概率论与数理统计部分

第一讲　随机事件与概率

一、知识要点

1．准备知识：熟悉加法原理，乘法原理，无重复排列，可重复排列，组合等知识.

2．随机事件（样本空间的子集）的关系与运算.

（1）事件的包含，相等，和事件，积事件，差事件，对立事件，互斥事件，独立事件

（2）交换律，结合律，分配律，吸收律，De Morgan 律

（3）常用结论：

$$\varnothing \subset A \subset \Omega; AB \subset A \subset (A \cup B); A - B = A\overline{B} \subset A; A \cup \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \varnothing$$

$$A \cup B = A\overline{B} \cup AB \cup \overline{A}B; \overline{(A \cup B)} = \overline{A}\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}; \overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i, \overline{(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i$$

3．随机事件的概率（本部分是核心问题）

（１）定义

①统计定义：大量重复试验的条件下，事件Ａ发生频率的稳定值称作Ａ发生的概率。

②古典概率定义：随机试验Ｅ的样本空间Ω含有有限个基本事件，每个基本事件等可能发生，事件Ａ发生的概率规定为

$$P(A) = \frac{A\text{包含的基本事件}}{\Omega\text{包含的基本事件}} = \frac{k}{n}$$

③几何概率定义：随机试验Ｅ的样本空间Ω是一个区域（直线上的区间，平面或空间的区域），每个基本事件等可能发生，规定事件Ａ的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$$

④公理化定义：随机试验Ｅ的样本空间为Ω，对任意事件 $A \subset \Omega$，赋予一个实数Ｐ（Ａ）称之为事件Ａ的概率，集合函数Ｐ（1）满足三公理

（ｉ） $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

（ii） $P(\Omega) = 1$

（iii） $\{A_i\}$ 为一列事件，$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

⑤条件概率：A，B 为二事件，$P(A)>0$，在事件 A 发生的条件下，B 发生的概率称作条件概率，规定

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

（2）性质

①$P(\varnothing)=0$

②$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\left(A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)\right)$

③$A\subset B$时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$

④$P(\overline{A})=1-P(A)$

⑤$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i\le j\le n}P(AiAj)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$

⑥$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$

（3）计算

① 直接计算

（ i ）用古典概型公式（适用于有限等可能概型）

（ ii ）用几何概型公式（适用于“无限等可能”概型）

（iii）用 Bernoulli 独立试验序列概型（适用于有限，不等可能概型）

② 间接计算

（ i ）用概率的基本性质及推论

（ ii ）用事件的关系及运算法则，将问题转化为与之等价事件的概率

（iii）用加法公式，乘法公式

（iv）用全概公式：$B_i(i=1,2\cdots n)$为完备事件组，则对$\forall A\subset\Omega$,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_i)$$

（ v ）用 Bayes 公式：$B_i(i=1,2\cdots n)$为完备事件组，则对$\forall A\subset\Omega$,有

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_jA)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B)}\qquad(j=1,2,\cdots n)$$

二、例题分析

（一）关于事件运算及概率的基本性质

1．A,B,C 为三个随机事件，与事件 $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$ 相等的是（　　）

A．ABC　　B．$\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}C$　　C．$A\cup B\cup C$　　D．$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

2. A,B,C 为三个随机事件，且 $P(A)=x, P(B)=2x, P(C)=3x;$ 又 $P(AB)=P(BC)=y,$ 则 x 与 y 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{6}$

3．A,B,C 为三个随机事件，且 $P(C\mid AB)=1$，则下列结论正确的是（　　）

A．$P(C)\ge P(A)+P(B)-1$　　B．$P(C)\le P(A)+P(B)-1$

C．$P(C)=P(AB)$　　D．$P(C)=P(A\cup B)$

4．已知 $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$, 则 $P(A\mid B)$ 最小可能取值等于（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

（二）用古典概型，几何概型，独立试验序列概型计算概率

5．袋中有 13 个球，（ 6 白，7 红）求 A＝“从袋中取出 2 个球中至少有一红球”的概率。

6．10 件产品中有 4 件次品，则 A＝“逐个检查，不连续出现 2 个次品”的概率 $P(A)=$（　　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{2}{5}$

7. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则两数之差绝对值小于 $\frac{1}{3}$ 的概率是多少？

8. n 个人将帽子混在一起，蒙上眼，然后每人任取一顶，求至少有一人拿对自己帽子的概率。

9．将一枚硬币，独立重复掷 5 次，求 A＝“正，反面都至少出现 2 次”的概率。

10.（1）A，B 为随机事件，$0<P(B)<1$，且 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则 $P(A\mid\overline{B})+P(\overline{A}\mid B)=$______。

（2）已知 A，B 仅有一个发生的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A，B 至少有一个不发生的概率为____________。

11．设一枚高射炮弹击落来犯敌机的概率为$\frac{1}{3}$，击伤敌机概率为$\frac{1}{2}$，击不中的概率为$\frac{1}{6}$。设击伤两次也能导致将敌机击落，求 4 门高射炮同时各射击一枚炮弹，能击落敌机的概率。

12．甲袋中有 4 个红球，乙袋中有 8 个球（4 白，4 红）“先从乙袋取一球放入甲袋，再从甲袋取一球放入乙袋”称为一次交换，求 B＝“4 次交换后，甲袋中有 4 个白球”的概率。

13．（1）若$P(A)=1$，试证，对任意随机事件 B 有$P(AB)=P(B)$。

（2）已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{6}$	5/6

，$p\left\{Y=-\frac{1}{2}\right\}=1$，又 n 维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，求向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,X\alpha_3+Y\alpha_1$线性相关的概率。

14．一批元件的合格率为 95%，用某种方法检测时，合格品被误检为不合各品的概率为 0.02；不合格品被误检为合格品的概率为 0.03。

求（1）检测合格率？

（2）用此法测出合格品的可信度。

（3）用此法检测的可靠性。

（四）有关独立性的讨论。

15. 某人向同一目标独立重复射击，每次击中目标的概率为$P(0<P<1)$，则$B=$“此人第 4 次射击恰好第二次命中目标”的概率为（　　）

A. $3P(1-P)^2$　　B. $6P(1-P)^2$　　C. $3P^2(1-P)^2$　　D. $6P^2(1-P)^2$

16. A,B,C为三个随机事件，它们相互独立，如果成立条件（　　）

A. A,B,C两两独立　　B. $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

C. $P(A-B)=1$　　D. $P(A-B)=0$

第二讲　随机变量及其概率分布

一、知识要点

一维随机变量的概率分布

1．随机变量：

随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$ 对 $\forall\omega\in\Omega$，存在惟一实数值 $X=X(\omega)$ 与之对应，则称 $X=X(\omega)$ 为一个随机变量.

（注意：严格地讲“对任意实数 x，集合 $\{\omega\mid X(\omega)\le x\}$（即使得 $X(\omega)\le x$ 的所有样本点 ω 组成的集合）有确定的概率”这一要求应包括在随机变量的定义之中，一般来说，不满足这一条件的情况，在实际中很少遇到，故定义中未提及这一要求）.

2．分布函数：X 为随机变量，对 $\forall x\in R$，称

$$F(x)=p\{X\le x\}\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

求 X 的分布函数。

分布函数有以下性质

① $0\le F(x)\le 1$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

③当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1)\le F(x_2)$

④ $\lim\limits_{x\to a+0}F(x)=F(a)$

由分布函数可求得概率：

$$\begin{cases}P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)\\ P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)\end{cases}$$

3．离散型随机变量与分布律

①若随机变量 X 仅取有限个，至多可列无限个值，则 X 为离散型随机变量。

②离散型随机变量的分布可用分布律表示：

$$P\{X=x_k\}=P_k\ (k=1,2,\cdots\cdots)$$

其中 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k=1,P_k>0\ (k=1,2,\cdots\cdots)$

③分布函数是非降的阶梯函数，对 $\forall x \in R$.

$$F(x)=P\{X \le x\}=\sum_{x_k \le x} P_k$$

在 x_k 处的跃度为，$P_k=F(x_k)-F(x_k-0)(k=1,2\cdots\cdots)$

4．连续型随机变量及其概率密度。

①若随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可以表示成

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

则称 X 为连续型随机变量，其中非负可积函数 $f(x)$ 叫 X 的概率密度函数，它必须满足

（i） $f(x) \ge 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$

（ii） $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$

② X 为连续型随机变量，对 $\forall a,b \in R, a<b,$ 可算得概率：

$$P\{a<X<b\}=P\{a \le X<b\}=P\{a<x \le b\}=P\{a \le x \le b\}=\int_a^b f(x)\,dx$$

③连续型随机变量的性质为

（i）分布函数 $F(x)$ 必为连续函数.

（ii）对 $\forall a \in R, P\{X=a\}=0$.

（iii）在概率密度 $f(x)$ 的连续点处，有 $\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$.

5．几个常见重要随机变量.

①“０－１”分布：X的分布律为

X	0	1
P	1-P	P

则称X服从 $0-1$ 分布，记为 $X \sim B(1,P)$

②二项分布：X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k P^k (1-P)^{n-k} (k=0,1,2,\cdots n)$$

则称X服从参数为 n ，P 的二项分布，记为 $X \sim B(n,P)$

③Poisson 分布：X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(k=0,1,2,\cdots\cdots)$$

则称X服从参数 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布，记为 $X \sim P(\lambda)$

④超几何分布：X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\left(k=0,1,2,\cdots l\right)\left(l=\min(M,n)\right)$$

其中M， N， n为正整数且M≤N，称X服从参数为n，N，M的超几何分布.

⑤均匀分布：若X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称X服从区间$\left[a,b\right]$上的均匀分布，记为$X\sim U\left[a,b\right]$.

⑥指数分布：若X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中常数λ＞0，则称X服从参数为λ的指数分布，记为$X\sim E(\lambda)$.

⑦正态分布：若X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

其中常数$-\infty<\mu<+\infty,\sigma^2>0$，则称X服从参数为$\mu$，$\sigma^2$的正态分布，记为$X\sim N\left[\mu,\sigma^2\right]$。

注（i）当$X\sim N\left[0,1\right]$时，概率密度记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\left(-\infty<x<+\infty\right)$$

而分布函数记为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi\left(t\right)at=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-t^2}{2}}at$$

（ii）$\Phi\left(x\right)$有以下性质：

$$\begin{cases}\Phi\left(0\right)=\frac{1}{2}\\ \Phi\left(-x\right)=1-\Phi\left(x\right)\end{cases};$$

（iii）当$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$时，对$\forall a,b\in R,a<b$, 有

$$P\left\{a<X\le b\right\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

6．随机变量函数的分布．

①设 $g\left(x\right)$ 是一个定义于 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 的函数（$g\left(x\right)$ 一般为连续函数）随机变量 X 的函数 $g\left(X\right)$ 是指这样的一个随机变量 Y：当 X 取值 x 时，它取值 $Y=g\left(x\right)$，记作 $Y=g\left(X\right)$

②当 X 为离散型随机变量时，已知 X 的分布律，如何求 $Y=g\left(X\right)$ 的布律，设 $P\left\{X=x_k\right\}=P_k\left(k=1,2,\mathrm{L\ L}\right)$

则 $Y=g\left(x\right)$ 的分布律为 $P\left\{Y=g\left(x_k\right)\right\}=P_k\left(k=1,2,\mathrm{L\ L}\right)$

注意取相同 $g\left(x_k\right)$ 值对应的那些概率应合并相加

③当 X 为连续随机变量时，已知 X 的概率密度如何求 $Y=g\left(X\right)$ 的概率密度为求 $Y=g\left(X\right)$ 的概率密度，可先求它的分布函数（所谓的分布函数法）

设 X 的概率密度为 $f\left(x\right)$，则 $Y=g\left(x\right)$ 的分布函数为，对 $\forall y\in R$，

$$F_Y\left(y\right)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{g\left(X\right)\le y\right\}=P\left\{X\in I_y\right\}=\int_{I_y} f\left(x\right)dx$$

其中 $\left\{X\in I_y\right\}$ 是与 $\left\{g\left(X\right)\le y\right\}$ 相等的随机事件，而 $I_y=\left\{x\mid g\left(x\right)\le y\right\}$ 是实数轴上某个集合（通常可以表示为一个区间或若干区间的并集）．

④两个定理

［定理］设随机变量 X 有概率密度 $f_x\left(x\right)\left(-\infty<x<+\infty\right)$，又知函数 $y=g\left(x\right)$ 处处可导且恒有 $g'\left(x\right)>0$（或恒有 $g'\left(x\right)<0$），而 $y=g\left(x\right)$ 的反函数为 $x=h\left(y\right)$，则 $Y=g\left(X\right)$ 为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_x\left[h\left(y\right)\right]\mid h'\left(y\right)\mid & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其它其中 $\alpha=\min\left(g\left(-\infty\right),g\left(+\infty\right),\beta=\max\left(g\left(-\infty\right),g\left(+\infty\right)\right)\right)$

［定理］如果 $X:\ N\left(\mu,\sigma^2\right)$，当 $a\neq 0$ 时，$Y=aX+b:\ N\left(a\mu+b,a^2\sigma^2\right)$，特别，

$$\frac{X-\mu}{\sigma}:\ N\left(0,1\right)$$

7．附注：

①几何分布：若随机变量 X 的分布律为

$$P\left\{X=k\right\}=P\left(1-P\right)^{k-1}\left(k=1,2\mathrm{L\ L}\right)$$

则称 X 服从参数为 P 的几何分布。

②对数正态分布：若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中常数 $-\infty<\mu<+\infty,\sigma^2>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的对数正态分布.

③涉及形如 $\int_0^{+\infty}P_n(t)e^{-t}dt$ 的积分时（$P_n(t)$ 是 t 的 n 次多项式）使用 Γ 函数及其性质，往往可化简运算，带来方便

④Γ 函数定义：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$

⑤Γ 函数性质：

（ i ）$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)(\alpha>0)$

（ ii ）$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$

（iii）$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

二、例题分析

（一）用分布的充要条件（分布函数；分布律或概率密度）确定分布中的参数，分布函数与分布律，概率密度的转化。

1．随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{1}{4} & x\le 1\\ ax+b & -1<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}\qquad \text{且}P\{X=1\}=\frac{1}{8}$$

求常数 a,b 的值.

2．设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$。若 $-X$ 与 X 有相同的分布函数，则（　　）

A. $F(x)=F(-x)$　　　　B. $F(x)=-F(-x)$

C. $f(x)=f(-x)$　　　　D. $f(x)=-f(-x)$

3．随机变量 X 的分布函数是连续函数，且 $F(0)=0$，则下列函数可以作为随机变量分布函数的是（　　）

A. $G_1(x)=\begin{cases}1+F\left(\dfrac{1}{x}\right) & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$　　B. $G_2(x)=\begin{cases}1-F\left(\dfrac{1}{x}\right) & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$

C. $G_3(x)=\begin{cases}F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right) & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$　　D. $G_4(x)=\begin{cases}F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right) & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}$

4．随机变量 X 服从参数为 $\lambda(>0)$ 的指数分布 $\left(\text{即} f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\right)$ 则随机变量 $Y=\min\{X,3\}$ 的分布函数是（　　）

A．恰有一个间断点的函数　　B．阶梯函数

C．至少有两个间断点的函数　　D．连续函数

（二）利用概率分布计算事件的概率，或求分布中未知参数

5． x_1,x_2 为二不相等的实数，且 $x_1<x_2$，若 $P\{X<x_2\}=1-\beta,P\{x\ge x_1\}=1-\alpha.$ 则 $P\{x_1\le X<x_2\}=$________________ .

6．已知离散型随机变量X中能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$，相应的概率依次为 $\dfrac{1}{a},\dfrac{3}{2a},\dfrac{5}{4a},\dfrac{7}{8a}$ 则 $P\{|X|\le 2\,|\,X\ge 0\}=$________________ .

7．随机变量 $X: N\left(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}\right),Y: N\left(\mu_2,\sigma_2^{\ 2}\right)$ 且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则（　　）

A．$\sigma_1>\sigma_2$　　B．$\sigma_1<\sigma_2$

C．$\mu_1<\mu_2$　　D．$\mu_1>\mu_2$

8．如果随机变量 X，Y 都服从正态分布 $N\left(3,\sigma^2\right)$，相互独立，且 $P\{X\le -2\}=\dfrac{1}{4}$，求 $P\{\max(X,Y)\le 3,\min(X,Y)\le -2\}$.

9．已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2\xi x_2x_3$，其中 ξ 是在 $(0,5)$ 上服从均匀分布的随机变量，求此二次型为正定二次型的概率。

10．到某商店的顾客数服从参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布，假设每名顾客要求售货服务的概率相同，均为 $P(0<P<1)$，而且顾客是否要求服务彼此相互独立。

求（1）要求服务的顾客数的概率分布。

（2）已知有 k 名顾客要求服务，求进店顾客数为 n 的概率。

11．设 X ： $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，事件 $A=\{X>\mu\},B=\{X>\sigma\},C=\{X>\mu+\sigma\}$，如果 $P(A)=P(B)$，求 A,B,C 至多有一个发生的概率。

12．设人的身高 X（单位：厘米）服从正态分布 $N(175,5^2)$，公共汽车设计车门时，问门多高才能使需要低头的人不超过 0.5%?

（已知　$\Phi(1.5)=0.933,\Phi(2)=0.977,\Phi(2.55)=0.995$）

13. 一个房间有三扇完全相同的玻璃窗，其中只有一扇是打开的，两只麻雀飞入房间后，试图飞出房间。

（1）第一只麻雀是无记忆的，求它飞出房间时，试飞次数 X 的分布；

（2）第二只麻雀是有记忆的，求它飞出房间时，试飞次数 Y 的分布；

（3）求 $P(X<Y),P(X>Y)$。

（三）随机变量或其函数的分布

１４．设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<0\\ \frac{1}{4} & 0\leqslant x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

令 $Y=X^2,F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数

（1）求 Y 的概率密度

（2）求 $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$

15．设 X 的分布列为 $P\{X=i\}=\frac{1}{2^i}(i=1,2,\text{L L})$，

求 $Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布列。

16．设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同分布，

$P\left\{X_i = 0\right\} = 0.6, P\left\{X_{i1}\right\} = 0.4, \left(i = 1, 2, 3, 4\right)$，

求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布。

第三讲　二维随机变量及其概率分布

一、知识要点

1.二维随机变量的分布函数

（1）概念:$\left(X,Y\right)$是二维随机变量,对 $\forall x,y\in R$

$$F\left(x,y\right)=P\left\{"X\le x"\cap"Y\le y"\right\}=P\left\{X\le x,Y\le y\right\}\begin{pmatrix}-\infty<x<+\infty\\-\infty<y<+\infty\end{pmatrix}$$

为二维随机变量$\left(X,Y\right)$的分布函数,或随机变量 X 与随机变量 Y 的联合分布函数.

（2）性质

1° $F\left(x,y\right)$对 x 和 y 分别是单调不减的

2° $0\le F\left(x,y\right)\le 1$,且

$\forall$（固定的）$y:F\left(-\infty,y\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x,y\right)=0;F\left(-\infty,-\infty\right)=0$

$\forall$（固定的）$x:F\left(x,-\infty\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x,y\right)=0;F\left(+\infty,+\infty\right)=1$

3° $F\left(x,y\right)$对 x 和 y 分别是右连续的即

$F\left(x+0,y\right)=F\left(x,y\right);F\left(x,y+0\right)=F\left(x,y\right)$

4°

$$P\left\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\right\}=F\left(x_2,y_2\right)-F\left(x_2,y_1\right)+F\left(x_1,y_1\right)-F\left(x_1,y_2\right)\ge 0$$

（3）边缘分布:分量 X 的概率分布称作$\left(X,Y\right)$关于 X 的边缘分布;分量 Y 的概率分布称作

$\left(X,Y\right)$关于 Y 的边缘分布。

$\left(X,Y\right)$关于 X ,关于 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X\left(x\right)=P\left\{X\le x\right\}=P\left\{X\le x,Y<+\infty\right\}=F\left(x,+\infty\right)=\lim_{y\to+\infty}F\left(x,y\right)$$

$$F_Y\left(x\right)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X<+\infty,Y\le y\right\}=F\left(+\infty,y\right)=\lim_{y\to+\infty}F\left(x,y\right)$$

2．二维离散型取随机变量

（1）概念：(X,Y) 可能取值为 $(x_i, y_j)(i,j=1,2\cdots\cdots)$，记

$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P_{ij}(i,j=1,2,\cdots\cdots)$ 即

$Y \backslash X$	$x_1 \quad x_2 \cdots\cdots x_i \cdots\cdots$
y_1	$p_{11} \quad p_{21} \cdots\cdots p_{i1} \cdots\cdots$
y_2	$p_{12} \quad p_{22} \cdots\cdots p_{i2}$
$\vdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
y_j	$p_{1j} \quad p_{2j} \cdots\cdots p_{ij} \cdots\cdots$
$\vdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

为 (X,Y) 的分布律或 X 与 Y 的联合分布律.

（2）性质

1° $P_{ij} \geq 0(i,j=1,2\cdots\cdots)$

2° $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$

（3）边缘分布函数和边缘分布律.

(X,Y) 关于 X，关于 Y 的边缘分布函数，分别为

$$F_X(x)=P\{X \leq x\}=F(x,+\infty)=\sum_{x_i \leq x}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$F_Y(y)=P\{Y \leq y\}=F(+\infty,y)=\sum_{y_j \leq y}\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

(X,Y) 关于 X，关于 Y 的边缘分布函数，分别为

$$P\{X \leq x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq P_{i\cdot}(i=1,2\cdots\cdots)$$

$$P\{Y \leq y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq P_{\cdot j}(i=1,2\cdots\cdots)$$

3.二维连续型随机变量.

（1）概念：(X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$ 若存在一个非负函数 $f(x,y)$，使得对 $\forall x,y \in R$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv \qquad (-\infty<x,y<+\infty)$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,而函数$f(x,y)$称作(X,Y)的概率密度或X与Y的联合概率密度

（2）性质

1°．$f(x,y)\ge 0(-\infty<x,y<+\infty)$

2°．$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty,-\infty)=1$

3°．若$f(x,y)$在点(x,y)连续,则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

4°．G为xoy平面的一区域,随机点(X,Y)落于G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$$

（3）边缘分布函数与边缘概率密度(X,Y)关于X,关于Y的边缘分布函数,分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du(-\infty<y<+\infty)$$

$$F_Y(x)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv(-\infty<y<+\infty)$$

(X,Y)关于X,关于Y的边缘概率密度,分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy(-\infty<x<+\infty).$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx(-\infty<y<+\infty)$$

4. 随机变量的独立性

（1）概念: $F(x,y)$及$F_X(x)$ $F_Y(y)$分别为二维随机变量(X,Y)的分布函数与边缘分布函数,若对$\forall x,y\in R$,有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}=F_X(x)F_Y(y) \qquad (*)$$

则称X与Y相互独立

（2）等价形式

1° (X,Y)是离散型随机变量,与$(*)$式等价的是,对(X,Y)的所有可能取值(x_i,y_j)有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

2° (X,Y)是连续型随机变量,与$(*)$式等价的是

$$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)，\ a、e 与 R^2$$ (即此关系在 R^2 上几乎处处成立)

5.条件分布

（1）概念:对二维随机变量$\left(X,Y\right)$，X 在$Y=y$的条件下的分布,称作 X 的条件分布，Y在$X=x$的条件下的分布称作Y的条件分布.

（2）离散型随机变量的条件分布律:对∀ (固定的) j,若$P\left\{Y=y_j\right\}>0$，称

$$P\left\{X=x_i\mid Y=y_j\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=Y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}\left(i=1,2\cdots\cdots\right)$$

为在$Y=y_j$条件下,随机变量X 的条件分布律.

对∀ (固定的)i，若$P\left\{X=x_i\right\}>0$，称

$$P\left\{Y=y_j\mid X=x_i\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{X=x_i\right\}}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot i}}\left(i=1,2\cdots\cdots\right)$$

为在 $X=x_i$ 条件下,随机变量Y的条件分布律.

（3）连续型随机变量的条件概率密度,条件分布函数:设$\left(X,Y\right)$的概率密度为$f\left(x,y\right)$，$\left(X,Y\right)$关于Y的边缘密度为 $f_Y\left(y\right)$，若对固定的y，$f_Y\left(y\right)>0$,则称$\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$为在$Y=y$的条件下，随机变量$X$ 的条件概率密度,记作

$$f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_Y\left(y\right)}$$

而称$\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}\left(\xi,y\right)d\xi=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f\left(\xi,y\right)}{f_Y\left(y\right)}d\xi$为在$Y=y$的条件下,随机变量$X$ 的条件分布函数,记为$P\left\{X\le x\mid Y=y\right\}$或$F_{X|Y}\left(x\mid Y\right)$，即

$$F_{X|Y}\left(x\mid y\right)=P\left\{X\le x\mid Y=y\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(\xi,y\right)}{f_Y\left(y\right)}d\xi$$

类似，$\left(X,Y\right)$关于X 的边缘概率密度为$f_X\left(x\right)$，若对固定的x，$f_X\left(x\right)>0$，称

$$f_{Y|X}\left(y\mid x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$$

为在$X=x$条件下,随机变量Y的条件概率密度,而称

$$F_{Y|X}\left(y\mid x\right)=P\left\{Y\le y\mid X=x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(x,\eta\right)}{f_X\left(x\right)}d\eta$$

为在 $X=x$ 条件下,随机变量 Y 的条件分布函数.

注意:

1° 条件概率密度性质.

（1） $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ge 0;\ f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}\ge 0$

（2） $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=1$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}dy=1$

6.常用的连续型二维随机变量的分布.

（1）二维均匀分布:如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{mG} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 G 为平面区域，mG 为 G 的测度(可理解为面积)，则称 (X,Y) 在平面区域 G 上服从均匀分布.

（2）二维正态分布:如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布,记为 $(X,Y):\ N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

性质

1°.若 $(X,Y):\ N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则 $X:\ N(\mu_1,\sigma_1^2),Y:\ N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且二分量 X,Y 的非零线性组合也服从正态分布.(参看浙大书(三版)P136)

2°.仅知 $X:\ N(\mu_1,\sigma_1^2),Y:\ N(\mu_2,\sigma_2^2)$,不能断定 (X,Y) 服从二维正态分布,只有 X,Y 相互独立时，才有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

3°.若 $(X,Y):\ N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则 X,Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$

7.两个连续型随机变量的简单函数的分布

（1）设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数为对

$\forall z \in R$

$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\} = \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy(-\infty < z < +\infty)$ 而

$Z = g(X,Y)$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

（2）随机变量简单函数的分布

（一）$Z = X + Y$

（1）一般情形：$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$ 或 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

（2）X,Y 相互独立时.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy \text{或} f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_Y(z-x)\,dx$$

（3）几个分布的可加性定理:若 X,Y 相互独立,则

①当 $X: B(m,p), Y: B(n,p)$ 时，$X+Y: B(m+n,p)$

②当 $X: P(\lambda_1), Y: P(\lambda_2), X+Y: \mathrm{P}(\lambda_1+\lambda_2)$

③当 $X_i: N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 且 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立,则

$Z = \sum_{i=1}^{n}(a_i X_i + b_i): N\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i\mu_i + b_i), \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$

（二）$M = \max(X,Y)$ 及 $N = \min(X,Y)$ 的分布,已知 X,Y 相互独立,分布函数分别为 $F_X(x), F_Y(y)$

（1）$M = \max(X,Y)$ 的分布函数及概率密度分别为

$F_M(z) = P\{\max(X,Y) \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} = P\{X \le z\}\cdot P\{Y \le z\} = F_X(z)\cdot F_Y(z)$

$f_M(z) = \frac{dF_M(z)}{dz} = f_X(z)F_Y(z) + F_X(z)f_Y(z)$

（2）$N = \min(X,Y)$ 的分布函数及概率密度分别为

$F_N(z) = P\{\min(X,Y) \le z\} = 1 - P\{\min(X,Y) > z\} = 1 - P\{X > z, Y > z\}$

$= 1 - P\{X > z\}\cdot P\{Y > z\} = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$

$f_N(z) = \frac{dF_N(z)}{dz} = f_X(z)[1 - F_Y(z)] + f_Y(z)[1 - F_X(z)]$

（3）推广于n个相互独立的随机变量的情形，$X_i\left(i=1,2,\cdots\cdots,n\right)$相互独立.

$M_n=\max\left\{X_1,X_2,\cdots X_n\right\},N_n=\min\left\{X_1,X_2,\cdots X_n\right\}$

则

$F_{M_n}\left(z\right)=F_{X_1}\left(z\right)F_{X_2}\left(z\right)\cdots\cdots F_{X_n}\left(z\right)$

$F_{N_n}\left(z\right)=1-\left[1-F_{X_1}\left(z\right)\right]\left[1-F_{X_2}(x)\right]\cdots\cdots\left[1-F_{X_n}\left(z\right)\right]$

特别，当$X_i\left(i=1,2,\cdots\cdots,n\right)$相互独立且有相同的分布函数$F\left(z\right)$时,有

$F_{M_n}\left(z\right)=\left[F\left(z\right)\right]^n$

$F_{N_n}\left(z\right)=1-\left[1-F\left(z\right)\right]^n$

二、例题分析

（一）用二维随机变量的分布,计算有关事件的概率

1．设随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0<x<2,0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求（1）$P\left\{X+Y>1\right\}$

（2）$P\left\{X^2<Y\right\}$

2．A,B为二随机事件,且$P\left(A\right)=\dfrac{1}{4},P\left(B\mid A\right)=\dfrac{1}{3},P\left(A\mid B\right)=\dfrac{1}{2}$

令 $X=\begin{cases}1 & A\text{发生}\\ 0 & A\text{不发生}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1 & B\text{发生}\\ 0 & B\text{不发生}\end{cases}$

求$\left(X,Y\right)$的概率分布。

3.随机变量$\left(X,Y\right)$的分布律为

Y \ X	0	1
0	$\dfrac{4}{25}$	a
0	b	$\dfrac{9}{25}$

且$P\left\{Y=1\mid X=0\right\}=\dfrac{3}{5}$

(1)求常数a,b的值。

(2)当a,b取（1）中值时,求$Z=\{X-Y\}$的分布律。

（二）联合分布、边缘分布、条件分布之间转换与独立性讨论.

4．已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-x(1+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

（1）求c的值。

（2）求X,Y的边缘概率密度,并判断X,Y是否独立。

5. 设随机变量（X,Y ）服从二维正态分布且X,Y不相关，$f_X(x),f_Y(y)$分别表示X,Y的概率密度，则在$Y=y$的条件下，X的概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为（　　）

A. $f_X(x)$　　B. $f_Y(y)$　　C. $f_X(x)f_Y(y)$　　D. $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

6．设随机变量X在区间$(0,1)$上服从均匀分布,当X到$x(0<x<1)$时,随机变量Y等可能地在$(x,1)$上取值。

（1）求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$.

（2）计算$P\{X+Y>1\}$.

7．设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)} & x>0,y>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求

（1）常数k的值。

（2）$P\{Y>1|X>1\}$

（3）$P\{\max(X,Y)>1\}$

8．二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy & 0\le x\le 1,0\le y\le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求(X,Y)的分布函数$F(x,y)$.

9．设(X,Y)在平面区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布,求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -Y & 0 \\ X & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$的特征值全为实数的概率。

（三）已知$\left(X,Y\right)$的分布，求$Z=g\left(X,Y\right)$的分布。

10. 设X,Y相互独立,都服从$\left[0,1\right]$上均匀分布,求$Z=X+Y$的概率密度。

11. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2-x-y & 0<x<1,0<y<1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

（1）求$P\left\{X>2Y\right\}$

（2）求$Z=X+Y$的概率密度。

12. 将两封信投入编号Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的 3 个邮箱,设X,Y分别表示投入Ⅰ号,Ⅱ号信筒中信的数目,求

（1）$\left(X,Y\right)$的分布。

（2）$Y=0$时，X的条件分布。

（3）$\xi=2X+Y,\eta=XY$的分布。

第四讲　随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理

一、知识要点

（一）随机变量的数字特征

Ⅰ.数学期望

1．一维随机变量的数学期望

（1）设 X 为离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k\left(k=1,2,\cdots\cdots\right)$$

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛,则称此级数之和为随机变量 X 的数学期望,记作 $E(X)$. 即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

规定随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E\left[g(X)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k \quad (\text{当}\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k\text{ 绝对收敛时}).$$

（2）设 X 为连续型随机变量,其概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛,则称此积分值为随机变量 X 的数学期望，记作 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

规定随机变量函数 $g(X)$ 的数学期望为

$$E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx \quad (\text{当}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx\text{ 绝对收敛时})$$

2．二维随机变量函数的数学期望

（1）设 (X,Y) 为二维离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots\cdots\right)$$

规定二维随机变量函数 $g(X,Y)$ 的期望为

$$E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij} \quad (\text{当}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}\text{ 绝对收敛时})$$

特别有

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot}$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}$$

（2）设 (X,Y) 为二维连续型随机变量,其概率密度为 $f(x,y)$. 规定二维随机变量函数 $g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$ （当 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$ 绝对收敛时）. 特别有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

3．数学期望的性质

（1） $E(c)=c$ （c 为常数）

（2） $E(kX+c)=kE(X)+c$ （k,c 为常数）

（3） $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

（4）若 X,Y 相互独立，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Ⅱ.方差与标准差(均方差)

1. 概念 随机变量 X 的函数 $g(X)=\left[X-E(X)\right]^2$ 的数学期望(当它存在时)称作随机变量 X 的方差,记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$$

而称 $D(X)$ 的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差(或均方差)

2. 计算公式：

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

3. 性质

（1）$D(c)=0$ （c 为常数）

（2）$D(kX+c)=k^2D(X)$ （k,c 为常数）

（3）若 X,Y 相互独立,则

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$。

III.协方差

1.概念(X,Y)为二维随机变量,称(X,Y)的函数

$g(X,Y)=(X-E(X))(Y-E(Y))$ 的数学期望为 X 与 Y 的协方差,记作 $\operatorname{cov}(X,Y)$(或σ_{XY})，即$\operatorname{cov}(X,Y)(=\sigma_{XY})=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$.

2.计算公式

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

当 $X=Y$ 时，$\operatorname{cov}(X,X)=D(X)=\sigma_{XX}$.

3.性质

（1）$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X);\operatorname{cov}(X,c)=0$ (c 为常数)

（2）$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$ (a,b 为常数)

（3）$\operatorname{cov}(X_1\pm X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)\pm\operatorname{cov}(X_2,Y)$

（4）$\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{1}{2}\left[D(X+Y)-D(X)-D(Y)\right]$

注意:（4）的变形为:$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

IV.相关系数

1. 概念:(X,Y)为二维随机变量,称

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\left(\text{或}\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_{XX}}\sqrt{\sigma_{YY}}}\right)$$

为随机变量 X,Y 的相关系数

注意：相关系数 ρ_{XY} 反映了随机变量 X 与 Y 之间线性联系的紧密程度,当 $\rho_{XY}=0$ 时,称 X 与 Y 不相关.

2. 性质

（1）$\left|\rho_{XY}\right| \le 1$

（2）$\left|\rho_{XY}\right| = 1$ 的充分必要条件是存在常数 $a, b \ne 0$，使 $P\left\{Y = a + bX\right\} = 1$.若 $b > 0$，则 $\rho_{XY} = 1$；若 $b < 0$，则 $\rho_{XY} = -1$.

3. 等价命题:下列命题等价.

（1）$\rho_{XY} = 0$

（2）$\operatorname{cov}\left(X, Y\right) = 0$

（3）$E\left(XY\right) = E\left(X\right)E\left(Y\right)$

（4）$D\left(X \pm Y\right) = D\left(X\right) + D\left(Y\right)$

4. 独立与不相关的关系：若随机变量 X, Y 相互独立，则 X, Y 必不相关;逆命题不真.

5. 二维正态随机变量独立与不相关等价:若 $\left(X, Y\right)$: $N\left(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho\right)$ 则 X, Y 相互独立的充分必要条件是 X, Y 不相关.

6. 协方差矩阵:随机变量 $\left(X, Y\right)$ 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{YY} \end{pmatrix}$$

Ⅴ.几个常用重要分布的有关数学特征.

1. 若 X: $B\left(n, p\right)$，则 $E\left(X\right) = np, D\left(X\right) = np\left(1 - p\right)$

2. 若 X: $P\left(\lambda\right)$，则 $E\left(X\right) = \lambda, D\left(X\right) = \lambda$

3. 若 X: $U\left(a, b\right)$，则 $E\left(X\right) = \dfrac{a + b}{2}, D\left(X\right) = \dfrac{\left(b - a\right)^2}{12}$

4. 若 X: $E\left(\lambda\right)$，则 $E\left(X\right) = \dfrac{1}{\lambda}, D\left(X\right) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

5. 若 X: $N\left(\mu, \sigma^2\right)$，则 $E\left(X\right) = \mu, D\left(X\right) = \sigma^2$

6. 若 X: $\Gamma\left(\alpha, \beta\right)$,即概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\beta x\right) a^{\alpha - 1} e^{-\beta r} & x > 0, \beta > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

则 $E\left(X\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}, D\left(X\right) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$.

7. 若 $\left(X, Y\right)$: $N\left(\mu_1, \mu_2, {\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2, \rho\right)$ 时,则

$E(X)=\mu_1, D(X)=\sigma_1{}^2, E(Y)=\mu_2, D(Y)=\sigma_2{}^2, \operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2, \rho_{XY}=\rho$

协方差矩阵 $C=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}; \det C=\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2\left(1-\rho^2\right)(\neq 0)$.

协方差逆矩阵

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

Ⅳ.矩

设 X,Y 是随机变量

1. 若 $E\left(X^k\right)(k=1,2,\cdots)$ 存在，称它为 X 的 k 阶原点矩,简称 k 阶矩.
2. 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\right\}(k=1,2,\cdots)$ 存在，称它为 X 的 k 阶中心矩.
3. 若 $E\left(X^kY^l\right)(k,l=1,2,\cdots)$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.
4. 若 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^k\left[Y-E(Y)\right]^k\right\}$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

附录　几个常用公式

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ax^{n-1}=\frac{a}{1-x}\left(|x|<1\right)$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} anx^{n-1}=a\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(x^n\right)'=a\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}x^n\right)'=a\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{a}{(1-x)^2}\left(|x|<1\right)$
6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} an^2x^{n-1}=a\sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n-1)+n\right]x^{n-1}=a\left[x\sum_{N=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right]$$

$$=ax\left(\frac{1}{1-x}-1\right)''+\frac{a}{(1-x)^2}=\frac{a(1+x)}{(1-x)^3}\left(|x|<1\right)$$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\left(-\infty<x<+\infty\right)$

（二）大数定律及中心极限定理

Ⅰ.切比雪夫不等式:设随机变量 X 的数学期望 $E\left(X\right)$，方差 $D\left(X\right)$ 存在,则对 $\forall\varepsilon>0$ 有，

$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$（等价形式: $P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$）

Ⅱ.大数定律和依概率收敛.

1.依概率收敛.

（1）概念:设 $\left\{Y_n\right\}$ 为一列随机变量,对 $\forall\varepsilon>0$ 如果存在随机变量 Y（或存在常数 a），使得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|Y_n-Y\right|<\varepsilon\right\}=1$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|Y_n-Y\right|\geq\varepsilon\right\}=0$）

（或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|Y_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1$ （或 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|Y_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$））

则称随机变序列 $\left\{Y_n\right\}$ 依概率收敛于 Y (或依概率收敛于 a).

记为

$Y_n\xrightarrow{P}Y\left(n\to\infty\right)$（或 $Y_n\xrightarrow{P}a\left(n\to\infty\right)$）.

（2）性质:

1° 设 $\left\{X_n\right\}\left\{Y_n\right\}$ 是两个随机变量序列； a,b 为二常数且

$X_n\xrightarrow{P}a,Y_n\xrightarrow{P}b\left(n\to\infty\right)$

而函数 $g\left(x,y\right)$ 在点 $\left(a,b\right)$ 连续,则

$g\left(X_n,Y_n\right)\xrightarrow{P}g\left(a,b\right)\left(n\to\infty\right)$

2° 若 $X_n\xrightarrow{P}aY_n\xrightarrow{P}b\left(n\to\infty\right)$,则

$X_n\pm Y_n\xrightarrow{P}a\pm b\left(n\to\infty\right)$

$X_nY_n\xrightarrow{P}ab\left(n\to\infty\right)$

$\frac{X_n}{Y_n}\xrightarrow{P}\frac{a}{b}\left(b\neq0\right)\left(n\to\infty\right)$

2.大数定律:设 $\left\{X_n\right\}$ 是一列随机变量， $E\left(X_n\right)$ 存在 $\left(n=1,2L\ \right)$.

若 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_n\xrightarrow{p}E\left(Y_n\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(n\to\infty\right)$.则称随机变量序列 $\left\{X_n\right\}$ 服从大数定律.

注意:当说随机变量序列$\left\{X_n\right\}$服从大数定律时,指的是随机变量序列

$Y_1=X_1, Y_2=\frac{1}{2}\left(X_1+X_2\right) \cdots Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \cdots \cdots$ 的极限行为,而并不是指随机变量序列$\left\{X_n\right\}$本身的极限行为.

3. 切比雪夫大数定律:设随机变量序列$\left\{X_i\right\}$相互独立(指对$\forall_i \in N, X_1, X_2 \cdots X_i$相互独立,没说同分布)且具有相同的数学期望和方差:$E\left(X_i\right)=\mu, D\left(X_i\right)=\sigma^2\left(i=1,2,\cdots \cdots\right)$,则$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu\left(n \to \infty\right)$

4. 伯努利大数定律:设n次伯努利试验中事件A发生的次数为n_A,每次试验中A发生的概率是$P\left(0<P<1\right)$,则

$$\frac{n_A}{n} \xrightarrow{P} P\left(n \to \infty\right)$$

5. 辛钦大数定律:设随机变量序列$\left\{X_i\right\}$相互独立,服从同一分布,且具有数学期望

$$E\left(X_i\right)=\mu\left(i=1,2,\cdots \cdots\right), \quad Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu\left(n \to \infty\right)$$

注意:辛钦大数定律是切比雪夫大数定律的推广,在$\left\{X_i\right\}$同分布的条件下,它把$\left\{X_i\right\}$的方差存在且$D\left(X_i\right)=\sigma^2\left(i=1,2,\cdots \cdots\right)$的条件去掉. 使得辛钦大数定律应用更广泛、更方便,尤其在数理统计的参数点估计的讨论中有重要的应用.

III.中心极限定理

1. $Lindberg-Lery$中心极限定理(独立同分布中心极限定理):设随机变量列$\left\{X_i\right\}$相互独立,服从同一分布. 且$E\left(X_i\right)=\mu, D\left(X_i\right)=\sigma^2\left(i=1,2,\cdots \cdots\right)$,则($\sum_{i=1}^{n} X_i$经过标准化得到的随机变量)

$$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n\left(x\right)$,对$\forall x \in R$,有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n_\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2. DeMoiver-Laplace 中心极限定理(二项分布以正态分布为极限分布定理):设 X_n 服从二项分布 $B(n, p)(0 < p < 1)(n = 1, 2, \cdots\cdots)$，则对 $\forall x \in R$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{X_n - nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \le x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \alpha t$$

注意:当 n 很大，P 很小，而 $\lambda = nP$ 是一个不大的常数时，用 Poisson 分布近似二项分布效果较好. 当 n 很大，P 不是很小,也不很接近 1 时（一般指当 $P < 1, nP > 5$ 时，或 $P < \frac{1}{2}, n(1-P) > 5$ 时），则必须用正态分布去近似二项分布,这样效果会更好.

二、例题分析

(一)已知分布求数字特征

1. 设某图书馆的读者借阅甲种书的概率为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，借阅乙种书的概率为 $\beta(0 < \beta < 1)$，且每人借阅甲、乙两种图书的行动相互独立,读者之间的行动也相互独立,某天来了 n 位读者，则甲、乙两种图书至少借阅一种的人数的数学期望为________，方差为________________

2. 离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = n\} = p(1-p)^{n-1}(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ 其中 $0 < p < 1$，而 $Y = \cos \pi X$，则 $E(Y) =$________________，$D(Y) =$____________。

3. 已知随机变量 X, Y, Z 相互独立,且

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N\left(-\mu, \frac{\sigma^2}{2}\right), Z \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{3}\right),\quad P\{X < 0\} = 0.2$$

则 $P\{\mu < 5X + 4Y - 3Z < 7\mu\} =$__________________________。

4. 澳门赌场“押对子”是一种赌法，其规则为：庄家从 6 副（每副 52 张）扑克中，随机发给你两张，如果你下注 a 元，当得到的两张是一对时（无论何种花色，号码一样），庄家赔你 10 倍，否则输掉你的赌注，如果你下注 100 元，你和庄家在每局中各期望赢多少元？

5. 设随变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2, \rho)$ 其中 $\rho < 0$，则 X, Y 协方差矩阵是(　)

A. 半正定矩阵　　　　B. 正定矩阵

C. 半负定矩阵　　　　D. 负定矩阵

6. X : $N\left(3,4\right)Y$ 服从参数$\lambda=\dfrac{1}{2}$的指数分布

$$\left(\text{即概率密度} f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}\right)$$，X,Y 的相关系数为 $P_{XY}=-\dfrac{1}{4}$，

而$Z=3X-4Y$，则Z的方差为______________

7. 设 $X_{1,}X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N\left(0,\sigma^2\right)\left(\sigma>0\right)$ 的简单随机样本，记

$\overline{X_k}=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\left(1\le k\le n\right)$，则$\operatorname{cov}\left(\overline{X_k},\overline{X_{k+1}}\right)=$（　　）。

A. σ^2　　B. $\dfrac{\sigma^2}{k}$　　C. $\dfrac{\sigma^2}{k+1}$　　D. $\dfrac{\sigma^2}{k\left(k+1\right)}$

8. 设$\left(\xi,\eta\right)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2e^{-\lambda x} & 0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\quad\left(\lambda>0\right)$$

求

（1）$E\left(\xi\,|\,\eta=y\right)\left(y>0\right)$

（2）$D\left(\xi\,|\,\eta=y\right)\left(y>0\right)$

（二）与数字特征的有关应用题

9. 两台同样自动记录仪,每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布，首先开动其中一台，当其发生故障时，停用，而启用另一台。

试求两台记录仪无故障工作的总时间T的概率密度 $f\left(t\right)$，数学期望和方差。

10. 按季节出售的某种应时商店，每出售一公斤，获利 6 元，如果到季未尚有剩余商品，则每公斤净亏损l元,设某商店在季度内这种商品销售量X(单位:公斤)是一随机变量，X 在$\left(s_1,s_2\right)$上服从均匀分布，为使商店所获利润的数学期望最大，问商店应进多少货？

（三）不相关与独立性判定

11. 设随机变量X与Y相互独立，且X : $B\left(1,P\right),Y$: $B\left(2,P\right)\left(0<P<1\right)$，令

$$\xi=\begin{cases}0 & X+Y=1\\ 1 & X+Y\ne 1\end{cases};\quad \eta=\begin{cases}0 & Y-X=2\\ 1 & Y-X\ne 2\end{cases}$$

试确定P的值，使$\operatorname{cov}\left(\xi,\eta\right)$达到最小。

12. 设$\left(X,Y\right)$的分布函数为

$$F\left(x,y\right)=G\left(x\right)\left[H\left(y\right)-H\left(-\infty\right)\right]$$

且$G\left(+\infty\right),H\left(+\infty\right),H\left(-\infty\right)$都存在。

试证明：X,Y 相互独立。

13. 设连续型随机变量 X 的概率密度是偶函数，且$E\left(X^2\right)<+\infty$，试证: X与$\left|X\right|$不相关。

（四）切比雪夫不等式,依概率收敛、大数定律、中心极限定理的应用.

14.设随机变量列$\left\{X_n\right\}$相互独立,则根据辛钦大数定律，当$n\to\infty$时，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，依概率收敛于其数学期望，只要$\left\{X_n\right\}\left(n=1,2,\cdots\cdots\right)$ （ ）

A. 有相同的数学期望 B. 服从同一离散型分布

C. 服从同一 Poisson 分布 D.服从同一连续型分布

15. 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克，若用最大载重为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977，(已知$\Phi\left(2\right)=0.977$，其中$\Phi\left(X\right)$为标准正态分布函数)。

第五讲　抽样分布(数(一), 数(三))

一、知识要点

数理统计的基本概念

Ⅰ.总体与样本

1. 总体:研究对象的某一项数量指标（对应一个随机变量 X ）的全部可能的观察值称为一个总体（以后将不区分总体与相应的随机变量）.总体中每个元素称为个体，总体中包含个体的个数称为总体的容量.

2. 样本：设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是具有同一分布函数 F 的相互独立的随机变量，则称 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为从分布函数 F 得到的、容量为 n 的简单随机样本,简称样本.它们的观察值 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 称作样本值.

Ⅱ.统计量

1. 概念:设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数，若 g 中不含任何未知参数,则称 $g\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$ 是一个统计量.

2. 常见统计量

（1）样本均值: $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

（2）样本方差: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{\,2} - n\overline{X^2}\right)\right]$

（3）样本标准差: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

（4）样本 k 阶(原点)矩: $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \left(k = 1, 2, \cdots\cdots\right)$

（5）样本 k 阶中心矩: $B_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k \left(k = 1, 2, \cdots\cdots\right)$

3．有关依概率收敛的几个结论

（1）设总体 X 的 k 阶矩 $E\left(X^k\right) \triangleq \mu_k$ 存在，则

$$A_k \xrightarrow{P} u_k \left(n \to \infty\right)\left(k = 1, 2, \cdots\cdots\right)$$

（2）当 $A_k \xrightarrow{P} u_k\left(n \to \infty\right)$ 时,函数 $g\left(x_1, x_2, \cdots x_k\right)$ 在点 $\left(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_k\right)$ 连续,则

$$g\left(A_1, A_2, \cdots A_k\right) \xrightarrow{P} g\left(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_k\right)\left(n \to \infty\right)$$

4. 统计量的数字特征:设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是来自总体 X 的一个样本.

$E\left(X\right) = \mu, D\left(X\right) = \sigma^2 > 0$，则有

（1）$E\left(\overline{X}\right) = \mu, D\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

（2）$E\left(S^2\right) = \sigma^2, E\left({S_n}^2\right) = E\left[\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$

III.抽样分布(统计量的分布叫抽样分布)

1. χ^2 分布

（1）概念:设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N\left(0,1\right)$ 的样本（包含 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立），则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$$

服从 n 个自由度的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2\left(n\right)$

（2）概率密度:若 $\chi^2 \sim \chi^2\left(n\right)$，其概率密度为

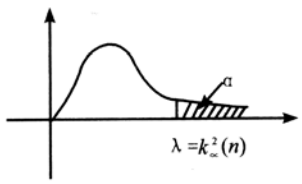
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

注意: χ^2 分布是 Γ 分布中 $\alpha = \dfrac{n}{2}, \beta = \dfrac{1}{2}$ 的特例.

（3）数学期望与方差:若 $\chi^2 \sim \chi^2\left(n\right)$，则 $E\left(\chi^2\right) = n, D\left(\chi^2\right) = 2n$

（4）可加性:设 $X \sim \chi^2\left(n_1\right), Y \sim \chi^2\left(n_2\right)$，且 X, Y 相互独立,则 $X + Y \sim \chi^2\left(n_1 + n_2\right)$

（5）上(侧) α 分位点:给定常数 $\alpha : 0 < \alpha < 1$，称满足条件

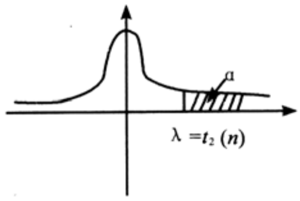


$$P\left\{\chi^2 > {\chi_\alpha}^2\left(n\right)\right\} = \int_{{\chi_\alpha}^2(n)}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \alpha$$

的点 ${\chi_\alpha}^2\left(n\right)$ 为 n 个自由度的 χ^2 分布的上(侧) α 分位点.

2. t 分布

（1）概念,设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ 且 X, Y 相互独立,则称随机变量



$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

为服从 n 个自由度的 t 分布,记作 $t \sim t(n)$

（2）概率密度:若 $t \sim t(n)$，其概率密度为

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

（3）上(侧) α 分位点,给定常数 $\alpha : 0 < \alpha < 1$ 称满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(t)\,dt = \alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 n 个自由度的 t 分布的上(侧) α 分位点

注意:由于 $f(t)$ 关于 $t=0$ 对称,故 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.

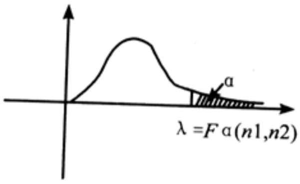
3. F 分布

（1）概念:设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 且 X, Y 相互独立,称随机变量

$$F = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布,记为 $F \sim F(n_1, n_2)$

（2）概率密度:若 $F \sim F(n_1, n_2)$，则其概率密度为



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

注意:注 $F:\ F\left(n_1,n_2\right)$，则 $\dfrac{1}{F}:\ F\left(n_2,n_1\right)$

（3）上(侧) α 分位点,给定常数 $\alpha:0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\left\{F>F_\alpha\left(n_1,n_2\right)\right\}=\int_{F_\alpha\left(n_1,n_2\right)}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\alpha$$

的点 $F_\alpha\left(n_1,n_2\right)$ 为第一自由度为 n_1,第二自由度为 n_2 的 F 分布的上(侧) α 分位点.

注意：F 分布的上(侧) α 分位点有以下性质

$$F_{1-\alpha}\left(n_1,n_2\right)=\frac{1}{F_\alpha\left(n_2,n_1\right)}$$

4．正态总体下，常用统计量的分布

（1）一个正态总体情形

[定理]设 $X_1,X_2,\text{L}\ X_n$ 是正态总体 $X:\ N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本,则

(ⅰ) $\overline{X}:\ N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right);\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}:\ N\left(0,1\right)$

(ⅱ) $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}=\dfrac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}:\ \chi^2\left(n-1\right)$

(iii) $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2-\chi^2\left(n\right)$

(iv) $\overline{X}$ 与 S^2 (或 $S_n{}^2$)相互独立

(ⅴ) $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

（2）两个正态总体情形

[定理]设 $X_1, X_2, \cdots X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ 分别是正态总体 $X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2)$，$Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2)$ 的一个样本，且这两个样本独立(指随机向量($X_1, X_2, \cdots X_m$)与 $(Y_1, Y_2, \cdots Y_n)$相互独立)，

$$\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i, \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i, S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\overline{X}\right)^2, S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-Y\right)^2$$

分别是这两个样本的样本均值与样本方差，则

(ⅰ) $\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$

(ⅱ) $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_i-\mu_1\right)^2/m\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\mu_2\right)^2/n\sigma_2^2} \sim F(m,n)$

(ⅲ) $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$

(Ⅳ)当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，有

$\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$,其中 ${S_w}^2=\dfrac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}$

$S_w=\sqrt{{S_w}^2}$,此时(iii)式化为 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1,n-1)$.

二、例题分析

(一)求统计量的分布或其中参数.

1. 设随机变量服从 $F(3,4)$ 分布，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $F_\alpha(3,4)$ 满足 $P\left\{X>F_\alpha(3,4)\right\}=\alpha$，若 $P\{X\le x\}=1-\alpha$，则 x 等于（　　）

A. $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(4,3)}$　　B. $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(3,4)}$　　C. $F_\alpha(4,3)$　　D. $F_{1-\alpha}(4,3)$

2.设总体 $X \sim N(0,1), X_1, X_2 \cdots\cdots X_n \ (n>1)$ 是取自 X 的简单随机样本,则下面统计量的分布中**不正确**的是(　　　　　)

A. $\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} \sim \chi^2(n)$　　　　B. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0,1)$

C. $\frac{\sqrt{n-1}X_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^{\,2}}} \sim t(n-1)$　　　　D. $\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{i=1}^{2} X_i^{\,2}}{\sum_{i=3}^{n} X_i^{\,2}} \sim F(2,n-2)\ (n>3)$

3.设总体 $X \sim N(0,2^2), X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{10}$，是来自 X 的简单随机样本,令

$$Y=\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right)^2+\left(\sum_{j=6}^{10} X_j\right)^2$$

试确定常数 c，使 CY 服从 χ^2 分布,并指出其自由度。

4.设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$ 分别是来自两个正态总体 $N(-3,4)$ 和 $N(-1,5)$ 的简单随机样本，且相互独立，S_1^2 和 S_2^2 分别是两个样本的样本方差，则服从 $F(9,7)$ 的统计量是(　　　)

A. $\frac{5S_2^2}{2S_1^2}$　　　B. $\frac{4S_2^2}{5S_1^2}$　　　C. $\frac{5S_1^2}{4S_2^2}$　　　D. $\frac{2S_2^2}{5S_1^2}$

5.设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n, X_{n+1}$ 是来自 X 的简单随机样本,令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

问统计量

$$Z=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}$$

服从什么分布,自由度是多少?

6.（1）设随机变量 $X \sim t(n)(n>1), Y=\frac{1}{X^2}$ 则(　　　　　)

A. $Y \sim F(1,n)$　　　　B. $Y \sim F(n,1)$

C. $Y \sim \chi^2(n)$　　　　D. $Y \sim \chi^2(n-1)$

（2）设 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 是来自服从参数为 2 的指数分布的总体 X 的简单随机样本,当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2}$ 依概率收敛于________________。

（3）设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为取值总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本,而

$$Y_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i, Y_2 = \frac{1}{10}\sum_{i=11}^{20} X_i \cdots\cdots Y_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=91}^{100} X_i$$

令 $Z = a\left[\left(Y_2 - Y_1\right)^2 + \left(Y_4 - Y_3\right)^2 + \cdots + \left(Y_{10} - Y_9\right)^2\right]$

若 Z 服从 χ^2 分布,则常数 $\alpha =$ ___________________。

（二）用总体分布或数学特征的性质,求统计量的数学特征。

7.连续型随机变量 X 服从 n 个自由度的 χ^2 分布,其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

求 $E\left(X\right), D\left(X\right)$。

8.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n \left(n > 2\right)$ 为来自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X} \left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$

（1）求 Y_i 的方差 $D\left(Y_i\right)\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$

（2）求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}\left(Y_1, Y_n\right)$

（3）求 $P\left\{Y_1 + Y_n \le 0\right\}$

（三）求与统计量有关事件的概率。

9.设 $X_1, X_2, \cdots, X_{200}$ 是取自服从"$0-1$"分布的总体 X 的简单随机样本,且已知 $P\left\{X = 0\right\} = 0.6, P\left\{X = 1\right\} = 0.4$，计算概率:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}\left(X_{2i} - X_{2i-1}\right)^2 \le 58\right\}$$

（已知 $\Phi\left(2\right) = 0.9773, \Phi\left(x\right)$ 是标准正态分布函数。）

10.设 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 为取自总体 $X \sim N\left(0, 0.5^2\right)$ 的样本,求

$P\left\{\sum_{i=1}^{8} X_i^{\,2} > 4.38\right\}$（已知 $x_{0.025}^2\left(8\right) = 17.535, x_{0.05}^2\left(8\right) = 15.507$）

11.设总体 $X \sim N\left(10, 2^2\right), Y \sim N\left(20, 2^2\right)$ 相互独立，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_5$ 分别为取自两个总体的简单随机样本,令

$$F_1=\frac{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-10\right)^2}{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(Y_i-20\right)^2};F_2=\frac{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}$$

（1）已知$P\left\{F_1\ge b\right\}=0.025$，求$b$的值。

（2）已知$P\left\{F_2\le a\right\}=0.05$，求$a$的值。

（已知

$F_{0.025}\left(10.5\right)=6.62,F_{0.025}\left(5.10\right)=4.24;F_{0.05}\left(9.4\right)=6.00,F_{0.05}4.9=3.63$）

12.设$X_1,X_2,$L L $,X_{16}$是取自总体X：$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的样本,又$S^2$分别是相本均值与样本方差,已知

$$P\left\{\overline{X}>\mu+as\right\}=0.95$$

求常数a（已知$t_{0.05}\left(15\right)=1.7531,t_{0.025}\left(15\right)=2.1315$）

13.已知$X_1,X_2,$L L $,X_6$是取自总体X：$N\left(1,\sigma^2\right)$的简单随机样本,已知

$P\left\{\overline{X}>1,S^2<c^2\sigma^2\right\}=p\left(0<p<0.5\right)$

试用统计量的分位数表示常数c。

第六讲　　参数估计与假设检验(数(一),数(三))

一、参数估计

Ⅰ.点估计

1.概念　设θ是总体X的未知参数,用统计量$\hat{\theta}=\theta(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$来估计参数$\theta$时,称$\hat{\theta}$是$\theta$的估计量,估计量的观察值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$叫参数$\theta$的估计值.求参数$\theta$的估计量$\hat{\theta}$叫参数$\theta$的点估计.

2.构造估计量的常用方法

(ⅰ)矩估计法：用样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的l阶矩,代替总体的l阶矩($l=1,2,\cdots,k$).设总体X的分布中含有k个未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

令 $A_l=\mu_l$（l=1，2，⋯, k）

这是含k个未知数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$的联立方程组,用它们的解$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$作为参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$的矩估计量.这种方法称作矩估计法.

注意:①无论总体X服从何种分布,若数学期望$E(X)$,方差$D(X)$是未知参数,它们的矩估计量都是$\hat{\mu}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$为$E(X)$的矩估计量.

$\hat{\sigma}^2=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$为$D(X)$的矩估计量.

②可以选择“样本矩的连续函数”作为“相应总体矩的连续函数”的矩估计量.

(ⅱ)最大似然估计法,设离散型总体X的分布律

$P\{X=x\}=P\{x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k\}$

含有k个未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$;又设连续型总体$X$的概率密

$f(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$

含有k个未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$,对于给定的一组样本值$x_1, x_2, \cdots, x_n$.

称 $L=\prod_{i=1}^{n} p(x_i,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\theta_k)$ (离散型)

或 $L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\theta_k)$ (连续型)

为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的似然函数.

由于参数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\theta_k$ 的不同,造成同一组样本值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ 下随机事件 $L=L(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n;\ \theta_1,\ \theta_2\cdots,\theta_k)$也不同,参数的选取,应该使已发生的事件

(即现在样本值 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ 对应的事件 L)的概率达到最大的参数 $\hat{\theta}_1,\theta_2,\ \cdots,\theta_k$ 作为参数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\theta_k$ 的估计值,相应的估计量称作参数 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\theta_k$ 的最大似然估计量.这种方法叫最大似然估计法.

第一步,对给定的一组样本值写出似然函数: $L=L(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n;\ \theta_1,\ \theta_2\cdots,\theta_k)$

第二步,由于 $L(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_k)$ 与 $\ln L(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_k)$ 在同一处 $(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_k)$ 取到最大值,故对 L 取对数,得 $\ln L$.

第三步,令 $\frac{\partial}{\partial\theta_i} InL = 0\ (i=1,2,\ \cdots,k)$

这是含 k 个未知数 $\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_k$ 最大似然估计值.再将 $\hat{\theta}_1,\theta_2,\ \cdots,\theta_k$ 作为参数 $\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\theta_k$ 的最大似然估计值.再将 $\hat{\theta}_i\ (i=1,2,\ \cdots,k)$的表示式中的 $x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n$ 换成 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$,就得到 $\theta_i\ (i=1,2,\ \cdots,k)$的最大似然估计量.

$\hat{\theta}_i=\theta_i(X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n)$

注意

① 总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 中 $\mu,\ \sigma^2$ 未知时, $\mu,\ \sigma^2$ 的最大似然估计量分别为 $\hat{\mu}=\bar{X}^2,\hat{\sigma}=S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (与相应的矩估计量相同)

②若总体 $X\sim U(a,\ b)$ a,b 为未知参数,则 a,b 的最大似然估计量分别为

$\hat{a}=\min_{1\le i\le n}\{X_i\},b=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$

③最大似然估计的性质:设总体 X 的分布函数含未知参数 θ, $F=F(x,\theta)$,而 $\hat{\theta}$ 是 θ 的

最大似然估计量,而 θ 的函数 $\mu=\mu(\theta)(\theta\in\Theta)$ 具有单值原函数 $\theta=\theta(\mu)(\mu\in U)$,则 $\hat{\mu}=\mu\left(\hat{\theta}\right)$ 是 $\mu(\theta)$ 的最大似然估计.

(当总体分布中含有多个未知参数时,此性质仍成立.如 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 可知 σ 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

④最大似然估计量,一般是相合估计量(一致估计量),但不一定是无偏估计量.

Ⅱ.估计量的评选标准

1.无偏性,设 $\hat{\theta}$ 是总体 X 分布中未知参数 θ 的估计量.即 $\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n)$,如果 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

注意对任何总体,无论服从何种分布,只要 E(X)存在 $\bar{X}$ 为 E(X)的无偏估计,

$\hat{\sigma}^2=D(X)=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 D(X)的无偏估计.而

$\hat{\sigma}^2=D(X)=S_n{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不是 D(X)的无偏估计. $\hat{\sigma}=\sqrt{D(X)}=S$ 也不是 $\sqrt{D(X)}$ 的无偏估计.

2.有效性.设 $\hat{\theta}_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量,若 $D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$,称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

3.相合性(一致性):设 $\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n)$ 是总体 X 未知参数 θ 的估计量,如果

$\hat{\theta}\xrightarrow{p}\theta\left(n\to\infty\right)$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合(一致)估计量.

注意,由大数定律知,对任何总体 X, $\hat{E}\left(X\right)=\bar{X}$ 是 E(X)的相合估计量, S^2 与 S_n^2 都是 D(X)的相合估计量;S 是 $\sqrt{D(X)}$ 的相合估计量.

Ⅲ.区间估计

1.概念:以足够大的可靠性(置信水平)确定出未知参数 θ 所在范围的这种估计,称作参数的区间估计,即

设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$ 含一个未知参数 q ,对给定的小正数 $\alpha: 0<\alpha<1$,若由样本 X_1, X_2, $\cdots\cdots X_n$ 确定两个统计量

$a=a(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n), b=b(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)$ 满足:

$P\{a(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)<\theta<b(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)\}=1-\alpha$

则称区间 (a,b) 是参数 q 的置信水平(置信度)为 $1-\alpha$ 的置信区间, a,b 分别称作置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限与置信上限. $1-\alpha$ 称作置信水平(置信度).

注意:置信区间 $(a(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n), b(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n))$ 是一个随机区间,置信水平为 $1-\alpha$ 是指:这一随机区间覆盖参数 q 的概率为 $1-\alpha$,一旦有了一组确定的样本值 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 就可以得到一个具体的数量区间 $(a(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n), b(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)) \overset{\text{记成}}{=\!=} (\alpha,\beta)$,这时 (α,β) 也称作参数 q 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间,其含意为“(α,β) 包含 q ”(或“(α,β),套住了 q ”)的可信程度为 $1-\alpha$.如果理解为(或写为) $P\{\alpha<\theta<\beta\}=1-\alpha$ 则是错误的,因为 (α,β) 是一个具体的数量区间,要么有 $\theta\in(\alpha,\beta)$ 此时 $P\{\alpha<\theta<\beta\}=1$;要么有 $\theta\notin(\alpha,\beta)$,此时 $P\{\alpha<\theta<\beta\}=0$.

2.求法

①找一个样本的函数 $Z=Z(X_1,X_2,\cdots X_n;\theta)$ 包含待估参数 θ ,不包含其它未知参数,通常从 θ 的点估计出发考虑此函数.

②对给定的置信水平 $1-\alpha$ 定出两个常数 λ_1,λ_2 (一般通过 Z 服从的分布的上(侧) α 分位点,或查表,或计算可求出),使得

$P\{\lambda_1<Z(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n; \theta)<\lambda_2\}=1-\alpha$

③从 $\lambda_1<Z(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n; \theta)<\lambda_2$ 解得等价的不等式.

$a<\theta<b$

其中 $a=a(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n), b=b(X_1, X_2, \cdots\cdots X_n)$ 都是统计量,那么 (a, b) 就是参数 q 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

3.一个正态总体均值与方差的区间估计和两个正态总体的均值差与方差比的区间估计,见下表(设置信水平为 $1-\alpha(\alpha: 0<\alpha<1)$).

待估参数	条件	服从分布	双侧置信区间
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} : N(0,1)$	$P\{\lvert Z \rvert \ge z_{\alpha/2}\} \Rightarrow \left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$, 即$\left(\bar{X}\text{-}z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}，\ \bar{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
	σ^2 未知	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} :\ t(n-1)$	$P\{\lvert T \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha \Rightarrow \left(\bar{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$ 即 $\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}，\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$
σ^2	μ 已知	$\chi^{2'}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 :$ $\chi^2(n)$	由$P\left\{\chi^{2'} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=P\left\{\chi^{2'} \le \chi^2_{\alpha/2}(n)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$, 得$\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} :$ $\chi^2(n-1)$	由 $P\left\{\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}=P\left\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$ 得$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

待估参数	条件	服从分布	双侧置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2 已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	由 $P\left\{\lvert Z\rvert\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha$ 得 $\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ 即 $\left(\begin{array}{l}\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\\ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\end{array}\right)$
	已知有 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 但 σ^2 未知	$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$ 其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ $S_w=\sqrt{S_W^2}$	由 $P\left\{\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}=\alpha$ 得 $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$ 即 $\left(\begin{array}{l}\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\\ \left(\bar{X}-\bar{Y}\right)+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\end{array}\right)$
$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 未知	$F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\dfrac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$	由 $P\left\{\begin{array}{l}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\\ <\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}<\\ F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\end{array}\right\}=1-\alpha$ 得 $\left(\begin{array}{l}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)},\\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)}\end{array}\right)$

二、假设检验

Ⅰ.有关概念

1.假设检验:设总体的分布函数完全未知,或总体分布类型已知,但其中一个(或几个)参数未知。为了推断总体是否具备某些性质,提出一个假设(看法)，需要从样本提供的信息(即从一组具体的样本值)出发,对提出的假设“以小概率事件在一次试验中基本不会发生”为原则做出判断:是接受，还是拒绝该假设,这类统计推断问题，称为“假设检验”.

2.相关术语

（1）H_0称为原假设(或零假设),与H_0相反结论称作备择假设.记为H_1 (或称作择一假设).

（2）显著性水平α:给定很小的正数$\alpha: 0<\alpha<1$，一般取$\alpha=0.05$（或$\alpha=0.10, \alpha=0.01$）作为衡量“小概率事件”的概率标准,称作显著性水平，也称作检验水平.

（3）临界点与拒绝域:针对H_0,选择好检验统计量Z(知其服从何种分布)通过分布的上(侧)$\dfrac{\alpha}{2}$分位点)，选取常数k，使

$P\{$当H_0为真时拒绝$H_0\}=P\{|Z|\geq k\}=\alpha$（双侧检验）(或$P\{$当$H_0$为真时拒绝$H_0\}=P\{Z>k\}=\alpha$；$P\{$当$H_0$为真时拒绝$H_0\}=P\{Z<k\}=\alpha$ （单侧检验）则常数k叫临界值，而区域$W=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)\mid |Z|\geq k\left(\text{或}"z>k";"z<k"\right)\right\}$称作假设$H_0$的拒绝域.

3.基本思想与做法:思想为“带有概率性质的反证法”，先假设H_0成立，然后根据样本提供的信息，如果导致“小概率事件发生”，即使得检验统计量的值落入拒绝域，则拒绝H_0，而接受H_1，否则称原假设H_0是相容的，而接受它.

4.两类错误

第Ⅰ类错误(弃真错误),犯第Ⅰ类错误的概率.

$P\{$当H_0为真时拒绝$H_0\}=P\left\{\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)\in W\right\}\leq\alpha$

第Ⅱ类错误(存伪错误),犯第Ⅱ类错误的概率

$P\{$当H_0不真时,接受$H_0\}=P\left\{\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)\notin W\right\}\leq\beta$

注意:

①在样本容量 n 固定时,α减小,则β增大;反之,β减小时,α增大.

②在给α(已很小)的条件下,再减小β的办法只能增大样本容量 n,这是不实际的.

③一般,在给定样本容量 n 时,仅控制犯第Ⅰ类错误的概率使其小于等于α,而不考虑犯Ⅱ类错误的检验,称为显著性检验。

Ⅱ.正态总体的参数假设检验(检验水平为α)

		原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及分布	H_0的拒绝域
一个正态总体	α^2 已知	$\mu = \mu_0$ $\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$: $N(0,1)$	$\lvert Z \rvert \ge z_{\alpha/2}$ 即 $\bar{X} \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{X} \le \mu_0 + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $Z \ge z_\alpha$，即 $\bar{X} \ge \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $Z \le -z_\alpha$，即 $\bar{X} \le \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
	σ^2 未知	$\mu = \mu_0$ $\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$: $t(\mathrm{n}-1)$	$\lvert T \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$ 即 $\bar{X} \ge \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{X} \le \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} T$ $> t_0(n-1)$ 即 $\bar{X} > \mu_0 + t_0(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} T$ $< t_\alpha(n-1)$ 即 $\bar{X} < \mu_0 - t_\alpha(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$
	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^{(2')} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$: $\chi^2(n)$	$\chi^{2'} \ge \chi_{\alpha/2}^2(n)$或 $\chi^{2'} \le \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ $\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: $\chi^2(n-1)$	$\chi^{2'} \ge \chi_{\alpha/2}^2(n)$ 或 $\chi^{2'} \le \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

		原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及分布	H_0 的拒绝域
	σ_1^2，σ_2^2 已知	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$	$\mu_1 - \mu_2 \ne \delta$ $\mu_1 - \mu_2 > \delta$ $\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z = \dfrac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $: N\left(0,1\right)$	$\lvert Z \rvert \ge z_{\alpha/2}$ $Z \ge z_\alpha$ $Z \le -z_\alpha$
两个正态总体	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 但 σ^2 未知	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$	$\mu_1 - \mu_2 \ne \delta$ $\mu_1 - \mu_2 > \delta$ $\mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z = \dfrac{\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) - \delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ 其中 $: t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$ $S_w^2 = \dfrac{\left(n_1 - 1\right)S_1^2 + \left(n_2 - 1\right)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$， $S_w = \sqrt{S_w^2}$	$\lvert T \rvert \ge t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right)$ $T \ge t_\alpha\left(n_1 + n_2 - 2\right)$ $T \le -t_\alpha\left(n_1 + n_2 - 2\right)$
	μ_1，μ_2 未知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}:$ $F\left(n_1 - 1，n_2 - 1\right)$	$F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1 - 1，n_2 - 1\right)$或 $F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1 - 1，n_2 - 1\right)$ $F \ge F_\alpha\left(n_1 - 1，n_2 - 1\right)$ $F \ge F_{1-\alpha}\left(n_1 - 1，n_2 - 1\right)$

三、例题分析

（一）求总体未知参数的矩估计量、最大似然估计量,并讨论其优良性质

1.设总体 X 的概率密度是

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}(a-x) & 0<x<a\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中$\alpha>0$，为未知参数， $X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体的样本

（1）求a的矩估计量

（2）若 1,2 是总体 X 的两个样本值,求a的极大似然估计量.

2.设$X_1,X_2,\cdots X_n$是取自总体X的一个简单随机样本，则$E\left(X^2\right)$的矩估计量是(　)

A. $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$　　　　B. ${S_n}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$

C. $S^2+\overline{X^2}$　　　　D. ${S_n}^2+\overline{X^2}$

3. $X_1,X_2,\cdots X_n$是取自总体X的样本，$E\left(X\right)=\mu,D\left(X\right)=\sigma^2$，则(　　)可作为$\sigma^2$的无偏估计量。

A. μ已知时，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$

B. μ已知时，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$

C. μ未知时，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$

D. μ未知时，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$

4.总体X服从 Poisson 分布$P\left(\lambda\right)$,其中$\lambda>0$为未知数, $X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体X的简单随机样本。

（1）求λ的最大似然估计量。

（2）求$P\left\{X=0\right\}$的最大似然估计量。

（3）讨论λ的最大似然估计量的无偏性与一致性。

5.设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le \mathrm{x}\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中θ为未知参数$\left(0<\theta<1\right)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$为来自总体X的简单随机样本,记N为样本值$x_1,x_2,\cdots x_n$中小于 1 的个数。

（1）求θ的最大似然估计。

（2）求θ的矩估计，并问此估计是否为θ的无偏估计。

（二）求估计量中参数，使之具有某种优良性质.

6.设 $X_1, X_2, \mathrm{L}\ X_n$ 为取自总体 X：$N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，试求常数 c ,使

$$Y = c\sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2$$

是σ^2的无偏估计.

7.设总体X的概率密度为

$$f\left(x;\theta\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta} & 0 < x < \theta \\ \dfrac{1}{2\left(1-\theta\right)} & \theta \le x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$ 其中参数$\theta\left(0 < \theta < 1\right)$ 未知，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值

（1）求参数θ的矩估计量

（2）判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计，并说明理由。

（三）求总体未知参数的区间估计

8.总体X均值μ的置信度为95%的置信区间为$\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right)$其含义为(　)

A. 总体X均值μ的真值以95%的概率落入区间$\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right)$

B. 总体X的样本均值X以95%的概率落入区间$\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right)$

C. 区间$\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right)$包含总体$X$均值$\mu$的真值的概率为95%

D .区间$\left(\underline{\mu}, \overline{\mu}\right)$包含$X$的样本均值$X$的概率为95%

9.设一批零件长度X服从正态分布$N\left(\mu, \sigma^2\right)$,其中$\mu, \sigma^2$未知,现从中随机抽取 16 个零件,测得样本均值$\overline{x} = 20\left(cm\right)$,样本标准差$S = 1\left(cm\right)$,则$\mu$的置信度为 0.90 的置信区间为(　)

A.$\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}^{(16)}, 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}^{(16)}\right)$　　B.$\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}^{(16)}, 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}^{(16)}\right)$

C. $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.05}^{(15)}, 20 + \frac{1}{4}t_{0.05}^{(15)}\right)$　　D. $\left(20 - \frac{1}{4}t_{0.1}^{(15)}, 20 + \frac{1}{4}t_{0.1}^{(15)}\right)$

10.设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,在 σ^2 已知，n 固定的情况下，μ 的置信度为 $1-\alpha\left(0<\alpha<1\right)$ 的置信区间，当提高置信度 $1-\alpha$ 时,置信区间的长度(　　　)

A.无变化　　B.变小　　C.变大　　D.有时变小,有时变大

11.设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,

（1）μ 已知时,推导方差 σ^2 置信度为 $1-\alpha\left(0<\alpha<1\right)$ 的置信区间表示式.

（2）$\mu=2$，从 X 中抽取样本观测值为:1.8，2.1，2.0，1.9，2.2，1.8

求 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间

（已知 $x_{0.025}^2(6)=14.449; x_{0.975}^2(6)=1.237; x_{0.025}^2(5)=12.833; x_{0.975}^2(5)=0.831$）

（四）正态总体未知参数的假设检验。

12.用某种仪器对锰的熔点,(单位:℃)做了 4 次试验,已知 4 次测定值的均值为 $\overline{x}=1260.25$，标准差为 $s=16.50$，假设用该种仪器测得的锰的熔点服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，在显著性水平 $x=0.05$ 下

（1）锰的熔点的数学期望是否为 $1260°C, \left(t_{0.025}(3)=3.1824, t_{0.005}(3)=2.3534\right)$

（2）可否认为锰的熔点的标准差不超过 $10, \left(x^2{}_{0.025}(3)=9.348, x^2{}_{0.05}(3)=7.815\right)$

13.设随机变量 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，现检验总体 X 的均值大于 Y 的均值，则应检验的假设是（　　　）

A. $H_0: \mu_1 > \mu_2$;　$H_1: \mu_1 \le \mu_2$　　B. $H_0: \mu_1 \ge \mu_2$;　$H_1: \mu_1 < \mu_2$

C. $H_0: \mu_1 < \mu_2$;　$H_1: \mu_1 \ge \mu_2$　　D. $H_0: \mu_1 \le \mu_2$;　$H_1: \mu_1 > \mu_2$

14.设总体 $X \sim N(\mu, 0.2^2)$ μ 为未知参数，现对 $H_0, \mu=\mu_0$（μ_0 为一已知数)的显著性检验中,接受域为 $\left\{|\overline{X}-\mu_0|<0.1\right\}$（$\overline{X}$ 为容量为 n 的样本均值),要使犯第一类错误(弃真错误)的概率不大于 0.05，问样本容量 n 至少应该多大。