相机标定

1. 常用术语

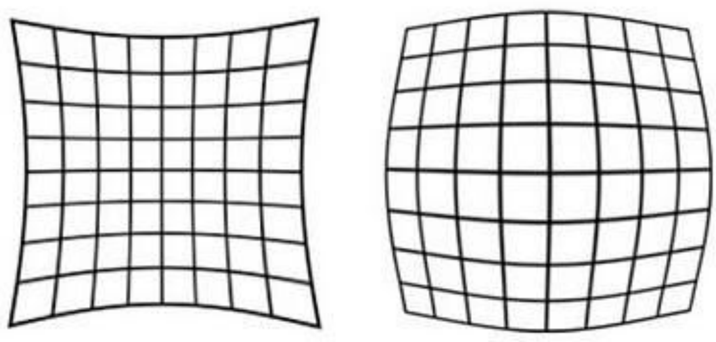
- 内参矩阵：将3D坐标变为2D坐标。

$$K=\begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. f_x，f_y表示焦距即焦点到图像平面的距离（实际含义为对应的x方向和y方向上的缩放程度）。很多情况下，二者会出现不同，因为数码相机的传感器缺陷，非均匀缩放，校准误差等等。
2. x_0，y_0表示主点的偏移，主点就是对应的投影的照片的中点的偏移量。
3. 可将内参矩阵变换为：2D平移、2D缩放、2D切变的乘积

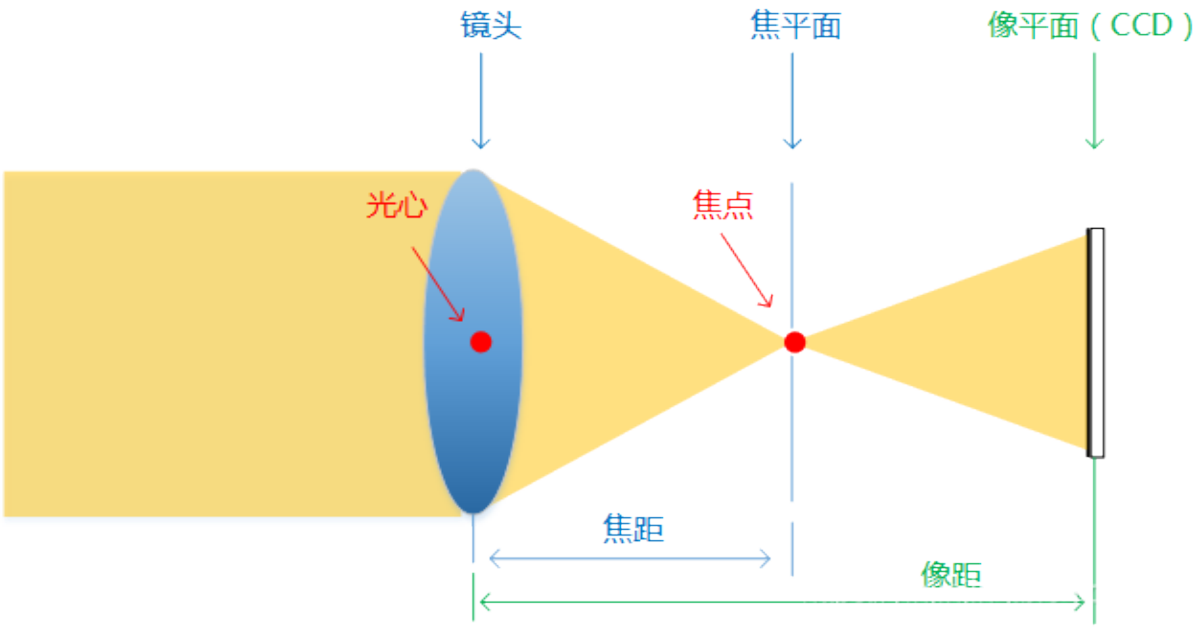
$$K=\begin{bmatrix} f_x & s & x_0 \\ 0 & f_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{f_x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 径向畸变（枕形或是桶形）：光线在远离透镜中心的地方更加弯曲。

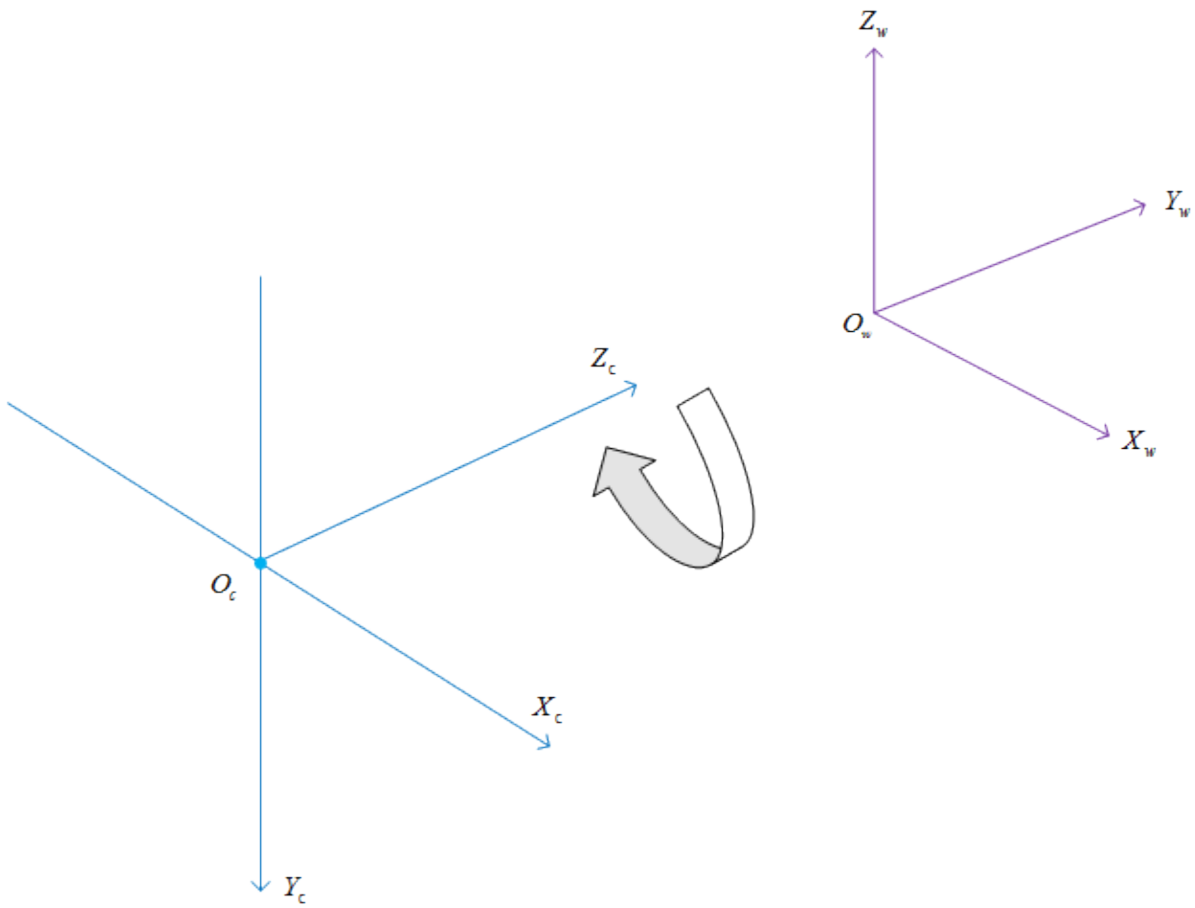


- 切向畸变：由于透镜不完全平行于图像平面（传感器装备的时候与镜头间的角度没有对准）。
- 旋转矩阵：原本的图像发生了切向旋转，需要加以修正。
- 平移向量：即对应上述的x_0, y_0
- 重投影误差：首次对三维空间的位置进行照相（首次投影），而后经过三角定位法和重建的三维坐标进行二次投影，二者之间的误差为冲投影误差。重投影误差讲解
- 三角定位法：使用两台或者是两台以上的相机对空间中的一个位置进行定位。

2. 坐标系转换

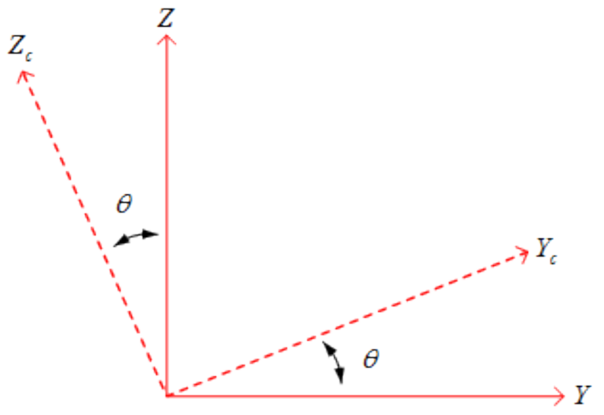


- 三维坐标系均需要满足右手法则
- 世界坐标系（三维直角坐标系）：测量坐标系，为以真实世界为中心建立的坐标系，可以定位相机和待测物体的位置。
- 相机坐标系（三维直角坐标系）：原点位于镜头的光心处，x、y轴分别与相面的两边平行，z轴为镜头的光轴，与相平面平行。
    - 光轴（主光轴）：光轴就是垂直于凸透镜与凸透镜切面垂直的假想的轴
    - 光心：光轴与镜头的交界处。
- 世界坐标系和相机坐标系之间是可以相互转换的：（低表w表示世界坐标系，低标c表示相机坐标系）



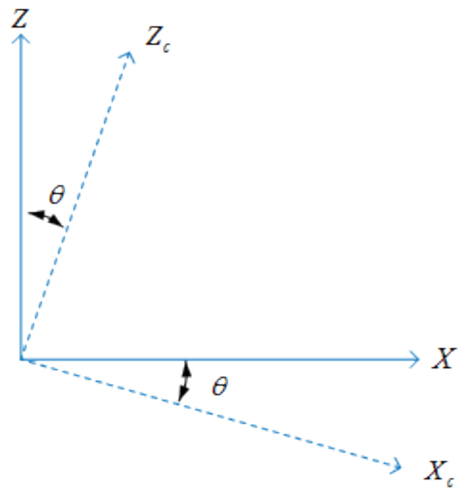
$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + T$$

- R表示坐标系的旋转状态，则有：



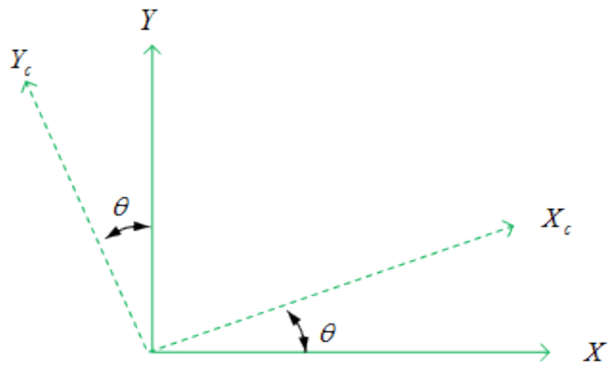
- 绕x轴旋转r1

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



- 绕y轴旋转r2

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$



- 绕z轴旋转r3

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

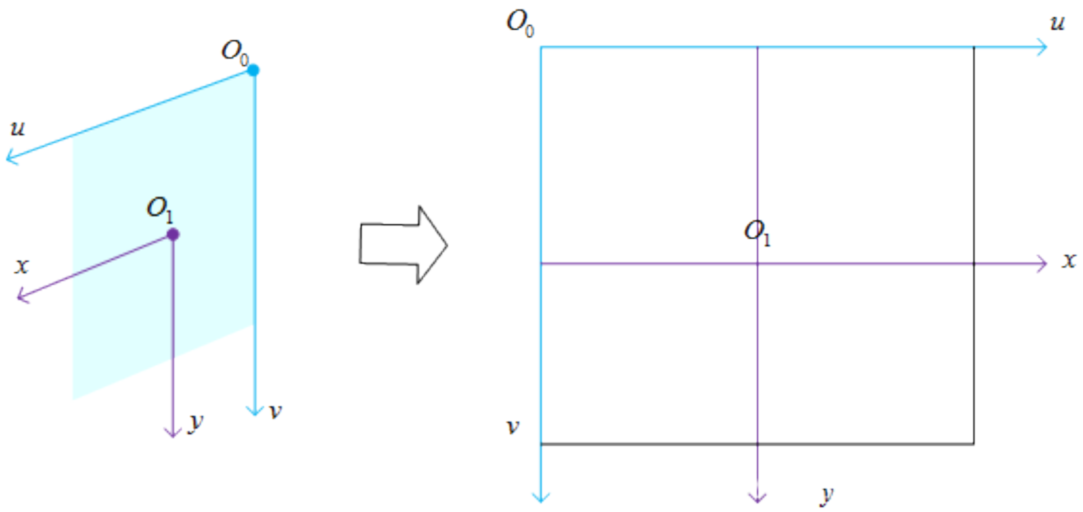
其中：

$$R = r_1 \times r_2 \times r_3$$

- 图像像素坐标系（二维直角坐标系）：表示图像中三维点在二维平面中的投影，原点在CCD图像[^利用光学传感器得到的图像]平面的左上角，u轴平行于CCD平面向右，v轴垂直于u轴向下，坐标使用（u，v）来表示。
- 图像物理坐标系（二维直角坐标系）：其坐标原点位于CCD图像平面的中心，x，y轴分别平行于图像像素坐标系的坐标轴，坐标用（x，y）表示。（我觉得这个就是上一个平移之后的结果）。
- 图像像素坐标系和图像物理坐标系之间的关系

	图像像素坐标系	图像物理坐标系
单位	像素	物理单位（mm/cm/m）
原点位置	图像的左上角	图像的正中心
两个轴	（u，v）	（x，y）

- 图像像素坐标系和图像物理坐标系之间的变换：



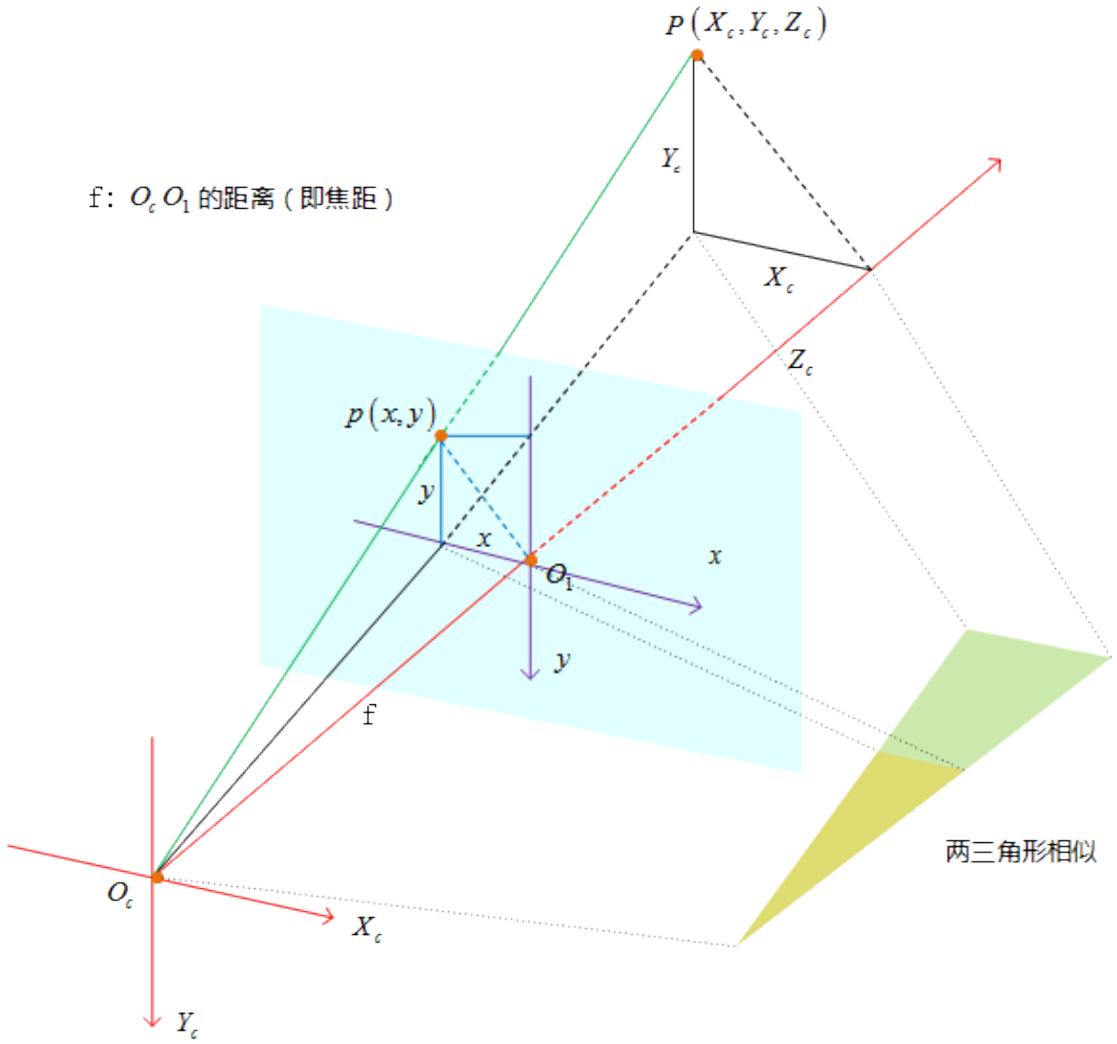
可得如下公式（d_x、d_y表示每个像素在u轴和v轴上的物理尺寸）：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{d_x} + u_0 \\ v = \frac{y}{d_y} + v_0 \end{cases}$$

写成矩阵形式的话是：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 相机坐标系和图像物理坐标系之间的转换：



相似三角形规律（f为焦距，x，y为图像物理坐标系中的点，X_c, Y_c, Z_c为相机坐标系中的坐标）：

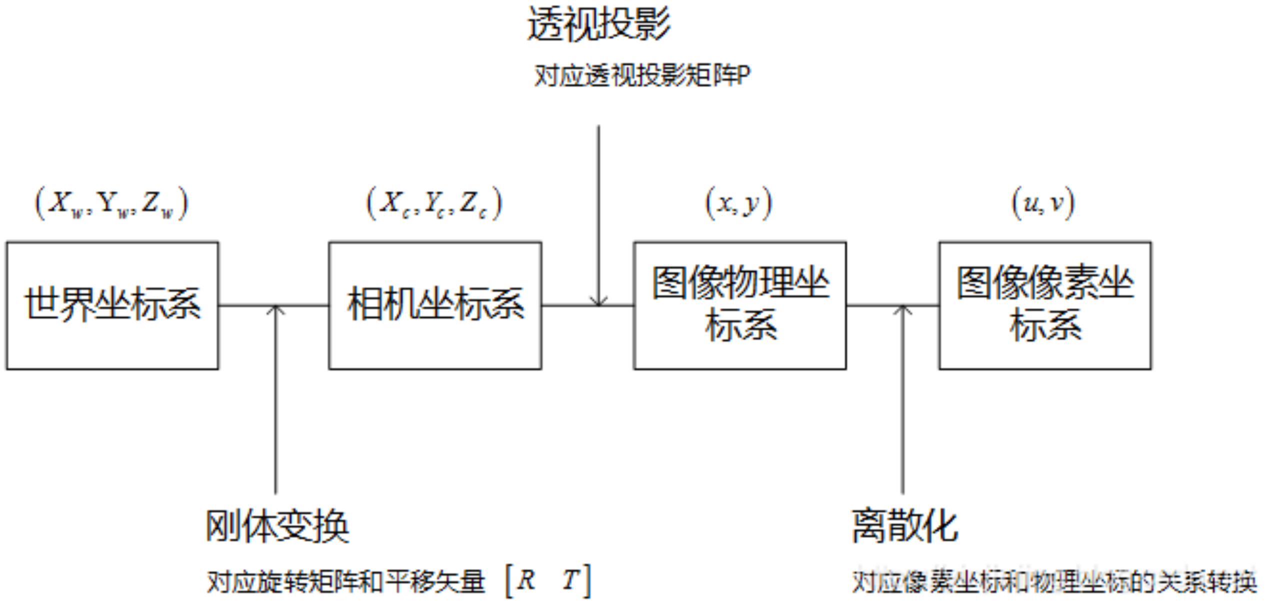
$$\begin{cases} \frac{x}{f} = \frac{X_c}{Z_c}\ \frac{y}{f} = \frac{Y_c}{Z_c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_c x = f X_c \\ Z_c y = f Y_c \end{cases} \Leftrightarrow Z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 合并规范化所有的等式

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{d_x} & s & u_0 \\ 0 & \frac{f}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_u & s & u_0 \\ 0 & k_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

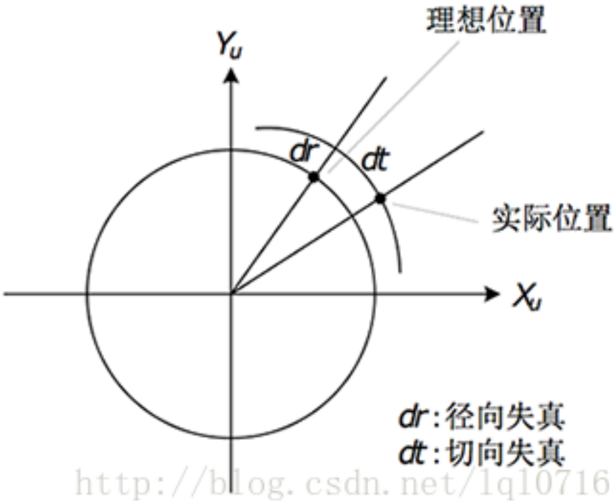
1. P为3×4的矩阵称为投影矩阵
2. s称为扭转因子
3. K完全由k_u、k_v[^$(\frac{f}{d_x}、\frac{f}{d_y})$]、s、$u_0$、$v_0$决定，因此仅与相机内参相关，因此，称为内参矩阵。
4. $\begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix}$因为仅仅与相机相对于世界坐标系的方位决定，因此，称为相机的外参矩阵。

总结图示：



3.相机内参与畸变参数

- 径向畸变是由于透镜形状使得映射的位置到了更远或者更近的位置，导致出现了变形（变形往往以透镜中心为中心靠近或者远离）
- 切向畸变是由于整个摄像机的组装过程导致了存在旋转，出现了变形（变形往往以透镜中心旋转方向变疏或者变密集）



- 径向畸变存在是由于成像仪边缘产生的"筒形"或者是"鱼眼"形状的畸变。光线在成像仪中心（光学中心）的畸变为0，越往边缘移动，畸变就会越来越严重。"筒形"畸变效果如下（低端网络摄像机中比较明显），径向畸变可分为枕形畸变和筒形畸变。

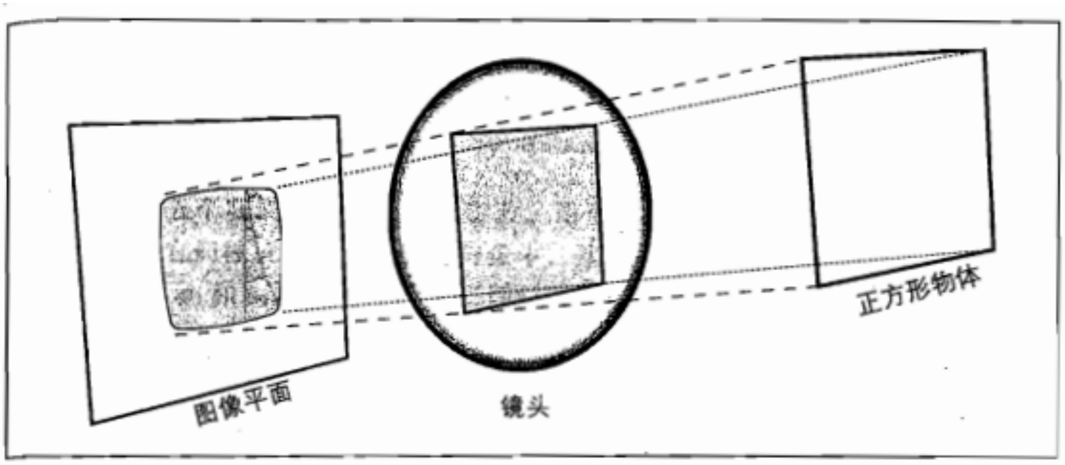


图 11-3：径向畸变。远离透镜中心的光线弯曲比靠近中心的严重。因此正方形的边在图像平面上为弯曲(即筒形畸变)

- 切向畸变是由于透镜制造商的缺陷使得透镜本身与图像平面不平行造成的。可以分为薄透镜畸变和离心畸变，如图：

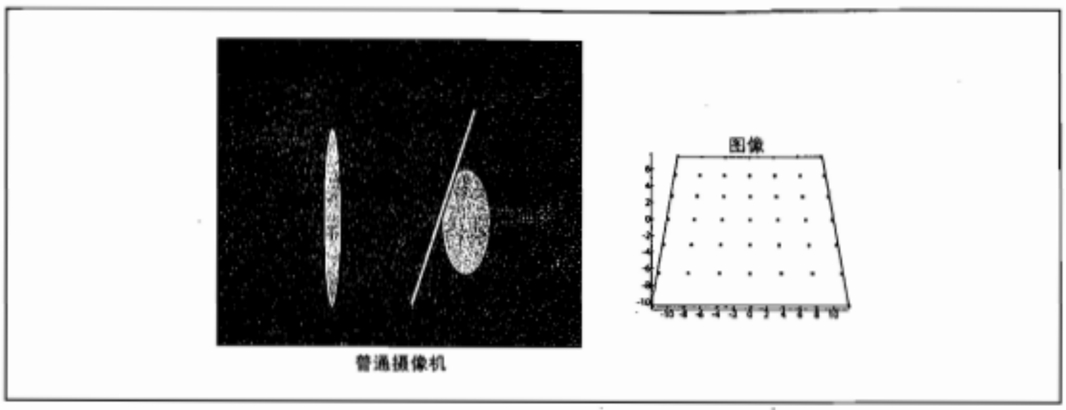


图 11-5：当透镜不完全平行于图像平面的时候产生切向畸变，这种现象发生于成像仪被粘贴在摄像机的时候(经 Sebastian Thrun 授权)

- opencv径向畸变模型，由于对应的变化角的变化量可以考虑为x和y方向的偶函数，因此，可以使用r=0处的泰勒展开并归一化后为如下形式，其中k_1、k_2、k_3、K均为有透镜得到的数据。

$$\delta_{xr} = x(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + K)$$
$$\delta_{yr} = y(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + K)$$

- opencv切向畸变模型，由于对应的变化，考虑为如下形式。

$$\delta_{xd} = 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) + K$$
$$\delta_{yd} = 2p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy + K$$

- opencv整体的畸变矩阵模型如下，其中径向畸变和切向畸变的K均为0：

$$\begin{bmatrix} x^{`} \\ y^{`} \end{bmatrix} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2) \\ 2p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy \end{bmatrix}$$

4.具体的标定问题

- 标定的时候需要根据测量精度对棋盘格的大小进行指定，一般精确到mm。
- 标定的主要步骤:
  1. 打印一张棋盘格，把它贴在一个平面上作为标定物。
  2. 通过调整标定物或者是摄像机的方向，为标定物拍摄一些不同方向的照片。
  3. 从照片中提取棋盘格的角点
  4. 估算理想无畸变的情况下，五个内参和六个外参。
  5. 应用最小二乘法估算世纪存在的径向畸变下的畸变系数。
  6. 极大似然发，优化估计，提升估计精度。