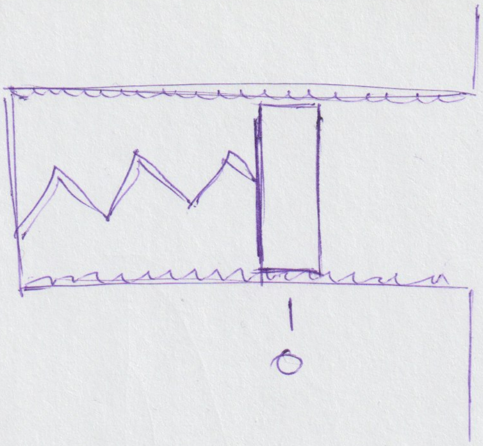


m – масса шайбы кг

k – жесткость пружины Н/м

η – коэф трения Н/(м/с)

h_0 – начальное положение м

~~Когда мы отпускаем пружину~~

Посчитаем Σ сил действ на шайбу

$$\vec{F} = \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{сопр} \Rightarrow ma = v \cdot \eta + k \cdot x \qquad a = \ddot{x} \quad v = \dot{x}$$

Получим однородное ур-ние 2-го порядка:

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \cancel{q = \frac{\eta}{m}} \quad \cancel{p = \frac{k}{m}}$$

$\cancel{\lambda^2 + q\lambda + p}$ Обозначим в "традиционных" обозн

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ~~частота ко~~, где ω_0 – частота колебаний в отсутствие трения

$\frac{\eta}{m} = 2\delta$, где δ – коэф затухания

Тогда получим

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , q = 2\delta \ , p = \omega_0^2$$

$$\lambda^2 + q\lambda + p = 0$$

$$D = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$$

$\delta^2 - \omega_0^2 > 0$ 1

$\delta^2 - \omega_0^2 = 0$ 2

$\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ 3

(2) $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$

$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t}$

Тогда:

$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{\mu}{2m}$

$x(t) = C_1 e^{-\frac{\mu}{2m} t} + C_2 t e^{-\frac{\mu}{m} t}$

(1) $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$

Тогда:

$\lambda_1, \lambda_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = C_1 e^{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} + C_2 e^{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$

③ $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$

$D < 0$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$e^{\alpha \cdot t}(C_1\cos(\beta t) + C_2(\sin \beta t))$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Тогда:

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}\,t\right)\right)$$

Исходя из того, что мы знаем $x(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\begin{cases} C_1 = \cos(\varphi_0)\cdot h_0 \\ C_2 = \sin(\varphi_0)\cdot h_0 \end{cases}$ => т.к. мы всегда отпускаем пружину из ~~пуно~~ состояния покоя $\varphi_0 = \pm\pi$

В итоге

$\boxed{\eta^2 - 4km} > 0$

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m}t}$$

$= 0$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{\eta}{2m}t}$$

< 0

$$x(t) = e^{-\frac{\eta}{2m}t} \cdot \left(C_1 \cos\left(\frac{\overset{4km - \eta^2}{\cancel{\eta^2 - 4km}}}{4m^2} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\overset{4km - \eta^2}{\cancel{\eta^2 - 4km}}}{4m^2} \cdot t\right)\right)$$

Где:

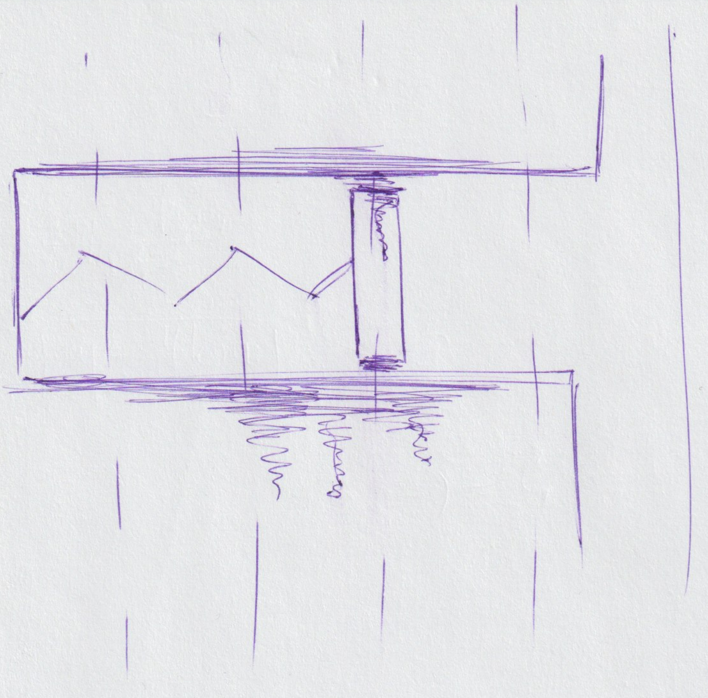
k – жесткость пружины

η – коэф вязкого трения

m – масса шайбы

C_1, C_2 – зависят от начальной фазы $= \pm\pi$

$$\begin{cases} C_1 = h_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ C_2 = h_0 \cdot \sin\varphi_0 = 0 \end{cases}$$



Пружина с шайбой в однородном магнитном поле с синусоидальной зависимостью

F_0 – сила возд поля на шайбу

k – жесткость пружины

η – коэф. вязкого трения

m – масса шайбы

u_0 – начальное положение

ω – усл. частота колебаний ~~поля~~ поле

Посчитаем Σ сил возд на шайбу

$$\overline{F}_{\Sigma} = \overline{F}_{тр} + \overline{F}_{сопр} + \overline{F}_{поля}$$

$$ma = -\eta v - kx + F_0 \cdot \sin(\omega t) \quad a = \ddot{x} \quad v = \dot{x}$$

Получим

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = F_0 \sin(\omega t)$$ Приведем в "традиционный вид"

$$2\delta = \frac{\eta}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad q = 2\delta \quad p = \omega_0^2$$

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0 x = \ldots$

$$\ddot{x} + q\dot{x} + px = F_0 \sin(\omega t)$$ – неоднородное

Для решения нам надо найти $x_0(t)$, кот мы находили в пред задаче

Теперь нужно найти частное решение $x_ч(t)$

$$\exists\ x_ч(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$x_v(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$x_v'(t) = (-A \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\omega t) + B\cos(\omega t)) \cdot \omega$$

$$x_v''(t) = -\omega^2 \cdot (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

Подставим в ур-ние

$$-\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t) - \omega^2 \cdot B \cdot \sin(\omega t)$$

$$+ 2\delta \cdot \omega \cdot B\cos(\omega t) - 2\delta \cdot \omega \cdot A \sin(\omega t)$$

$$+ \omega_0^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t) + \omega_0^2 B \cdot \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t)$$

$$\cancel{\omega_0^2 + 2\delta\omega - \omega^2} \quad \cancel{\cos(\omega t)}$$

получим

$$\begin{cases} -\omega^2 \cdot A + 2\delta \cdot \omega B + \omega_0^2 A = 0 \\ -\omega^2 \cdot B - 2\delta \cdot \omega A + \omega_0^2 B = F_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A + 2\delta\omega B = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) B - 2\delta\omega A = F_0 \end{cases}$$

$$B = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) A}{-2\delta\omega}$$

$$\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{-2\delta\omega} + \frac{(2\delta\omega)^2}{-2\delta\omega} \right) A = F_0$$

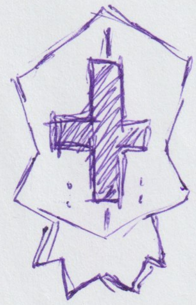
$$\begin{cases} A = \dfrac{-2\delta\omega F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \\ B = \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2) F_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \end{cases}$$

Соответственно получим

$$x(t) = x_0(t) + \frac{(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t) - 2\delta\omega\cos(\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}\cdot\frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{\eta^2-4km}$$

$$x(t) = \boxed{>0} \quad C_1 e^{\frac{-\eta+\sqrt{\eta^2-4km}}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-\eta-\sqrt{\eta^2-4km}}{2m}t}$$



$$\boxed{=0} \quad (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\eta}{2m}t}$$

$$\boxed{<0} \quad e^{-\frac{\eta}{2m}t}\cdot\left(C_1\cos\left(\frac{\overset{4km-\eta^2}{\cancel{\eta^2-4km}}}{4m^2}\cdot t\right) + C_2\sin\left(\frac{4km-\eta^2}{4m^2}\cdot t\right)\right)$$

$$+ \frac{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\sin(\omega t) - \frac{\eta}{m}\cdot\omega\cos(\omega t)}{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\eta}{m}\right)^2\omega^2}\cdot\frac{F_0}{m}$$