivíduos sadios, admite-se que esse consumo tem distribuição Normal com média $12 \text{ cm}^3/\text{min}$. Os valores medidos em cinco pacientes com a doença foram: 14.4, 12.9, 15.0, 13.7 e 13.5. Qual seria a conclusão ao nível de 1% de significância?

O teste de interesse é:

H_0 : *A doença não altera a média de consumo renal de oxigênio*

H_1 : *A doença altera a média de consumo renal de oxigênio*

Em termos estatísticos:

$$H_0: \mu = 12$$

$$H_0: \mu \neq 12$$

Teste para a Média com Variância Desconhecida

Região crítica é da forma:

$$RC = \{t < t_1 \text{ ou } t > t_2\}$$

Então:

$$T = \frac{\bar{X} - 12}{s/\sqrt{5}} \sim t_4$$

Para $\alpha = 5\%$:

$$\mathbb{P}[T < t_1] = 0,025 \rightarrow t_1 = -2,776$$

$$\mathbb{P}[T > t_2] = 0,025 \rightarrow t_2 = 2,776$$

Teste para a Média com Variância Desconhecida

Portanto:

$$RC = \{t < -2,776 \text{ ou } t > 2,776\}$$

Sendo $\bar{x} = 13,90$ e $s^2 = 0,67$:

$$t = \frac{13,90 - 12}{\sqrt{0,67/5}} = 5,18$$

Como $t = 5,18$ pertence à região crítica, rejeitamos H_0 e concluimos que a doença altera a média de consumo renal de oxigênio ao nível de 5%.

Exercícios

Exercício 9: Uma amostra com 10 observações de uma variável aleatória Normal forneceu média de 5,5 e variância amostral 4. Deseja-se testar, ao nível de significância de 5%, se a média na população é igual ou maior do que 6. Qual é a conclusão?

Exercício 10: O tempo de permanência de engenheiros recém formados no 1^o emprego, em anos, foi estudado considerando um modelo Normal com média e variância desconhecidas. Por analogia com outras categorias profissionais, deseja-se testar se a média é 2. Para uma amostra de 15 engenheiros, a média obtida foi de 2,7 anos e o desvio-padrão amostral 1,4 anos. Ao nível de 1%, qual a conclusão do teste?

Exercícios

Exercício 11: O número de pontos em um exame de inglês tem sido historicamente ao redor de 80. Sorteamos 10 estudantes que fizeram recentemente esse exame e observamos as notas: 65, 74, 78, 86, 59, 84, 75, 72, 81 e 83.

- A) Qual uma estimativa pontual para a nota média?
- B) Construa um intervalo de confiança para a nota média com 95% de confiança.
- C) Especialistas desconfiam que a média diminuiu e desejam testar essa afirmação através de um teste de hipóteses, com nível de significância de 5%. Fazendo as suposições necessárias, qual seria a conclusão do teste?

Entregar até dia 15/04.

Nível Descritivo

- Ideia: calcular, supondo que a hipótese nula seja verdadeira, a probabilidade de se obter estimativas mais desfavoráveis ou extremas (à luz da hipótese alternativa) do que a que está sendo fornecida pela amostra.
- Essa probabilidade é chamada nível descritivo ou valor-p (p-valor, p-value) e denotada por α^* ;
- Valores “pequenos” de α^* evidenciam que a hipótese nula é falsa pois, sendo a amostra nossa ferramenta de inferência sobre a população, ela fornece uma estimativa que teria probabilidade muito pequena de acontecer, se H_0 fosse verdadeira.
- O conceito do que é “pequeno” depende do estudo.
- O nível descritivo fornece uma ideia da intensidade com a qual estamos rejeitando, ou não, a hipótese nula.

Nível Descritivo

Exemplo 5: Uma associação de defesa do consumidor desconfia que embalagens de 450 gramas de um certo biscoito estão abaixo do peso. Para verificar tal afirmação, foram coletados ao acaso 80 pacotes em vários supermercados, obtendo-se uma média de peso de 447 gramas. Admitindo-se que o peso dos pacotes segue o modelo normal com desvio padrão 10 gramas, que conclusão pode ser tirada através do nível descritivo?

O teste em questão é:

$H_0: \mu = 450$ (peso médio conforme previsto na embalagem)

$H_1: \mu < 450$ (peso médio abaixo do previsto na embalagem)

Nível Descritivo

O valor observado na amostra foi $\bar{x} = 447$. Então, baseando-se na hipótese alternativa, o nível descritivo do teste é dado por:

$$\alpha^* = \mathbb{P}[\bar{X} < 447 \mid \mu = 450] = \mathbb{P}\left[Z < \frac{447 - 450}{10/\sqrt{80}}\right] = \mathbb{P}[Z < -2,68] = 0,0037$$

Portanto, o nível descritivo é de 0,37%, indicando a probabilidade de que encontremos valores da estimativa mais desfavoráveis à hipótese nula. Se fixado um nível de significância maior ou igual a 0,37%, concluímos pela rejeição de H_0 . Se fixado um nível de significância menor, concluiríamos pela aceitação de H_0 .

Nível Descritivo

Exemplo 6: Consideremos o teste para o tempo de reação das cobaias:

$$H_0: \mu = 8$$

$$H_1: \mu \neq 8$$

Para uma amostra de 10 cobaias, observou-se $\bar{x} = 9,1$. Considerando $\sigma = 2$, podemos calcular o nível descritivo fazendo:

$$\alpha^* = 2 * \mathbb{P}[\bar{X} > 8 \mid \mu = 8] = \mathbb{P}\left[Z > \frac{9,1 - 8}{2/\sqrt{10}}\right] = \mathbb{P}[Z > 1,74] = 0,0818$$

Se fixarmos um nível de significância de 0,05, concluimos pela aceitação de H_0 . Mas se fixarmos nível de significância de 0,10, concluimos pela rejeição de H_0 .

Exercícios

Exercício 12: A resistência de um certo tipo de cabo de aço é uma variável aleatória modelada pela distribuição Normal com desvio-padrão 6 kgf. Uma amostra de tamanho 25 desses cabos, escolhida ao acaso, forneceu média igual a 9,8 kgf. Para o teste $\mu = 13$ contra $\mu < 13$, qual é o nível descritivo? Que conclusão você consideraria adequada?

Entregar exercícios computacionais, 13 e 14, até 15/04.

Exercício 13 (Computacional): Considerando os dados do arquivo *cancer.xlsx*, defina dois grupos de pacientes: um de jovens, com idades inferiores ou iguais a 54 anos e um de idosos com idades superiores a 54 anos. Os grupos deverão conter 191 e 171 pacientes. Considere a variável nitrogênio na uréia (N).

A) Construa um box-plot para a variável N, para cada um dos grupos etários e compare-os descritivamente. Com base nos gráficos, existem indicações de que a idade está influenciando a concentração de nitrogênio na ureia?

Exercícios

- B) É de interesse verificar se a média populacional da variável N para os pacientes idosos é superior a 15. Sendo a variância desconhecida, qual conclusão pode ser obtida para um nível de significância de 5%?
- C) Considerando agora o grupo de pacientes mais jovens, verifique se a média populacional para N é menor do que 15. Obtenha o nível descritivo e conclua ao nível de 5%.
- D) Construa intervalos de confiança para a média populacional da variável N para os dois grupos com 95% de confiança. Compare os intervalos.
- E) Com base nos resultados do itens B e C, discuta o comportamento das médias da variável N para os dois grupos de pacientes.

Exercício 14 (Computacional): Um criador tem constatado uma proporção de 10% do rebanho com verminose. O veterinário alterou a dieta dos animais e acredita que a doença diminuiu de intensidade. Um exame de 100 cabeças do rebanho, escolhidas ao acaso, indicou 8 delas com verminose. Ao nível de 5%, há indícios de que a proporção diminuiu?

