Soluciones Guia PSU

Felipe Colli

12 de abril de 2024

Soluciones de los Ejercicios

Ejercicio 1: Análisis de Notas

Datos proporcionados:

- Media ($\bar{x}$) en ambos trimestres: 5,1
- Nota máxima en ambos trimestres: 7,0
- Nota mínima en ambos trimestres: 3,2
- Número de estudiantes (N): 30 (contando las notas en cada tabla)

1. **Coeficiente del rango (CRV):** El Rango (R) es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo.

$$R = \text{Máximo} - \text{Mínimo} = 7{,}0 - 3{,}2 = 3{,}8$$

El rango es el mismo para ambos trimestres. El Coeficiente de Variación del Rango (CRV) se calcula como $CRV = \frac{R}{\bar{x}}$.

$$CRV = \frac{3{,}8}{5{,}1} \approx 0{,}745$$

Respuesta: El coeficiente del rango (CRV) es aproximadamente 0,745 para **ambos trimestres**. Basado en esta medida, ninguno tiene un coeficiente de rango menor que el otro.

2. **Interpretación del CRV: Respuesta:** Dado que el CRV es el mismo para ambos trimestres, esta medida por sí sola **no indica** que un trimestre presente calificaciones más dispersas que el otro en relación al promedio.

3. **Coeficiente de Desviación Media (CDM):** Primero, calculamos la Desviación Media (DM) para cada trimestre: $DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}$.

   - **Trimestre 1:** La suma de las desviaciones absolutas es $\sum |x_i - 5{,}1| = 24{,}6$.

$$DM_1 = \frac{24{,}6}{30} = 0{,}82$$

   - **Trimestre 2:** La suma de las desviaciones absolutas es $\sum |x_i - 5{,}1| = 17{,}6$.

$$DM_2 = \frac{17{,}6}{30} \approx 0{,}587$$

Luego, calculamos el Coeficiente de Desviación Media (CDM): $CDM = \frac{DM}{\bar{x}}$.

   - **Trimestre 1:** $CDM_1 = \frac{0{,}82}{5{,}1} \approx 0{,}161$
   - **Trimestre 2:** $CDM_2 = \frac{0{,}587}{5{,}1} \approx 0{,}115$

Respuesta: El CDM es aprox. 0,161 para el primer trimestre y aprox. 0,115 para el segundo trimestre.

4. **Interpretación del CDM y la "sensación": Respuesta:** El CDM mide la dispersión promedio relativa a la media. El segundo trimestre tiene un CDM menor (0,115 vs 0,161), lo que indica que sus notas, en promedio, estaban más cerca de la media 5,1. Esto significa menor dispersión relativa en el segundo trimestre. Esto **corrobora la "sensación"** de los estudiantes; aunque la media era igual, las notas más agrupadas del segundo trimestre pueden percibirse como "mejores.º más consistentes.

5. **Coeficiente de Desviación Estándar (Coeficiente de Variación, CV):** Primero, calculamos la Desviación Estándar Poblacional (σ) para cada trimestre: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}}$.
   - **Trimestre 1:** Suma de cuadrados de desviaciones $\sum(x_i - 5{,}1)^2 = 31{,}14$.
   $$\sigma_1^2 = \frac{31{,}14}{30} \approx 1{,}038 \implies \sigma_1 = \sqrt{1{,}038} \approx 1{,}019$$
   - **Trimestre 2:** Suma de cuadrados de desviaciones $\sum(x_i - 5{,}1)^2 = 17{,}18$.
   $$\sigma_2^2 = \frac{17{,}18}{30} \approx 0{,}572{,}7 \implies \sigma_2 = \sqrt{0{,}572{,}7} \approx 0{,}757$$

   Luego, calculamos el Coeficiente de Variación (CV): $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$.
   - **Trimestre 1:** $CV_1 = \frac{1{,}019}{5{,}1} \approx 0{,}199{,}8 \approx 0{,}200$
   - **Trimestre 2:** $CV_2 = \frac{0{,}757}{5{,}1} \approx 0{,}148$

   Respuesta: El CV es aprox. 0,200 (o 20,0 %) para el primer trimestre y aprox. 0,148 (o 14,8 %) para el segundo trimestre.

6. **Homogeneidad: Respuesta:** Las calificaciones más homogéneas son las que presentan menor dispersión relativa (menor CV). Por lo tanto, el **Segundo Trimestre** (CV $\approx$ 0,148) presenta calificaciones más homogéneas.

7. **Interpretación del CV: Respuesta:** El CV indica qué tan grande es la desviación estándar en relación a la media. En el primer trimestre, la desviación estándar es un 20 % de la media, mientras que en el segundo es solo un 14,8 %. Esto confirma cuantitativamente que las notas del segundo trimestre están más concentradas alrededor de la media 5,1.

8. **Mejor Trimestre: Respuesta:** Aunque la media, máximo y mínimo son iguales, el **Segundo Trimestre** puede considerarse "mejor"debido a su **menor dispersión** (menor DM, menor σ, menor CV). Esto sugiere mayor consistencia en el rendimiento de los estudiantes, lo que puede ser preferible y coincide con la "sensaciónreportada. Un grupo más homogéneo puede indicar un aprendizaje más uniforme.

9. **Gráfica Representativa: Respuesta:** Un **diagrama de caja y bigotes (boxplot) comparativo** sería ideal. Mostraría la misma media (o medianas similares), los mismos extremos, pero visualizaría claramente la diferencia en la dispersión (longitud de la caja y/o bigotes) entre los dos trimestres. Alternativamente, histogramas o diagramas de puntos comparativos también servirían.

Ejercicio 2: Salto con Garrocha

Datos: 2,50; 2,80; 2,60; 3,00; 2,90 (metros). N = 5.

1. **Suma de desviaciones respecto a la media:** Primero, calcular la media ($\bar{x}$):
   $$\bar{x} = \frac{2{,}50 + 2{,}80 + 2{,}60 + 3{,}00 + 2{,}90}{5} = \frac{13{,}80}{5} = 2{,}76 \text{ m}$$
   Ahora, calcular las desviaciones ($x_i - \bar{x}$):
   - $2{,}50 - 2{,}76 = -0{,}26$
   - $2{,}80 - 2{,}76 = 0{,}04$
   - $2{,}60 - 2{,}76 = -0{,}16$
   - $3{,}00 - 2{,}76 = 0{,}24$
   - $2{,}90 - 2{,}76 = 0{,}14$

   Sumar las desviaciones:
   $$(-0{,}26) + (0{,}04) + (-0{,}16) + (0{,}24) + (0{,}14) = (-0{,}42) + (0{,}42) = 0$$
   Respuesta: Se comprueba que la suma de las desviaciones respecto a la media es **0**.

2. **Desviación Media (DM):** Usamos las desviaciones absolutas de la parte (a): $|-0{,}26| = 0{,}26$; $|0{,}04| = 0{,}04$; $|-0{,}16| = 0{,}16$; $|0{,}24| = 0{,}24$; $|0{,}14| = 0{,}14$. Sumamos las desviaciones absolutas:
   $$\sum |x_i - \bar{x}| = 0{,}26 + 0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}24 + 0{,}14 = 0{,}84$$

Calculamos la Desviación Media:

$$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{0{,}84}{5} = 0{,}168 \text{ m}$$

Respuesta: La desviación media de los datos es 0,168 **metros**.

Ejercicio 3: Distribución de Frecuencias

Datos: Tabla de frecuencias agrupadas. N = 1,800. **Tabla de Cálculos:** (x_m = Marca de Clase)

Puntaje	Freq (f_i)	x_{mi}	$f_i \cdot x_{mi}$	$(x_{mi} - \bar{x})$	$f_i \cdot (x_{mi} - \bar{x})^2$
0 - 2	21	1	21	-13,82	4,001,3
3 - 5	50	4	200	-10,82	5,853,6
6 - 8	110	7	770	-7,82	6,730,3
9 - 11	241	10	2410	-4,82	5,599,7
12 - 14	423	13	5499	-1,82	1,398,5
15 - 17	457	16	7312	1,18	634,4
18 - 20	275	19	5225	4,18	4,806,2
21 - 23	134	22	2948	7,18	6,909,0
24 - 26	66	25	1650	10,18	6,840,1
27 - 29	23	28	644	13,18	3,994,8
Total	**1800**		**26679**		**46767,9**

Primero, calculamos la media ($\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{\sum(f_i \cdot x_{mi})}{N} = \frac{26{,}679}{1{,}800} \approx 14{,}82 \text{ puntos}$$

1. **Desviación Estándar (σ):** Calculamos la varianza poblacional (σ^2):

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_{mi} - \bar{x})^2}{N} = \frac{46{,}767{,}9}{1{,}800} \approx 25{,}982$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx \sqrt{25{,}982} \approx 5{,}097 \text{ puntos}$$

(Nota: Usando la fórmula $\sigma^2 = [\sum(f \cdot x_m^2)/N] - \bar{x}^2$, con $\sum(f \cdot x_m^2) = 442{,}203$, da $\sigma^2 = 442{,}203/1800 - (26{,}679/1800)^2 \approx 245{,}668{,}3 - 14{,}821{,}67^2 \approx 245{,}668{,}3 - 219{,}681{,}9 \approx 25{,}986$, que es muy similar). **Respuesta:** La desviación estándar de la distribución es aproximadamente 5,10 **puntos**.

2. **Valores $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} - \sigma$:**

$$\bar{x} - \sigma \approx 14{,}82 - 5{,}10 = 9{,}72 \text{ puntos}$$

$$\bar{x} + \sigma \approx 14{,}82 + 5{,}10 = 19{,}92 \text{ puntos}$$

Respuesta: Los valores corresponden aproximadamente a 9,72 **puntos** y 19,92 **puntos**.

Ejercicio 4: Prueba de Matemática

Datos:

- Curso A: $\bar{x}_A = 5{,}3$; $s_A = 0{,}7$ (Asumimos desviación estándar muestral 's', aunque podría ser poblacional σ).
- Curso B: $\bar{x}_B = 5{,}4$; $s_B = 0{,}4$

1. **Comparación de Alumnos (Rendimiento Relativo):** Para comparar el rendimiento relativo a su curso, calculamos el puntaje Z (o puntaje estándar): $Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.
   - **Alumno A:** Nota $x_A = 6{,}7$.

$$Z_A = \frac{6{,}7 - 5{,}3}{0{,}7} = \frac{1{,}4}{0{,}7} = 2{,}0$$

(Este alumno está 2 desviaciones estándar por encima de la media de su curso).

- **Alumno B:** Nota $x_B = 6{,}6$.
$$Z_B = \frac{6{,}6 - 5{,}4}{0{,}4} = \frac{1{,}2}{0{,}4} = 3{,}0$$
(Este alumno está 3 desviaciones estándar por encima de la media de su curso).

Comparamos los puntajes Z: $Z_B(3{,}0) > Z_A(2{,}0)$. **Respuesta:** Al alumno del **Curso B** le fue mejor en la prueba en relación a su curso, ya que su rendimiento relativo (medido por el puntaje Z) fue superior al del alumno del Curso A.

2. **Justificación: Respuesta:** La justificación se basa en el **puntaje Z**. Aunque la nota absoluta del alumno A (6,7) es ligeramente mayor que la del alumno B (6,6), el puntaje Z mide qué tan excepcional es esa nota dentro del contexto de su propio grupo. El Curso B era más homogéneo ($s_B = 0{,}4$) que el Curso A ($s_A = 0{,}7$). Por lo tanto, obtener una nota de 6,6 en el Curso B representa una desviación mucho mayor y más positiva respecto a la media de su grupo (3 desviaciones estándar) que obtener 6,7 en el Curso A (solo 2 desviaciones estándar sobre su media). El alumno B se destacó más dentro de su curso.