

# Inferência Estatística I

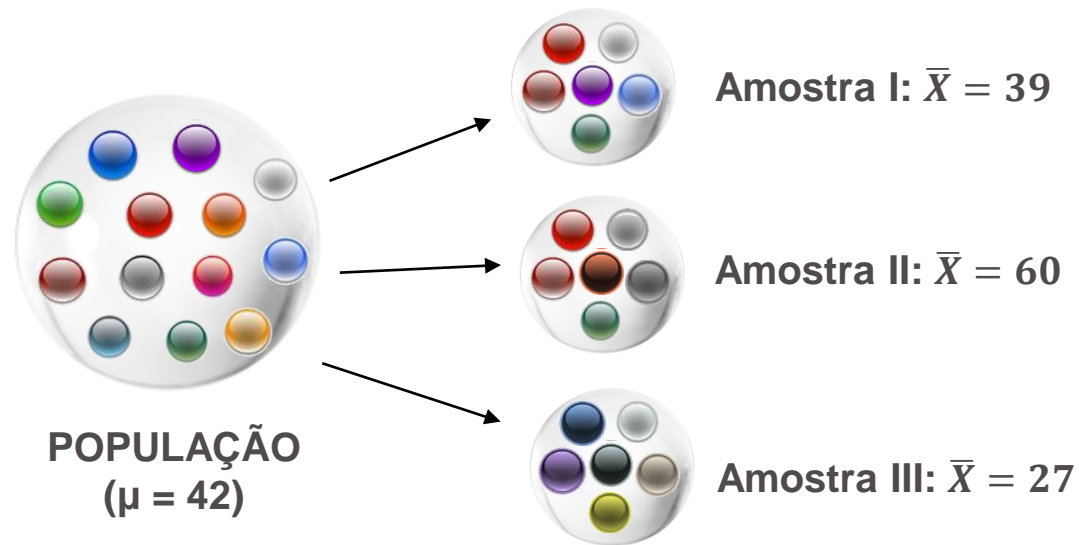
---

DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS

TUANY CASTRO

# Situação: Qual a idade média dos fãs dos Beatles?

---



$\bar{X}$  é uma variável aleatória.

Qual a variância de  $\bar{X}$ ?



# Distribuições Amostrais

---

➤ Estimadores são variáveis aleatórias, pois dependem da amostra obtida.

**Exemplo:** Um jogo consiste em lançar uma moeda honesta 3 vezes. Para cada lançamento, se sair cara você ganha 1 ponto, caso saia coroa, você perde 1 ponto.

Possíveis amostras	Probabilidade	$\bar{X}$	$S^2$
(-1, -1, -1)	1/8	-1	0
(-1, -1, 1)	1/8	-1/3	4/3
(-1, 1, -1)	1/8	-1/3	4/3
(-1, 1, 1)	1/8	1/3	4/3
(1, -1, -1)	1/8	-1/3	4/3
(1, -1, 1)	1/8	1/3	4/3
(1, 1, -1)	1/8	1/3	4/3
(1, 1, 1)	1/8	1	0

# Distribuições Amostrais

---

Assim, as distribuições de  $\bar{X}$  e  $S^2$  desse estudo:

$\bar{X}$	Probabilidade
-1	1/8
-1/3	3/8
1/3	3/8
1	1/8

$S^2$	Probabilidade
0	1/4
4/3	3/4

# Distribuições Amostrais

---

Podemos calcular:

- $\mathbb{E}[\bar{X}] = -1 * \frac{1}{8} - \frac{1}{3} * \frac{3}{8} + \frac{1}{3} * \frac{3}{8} + 1 * \frac{1}{8} = 0;$
- $\mathbb{E}[S^2] = 0 * \frac{1}{4} + \frac{4}{3} * \frac{3}{4} = 1$

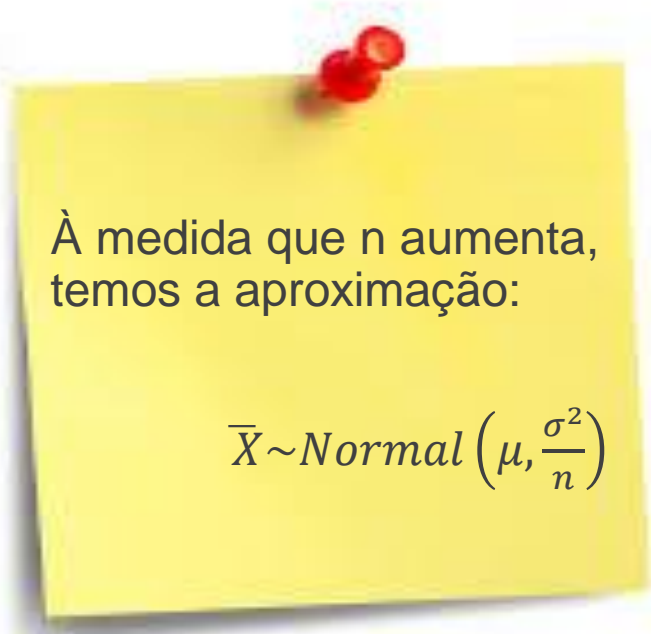
## Observações:

- Se  $X$  é a variável aleatória que representa o resultado obtido com o lançamento da moeda (-1 ou 1), sabemos que a média verdadeira de  $X$  é  $\mu = 0$ ;
- Portanto a esperança de  $\bar{X}$  é igual a  $\mu = 0$ . Chamamos  $\bar{X}$  de estimador não viciado de  $\mu$ , devido à essa característica;
- $S^2$  é também estimador não viciado de  $\sigma^2$ .

# Distribuições Amostrais

---

Qual a distribuição de  $\bar{X}$ ? Teorema Central do Limite:

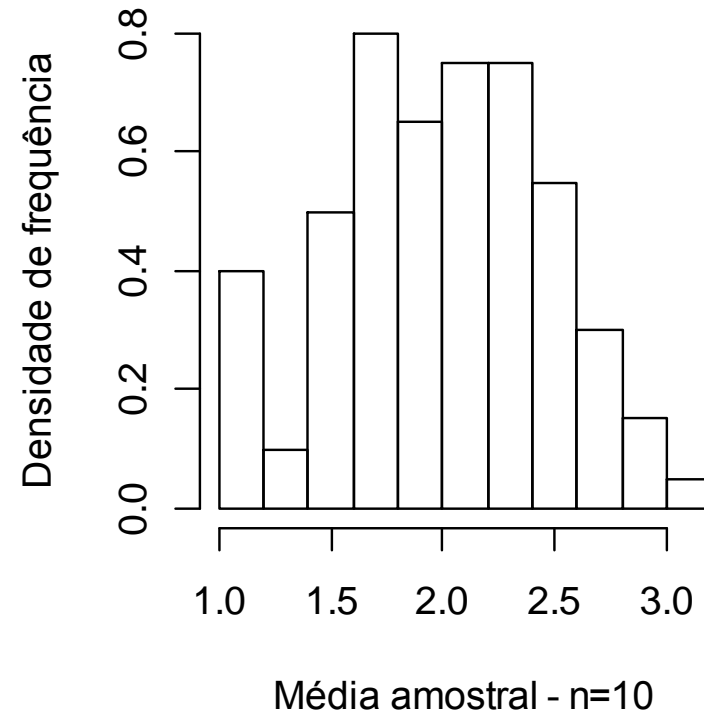
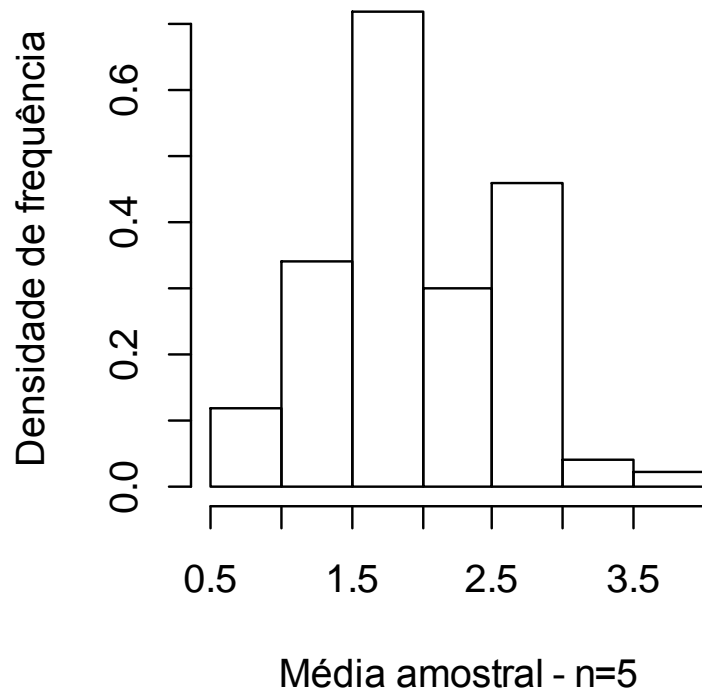


À medida que  $n$  aumenta,  
temos a aproximação:

$$\bar{X} \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

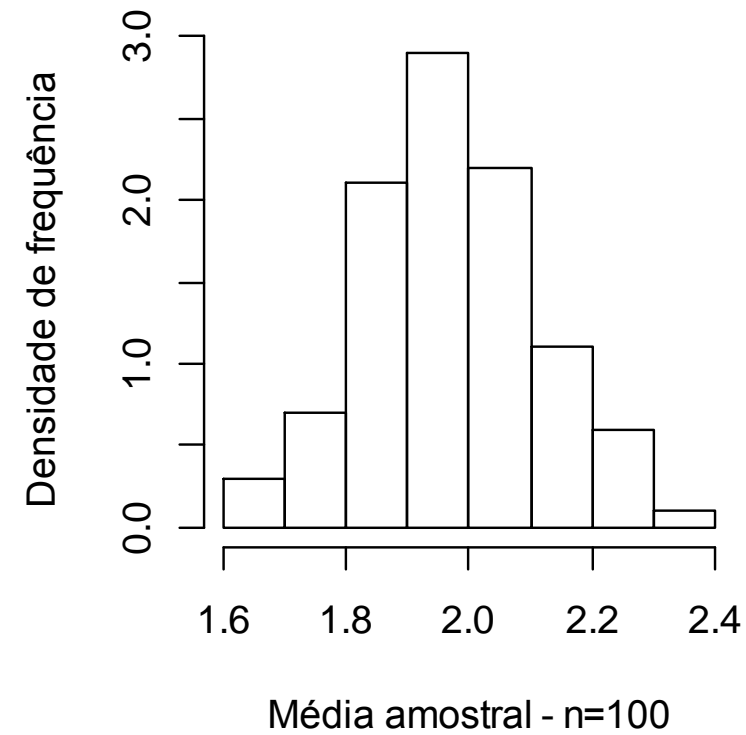
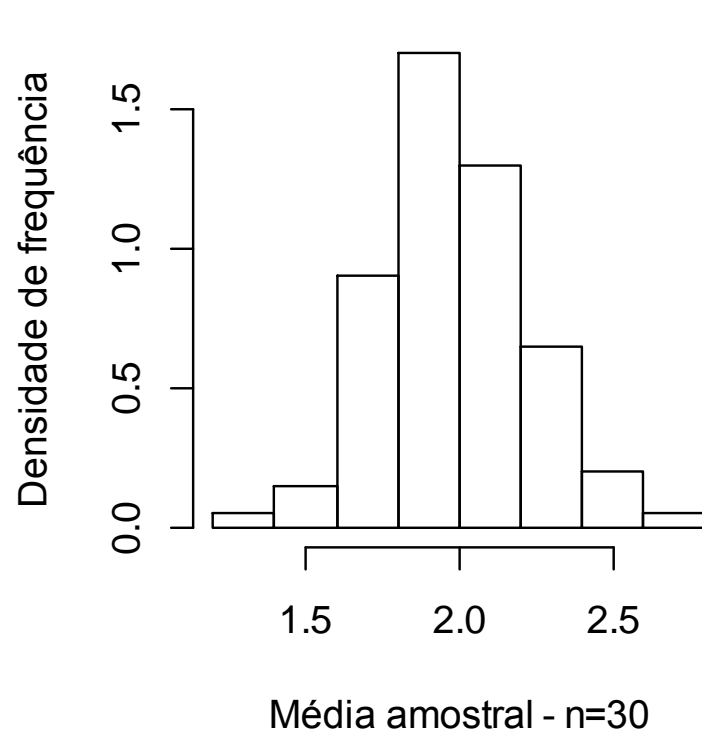
# Distribuições Amostrais

**Exemplo:** 100 amostras de tamanho  $n$  simuladas de uma variável aleatória  $X$  que seguia distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 2$ .



# Distribuições Amostrais

---





# Distribuições Amostrais

---

**Exercício 1:** Uma variável aleatória  $X$  assume os valores 3, 6 e 8 com, respectivamente probabilidades 0.4, 0.3 e 0.3. Responda:

(a) Qual a esperança de  $X$  ( $\mu$ )?

(b) Qual a variância de  $X$  ( $\sigma^2$ )?

(c) Se uma amostra com 40 observações é coletada, usando o Teorema Central do Limite, qual seria a distribuição da média amostral  $\bar{X}$ ?

(d) Considerando a distribuição calculada no item anterior, qual seria a probabilidade de se observar numa amostra  $\bar{X}$  entre 1,3 e 9,5?

**Exercício 2:** Seja  $X$  a variável aleatória que representa o tempo de duração de uma chamada telefônica em minutos. Se  $X$  tem média  $\mu = 3$  e variância  $\sigma^2 = 9$ , qual a distribuição amostral de  $\bar{X}$  para uma amostra de tamanho 50? Qual a probabilidade de se observar na amostra um tempo médio de atendimento menor do que 4 minutos?

# Distribuições Amostrais

---

## Distribuição amostral de proporções

- Consideremos a variável aleatória  $X$  que indica se uma observação tem determinada característica (1, se tem e 0, se não tem);
- Portanto,  $X$  segue distribuição Bernoulli de parâmetro  $p$ , em que  $p$  é a probabilidade de apresentar tal característica;
- Então,  $\mathbb{E}[X] = p$  e  $\text{Var}(X) = p(1 - p)$ ;
- Então  $\hat{p} = \sum \frac{X}{n}$  seria a proporção de observações numa amostra de tamanho  $n$  com tal característica;
- Pelo Teorema do Limite Central:  $\hat{p}$  segue distribuição aproximadamente Normal com média  $p$  e variância  $p(1-p)/n$ .

# Distribuições Amostrais

---

**Exercício 3:** Suponha que a proporção de peças defeituosas em um lote é de 40%. Em uma amostra de tamanho 30, qual seria a distribuição da proporção de peças defeituosas na amostra? Considerando essa distribuição, qual a probabilidade de se observar menos do que 50% de peças defeituosas?

**Exercício 4:** Um fabricante afirma que sua vacina contra gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 pessoas que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver certo, qual é a probabilidade da proporção de imunizados na amostra ser inferior à 0.75? E superior à 0.85?

---