相机标定

1. 常用术语

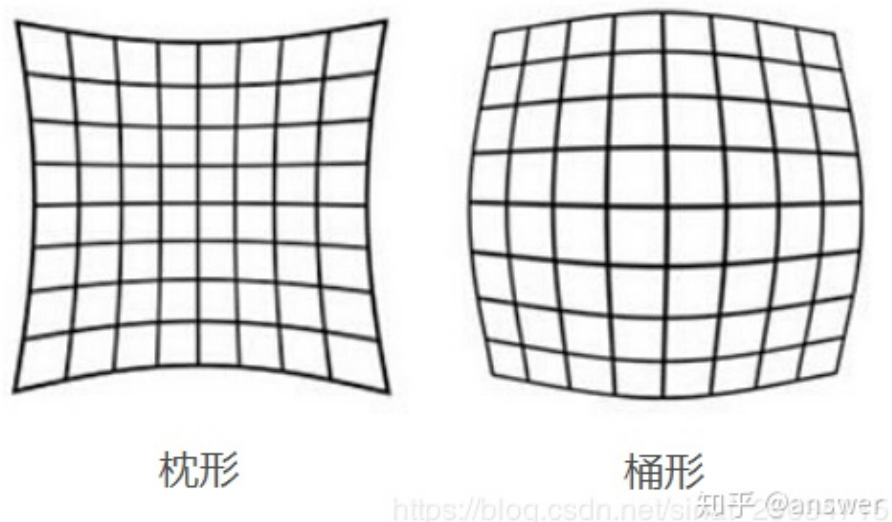
- 内参矩阵：将3D坐标变为2D坐标。

$$K=\begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  1. f_x，f_y表示焦距即焦点到图像平面的距离（实际含义为对应的x方向和y方向上的缩放程度）。很多情况下，二者会出现不同，因为数码相机的传感器缺陷，非均匀缩放，校准误差等等。
  2. x_0，y_0表示主点的偏移，主点就是对应的投影的照片的中点的偏移量。
  3. 可将内参矩阵变换为：2D平移、2D缩放、2D切变的乘积

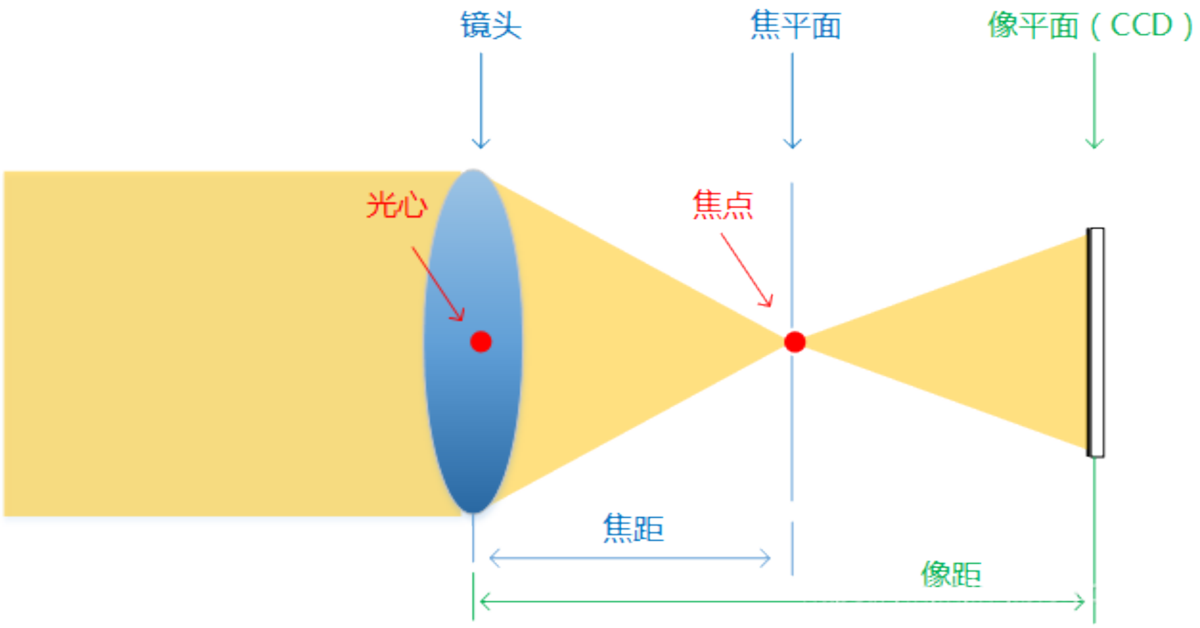
$$K=\begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{f_x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 径向畸变（枕形或是桶形）：光线在远离透镜中心的地方更加弯曲。

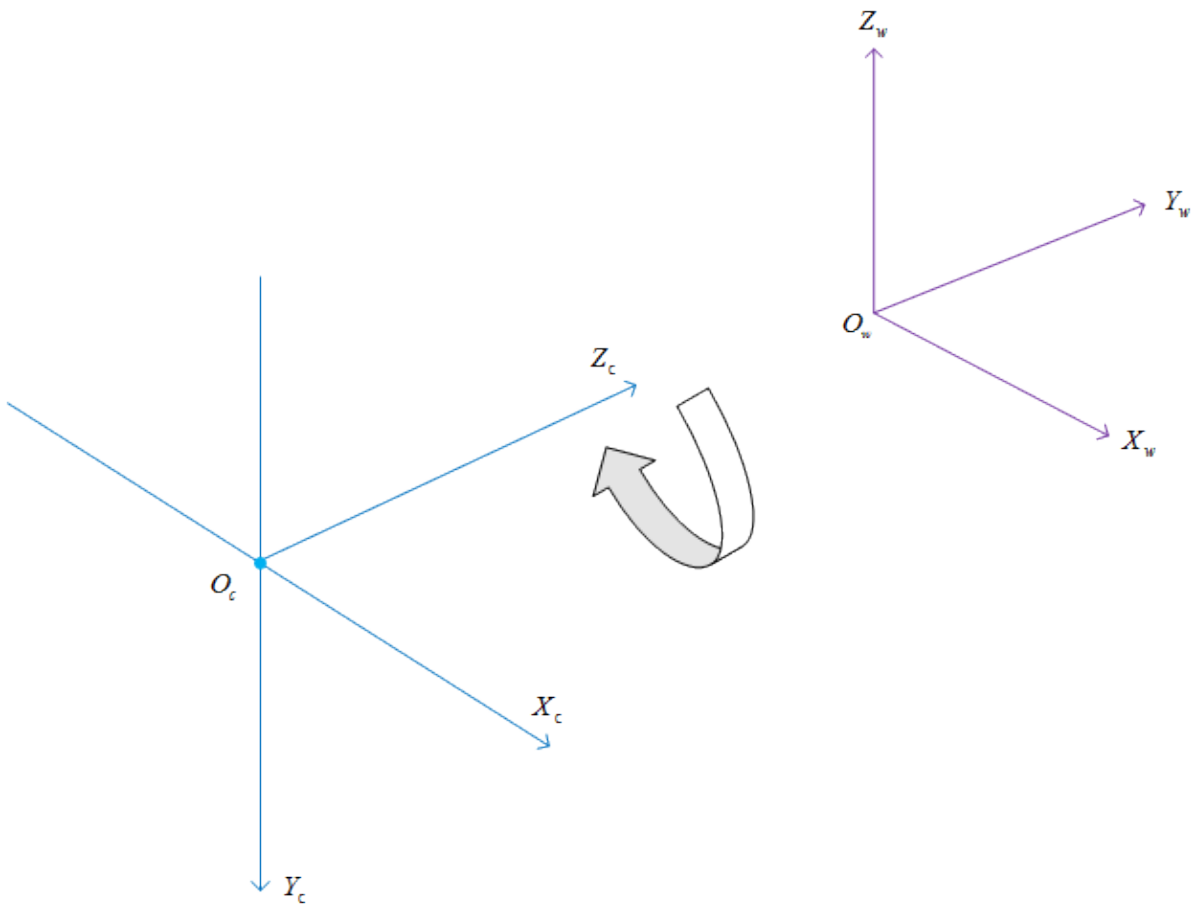


- 切向畸变：由于透镜不完全平行于图像平面（传感器装备的时候与镜头间的角度没有对准）。
- 旋转矩阵：原本的图像发生了切向旋转，需要加以修正。
- 平移向量：即对应上述的x_0, y_0
- 重投影误差：首次对三维空间的位置进行照相（首次投影），而后经过三角定位法和重建的三维坐标进行二次投影，二者之间的误差为冲投影误差。[重投影误差讲解]
- 三角定位法：使用两台或者是两台以上的相机对空间中的一个位置进行定位。

2. 坐标系转换

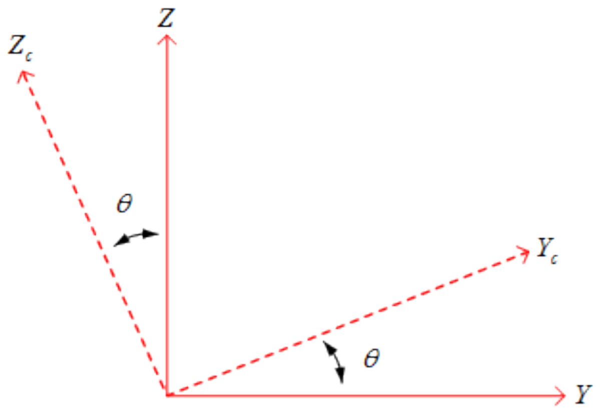


- 三维坐标系均需要满足右手法则
- 世界坐标系（三维直角坐标系）：测量坐标系，为以真实世界为中心建立的坐标系，可以定位相机和待测物体的位置。
- 相机坐标系（三维直角坐标系）：原点位于镜头的光心处，x、y轴分别与相面的两边平行，z轴为镜头的光轴，与相平面平行。
  - 光轴（主光轴）：光轴就是垂直于凸透镜与凸透镜切面垂直的假想的轴
  - 光心：光轴与镜头的交界处。
- 世界坐标系和相机坐标系之间是可以相互转换的：（低表w表示世界坐标系，低标c表示相机坐标系）



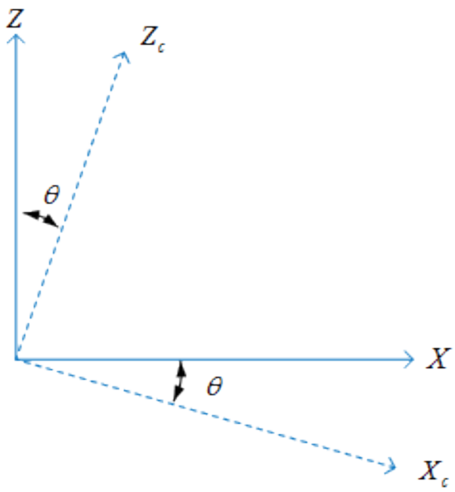
$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T$$

- R表示坐标系的旋转状态，则有：



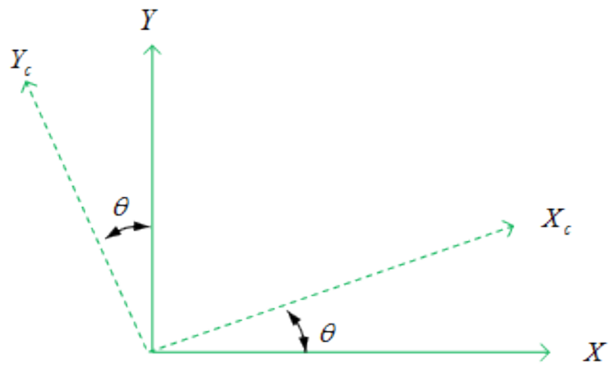
- 绕x轴旋转r1

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



- 绕y轴旋转r2

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



- 绕z轴旋转r3

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

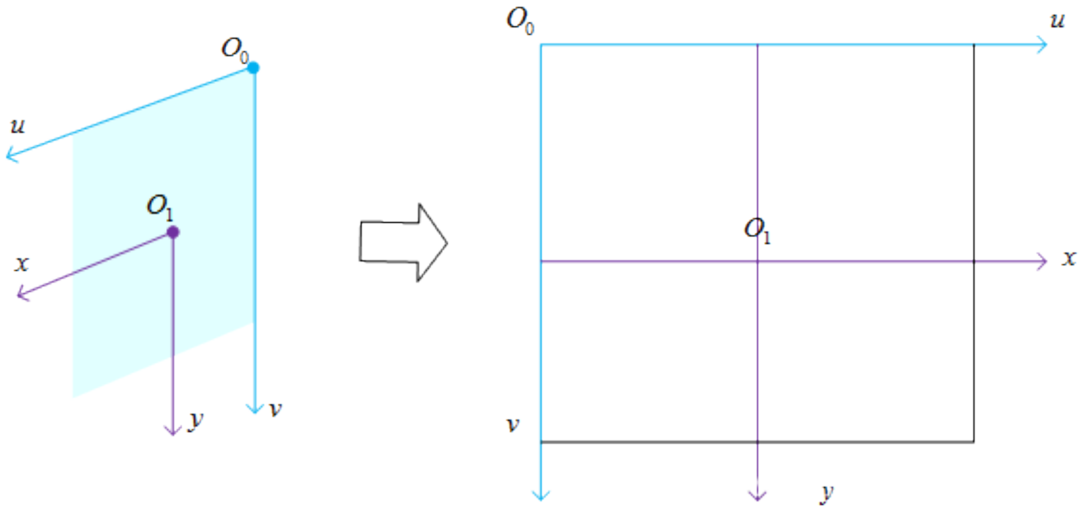
其中：

$$R = r_1 \times r_2 \times r_3$$

- 图像像素坐标系（二维直角坐标系）：表示图像中三维点在二维平面中的投影，原点在CCD图像[^利用光学传感器得到的图像]平面的左上角，u轴平行于CCD平面向右，v轴垂直于u轴向下，坐标使用（u，v）来表示。
- 图像物理坐标系（二维直角坐标系）：其坐标原点位于CCD图像平面的中心，x，y轴分别平行于图像像素坐标系的坐标轴，坐标用（x，y）表示。（我觉得这个就是上一个平移之后的结果）。
- 图像像素坐标系和图像物理坐标系之间的关系

	图像像素坐标系	图像物理坐标系
单位	像素	物理单位（mm/cm/m）
原点位置	图像的左上角	图像的正中心
两个轴	（u，v）	（x，y）

- 图像像素坐标系和图像物理坐标系之间的变换：



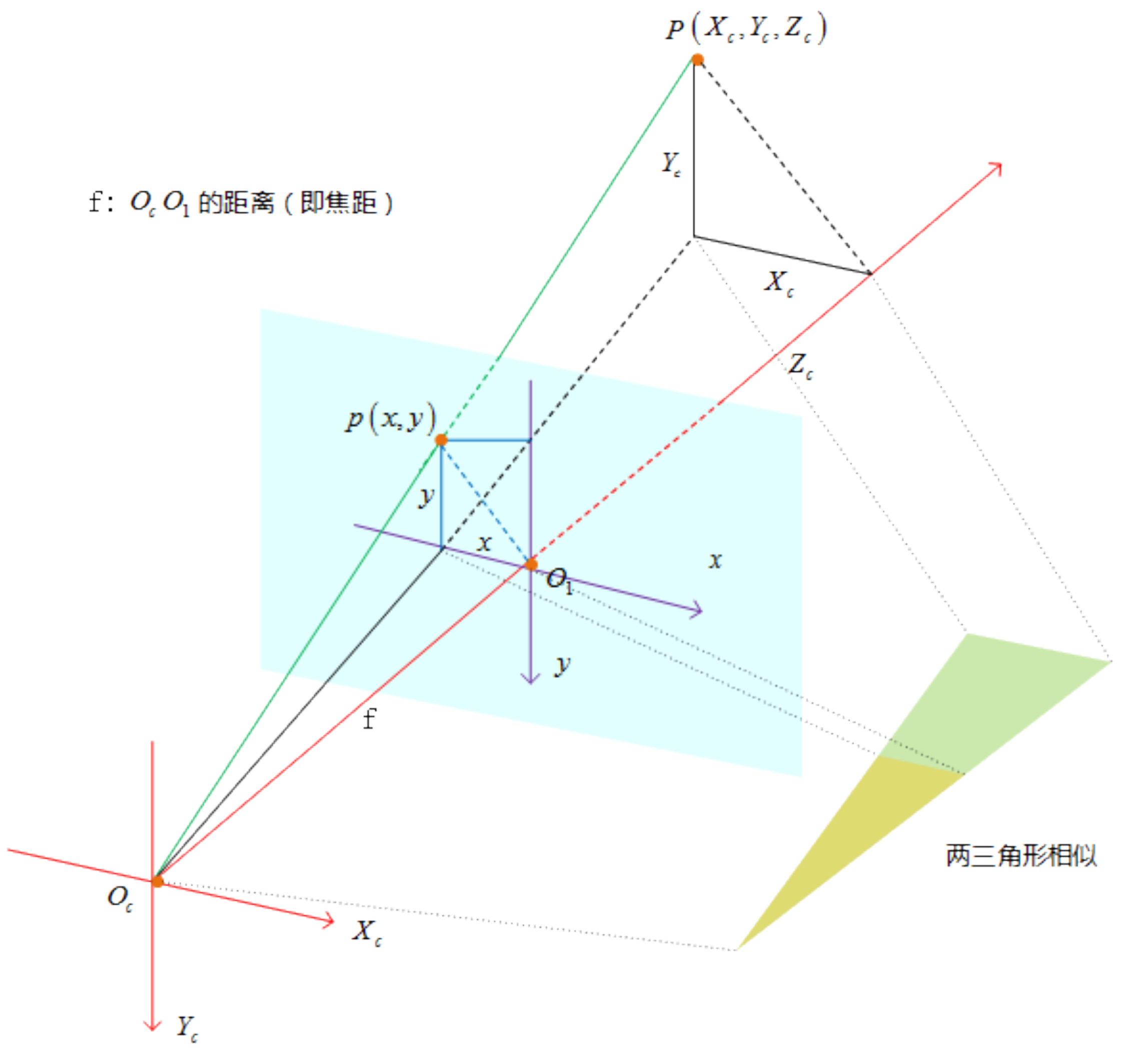
可得如下公式（d_x、d_y表示每个像素在u轴和v轴上的物理尺寸）：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{d_x} + u_0 \\ v = \frac{y}{d_y} + v_0 \end{cases}$$

写成矩阵形式的话是：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 相机坐标系和图像物理坐标系之间的转换：



相似三角形规律（f为焦距，x，y为图像物理坐标系中的点，X_c, Y_c, Z_c为相机坐标系中的坐标）：

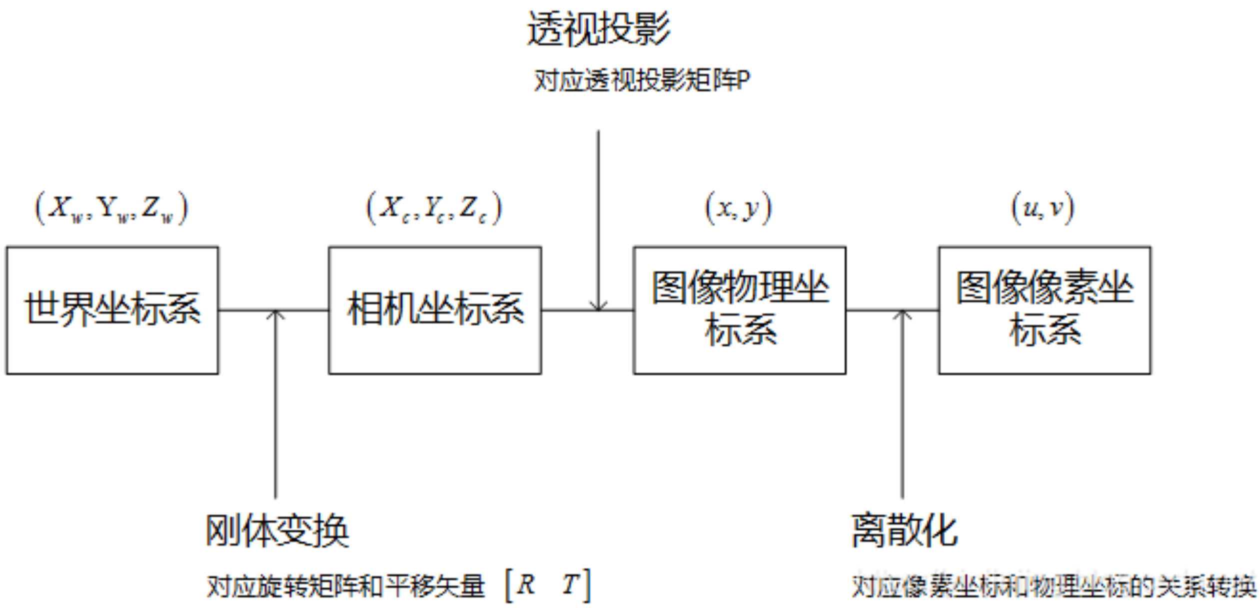
$$\left\{\frac{x}{f} = \frac{X_c}{Z_c}\ \frac{y}{f} = \frac{Y_c}{Z_c}\right. \Rightarrow \begin{cases} Z_c x = f X_c \\ Z_c y = f Y_c \end{cases} \Leftrightarrow Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 合并规范化所有的等式

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & s & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R \quad T] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & s & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R \quad T] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = K [R \quad T] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. P为3×4的矩阵称为投影矩阵
2. s称为扭转因子
3. K完全由k_u、k_v[^$(\frac{f}{d_x}、\frac{f}{d_y})$]、s、$u_0$、$v_0$决定，因此仅与相机内参相关，因此，称为内参矩阵。
4. $[R \quad T]$因为仅仅与相机相对于世界坐标系的方位决定，因此，称为相机的外参矩阵。

总结图示：


透视投影
对应透视投影矩阵P
(X_w, Y_w, Z_w)
(X_c, Y_c, Z_c)
(x, y)
(u, v)
世界坐标系
相机坐标系
图像物理坐标系
图像像素坐标系
刚体变换
对应旋转矩阵和平移矢量 $[R \quad T]$
离散化
对应像素坐标和物理坐标的关系转换