数値解析 第2回 レポート

学籍番号: [redacted]
氏名: 佐藤 暸
学科: 計数工学科(数理情報工学コース)

連絡先: [redacted]
2019/01/21 提出

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

In [2]:

```
init_y = np.array([[1.], [0.]])
matrix = np.array([[0., -1.], [1., 0.]])
```

(1)

問題設定

真の解を

$$y(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

とすれば, 与えられた微分方程式は $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = J y(t)$$

と表せる.

また, 刻み幅hを用いて近似解を$y_n \simeq y(t_n) \quad (t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0, 1, \ldots)$とおく.

以下はこのy_n, h, Jを用いて各手法の更新式を表す.

なお, 真の解軌道は原点を中心とする半径1の円になる.

また, 解軌道には矢印をつけて安定/不安定を判定しやすくしてある.

陽的Euler法

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = J y_n$$

より

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hJy_n}$$

In [3]:

```
def explicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter=100):
    result = np.array([[1], [0]])
    y = init_y.copy()
    for _ in range(n_iter):
        y += time_stride * np.dot(matrix, y)
        result = np.append(result,  y.copy())
    return result.reshape(-1, len(init_y))
```

In [4]:

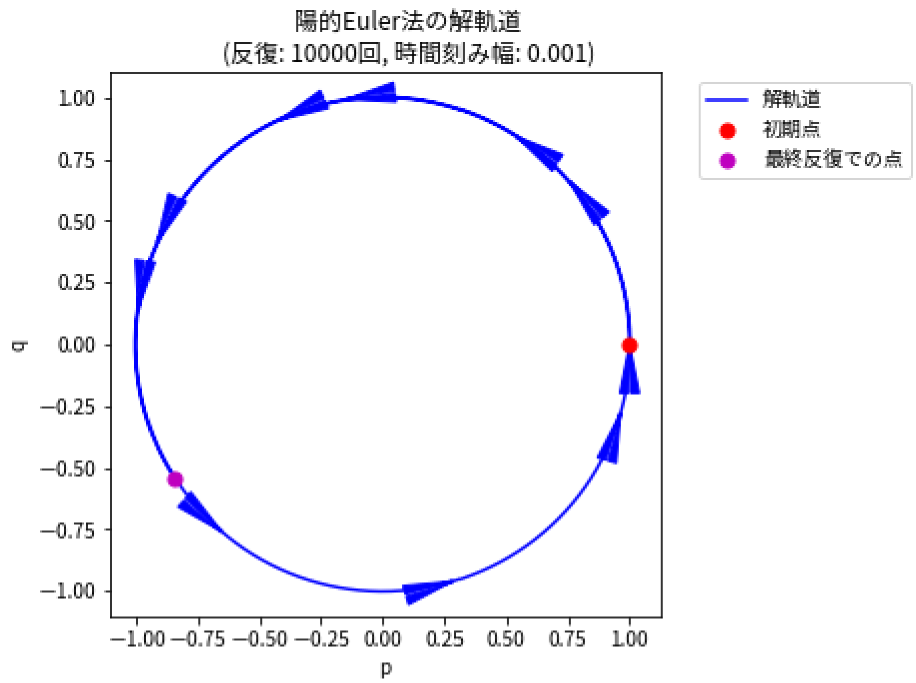
```
def add_arrow(result, start, stop, step):
    for iter_num in range(start, stop, step):
        plt.arrow(
            x=result[iter_num, 0], y=result[iter_num, 1],
            dx=result[iter_num + 1, 0] - result[iter_num, 0],
            dy=result[iter_num + 1, 1] - result[iter_num, 1],
            width=0.01, head_width=0.08,
            head_length=0.2, length_includes_head=True, color='b')
```

In [5]:

```
def plot_track(resilt, time_stride, n_iter, start, step, method_name):
    plt.figure(figsize=(5, 5))
    plt.plot(result[:, 0], result[:, 1], color='b', label='解軌道', zorder=1)
    add_arrow(result, start, len(result) - 1, step)
    plt.title(f'''
        {method_name}の解軌道
        (反復: {n_iter}回, 時間刻み幅: {time_stride})''')
    plt.xlabel('p')
    plt.ylabel('q')
    plt.scatter(1, 0, color='r', s=50, label='初期点', zorder=2)
    plt.scatter(
        result[-1, 0], result[-1, 1],
        color='m', s=50, label='最終反復での点', zorder=2)
    plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
    plt.gca().set_aspect('equal', adjustable='box')
    plt.show()
```

In [6]:

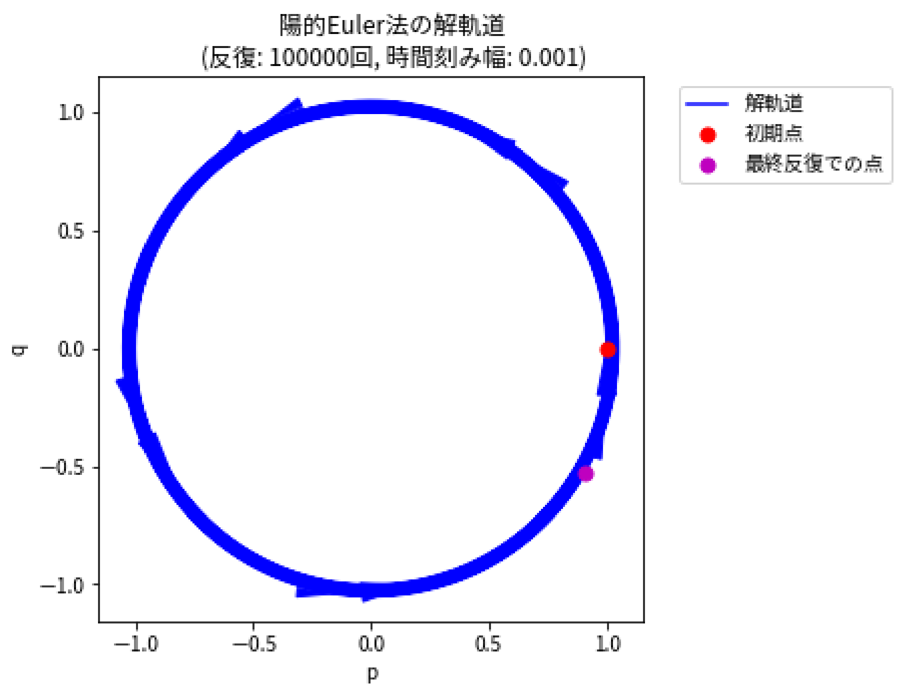
```
time_stride = 0.001
n_iter = 10000
result = explicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陽的Euler法')
```



時間刻み幅0.001の場合．解軌道を目視しただけではほぼ安定しているように見える．

In [7]:

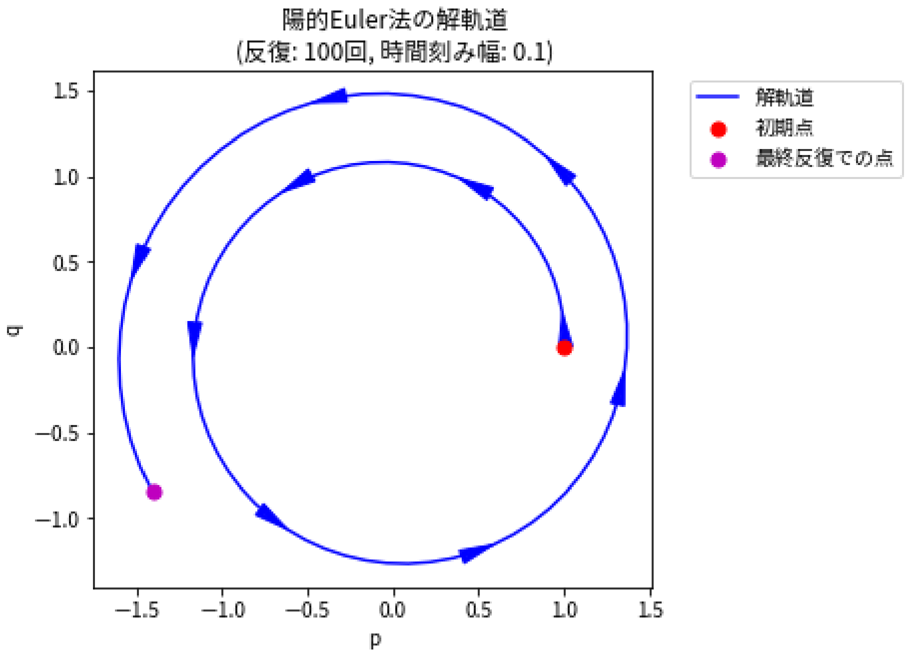
```
n_iter = 100000
result = explicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陽的Euler法')
```



時間刻み幅を変えずに反復回数を増やしてみた. 軌道の線が重なって安定/不安定が判別しにくいが,「初期点」と「最終反復での点」を見比べると, 解軌道は少しずつ広がっており, 厳密には安定していないことがわかる.

In [8]:

```
time_stride = 0.1
n_iter = 100
result = explicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陽的Euler法')
```



時間刻み幅を大きくすると解軌道はより急速に広がるようになり, さらに不安定になった.

陰的Euler法

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = J y_{n+1}$$

より

$$y_{n+1} = y_n + hJ y_{n+1}$$
$$\boldsymbol{(E - hJ) y_{n+1} = y_n}$$

を各更新でy_{n+1}について解く.

あるいは, $(E - hJ)^{-1}$をあらかじめ計算しておき,

$$\boldsymbol{y_{n+1} = (E - hJ)^{-1} y_n}$$

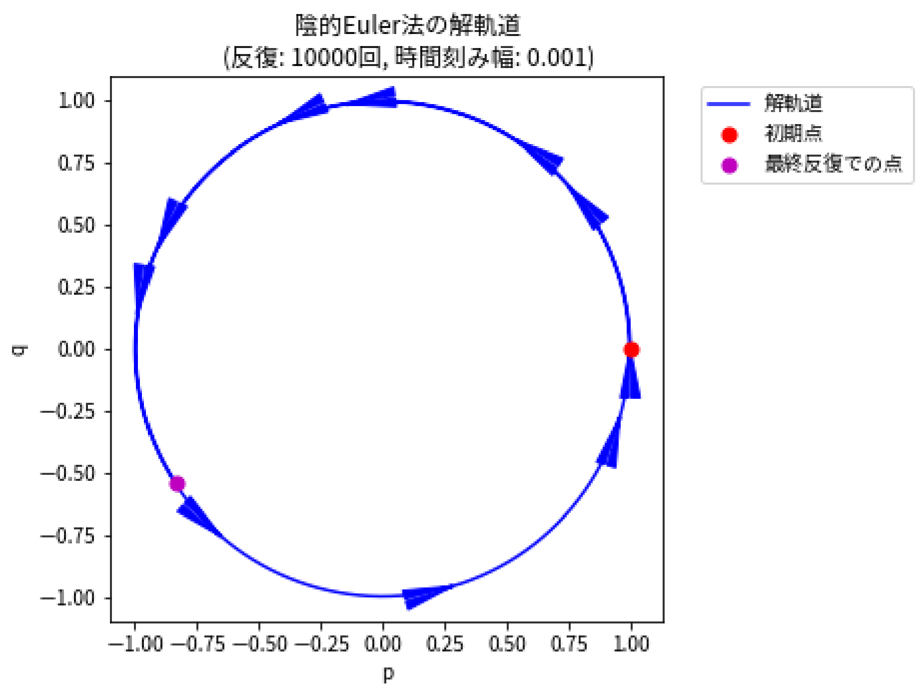
とする. 今回の場合, 前者と後者の両方で線形方程式を解く必要がある. 前者の場合は毎回の更新で線形方程式を解く必要があるが, 後者の場合は1度計算するだけでよいので, ここでは後者の更新方法を採用した.

In [9]:

```
def implicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter=100):
    result = np.array([[1], [0]])
    y = init_y.copy()
    update_matrix = np.eye(len(init_y)) - time_stride * matrix
    update_matrix = np.linalg.solve(
        np.eye(len(init_y)) - time_stride * matrix, np.identity(len(init_y)))
    for _ in range(n_iter):
        y = np.dot(update_matrix, y)
        result = np.append(result,  y.copy())
    return result.reshape(-1, len(init_y))
```

In [10]:

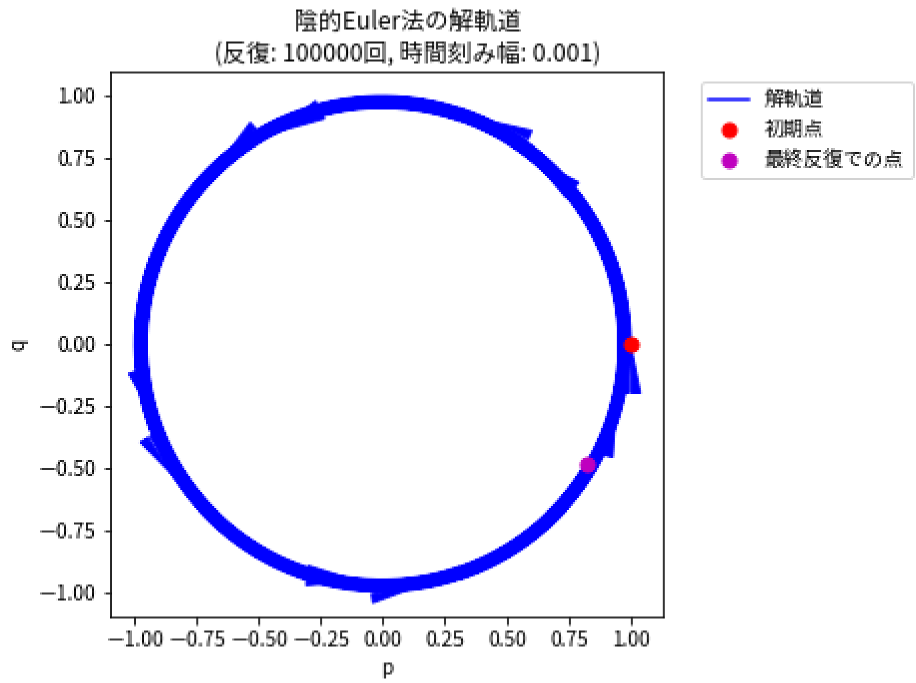
```
time_stride = 0.001
n_iter = 10000
result = implicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陰的Euler法')
```



時間刻み幅0.001の場合. 目視では安定しているように見える.

In [11]:

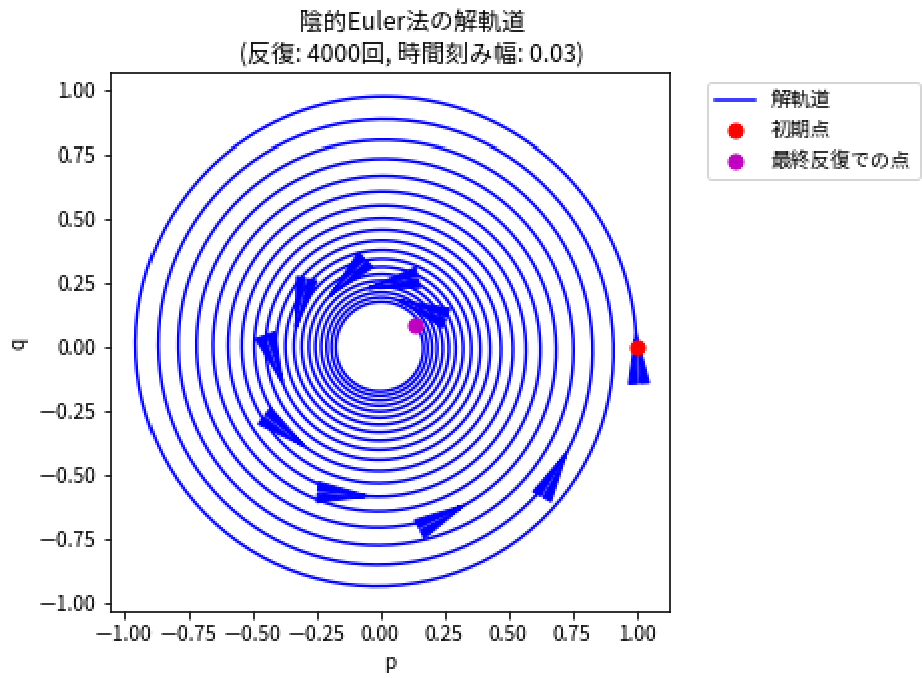
```
n_iter = 100000
result = implicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陰的Euler法')
```



時間刻み幅を変えずに更に反復してみる．軌道の線が重なって安定/不安定が判別しにくいが，「初期点」と「最終反復での点」を見比べると，解軌道は少しずつ原点に向かって収束しており，安定していることがわかる．

In [12]:

```
time_stride = 0.03
n_iter = 4000
result = implicit_euler(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '陰的Euler法')
```



時間刻み幅を大きくすると，より急速に原点に向かって収束する．したがって，この場合も安定している．

台形則

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{J y_{n+1} + J y_n}{2}$$

より

$$2y_{n+1} - 2y_n = hJ y_{n+1} + hJ y_n$$
$$(2E - hJ)y_{n+1} = (2E + hJ)y_n$$

を各更新でy_{n+1}について解く．

あるいは，$(2E - hJ)^{-1}$をあらかじめ計算しておき，

$$y_{n+1} = (2E - hJ)^{-1}(2E + hJ)y_n$$

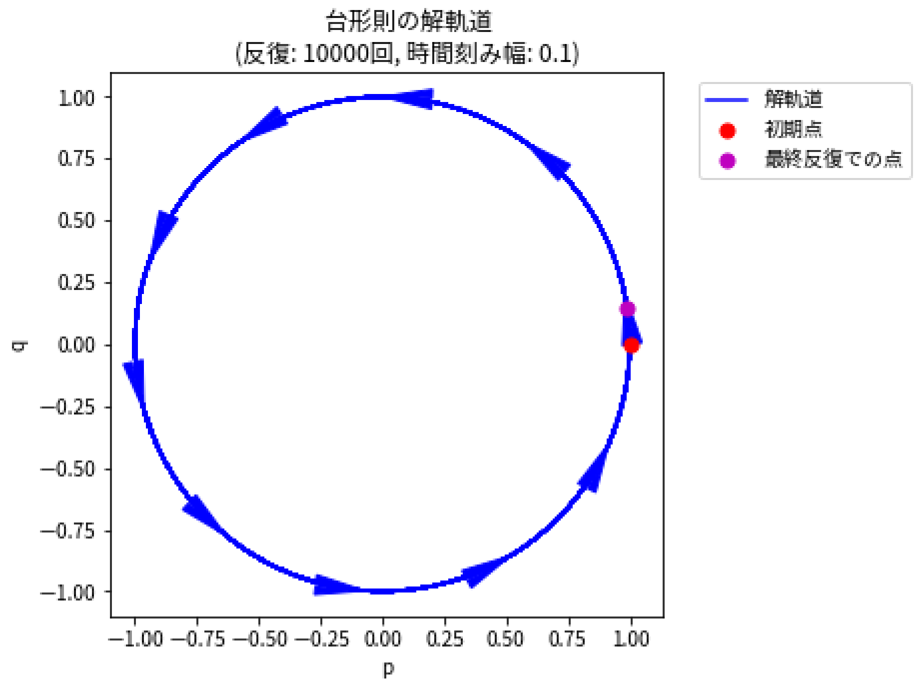
とする．今回の場合，前者と後者の両方で線形方程式を解く必要がある．前者の場合は毎回の更新で線形方程式を解く必要があるが，後者の場合は1度計算するだけでよいので，ここでは後者の更新方法を採用した．

In [13]:

```
def trapezodial(init_y, matrix, time_stride, n_iter=100):
    result = np.array([[1], [0]])
    y = init_y.copy()
    left_matrix = 2 * np.eye(len(init_y)) - time_stride * matrix
    right_matrix  = 2 * np.eye(len(init_y)) + time_stride * matrix
    update_matrix = np.dot(np.linalg.solve(
        2 * np.eye(len(init_y)) - time_stride * matrix, np.identity(len(init_y))),
        2 * np.eye(len(init_y)) + time_stride * matrix)
    for _ in range(n_iter):
        y = np.dot(update_matrix, y)
        result = np.append(result,  y.copy())
    return result.reshape(-1, len(init_y))
```

In [14]:

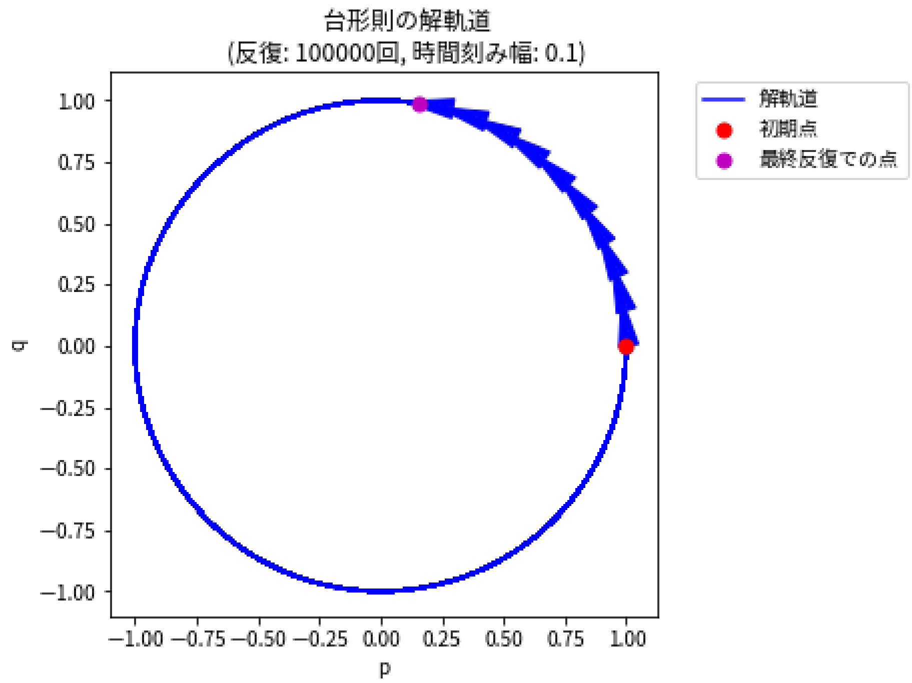
```
time_stride = 0.1
n_iter = 10000
result = trapezodial(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '台形則')
```



時間刻み幅0.1の場合. 目視では安定しているように見える.

In [15]:

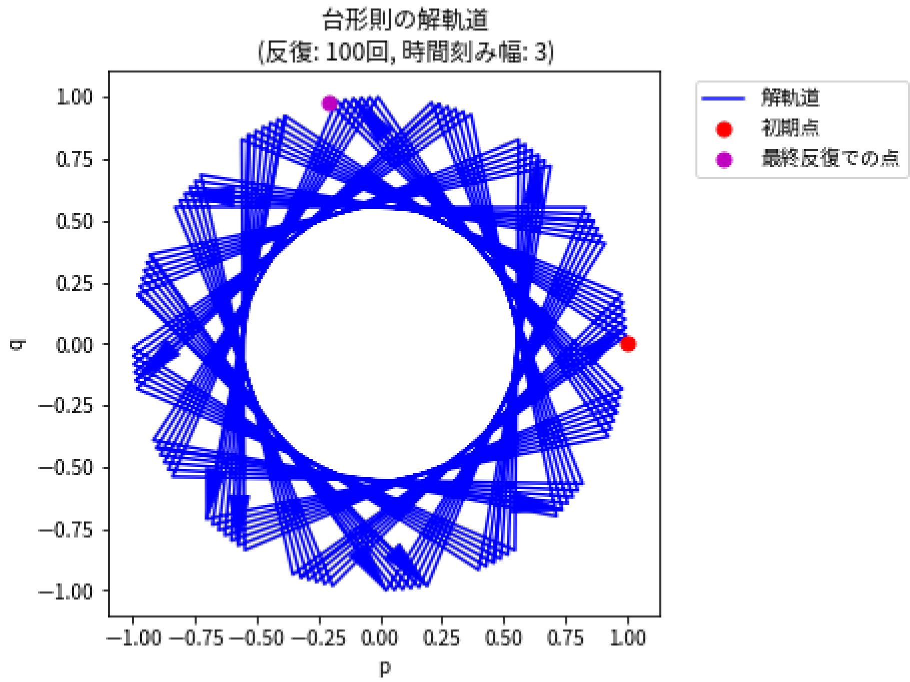
```
n_iter = 100000
result = trapezodial(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '台形則')
```



時間刻み幅を変えずに反復回数を増やしても，解軌道は原点を中心とする半径1の円を周回しているように見える．したがって，この場合は(ほぼ)安定しているといえる．

In [16]:

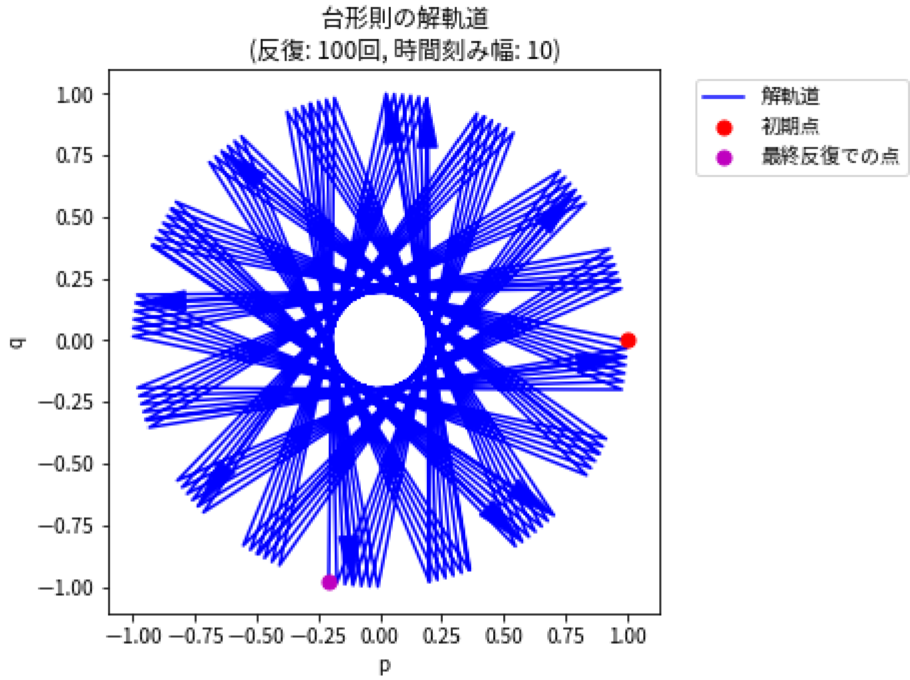
```
time_stride = 3
n_iter = 100
result = trapezodial(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '台形則')
```



刻み幅を大きくしてみる．この場合でも安定している．

In [17]:

```
time_stride = 10
n_iter = 100
result = trapezodial(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '台形則')
```



刻み幅をさらに大きくしてみる. この場合でも安定している.

4次Runge-Kutta法

$$k_1 = J y_n$$

$$k_2 = J\left(y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = J\left(y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = J\left(y_n + hk_3\right)$$

をk_1から順に計算していき,

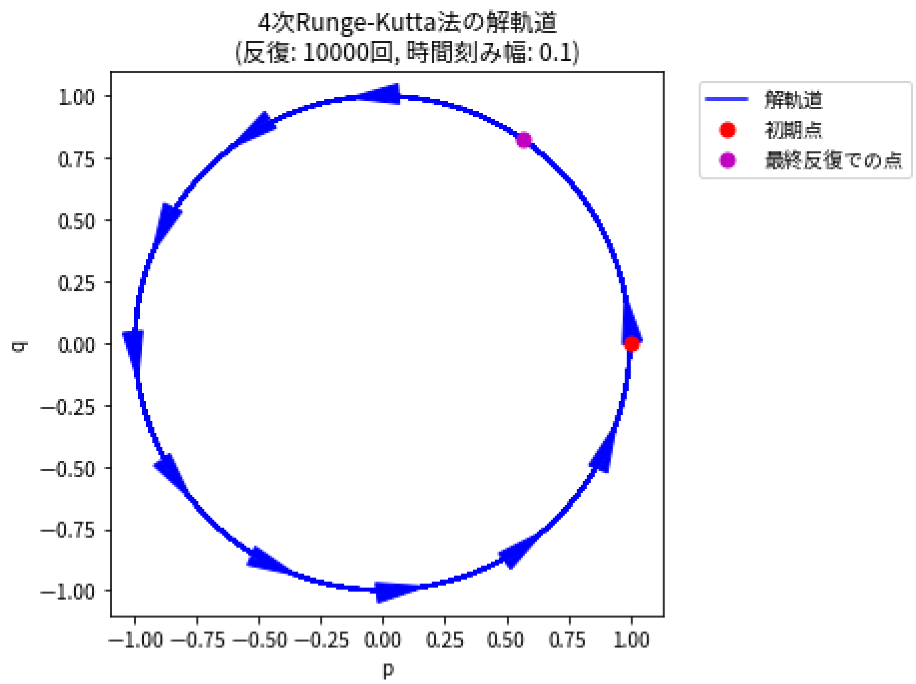
$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$

In [18]:

```
def runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter=100):
    result = np.array([[1], [0]])
    y = init_y.copy()
    for _ in range(n_iter):
        k_1 = np.dot(matrix, y)
        k_2 = np.dot(matrix, y + time_stride * k_1 / 2)
        k_3 = np.dot(matrix, y + time_stride * k_2 / 2)
        k_4 = np.dot(matrix, y + time_stride * k_3)
        y += time_stride * (k_1 + 2* k_2 + 2 * k_3 + k_4) / 6
        result = np.append(result,  y.copy())
    return result.reshape(-1, len(init_y))
```

In [19]:

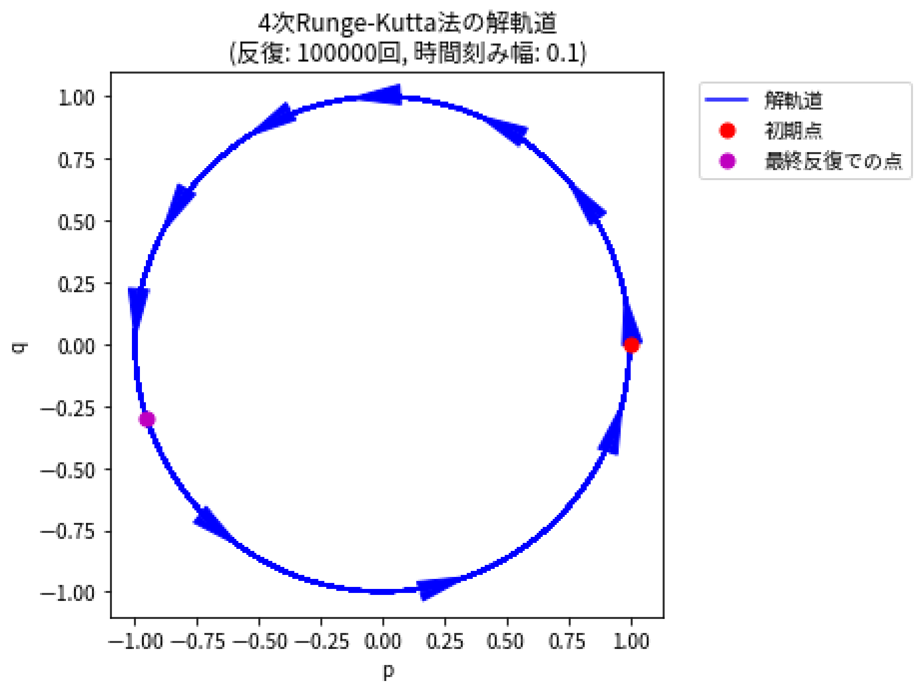
```
time_stride = 0.1
n_iter = 10000
result = runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '4次Runge-Kutta法')
```



時間刻み幅0.1の場合. 目視では安定しているように見える.

In [20]:

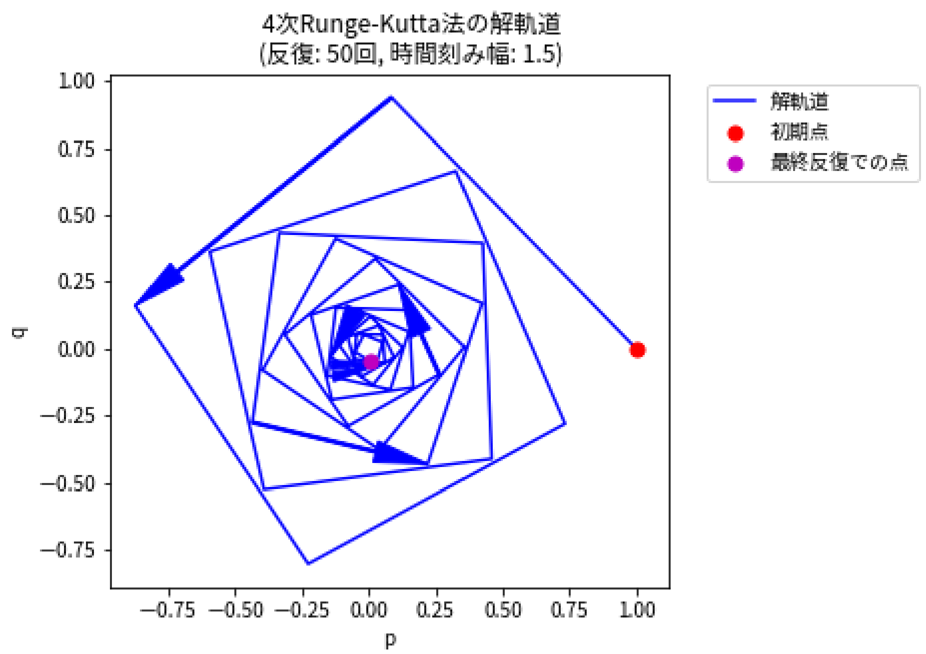
```
n_iter = 100000
result = runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '4次Runge-Kutta法')
```



時間刻み幅を変えずに反復回数を増やしても, 解軌道は原点を中心とする半径1の円を周回しているように見える. したがって, この場合は(ほぼ)安定しているといえる.

In [21]:

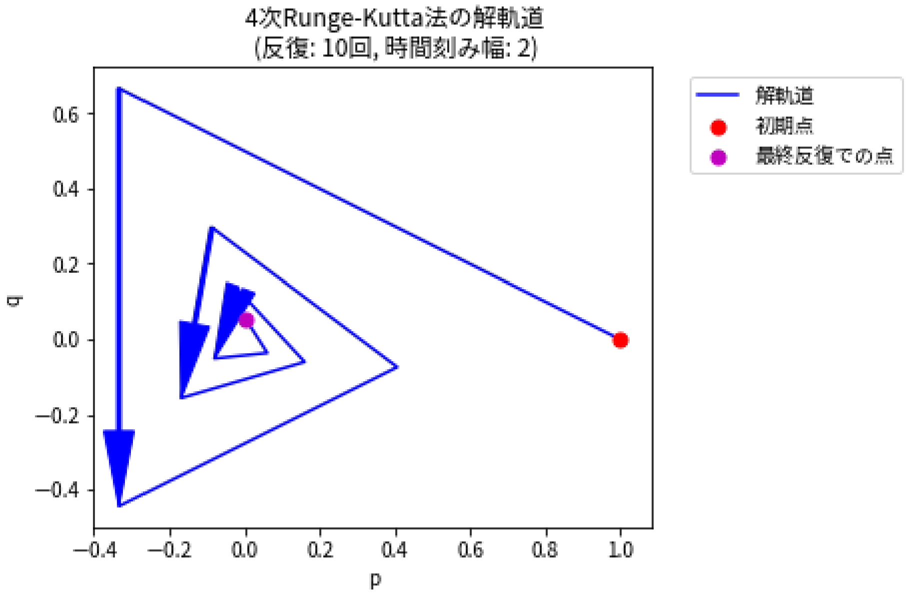
```
time_stride = 1.5
n_iter = 50
result = runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 5), '4次Runge-Kutta法')
```



時間刻み幅を大きくしてみる. この場合でも安定している.

In [22]:

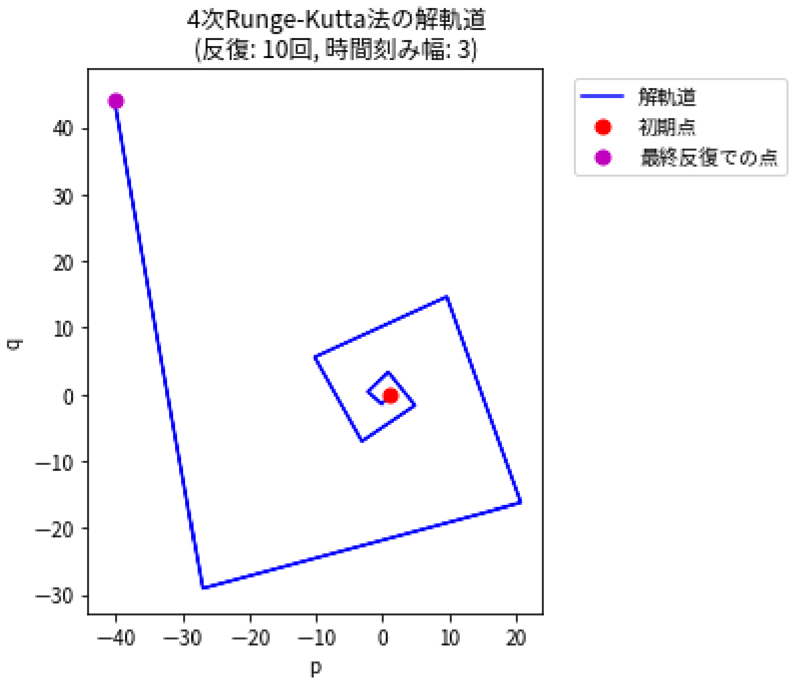
```
time_stride = 2
n_iter = 10
result = runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 3), '4次Runge-Kutta法')
```



時間刻み幅をさらに大きくしてみる. この場合でも安定している.

In [23]:

```
time_stride = 3
n_iter = 10
result = runge_kutta(init_y, matrix, time_stride, n_iter)
plot_track(result, time_stride, n_iter, 1, int(n_iter / 10), '4次Runge-Kutta法')
```



しかし，時間刻み幅をさらに大きくすると不安定になる．（矢印が小さくて見えないが，「初期点」と「最終反復での点」を見比べると解軌道が発散しているのがわかる．）