

计划与状态维修决策研究

1 计划维修时间间隔决策

使用计划维修策略进行预防维修,应考虑经济性与可靠性两方面,而其中一个主要需要决策的变量就是计划维修时间间隔。现有研究中,设备的计划维修时间间隔决策数学模型可以分为 3 类:(1)以可靠度或可用度最大原则确定计划维修时间间隔的数学模型;(2)以维修费用最少确定计划维修时间间隔的数学模型;(3)在满足可靠度或可用度阈值的约束下,使维修费用最小来确定计划维修时间间隔的数学模型。其中,第 3 类数学模型更有实际意义,并且在其他领域的设备维修中也被广泛使用,因此本文也基于第 3 类研究建立本文的数学模型。但现有研究多选择周期计划维修模型,即维修时间间隔固定的模型,实际上大部分的机械设备都属于损耗型设备,即故障率增加速度随使用时间增加而升高的设备,因此使用序列计划维修模型,即维修时间间隔可变的模型更符合设备故障率随时间发展的实际情况,可以更好的兼顾设备的经济性与可靠性。因此本文建立了岸桥关键部件的序列计划维修模型,对维修时间间隔进行决策。

1.1 可靠性相关指标的定义

可靠性是指在特定时间和条件下,系统、设备或产品在规定的性能要求下正常运行的能力,即在规定时间内不发生故障或失效的概率。在工程领域,可靠性是一个非常重要的指标,直接关系到设备的安全性、稳定性和经济性。设备的可靠性不高,就会导致设备的故障率和维修费用增加,对生产效率和经济效益产生负面影响。与可靠性相关的指标如下:

(1) 可靠度:可靠度是指在规定的时间、条件和使用环境下,设备在一定的性能要求下正常工作的能力,通常用概率表示,记为 $R(t)$,即设备在规定时间 t 内不发生故障或失效的概率。设 T 为出现故障的时刻, t 为规定时间, $R(t)$ 的表达式如式 (1) 所示。 $R(t)$ 是个时间函数,设备刚投入使用时可靠度为 1,随着使用时间的增大逐渐减小,如式 (2) 所示。

$$R(t) = P(T > t) \quad (1)$$

$$\begin{cases} R(0) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0 \\ 0 \leq R(t) \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

(2) 不可靠度:设备在规定时间 t 内发生故障的概率,记作 $F(t)$ 。设 T 为出现故障的时刻, t 为规定时间, $F(t)$ 的表达式如式 (3) 所示。当 $F(t)$ 可微时,其导数记作 $f(t)$,称为故障密度函数,如式 (4) 所示。 $F(t)$ 是个时间函数,设备

刚投入使用时为 0，随着使用时间的增大逐渐增大，如式 (5) 所示。 $R(t)$ 与 $F(t)$ 是一对相反的概念，式 (6) 反映了两者的关系。

$$F(t) = P(T \leq t) \quad (3)$$

$$f(t) = F'(t) = -R'(t) \quad (4)$$

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1 \\ 0 \leq F(t) \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$R(t) + F(t) = 1 \quad (6)$$

(3) 故障率：指在 t 时间内未发生故障，在 t 时刻后单位时间内设备或系统发生故障的概率密度函数，记作 $\lambda(t)$ ，如式 (7) 所示。 $\lambda(t)$ 与 $R(t)$ 的关系如式 (8) 所示。

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T > t\}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t(1 - F(t))} \\ &= \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (8)$$

(4) 可用度：是一个设备在一段时间内能够正常运行的时间占总时间的比例，通常用百分数表示，记作 A 。一段时间的可用度常用式 (9) 计算，其中 $MTTF$ 是指设备或系统在正常使用条件下，从投入使用到第一次发生故障的平均时间； $MTTR$ 是指设备或系统在发生故障后，从故障发生到修复完成的平均时间。

$$A = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \quad (9)$$

1.2 问题描述

设备的故障率随运行时间增加而增加的过程称为退化或劣化过程，计划维修时间间隔决策需要对设备的退化过程进行建模。假设共有 n 个计划维修时间间隔，在前 $n-1$ 个间隔结束时进行设备的预防维修，而第 n 个间隔结束时直接进行设备的更新维修，第 k 个计划维修时间间隔的时长是 T_k ，第 k 个计划维修时间间隔的故障率函数为 $\lambda_k(t)$ 。在实际的设备预防维修中，每次预防维修是一次不完全维修，即“修复非新”，可以使故障率下降，但是不能使故障率下降至全新状态，并且随着设备运行时间增加，故障率曲线的增速也会改变。因此引入了役龄回退和故障率递增因子对这一过程进行描述。每次预防维修可看作一次役龄回退，役

龄回退越多代表预防维修效果越好。役龄回退的量由役龄回退因子来控制，役龄回退因子越小，役龄回退的越多，如式（10）所示：

$$\begin{cases} L_k^- = L_{k-1}^+ + T_k \\ L_k^+ = L_{k-1}^+ + \alpha_k T_k \end{cases} \quad k \in N, 1 \leq k < n \quad (10)$$

其中， L_k^- 为第 k 次预防维修前的役龄， L_k^+ 为第 k 次预防维修后的役龄， $L_0^+ = 0$ ， T_k 为第 k 个预防维修间隔备工作的时长， α_k 为第 k 个预防维修间隔的役龄回退因子， $0 \leq \alpha_k < 1$ ，当 $\alpha_k = 0$ 即为完全维修，役龄回退因子可以用来调节每次预防维修不完全维修的程度，随着计划维修的次数逐渐增大。故障率递增即在第 k 次预防维修后，故障率函数乘故障率递增因子，与役龄回退因子相同，故障率递增因子也随计划维修的次数逐渐增大。描述故障率随运行时间与预防维修改变的示意图如图1所示：

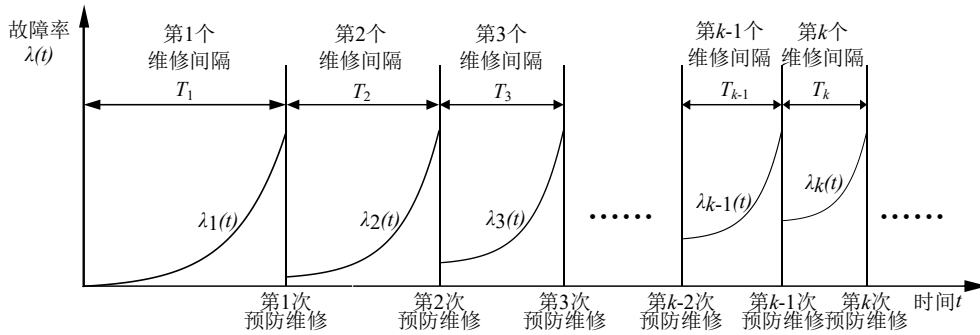


图1 故障率变化曲线

Fig. 1 Curve of the failure rate

在每个预防维修间隔中，设备如果没有到达预防维修时刻就发生故障，则对设备进行小修，小修不会影响设备的故障率。同时，整个设备的退化过程中，设备的可靠度必须高于一定阈值。以单位时间维修费用最低为目标函数，以每一段维修间隔的可靠度需满足可靠度阈值为约束条件，对计划维修时间间隔的个数 n 和计划维修时间间隔 T_k 进行优化。

1.3 模型假设与符号说明

问题的假设如下：

（1）设备在计划维修时间间隔中发生故障则进行小修，小修后故障率不受影响，每次小修的时间为固定值。

（2）预防维修时间与更新维修时间忽略不计。

问题使用的符号如下：

（1）参数：

c_Y ：每次预防维修的费用；

c_s : 更新维修的费用;

c_z : 每次故障小修的费用;

T_z : 每次故障小修的时间;

R_{\min} : 设备可靠度阈值;

α_k : 第 $k+1$ 个计划维修时间间隔的役龄回退因子, $k \in N, 1 \leq k < n$;

u_k : 第 $k+1$ 个计划维修时间间隔的故障率递增因子, $k \in N, 1 \leq k < n$ 。

(2) 决策变量:

n : 计划维修时间间隔的个数;

T_k : 第 k 个计划维修时间间隔的时长, $k \in N, 1 \leq k \leq n$ 。

(3) 从属变量:

n_k : 第 k 个计划维修时间间隔的小修次数, $k \in N, 1 \leq k \leq n$ 。

1.4 模型建立

常见的设备故障函数有指数分布、威布尔分布等, 其中威布尔分布对于设备故障率曲线描述更为全面, 因而被广泛运用在设备的可靠性分析的各项研究中。威布尔分布的不可靠度函数、故障密度函数、可靠度函数、故障率函数分别如式 (11) - (14) 所示:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{m}\right)^a}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{a}{m} \left(\frac{t}{m}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{t}{m}\right)^a}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$R(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{m}\right)^a}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{a}{m} \left(\frac{t}{m}\right)^{a-1} \quad (14)$$

其中, a 为形状参数, m 为尺度参数, 当 $a > 1$ 时, 故障率曲线呈现上升趋势; 当 $a < 1$ 时, 故障率曲线呈现下降趋势。威布尔分布的参数可以灵活设置, 以适应不同阶段的故障率变化。第 k 个阶段的故障率曲线为 $\lambda_k(t)$, 如式 (15) 所示:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{a}{m} \left(\frac{t}{m}\right)^{a-1} \\ \lambda_2(t) &= u_1 \times \lambda_1(t + \alpha_1 T_1) = u_1 \times \frac{a}{m} \left(\frac{t + \alpha_1 T_1}{m}\right)^{a-1} \\ &\dots\end{aligned}\quad (15)$$

$$\lambda_k(t) = u_{k-1} \times \lambda_{k-1}(t + \alpha_{k-1} T_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} u_i \times \frac{a}{m} \left(\frac{t + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i}{m}\right)^{a-1}$$

设备第 k 个计划维修时间间隔的小修次数 n_k 与故障率函数 $\lambda_k(t)$ 和时长 T_k 相关, n_k 的计算如式 (16) 所示:

$$\begin{aligned}n_k &= \int_0^{T_k} \lambda_k(t) dt = \int_0^{T_k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i \times \frac{a}{m} \left(\frac{t + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i}{m}\right)^{a-1} dt \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k-1} u_i [(T_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i)^a - (\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i)^a]}{m^a}\end{aligned}\quad (16)$$

设备直到更新维修的总费用 C 包括设备的预防维修费用、更新维修费用和小修费用三个部分, 如式 (17) 所示:

$$C = c_s + c_y \times (n-1) + c_z \times \sum_{k=1}^n n_k \quad (17)$$

设备直到更新维修的总时间 T 包括设备正常工作的时间和设备小修的时间两部分: 如式 (18) 所示:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k + T_z \times \sum_{k=1}^n n_k \quad (18)$$

单位时间维修费用 $C_a = C/T$, 优化的目标是使单位时间的费用最小。在每个计划维修时间间隔, 设备的可靠度都需要大于可靠度阈值 R_{\min} , 以保证设备工作的安全性。根据式 (6) 计算设备每个计划维修时间间隔的可靠度, 并令其大于 R_{\min} , 如式 (4.10) 所示:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_0^{T_k} \lambda_k(t) dt\right) &\geq R_{\min} \quad k=1 \\ \exp\left(-\int_0^{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i} \lambda_1(t) dt - \int_{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i}^{T_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i} \lambda_k(t) dt\right) &\geq R_{\min} \quad k \in N, 2 \leq k \leq n\end{aligned}\quad (19)$$

计划维修时间间隔决策数学模型如式 (20) ~ (23) 所示:

$$\min C_a = \frac{C}{T} = \frac{c_s + c_y \times (n-1) + c_z \times \sum_{k=1}^n n_k}{\sum_{k=1}^n T_k + T_z \times \sum_{k=1}^n n_k} \quad (20)$$

$$\text{s.t.} \quad \exp(-(\frac{T_1}{m})^a) \geq R_{\min} \quad k=1 \quad (21)$$

$$\exp(-(\frac{\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i}{m})^a - \frac{\prod_{i=1}^{k-1} u_i}{m^a} [(T_k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i)^a - (2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i T_i)^a]) \geq R_{\min} \quad k \in N, 2 \leq k \leq n \quad (22)$$

$$T_k \geq 0 \quad k \in N, 1 \leq k \leq n \quad (23)$$

1.5 实例分析

以假设的算例，对本文提出的计划维修时间间隔决策模型进行分析。其中， $c_Y = 1$ 万元， $c_S = 20$ 万元， $c_Z = 3$ 万元， $T_Z = 1/170$ 年，设备可靠度阈值 $R_{\min} = 0.8$ ，故障率函数的参数 $a = 4$ ， $m = \sqrt[4]{0.4}$ ，参考经验公式，设定役龄回退因子 α_k 和故障率递增因子 u_k 如式（24）、（25）所示：

$$\alpha_k = \frac{k}{50 \times k + 5} \quad (24)$$

$$u_k = \frac{50 \times k + 1}{49 \times k + 1} \quad (25)$$

在计划维修时间间隔决策中，需要确定计划维修时间间隔的个数 n ，才能对计划维修时间间隔的时长 T_k 进行求解。因此首先将 n 作为一个参数，通过改变 n 的值求解模型，比较 n 不同时 C_a 的值可确定 n 的最优值。由于本文模型的目标函数与约束条件均存在非线性部分，因此是一个非线性规划问题，使用现有的求解算法难以取得精确解。Gurobi 是由 Gurobi Optimization 公司开发的优化软件，针对非线性规划问题，Gurobi 能够将非线性的约束通过线性逼近的方式近似处理，在短时间内求得近似最优解，求解的精确性与时效性已可以满足工程应用。同时，将本文提出的序列计划维修模型与周期计划维修模型进行对比，可以检验维修间隔可变这一改进是否有效。因此分别使用 Gurobi 求解上述两种模型，其中参数 n 的变化区间是 $[1, 50]$ ， C_a 随 n 变化的得到曲线如图 2 所示：

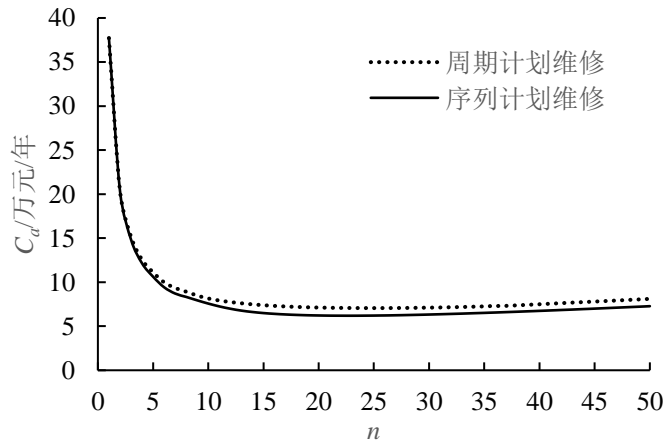


图 2 单位时间维修费用变化曲线

Fig. 2 Curve of maintenance cost per unit time

从图 2 可以看出, 无论是序列计划维修模型或周期计划维修模型, C_a 随 n 的增加先迅速减少再缓慢增加, 这是因为 n 增加的初期, 随着 T 增加有更长的时间来平摊设备的更新维修费用, 单位时间维修费用 C_a 迅速降低; 但随着 n 继续增加, 每次计划维修带来的故障率降低越来越少, 且故障率曲线上升速度越来越快, 只能通过缩短维修间隔、增加预防维修的频率来满足可靠度阈值, 预防维修的频率的增加意味着 C 增加的速度大于 T 增加的速度, 因此 C_a 缓慢增加。

对于序列计划维修模型, 在 $n = 23$ 时, $C = 54.37$ 万元, $T = 8.75$ 年, C_a 取得最小值 6.19 万元/年, 因此 n 的最优值是 23。这表示设备在满足可靠性阈值的前提下, 在经过 22 次预防维修, 工作 8.75 年后进行设备更新, 单位时间维修费用最小。在 n 取得最优值 23 时, 设备每个计划维修时间间隔的时长如图 3 所示, 可以看出设备的计划维修时间间隔时长从开始的 0.55 年, 降低到最后一个维修间隔的 0.24 年, 计划维修时间间隔随着维修次数的增加逐渐减少。这是由于随着设备运行时间的增加, 计划维修带来的故障率降低逐渐减少, 而且故障率曲线上升速度加快, 到达可靠度阈值的速度加快, 因此维修间隔越来越短。这也反映了设备在运行的后期, 需要通过频繁的预防维修才能使其可靠度始终保持在一定水平之上, 以保证设备的安全运作。此时, 从经济性方面考虑, 选择对设备继续进行预防维修可能不如直接更新设备, 因此在此时可以考虑设备的更新。

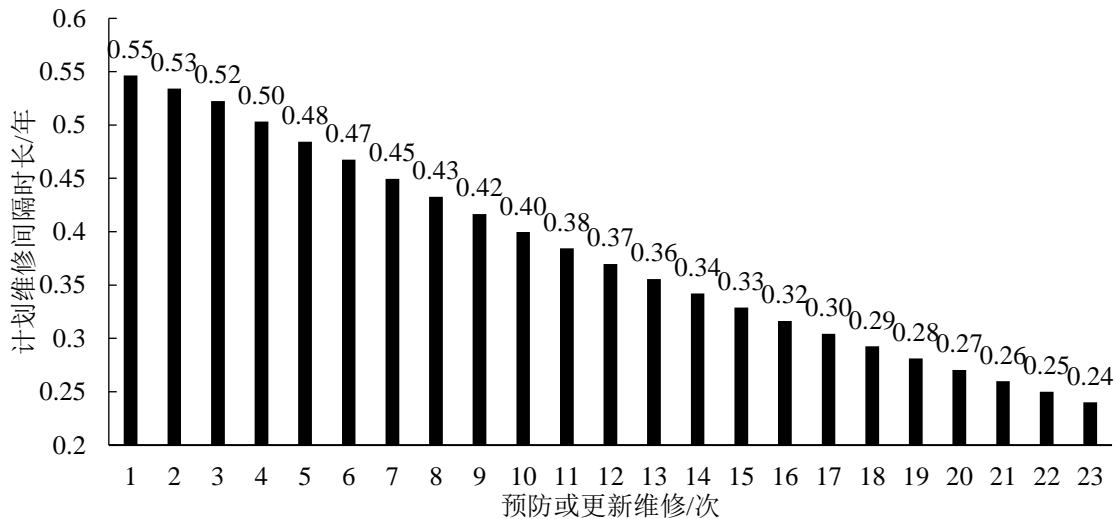


图 3 计划维修各时间间隔时长

Fig. 3 Time intervals of periodic maintenance

对于周期计划维修模型, 在 $n = 25$ 时, $C = 50.95$ 万元, $T = 7.73$ 年, C_a 取得最小值为 7.06 万元/年, 计划维修的时间间隔固定为 0.30 年。这表示在满足可靠性阈值的前提下, 预防维修 24 次, 设备工作 7.73 年后进行设备更新, 单位时间

维修费用最小。将序列计划维修模型与周期计划维修模型进行对比,可以看出在时间间隔固定时,单位时间维修费用 C_a 相对更高,计划维修的时间间隔为 0.30 年则小于时间间隔可变模型的平均值 0.38 年,设备直到更新维修的总时间 T 也短了 1.02 年。这是由于序列计划维修模型能在设备处于不同运行状态时选择不同的维修间隔,设备运行的初期每次预防维修带来的故障率降低多,故障率曲线上升缓慢,因此使用较长的维修间隔可以节省维修的费用;而设备运行的后期故障率曲线上升更快,因此使用较短的维修间隔可以确保可靠度保持在一定水平上。而周期计划维修模型在设备运行期间的计划维修时间间隔都不变,无法在设备不同运行状态根据当时的情况来更改时间间隔,因此为保证设备在运行后期满足可靠性阈值,只能全过程都选择较短的维修间隔,获得的优化结果相对序列计划维修模型较差。

2 状态维修最大检测时间间隔与预防维修阈值决策

2.1 问题描述与符号说明

状态维修指根据设备的退化状态来做出维修决策,在岸桥关键部件的维修决策中,对于高风险的、会对整体设备的运作造成较大影响的故障,应在潜在故障期进行预防维修予以排除,因此适用状态维修策略。

在实施状态维修策略之前,应根据设备故障发展规律,确定最大检测间隔与预防维修阈值,因其决定了检测与预防维修的频率以及预防维修的时机,对检测与维修总费用的影响较大。本文以检测与维修总费用最小为目标函数,建立数学模型对最大检测时间间隔与预防维修阈值进行优化。

问题的假设如下:

(1) 时间为离散的值,用自然数表示,1 单位时间表示现实中一段固定的时长,每一个时刻 t 既可以为检测点或非检测点;

(2) 将退化过程看作一个随机过程,该随机过程是连续非减的,随机变量 $X(t)$ 表示为 t 时刻的退化状态, $X(0)$ 表示设备为初始状态, $X(0) = 0$;

(3) 设备在单位时间 $(t, t+1)$ 内的退化增量服从概率密度为 $f(x)$ 的随机分布, $f(x)$ 应根据设备实际的退化规律来获得;

(4) 检测时间、预防维修时间、故障后维修时间极短,因此忽略不计。

问题使用的符号如下:

(1) 参数:

c_J : 每次检测的费用;

c_Y : 每次预防维修的费用;

c_Z : 每次故障后维修的费用;

D_f ：故障后维修阈值；

L ：一次状态维修决策的周期；

t ：表示时刻， $t \in [0, L]$ ；

α ：反映预防维修与故障后维修不完全维修的程度， $\alpha \in [0, 1)$ 。

(2) 决策变量：

N ：最大检测间隔；

D_p ：预防维修阈值。

(3) 从属变量：

p_t^J ：时刻 t 为检测点的概率；

p_t^Y ：时刻 t 预防维修的概率；

p_t^Z ：时刻 t 故障后维修的概率。

维修决策基于以下规则，其中 $X(t)$ 为时刻 t 的退化状态， $X'(t)$ 为进行相应的维修策略后的退化状态：

(1) 无论 t 为检测点或非检测点，当 $X(t) < D_p$ 时不需采取维修措施， $X'(t) = X(t)$ ；

(2) 如 t 为检测点，检测得到 $D_p \leq X(t) < D_f$ 时进行预防维修， $X'(t) = \alpha X(t)$ ；

(3) 无论 t 为检测点或非检测点，当 $X(t) \geq D_f$ 时进行故障后维修， $X'(t) = \alpha X(t)$ ；

(4) 假如在时刻 t 进行了预防或故障后维修，过 N 个单位时间再进行检测；

(5) 如时刻 t 为检测点，检测得到 $X(t) < D_p$ 。则将区间 $(0, D_p)$ 平均划分为 N 个子区间，此时退化状态落入第 i 个 ($i=1, \dots, N$) 子区间，经过 $N-i+1$ 个单位时间再进行检测，即根据此时退化状态改变检测的时间间隔，退化状态的值越高则检测间隔越短。

假设在实际工作过程中退化过程以及各时间点维修决策如图 4.4 所示，设 $N=3$ ， $L=15$ ，第 1 个检测点 t_3 时退化状态 $x(3)$ 处于 $1/3D_p$ 与 $2/3D_p$ 之间，根据规则 (1) 与 (5)，此时不需维修但需在 2 个单位时间后再进行检测； t_5 时退化状态 $D_p < x(5) < D_f$ ，根据规则 (2) 需预防维修，维修后退化状态 $x'(5) = \alpha x(5)$ ；根据规则 (4)， t_5 进行预防维修后过了 3 个单位时间再进行检测； t_8 与 t_{10} 分别为检测点与非检测点，由于 $x(8) > D_f$ 和 $x(10) > D_f$ ，根据规则 (3) 均进行故障后维修。

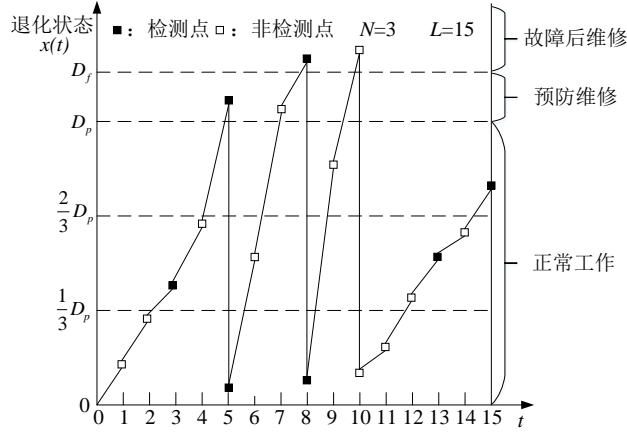


图 4 退化过程与维修规则示意图

Fig. 4 Schematic diagram of degradation process and maintenance rules

模型建立

由于最大检测时间间隔与预防维修阈值对检测与维修总费用影响较大,因此有必要对其进行优化,尽可能降低总费用。以检测与维修总费用最小为目标函数的数学模型建立如式 (26) 所示:

$$\min C = \sum_{t=1}^L (c_J p_t^J + c_Y p_t^Y + c_Z p_t^Z) \quad (26)$$

在每个时刻 t 都有可能进行三种工作,即检测、预防维修、故障后维修。这三种工作都有对应的费用 c_J 、 c_Y 、 c_Z ,与对应的发生概率 p_t^J 、 p_t^Y 、 p_t^Z ,这三个概率与 N 和 D_p 的取值相关。将三种工作的费用与发生概率对应相乘即为时刻 t 的期望费用,再将每一时刻的期望费用累加即为该状态维修决策周期的检测与维修期望总费用。

由式 (26) 可知,要计算检测与维修总费用 C ,首先要计算每个时刻 t 的 p_t^J 、 p_t^Y 、 p_t^Z 。而这三个概率取决于时刻 t 退化状态 $X(t)$ 的概率密度函数 $\omega_t(x)$,而 $\omega_t(x)$ 取决于前一时刻 $t-1$ 为检测点的概率 p_{t-1}^J 和退化状态 $X(t-1)$ 的概率密度函数 $\omega_{t-1}(x)$ 。因此首先介绍 $\omega_t(x)$ 的计算。时刻 $t-1$ 到 t 的退化增量服从概率密度为 $f(x)$ 的随机分布,设时刻 $t-1$ 的退化状态用 y 表示,时刻 t 的退化状态用 x 表示。当 $t=0$ 时, $\omega_t(x)$ 如式 (27) 所示。当 $t=1$ 时, $\omega_t(x) = f(x)$ 。

$$\omega_t(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

当 $t \geq 2$ 时, $\omega_t(x)$ 的计算分为以下 4 种情况:

(1) 时刻 $t-1$ 为检测点, $0 \leq y < D_f$, 时刻 $t-1$ 在这种情况下不需进行维修。由于退化状态随时间增量非负, 因此 $y \leq x$, 推出 $0 \leq y < \min(x, D_p)$ 。这种情况下退化状态概率密度函数记为 $\omega_t^1(x)$, 如式 (28) 所示:

$$\omega_t^1(x) = p_{t-1}^J \int_0^{\min(x, D_p)} \omega_{t-1}(y) f(x-y) dy \quad (28)$$

(2) 时刻 $t-1$ 为检测点, $y \geq D_p$, 时刻 $t-1$ 在这种情况下需进行预防或故障后维修, 维修后退化状态为 αy , 由于退化状态随时间增量非负, 因此 $x \geq \alpha y$ 。退化状态概率密度函数记为 $\omega_t^2(x)$, 如式 (29) 所示:

$$\omega_t^2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha D_p \\ p_{t-1}^J \int_{D_p}^{\frac{x}{\alpha}} \omega_{t-1}(y) f(x-\alpha y) dy, & x > \alpha D_p \end{cases} \quad (29)$$

(3) 时刻 $t-1$ 为非检测点, $0 \leq y < D_f$, 时刻 $t-1$ 在这种情况下不需进行维修, 由于退化状态随时间增量非负, 因此 $y \leq x$, 推出 $0 \leq y < \min(x, D_f)$ 。退化状态概率密度函数记为 $\omega_t^3(x)$, 如式 (30) 所示:

$$\omega_t^3(x) = (1 - p_{t-1}^J) \int_0^{\min(x, D_f)} \omega_{t-1}(y) f(x-y) dy \quad (30)$$

(4) 时刻 $t-1$ 为非检测点, $y \geq D_f$, 时刻 $t-1$ 在这种情况下需进行故障后维修, 维修后退化状态为 αy , 由于退化状态随时间增量非负, 因此 $x \geq \alpha y$ 。退化状态概率密度函数记为 $\omega_t^4(x)$, 如式 (31) 所示:

$$\omega_t^4(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha D_f \\ (1 - p_{t-1}^J) \int_{D_f}^{\frac{x}{\alpha}} \omega_{t-1}(y) f(x-\alpha y) dy, & x > \alpha D_f \end{cases} \quad (31)$$

综上所述, 当 $t \geq 2$ 时, $\omega_t(x)$ 即为上述 4 种情况概率密度的和, 如式 (32) 所示:

$$\omega_t(x) = \omega_t^1(x) + \omega_t^2(x) + \omega_t^3(x) + \omega_t^4(x) \quad (32)$$

在计算得到 $\omega_t(x)$ 的基础上, 可以继续计算每个时刻 t 是检测点的概率 p_t^J 。当 $N=1$ 时, 即每个时刻 t 都是检测点, $p_t^J = 1, t \in [0, L]$ 。当 $N \geq 2$ 时, 时刻 t 的检测概率取决于上一个检测点或者发生故障的非检测点 t' 到 t 之间各时刻的退化状态。时刻 t 为检测点的条件可分为以下 3 种:

(1) $t' = t - N$, t' 是检测点, t' 时进行了预防或故障后维修, 且 t' 到 t 之间各时刻都不是检测点且都没有发生故障, 这种条件下 t 是检测点的概率记为 p_t^{J1} , 如式 (33) 所示:

$$p_t^{J1} = p_{t-N}^J \int_{D_p}^{+\infty} \omega_{t-N}(x) dx \prod_{i=t-N+1}^{t-1} (1-p_i^J)(1-p_i^Z) \quad (33)$$

(2) $t'=t-N$ ， t' 是发生故障的非检测点，进行了故障后维修，且 t' 到 t 之间各时刻都不是检测点且都没有发生故障，这种条件下 t 是检测点的概率记为 p_t^{J2} ，如式(34)所示：

$$p_t^{J2} = (1-p_{t-N}^J) p_{t-N}^Z \prod_{i=t-N+1}^{t-1} (1-p_i^J)(1-p_i^Z) \quad (34)$$

(3) $t'=t-i, i \in \{N, N-1, \dots, 1\}$ ， t' 是检测点，退化状态 $X(t') < D_p$ ，如维修规则(5)所述， $X(t')$ 需在区间 $[(N-i)/N \times D_p, (N-i+1)/N \times D_p]$ 内，且 t' 到 t 之间各时刻都不是检测点且都没有发生故障， t 才能是检测点，这种条件下 t 是检测点的概率记为 p_t^{J3} ，如式(35)所示：

$$p_t^{J3} = \sum_{i=2}^N \left[p_{t-i}^J \int_{\frac{N-i}{N} \times D_p}^{\frac{N-i+1}{N} \times D_p} \omega_{t-i}(x) dx \prod_{j=t-i+1}^{t-1} (1-p_j^J)(1-p_j^Z) \right] + p_{t-1}^J \int_{\frac{N-1}{N} \times D_p}^{D_p} \omega_{t-1}(x) dx \quad (35)$$

综上所述，当 $N \geq 2$ 时， p_t^J 即为上述3种情况概率的和，如式(36)所示：

$$p_t^J = p_t^{J1} + p_t^{J2} + p_t^{J3} \quad (36)$$

时刻 t 进行预防维修的条件是时刻 t 为检测点，且退化状态 $X(t)$ 在区间 $[D_p, D_f]$ 中，因此 p_t^Y 的计算如式(37)所示：

$$p_t^Y = p_t^J \int_{D_p}^{D_f} \omega_k(x) dx \quad (37)$$

时刻 t 进行故障后维修的条件是时刻 t 退化状态 $X(t) \geq D_f$ 时，因此 p_t^Z 的计算如式(38)所示：

$$p_t^Z = \int_{D_f}^{+\infty} \omega_k(x) dx \quad (38)$$

在计算检测与维修总费用时， t 在区间 $[0, L]$ 迭代，对每个时刻 t ，首先求解退化状态 $X(t)$ 的概率密度函数 $\omega_t(x)$ ，再分别求解 p_t^J 、 p_t^Y 、 p_t^Z ，最后求得时刻 t 的检测与维修期望费用。

实例分析

假设进行一次检测的费用 $c_J = 1$ 万元，一次预防维修的费用 $c_Y = 2$ 万元，一次故障后维修的费用 $c_Z = 8$ 万元，故障后维修阈值 $D_f = 20$ 。假设状态维修决策的周期为1年，以1周作为一个单位时间，因此 $L = 52$ 。单位时间 $(t, t+1)$ 内的退化增量服从伽马分布，如式(39)所示，其中 $a = 1$ ， $m = 0.5$ 。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-mx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (39)$$

本文模型有两个决策变量 N 与 D_p ，通过改变 N 与 D_p 的值求解模型，得到此时检测与维修总费用 C 进行比较，以求得最优的 N 与 D_p 。本文模型涉及变限积分与分段函数的计算，因此使用了 MATLAB 的符号计算工具箱（symbolic math toolbox）进行求解。求解结果如图 5 所示，其中 N 变化的区间为 $[2, 26]$ ， D_p 变化的区间为 $[1, 20]$ 。可以看出，若固定 D_p 仅改变 N 的值，总费用 C 随着 N 的增加首先迅速减小，再缓慢升高，这是因为 N 越小，每个时刻 t 作为检测点的概率越高，检测期望费用越高； N 越大，每个时刻 t 作为检测点的概率越低，但故障的概率会升高，故障后维修期望费用越高。因此，存在一个适中的 N 以使得检测与维修总费用最低。若固定 N 仅改变 D_p 的值，总费用 C 随着 D_p 的增加先减后增，这是因为 D_p 越小，则进行预防维修的概率越高，预防维修期望费用越高； D_p 越大，进行预防维修的概率越小，但故障的概率会升高，故障后维修期望费用越高。因此，也存在一个适中的 D_p 以使得检测与维修总费用最低。根据以上分析，可知存在最优的 N 与 D_p ，使得检测与维修总费用 C 最小。如图 4.5 所示，当 $N = 7$ ， $D_p = 9$ 时， C 取得最小值 25.99 万元。企业可根据解得的最优 N 与 D_p 的组合来制定状态维修的方案，实现检测与维修总费用最小。

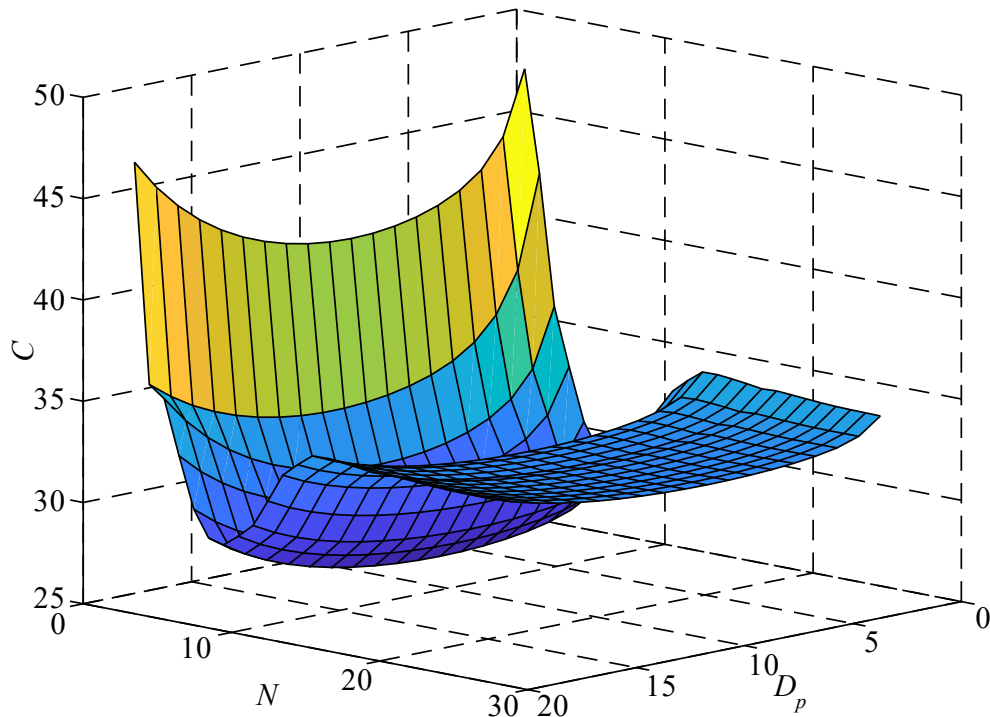


图 5 检测与维修总费用变化图

Fig. 5 Variation of total cost of inspection and maintenance