Modelagem de equações estruturais

TUANY DE PAULA CASTRO

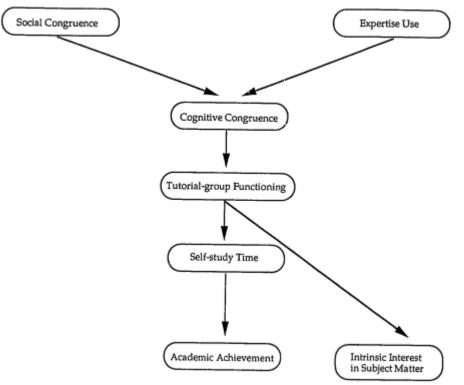
A Modelagem de Equações Estruturais (MEE) é uma família de modelos estatísticos que buscam explicar as correlações entre múltiplas variáveis.

- A técnica examina a estrutura de inter-relações expressas em uma série de equações;
- * A série de equações se assemelha às equações de regressão múltipla;
- São envolvidos na análise fatores inobserváveis (latentes), assim como na análise fatorial;
- Os fatores latentes são chamados construtos e representados por múltiplas variáveis.

A MEE pode ser vista como uma combinação das técnicas de análise fatorial e análise de regressão múltipla.

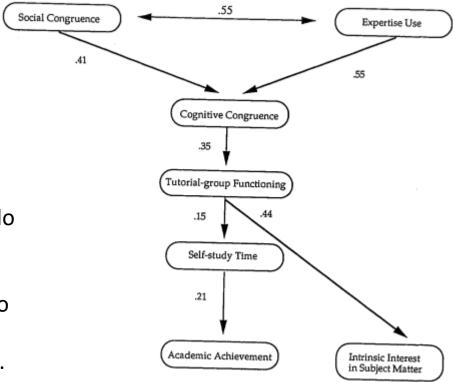
Exemplo: Schmidt e Moust (1995) estudaram um modelo causal da influência do comportamento do tutor no sucesso acadêmico dos alunos.

Modelo teórico dos comportamentos dos professores e suas relações com outros elementos da aprendizagem. O termo congruência social refere-se à vontade de um tutor de agir de forma informal com os alunos e exibir uma atitude atenta. A congruência cognitiva refere-se à capacidade do tutor de usar explicações que são facilmente compreendidas pelos alunos.



Caminhos causais e coeficientes de caminho significantes do modelo.

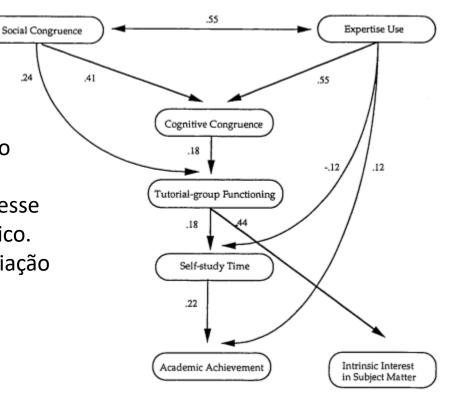
Observam-se coeficientes elevados entre uso de expertise pessoal, congruência social e congruência cognitiva. A congruência cognitiva mostrou relação com funcionamento do grupo. Porém, o funcionamento do grupo não teve grande relação com tempo de estudo que, por sua vez, foi o único fator preditor para sucesso acadêmico escolhido no modelo inicial.



Foi testado um novo modelo teórico com mais interações entre as

variáveis.

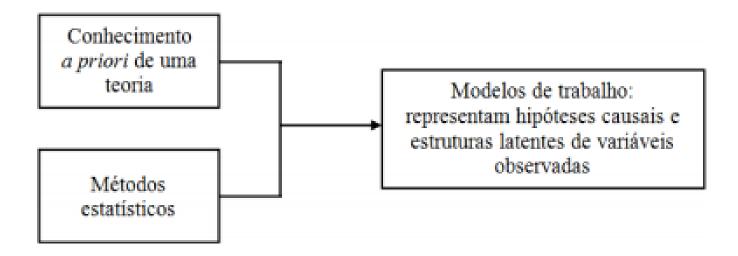
Nota-se uma discreta associação negativa entre uso de expertise pelo tutor e tempo de estudo e uma pequena associação positiva entre esse uso de expertise e sucesso acadêmico. Esse modelo também mostra associação positiva entre congruência social e funcionamento do grupo.



- Praticamente todos os modelos estudados que usam Mínimos Quadrados Ordinários (como Regressão Linear) podem também ser feitos pela MEE;
- A diferença básica é que os parâmetros e erros padrão podem ser calculados por Máxima Verossimilhança na MEE ao invés de Somas de Quadrados.



A idéia geral da MEE:



Pressupostos da análise:

- Distribuição Normal Multivariada (método de máxima verossimilhança);
- Linearidade: relações lineares entre variáveis;
- Erros não correlacionados: erros de uma variável não correlacionados com erros de outras variáveis;
- Tamanho amostral: muitos pesquisadores afirmam de 200 a 400 casos com 10 a 15 variáveis. Como regra geral, recomendam-se 10 a 20 vezes mais casos do que variáveis.

A MEE apresenta algumas vantagens em relação a outras técnicas multivariadas:

- Permite a incorporação dos erros de medição no processo de estimação do modelo;
- Consiste na estimação simultânea de diversas relações de dependência inter-relacionadas;
- ❖ Permite que uma variável dependente em uma etapa do modelo se torne uma variável independente nas subsequentes relações de dependência;
- A capacidade de definir suposições elaboradas com base no suporte técnico e incluí-las no modelo dá a MEE flexibilidade no exame de questões analíticas dos dados.

As variáveis do modelo são classificadas com relação à mensuração em:

- Variáveis latentes (ou construtos): conceitos teóricos que não são mensuráveis diretamente;
- Variáveis de medição (observadas): valores observados de itens ou questões específicas. São usadas como indicadores de construtos.

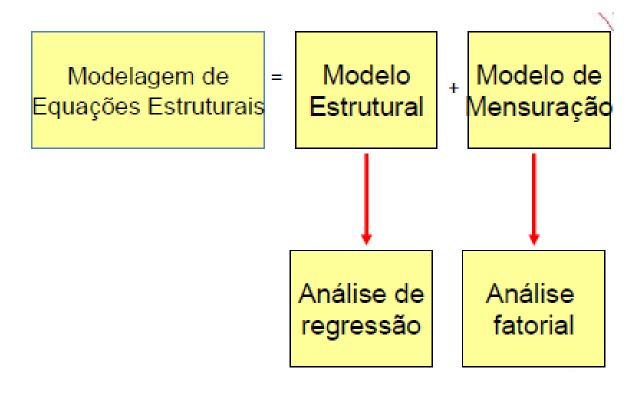
E, com relação à influência, em:

- Variáveis exógenas: não são influenciadas ou não sofrem efeito de outras variáveis do modelo (independentes ou preditoras), podendo ser quantitativas ou qualitativas;
- Variáveis endógenas: são dependentes e recebem influência de outras variáveis do modelo.

A MEE pode ser vista como um conjunto de relacionamentos que proporcionam explicações consistentes e compreensivas de fenômenos reais. Há dois tipos de modelos:

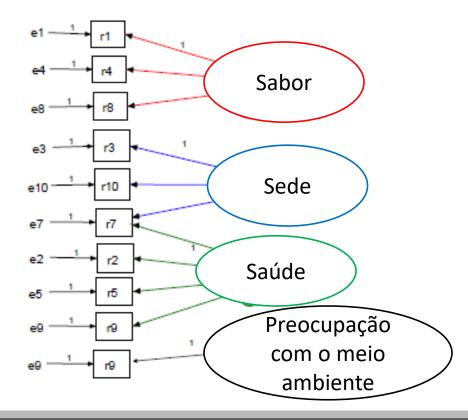
- ❖ Modelos estruturais: especificam e descrevem as relações causais entre os construtos através da análise simultânea de várias relações de dependência correlacionadas (análise de regressão).
- * Modelos de mensuração: especificam como as variáveis latentes são mensuradas através das variáveis observadas (análise fatorial);

Modelagem de equações estruturais são também chamadas de modelagem casual por testarem as relações causais propostas.



Exemplo – Modelo de Mensuração: Considere um questionário aplicado a uma amostra acerca de uma bebida.

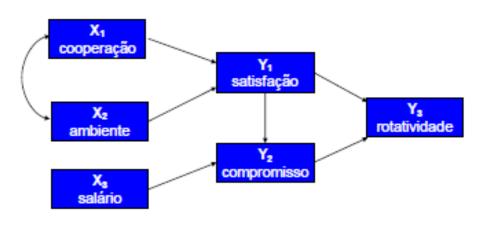
X1	A marca tem um sabor refrescante.
	Prefiro essa marca por ter menos calorias.
X3	A marca elimina minha sede imediatamente.
X4	Gosto do sabor adocicado da marca.
X5	Prefiro consumir a marca após atividade física, pois me dá energia.
X6	Prefiro a marca pois vem numa embalagem que não agride o meio ambiente.
Х7	A marca tem minerais e vitaminas que mantêm baixa a necessidade de água de meu corpo.
X8	A marca tem um sabor único.
X 9	A marca possui uma mistura de minerais e vitaminas que é saudável para o meu corpo.
X10	Eu prefiro a marca quando realmente estou com sede.



Exemplo – Modelo Estrutural: Considere um estudo para explicar a rotatividade da mão de obra numa empresa.



Exemplo – Modelo Estrutural: Considere um estudo para explicar a rotatividade da mão de obra numa empresa.



$$Y_{1} = \gamma_{11}X_{1} + \gamma_{12}X_{2} + \varsigma_{1}
Y_{2} = \beta_{21}Y_{1} + \gamma_{23}X_{3} + \varsigma_{2}
Y_{3} = \beta_{31}Y_{1} + \beta_{32}Y_{2} + \varsigma_{3}$$

Etapas da análise:

- 1. Especificação do modelo.
- 2. Identificação do modelo.
- 3. Estimação do modelo.
- 4. Avaliação do ajuste do modelo.
- 5. Re-especificação do modelo.

São construídos diagramas de caminhos para o desenvolvimento dos modelos de medição:

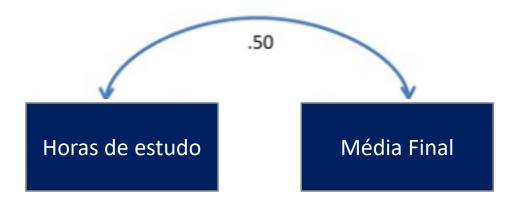
- Transmitem as idéias conceituais básicas do modelo;
- Fontes para derivação das equações;
- Variáveis dependentes recebem flechas de sentido único;
- Inclusão de todas as influências diretas;
- Relações causais lineares.

Os diagramas de caminho permitem a rápida visualização das relações de interdependência consideradas no modelo:

Símbolo	Descrição
Quadrados ou retângulos	representam as variáveis observadas, variáveis medidas pelo pesquisador. Outros termos: variável manifesta ou indicador quando representada como medida de uma variável latente.
Elipses ou círculos	representam os construtos latentes (um construto hipotético não observado). Fator é outro termo utilizado para representar variáveis latentes.
→ Seta com uma ponta	Seta com uma ponta – indica o caminho ou a relação de causa entre duas variáveis e um efeito direto entre elas. Por exemplo, X → Y, X afeta Y de um modo unidirecional.
Duas setas	representam a relação bidirecional entre duas variáveis. Por exemplo, $Y_1 \rightleftharpoons Y_2$, a influência entre Y_1 e Y_2 é bidirecional, outro termo utilizado <i>feedback loop</i> .
Seta com duas pontas	Seta com duas pontas – representa correlação ou covariância, X₁ ← X₂ duas variáveis são assumidamente covariantes, mas não há mais uma hipótese especifica de como essa correlação aparece. Outro termo: associação não analisada.

Notação:

- Retângulos indicam variáveis observadas;
- Flechas duplas indicam covariâncias;
- ❖ Se as variáveis forem padronizadas, as flechas indicam correlação de Pearson.



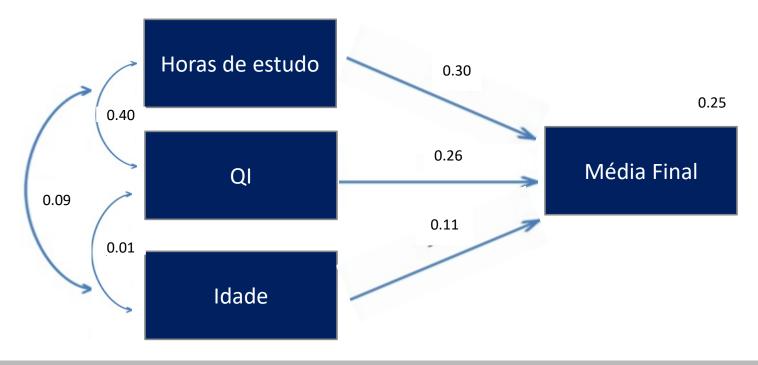
- Flechas simples são caminhos;
- IV indica variável exógena (setas não apontam para elas);
- DV indica variável endógena (setas apontam para elas);
- Nesse exemplo, horas de estudo é IV e a média final é DV;
- Este exemplo seria um modelo de regressão linear simples.



- Variáveis exógenas têm variância como parâmetro;
- Variáveis endógenas têm variância residual como parâmetro (isto é, a porção da variância não explicada pelo modelo);
- Esses raramente são indicados nos diagramas, porém vale lembrar para a contagem de parâmetros e aplicações mais avançadas.



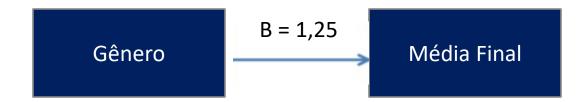
- Pode-se construir modelos de regressão múltipla;
- \Leftrightarrow Valores de \mathbb{R}^2 frequentemente ficam no canto superior direito das variáveis endógenas.



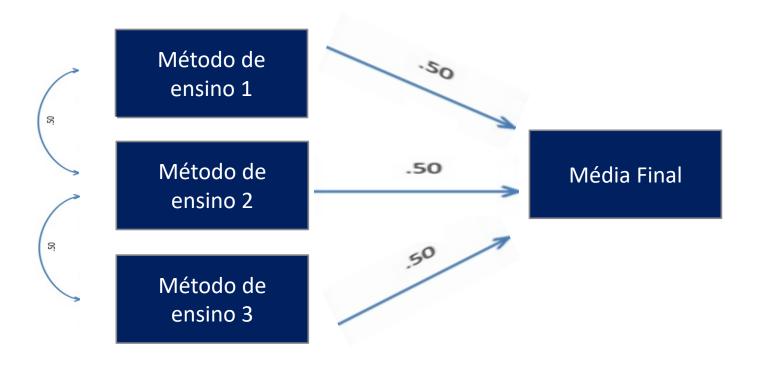
Uma mesma variável pode ser endógena numa relação e exógena em outra.



- Pode-se construir testes t para comparação de médias;
- ❖ O valor apresentado pela flecha é o valor-t do teste.



Pode-se construir modelo ANOVA.



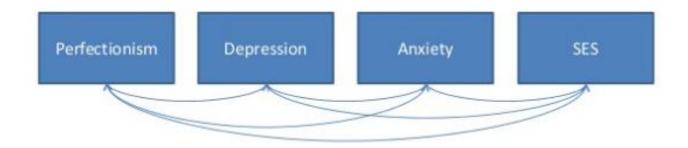
- A MEE também pode ser usada para testar teorias sobre relações mais complexas entre variáveis;
- Formas ovais indicam variáveis latentes.



Regras para construção dos diagramas de caminho:

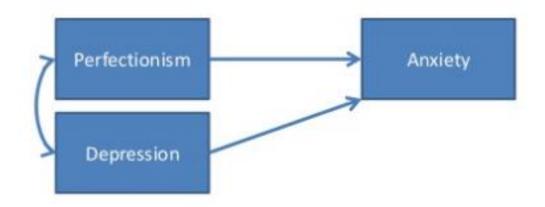
- Todo caminho, correlação ou variância é um parâmetro do modelo;
- O número de parâmetros não pode exceder o número p(p+1)/2, em que p é o número de variáveis observadas;
- Se o número de parâmetros exceder o limite especificado, o modelo torna-se não-identificado e não pode ser estimado por MEE.

Modelo saturado:



- \Rightarrow Limite: p(p+1)/2 = 4*5/2 = 10;
- ❖ 4 variâncias e 6 covariâncias = 10 parâmetros.

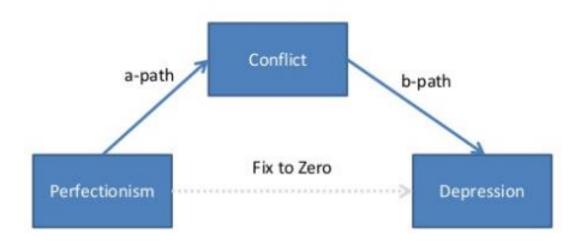
Outro modelo saturado:



- Limite: p(p+1)/2 = 3*4/2 = 6;
- ❖ 3 variâncias, 1 covariância e 2 caminhos = 6 parâmetros.

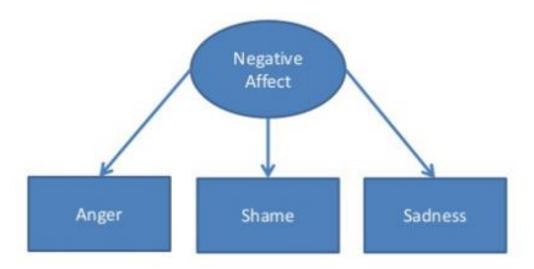
- Modelos saturados são interessantes porém às vezes modelos mais simples podem se ajustar melhor aos dados e dar mais poder para detecção de efeitos;
- A MEE permite testar o ajuste de modelos mais simples com caminhos ou covariâncias removidas;
- O teste do ajuste é feito verificando se o novo modelo mais simples proposto se ajusta bem aos dados.

Modelo não saturado:



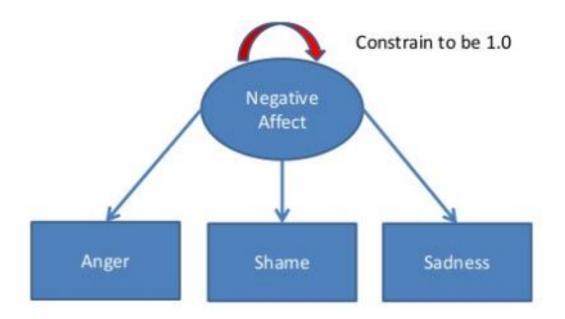
- \Rightarrow Limite: p(p+1)/2 = 3*4/2 = 6;
- ❖ 3 variâncias e 2 caminhos = 5 parâmetros.

Pode-se encontrar alguns problemas na identificação dos modelos:

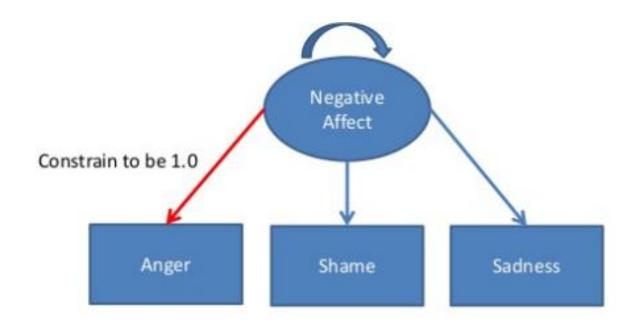


- \blacksquare Limite: p(p+1)/2 = 3*4/2 = 6
- Número de parâmetros: 7 (3 variâncias para variáveis observadas, 1 variância para a variável latente e 3 caminhos).

Uma possível solução é fixar a variância da variável latente igual a 1.



Uma outra solução possível seria fixar igual a 1 um dos caminhos (tipicamente aquele que é esperado ter a maior carga)



Estimação do Modelo

- Modelos com mais parâmetros do que o limite têm infinitas soluções;
- Os parâmetros são estimados de acordo com algum critério matemático;
- O objetivo na estimação é minimizar as diferenças entre as matrizes de covariância observada e ajustada;
- ❖ O processo de estimação dos parâmetros é feito iterativamente até que um determinado critério de ajuste seja alcançado.

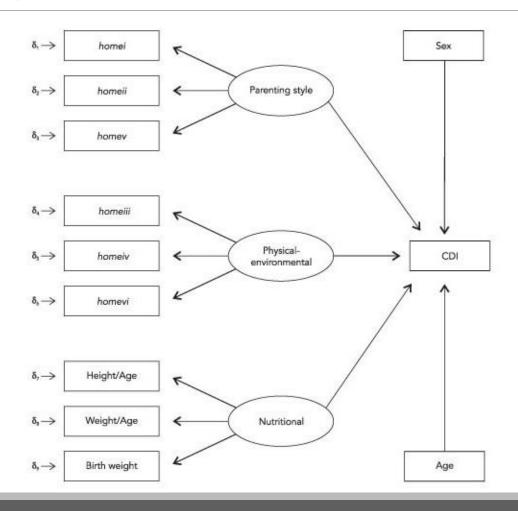
Exemplo

Um estudo epidemiológico foi feito para avaliar a relação entre status nutricional, condições socioeconômicas, qualidade de estímulo em casa e desenvolvimento cognitivo em 320 crianças de 20 a 42 meses de vida na cidade de Salvador. As seguintes variáveis foram observadas:

- capacidade de respostas emocionais e verbais (homei);
- falta de punição e restrição (homeii);
- organização do ambiente físico e temporal (homeiii);
- disponibilidade de brinquedos e materiais adequados para a idade da criança (homeiv);
- envolvimento materno com a criança (homev);
- oportunidade de variação no estímulo (homevi);

- pontuação antropométrica de altura por idade (height/age);
- pontuação antropométrica de peso por idade (weight/age);
- peso de nascimento em kg;
- sexo (1 se feminino, 0 se masculino);
- idade em meses;
- índice de desenvolvimento cognitivo da criança.

5/17/2019



5/17/2019

Construto estilo dos pais:

- capacidade de respostas emocionais e verbais;
- falta de punição e restrição;
- envolvimento materno com a criança.

Construto ambiente físico:

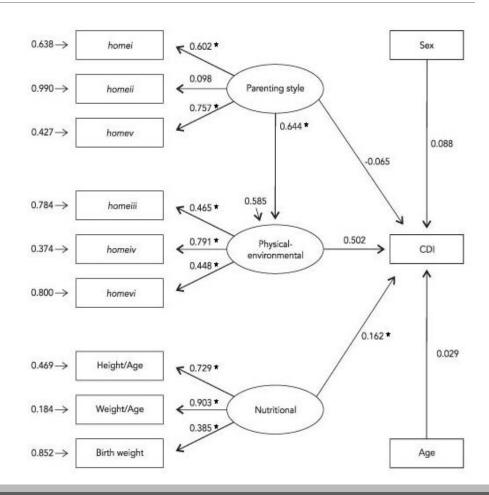
- organização do ambiente físico e temporal;
- disponibilidade de brinquedos e materiais adequados para a idade da criança;
- oportunidade de variação no estímulo

Construto nutricional:

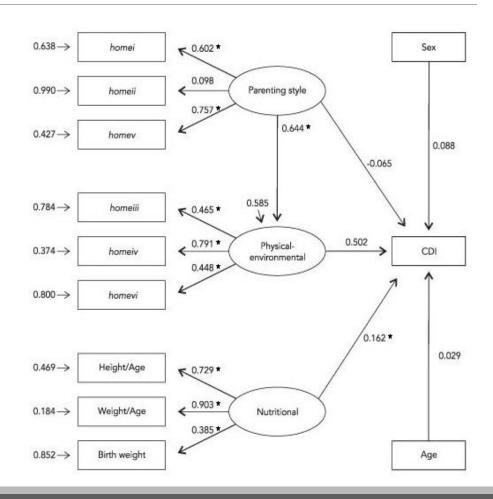
- altura/idade;
- peso/idade;
- peso ao nascer.

Para interpretação do diagrama de caminhos, as cargas fatoriais padronizadas nas medidas do modelo podem ser interpretadas como correlações entre os indicadores e os correspondentes construtos.

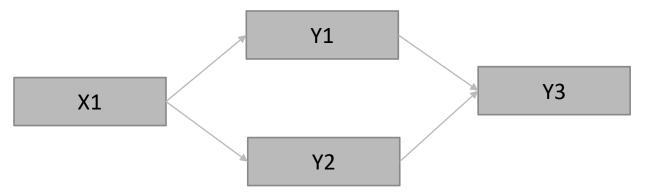
- Construto de Estilo do pais: grande contribuição de envolvimento materno com a criança e não significativo com falta de punição e restrição;
- Construto do Ambiente: maior contribuição de Disponibilidade de brinquedos e materiais adequados para a idade da criança;
- Construto nutricional: a variável com maior contribuição é peso/idade.



- O indicador ambiente físico é o que mais influencia o CDI;
- O fator nutricional também foi significantemente associado com CDI;
- A variável latente estilo dos pais não foi diretamente associada ao CDI, assim como sexo e idade da criança.



1) Considere o modelo estrutural:



- (a) Especifique o modelo em termos de equações.
- (b) Avalie a identificabilidade do modelo.
- (c) Estime o modelo e comente.

- 2) Os dados-alimentacao.csv contém cinco variáveis relacionadas ao preço e consumo de alimentos de uma região ao longo de 20 anos.
 - Q: consumo de alimentos per capita
 - P: relação entre os preços dos alimentos e os preços gerais do consumidor
 - D: renda disponível em dólares
 - F: razão entre os preços recebidos pelos agricultores nos anos precedentes e preços gerais do consumidor;
 - A: tempo em anos

Queremos avaliar se o consumo de alimentos per capita pode ser explicado pelas variáveis P e D.

(a) Faça o diagrama de caminhos para esse modelo.

- (b) O modelo é identificável?
- (c) Estime o modelo de equações estruturais por máxima verossimilhança e interprete.
- (d) Qual outra técnica estatística poderia ser utilizada nesse exercício?
- **3)** Os dados-mentais.csv consistem em seis testes mentais feitos em 32 crianças. As três variáveis x1, x2 e x3 destinam-se a carregar uma variável latente verbal e as demais três variáveis y1, y2 e y3, uma variável latente matemática.
 - x1, x2 e x3 são os escores de três testes verbais aplicados;
 - y1, y2 e y3 são os escores de três testes matemáticos aplicados;
 - Pode haver correlação entre os fatores de inteligência verbal e em matemática.

- (a) Faça o diagrama de caminhos para esse modelo.
- (b) O modelo é identificável?
- (c) Estime o modelo de equações estruturais por máxima verossimilhança e interprete.
- (d) Qual outra técnica estatística poderia ser utilizada nesse exercício?

Ajuste refere-se à habilidade do modelo de reproduzir os dados (isto é, frequentemente, a matriz de covariâncias).

	1	2	3
1. Perfect	2.6		
2. Conflict	.40	5.2	
3. Depression	0	.32	3.5

	1	2	3
1. Perfect	2.5		
2. Conflict	.39	5.3	
3. Depression	.03	.40	3.1

Na MEE, as matrizes de covariâncias observada e esperada são comparadas.

Qui-Quadrado

A avaliação da discrepância entre as matrizes é condensada em um único número referente ao teste de hipóteses:

 H_0 : o modelo se ajusta bem aos dados H_1 : o modelo não se ajusta bem aos dados

- A estatística de teste é uma função do tamanho amostral e das diferenças entre as matrizes de covariâncias observada e esperada;
- \clubsuit A estatística de teste, sob H_0 , segue distribuição X^2 com graus de liberdade $df=\frac{p(p+1)}{2}-n\'umero\ de\ par\^ametros;$
- \Leftrightarrow Interesse em aceitar H_0 , ou seja, valor-p > 0,05.

O teste qui-quadrado apresenta alguns problemas na avaliação da qualidade do ajuste:

- É muito sensível e acaba levando à rejeição da hipótese nula frequentemente;
- É um teste ligado ao tamanho da amostra, de maneira que, conforme o tamanho amostral aumenta, a probabilidade de uma estatística significante aumenta;
- \clubsuit Tem uma taxa alta de erro do tipo II (aceitar H_0 quando é falsa), que piora com o aumento do tamanho amostral.

Qui-quadrado/graus de liberdade

- Essa estatística é melhor do que somente a qui-quadrado, pois compensa o erro do tipo II em amostras grandes;
- Critério para avaliação:
 - Se menor do que 2, ajuste excelente;
 - Se 2 a 5, ajuste bom;
 - Se maior do que 5, ajuste pobre.

Índice de Comparação do Ajuste (CFI)

- Compara o modelo proposto com o modelo "nulo", ou seja, o modelo onde todas as variáveis são não correlacionadas;
- ❖ A estatística de teste usa o valor de X² e os graus de liberdade do modelo nulo e do modelo proposto;
- ❖ Os valores de CFI variam entre 0 e 1, sendo o ajuste considerado perfeito se o valor for maior do que 0,95 e bom se maior do que 0,80.

Índice de Tucker-Lewis (TLI)

- Esse índice associa uma penalidade a modelos mais complexos, ou seja, dá preferência a modelos mais simples;
- ❖ A penalidade associada ao modelo é baseada em seus graus de liberdade;
- São comparados, mais uma vez, o modelo proposto e o modelo nulo;
- Valores maiores do que 0,95 indicam ajuste perfeito e bom se maior do que 0,80;
- * É um índice mais conservador, isto é, rejeita mais os modelos do que o CFI.

Raiz do Erro Quadrático Médio de Aproximação (RMSEA)

- Reflete a diferença média entre a covariância observada e a do modelo;
- Também oferece penalidade a modelos mais complexos;
- ❖ Indica bom ajuste se menor do que 0,05.

Raiz quadrada média residual (SRMR)

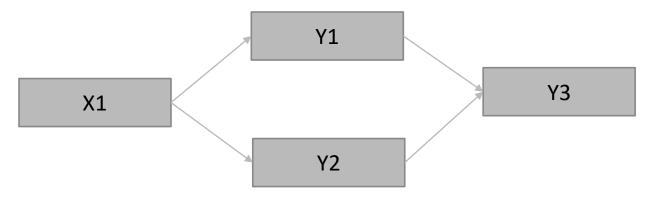
- É uma medida absoluta do ajuste definida como a diferença padronizada entre a matriz de correlação observada e a matriz de correlação ajustada;
- Um valor menor ou igual a 0,08 indica bom ajuste (isto é, resíduos pequenos);
- Não tem penalidade pela complexidade do modelo.

O Qui-quadrado para avaliação da qualidade do ajuste foi significante (valor-p = 0,002), sugerindo que os dados não estão bem ajustados ao modelo. Entretanto, os critérios RMSEA (0,049), CFI (0,935), TLI (0,906) e SRMR (0,041) indicam que o modelo se ajuste razoavelmente bem aos dados. Os índices de modificação sugerem a inclusão da relação entre os indicadores *homei* e *homev* e o construto ambiente físico.

Com a inclusão dessa relação e a remoção das variáveis sexo e idade, o modelo ficou bem ajustado:

- qui-quadrado = 37,6 com 31 graus de liberdade (valor-p = 0,19);
- RMSEA = 0,026;
- \blacksquare CFI = 0,986;
- \blacksquare TLI = 0,980;
- \blacksquare SRMR = 0,036.

4) Considere o modelo estrutural do primeiro exercício:



Se o modelo estiver mal ajustado, proponha um novo modelo e comente.

- 5) Volte ao exercício 2 e verifique a qualidade do ajuste do modelo.
- 6) Volte ao exercício 3 e verifique a qualidade do ajuste do modelo.

7) Os *dados-canada.csv* referem-se ao questionário para o Estudo de Eleição Nacional Canadense de 1997 e são destinados a estudar a influência da atitude em relação aos valores tradicionais. O conjunto contém 1529 observações e seguintes quatro variáveis:

- •MBSA2: fator ordenado com níveis "Discordo totalmente", "Discordo", "Concordo" e "Concordo totalmente" para a questão "Nós deveríamos ser mais tolerantes com as pessoas que escolhem viver de acordo com seus próprios padrões, mesmo se eles forem muito diferentes";
- MBSA7: fator ordenado com níveis "Discordo totalmente", "Discordo", "Concordo" e "Concordo totalmente" para a questão "Novos estilos de vida estão contribuindo para a quebra de nossa sociedade";

- •MBSA8: fator ordenado com níveis "Discordo totalmente", "Discordo", "Concordo" e "Concordo totalmente" para a questão "O mundo está sempre mudando e nós deveríamos adaptar nossa visão de comportamento moral a essas mudanças";
- MBSA9: fator ordenado com níveis "Discordo totalmente", "Discordo", "Concordo" e "Concordo totalmente" para a questão "Esse país teria menos problemas se houvesse mais ênfase nos valores da família tradicional".

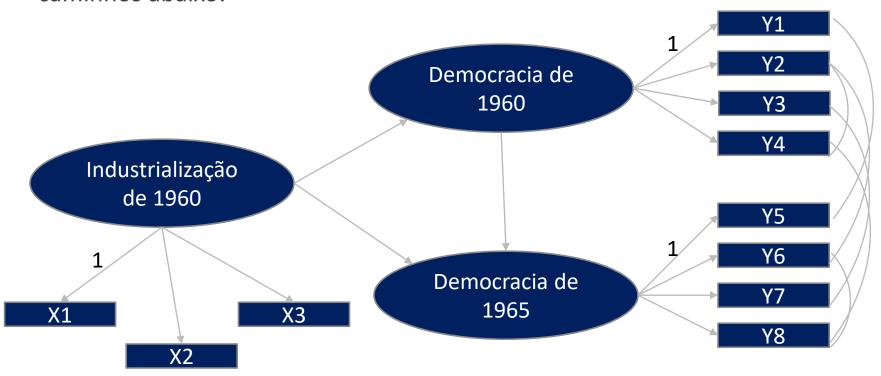
Estamos interessados em avaliar o seguinte modelo:



- (a) Expresse o modelo em termos de equações.
- (b) O modelo é identificável?

- (c) Utilizando o método de Máxima Verossimilhança, estime o modelo. Comente.
- (d) Analise a qualidade do ajuste.
- **8)** Considere o arquivo dados-democracia.csv. Esse conjunto inclui quatro medidas de democracia dos anos de 1960 e 1965, para 75 países em desenvolvimento. As variáveis observadas seguem descritas abaixo:
 - y1 e y5: liberdade de imprensa em 1960 e 1965, respectivamente
 - y2 e y6: liberdade de oposição política em 1960 e 1965, respectivamente
 - y3 e y7: imparcialidade das eleições em 1960 e 1965, respectivamente
 - y4 e y8: efetividade da legislatura eleita em 1960 e 1965, respectivamente
 - x1: renda per capita em 1960
 - x2: consumo de energia per capita em 1960
 - x3: porcentagem da força de trabalho na indústria em 1960

Tem-se interesse em estudar o modelo dado pelo diagrama de caminhos abaixo:



- (a) Especifique o modelo em termos das variáveis latentes, modelos de regressão e medidas de covariância.
- (b) Discuta sobre a identificabilidade do modelo.
- (c) Utilizando o método de Máxima Verossimilhança, estime o modelo. Comente.
- (d) Analise a qualidade do ajuste do modelo e a necessidade de modificações.

Avaliação

Em dados_moda_sustentavel.csv encontram-se os resultados da aplicação de um questionário sobre a opinião de 260 pessoas acerca da moda sustentável em 35 questões. Além disso, também foram coletadas variáveis de controle como idade, gênero, escolaridade e renda.

Acredita-se que algumas questões estão associadas a variáveis latentes dadas abaixo:

- Conhecimento de moda sustentável: questões 6, 7 e 8;
- Confiança no mercado de moda atual: questões 9, 10 e 11;
- Apoio a causas ambientais e animais: questões 12, 13, 14 e 15;
- Apoio a causas sociais: questões 16, 17 e 18;
- Realce do status: questões 20, 21 e 22;

Avaliação

Sacrifício pessoal: questões 23, 24 e 25;

- Percepção de eficácia: questões 26, 27 e 28;
- Consciência de preço: questões 29, 30 e 31;
- ■Resistência à mudança: questões 32, 33 e 34;
- Atitude: questões 35, 36, 37 e 38;
- Intenção de compra: questões 39, 40 e 41.

Avaliação

O estudo consiste em avaliar a significância das variáveis na formação dos construtos e ainda verificar se:

- A atitude depende de conhecimento, confiança, apoio a causas ambientes e animais, apoio a causas sociais, realce, consciência de preço, sacrifício pessoal, percepção de eficácia e resistência à mudança;
- A intenção de compra depende da atitude, do gênero, da idade, da escolaridade e da renda.

Faça a análise dos dados por meio da modelagem de equações estruturais. Analise a significância das associações em estudo, a qualidade do ajuste do modelo e necessidade de modificações.

Observação: Re-categorize as variáveis de controle para melhor entendimento. As questões podem ser vistas no arquivo questoes_moda_sustentavel.doc.

Referências

- BISQUERRA, R; CASTELLA, J.; VILLEGAS, F. Introdução à estatística: enfoque informático com o pacote estatístico SPSS. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- DANCEY, Cristine P; REIDY, John. Estatística sem Matemática Para Psicologia. 3 edição. Porto Alegre: Artmed, 2006.
- HAIR, J.; ANDERSON, R.; BLACK, W. Análise multivariada de dados. 6 ed. Reimp. Porto Alegre: Bookman, 2009.
- VINZI, E.; CHIN, W.; HENSELER, J. and WANG, H. Handbook of Partial Least Squares: Concepts, Methods and Applications. Springer Handbooks of Computational Statistics.