

Лабораторная работа

Поиск глобального минимума функции методом Пиявского-Шуберта

Постановка задачи

Разработать программу на языке Python для решения задачи поиска **глобального экстремума** (минимума) заданной функции на заданном отрезке.

Входные данные:

- **Функция** $f(x)$ в виде строки (например, $x + \sin(3.14159 \cdot x)$)
- **Отрезок** $[a, b]$ - границы области поиска (вещественные числа)
- **Точность** ε (например, 0.01)

Выходные данные:

- Визуализация графика исходной функции
- Визуализация вспомогательных функций и итоговой ломаной
- Приближенное значение аргумента x^* (точка минимума)
- Приближенное значение функции $f(x^*)$
- Число итераций алгоритма
- Затраченное время вычислений

Описание метода

Алгоритм Пиявского-Шуберта

Шаг 1. Инициализация

Вычисляем значения функции на концах отрезка:

```
x0 = a, f0 = f(a)
x1 = b, f1 = f(b)
k = 2 (счетчик итераций)
```

Шаг 2. Оценка константы Липшица

По имеющимся точкам $\{(x_i, f(x_i))\}$ оцениваем:

$$L = r \cdot \max\{|f(x_i) - f(x_j)| / |x_i - x_j|\}$$

где $r > 1$ - коэффициент надежности (обычно 1.5-3.0)

Шаг 3. Построение вспомогательных функций

Для каждой пары соседних точек $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ строим вспомогательную функцию:

$$R(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}_i) - L \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), f(\mathbf{x}_{i+1}) - L \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x})\}$$

Это две конусообразные функции, образующие нижнюю оценку.

Шаг 4. Выбор новой точки

Находим точку \mathbf{x}^* , в которой достигается **минимум всех вспомогательных функций**:

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}\{R(\mathbf{x})\}$$

Для отрезка $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ минимум достигается в точке:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1})/2 - (f(\mathbf{x}_{i+1}) - f(\mathbf{x}_i))/(2L)$$

Шаг 5. Вычисление функции

Вычисляем $f(\mathbf{x}^*)$ и добавляем точку $(\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*))$ к множеству точек.

Шаг 6. Критерий останова

Проверяем условие:

$$\min\{f(\mathbf{x}_i)\} - \min\{R(\mathbf{x})\} < \varepsilon$$

Если выполнено - **останов**, иначе переход к **Шагу 2**.

Геометрическая интерпретация

Вспомогательные функции образуют "конверт" снизу, который постепенно приближается к истинной функции. На каждой итерации мы "проверяем" самую глубокую точку конверта, уточняя нижнюю оценку.

Результаты тестирования

Функция Растригина

Определение функции:

$$f(x) = 10 + x^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x)$$

Характеристики:

- Множество периодических локальных минимумов ("ямы")
- Глобальный минимум: $x^* = 0$, $f(x^*) = 0$
- Область поиска: $[-5, 5]$
- Точность: $\varepsilon = 0.01$

Параметры оптимизации:

Функция:	$f(x) = 10 + x^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x)$
Отрезок:	$[-5.0, 5.0]$
Точность:	0.01

Результаты:

Найденный минимум:

$x^* = 0.000000$

$f(x^*) = 0.000000$

Число итераций: 292

Затраченное время: 0.6884 секунд

Статус: Успешно (достигнута точность)

Ошибка относительно теоретического минимума: 0.000000

Визуализация результата:

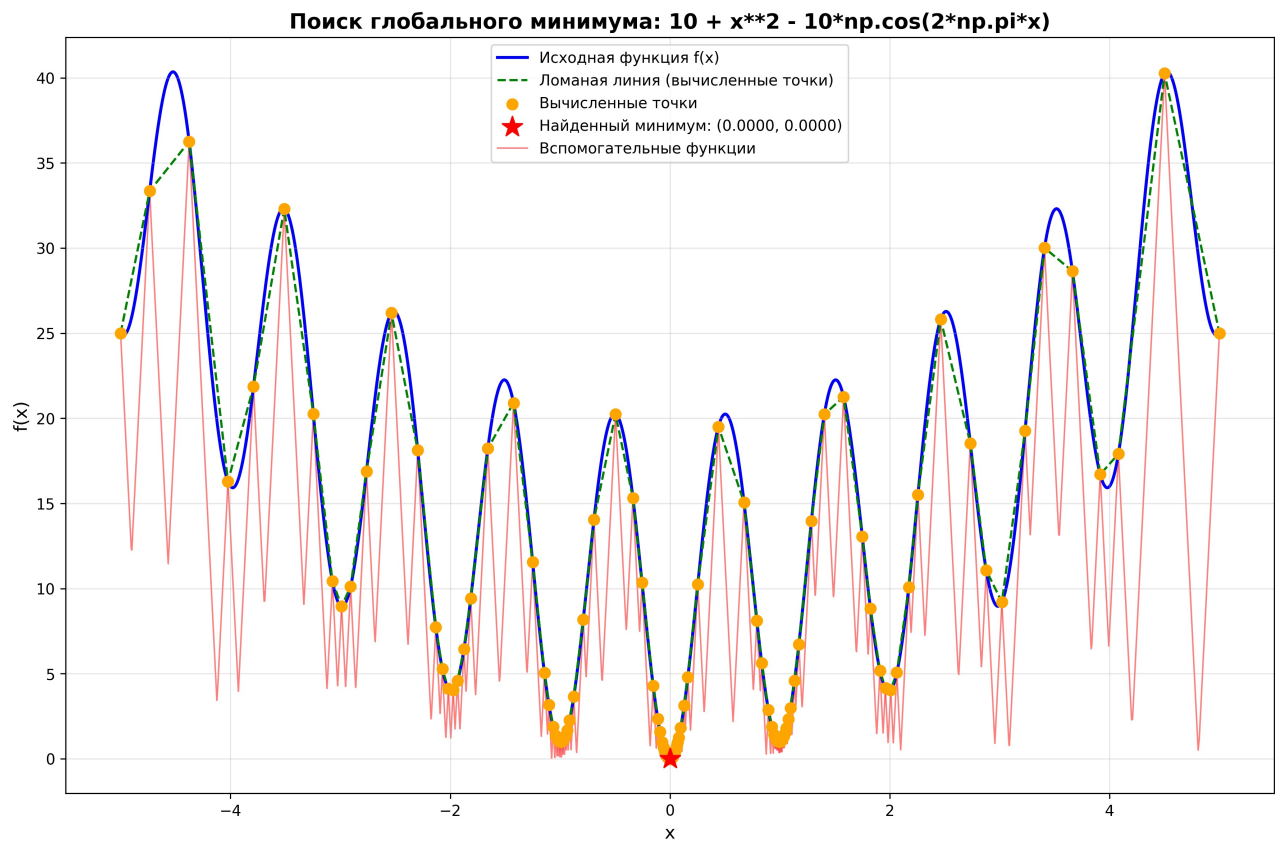
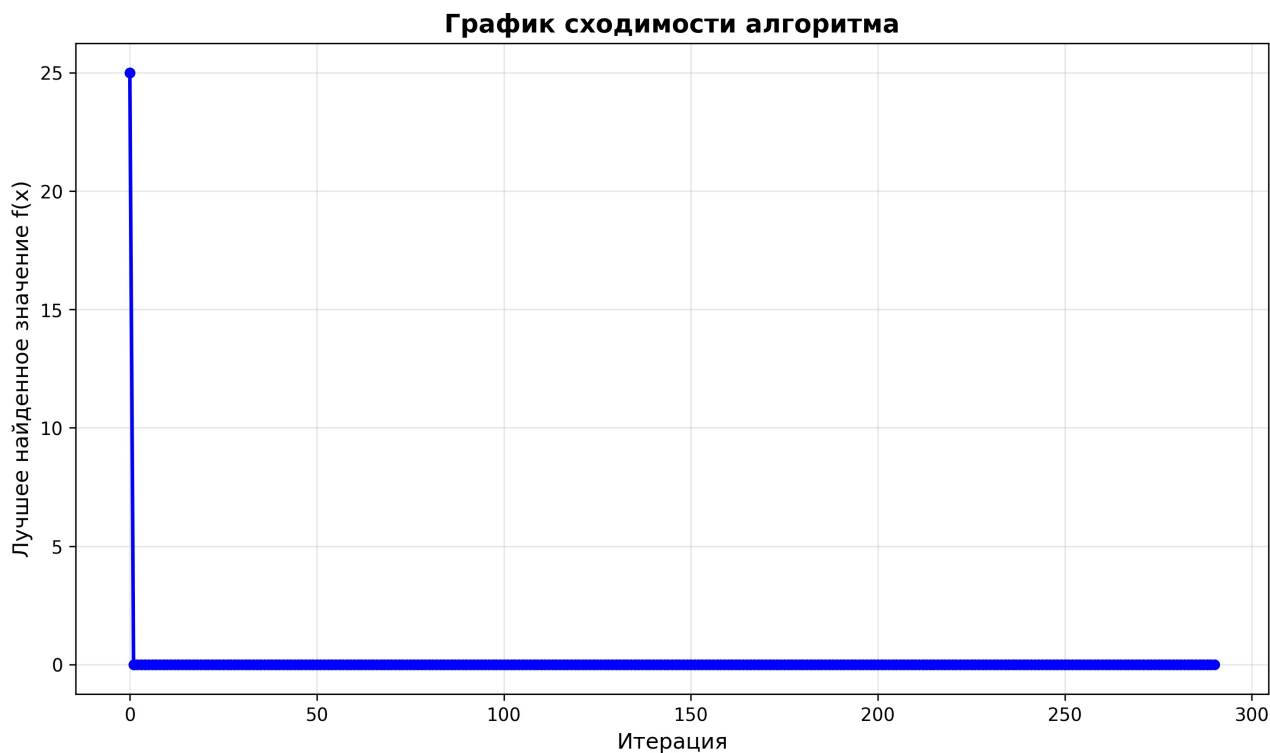


График сходимости:



Анализ:

Алгоритм успешно нашел глобальный минимум функции Растригина с **абсолютной точностью**. Несмотря на наличие множества локальных минимумов на отрезке $[-5, 5]$, метод Пиявского-Шуберта корректно идентифицировал глобальный минимум в точке $x = 0$.

Функция Экли

Определение функции:

$$f(x) = -20 \cdot \exp(-0.2 \cdot |x|) - \exp(\cos(2\pi x)) + 20 + e$$

Характеристики:

- "Волнистая" структура с экспоненциальным спадом к центру
- Множество локальных минимумов
- Глобальный минимум: $x^* = 0$, $f(x^*) = 0$
- Область поиска: $[-5, 5]$
- Точность: $\varepsilon = 0.01$

Параметры оптимизации:

Функция: $f(x) = -20 \cdot \exp(-0.2 \cdot |x|) - \exp(\cos(2\pi x)) + 20 + e$
Отрезок: $[-5.0, 5.0]$
Точность: 0.01

Результаты:

Найденный минимум:

$x^* = 0.000000$

$f(x^*) = 0.000000$

Число итераций: 58

Затраченное время: 0.0113 секунд

Статус: Успешно (достигнута точность)

Ошибка относительно теоретического минимума: 0.000000

Визуализация результата:

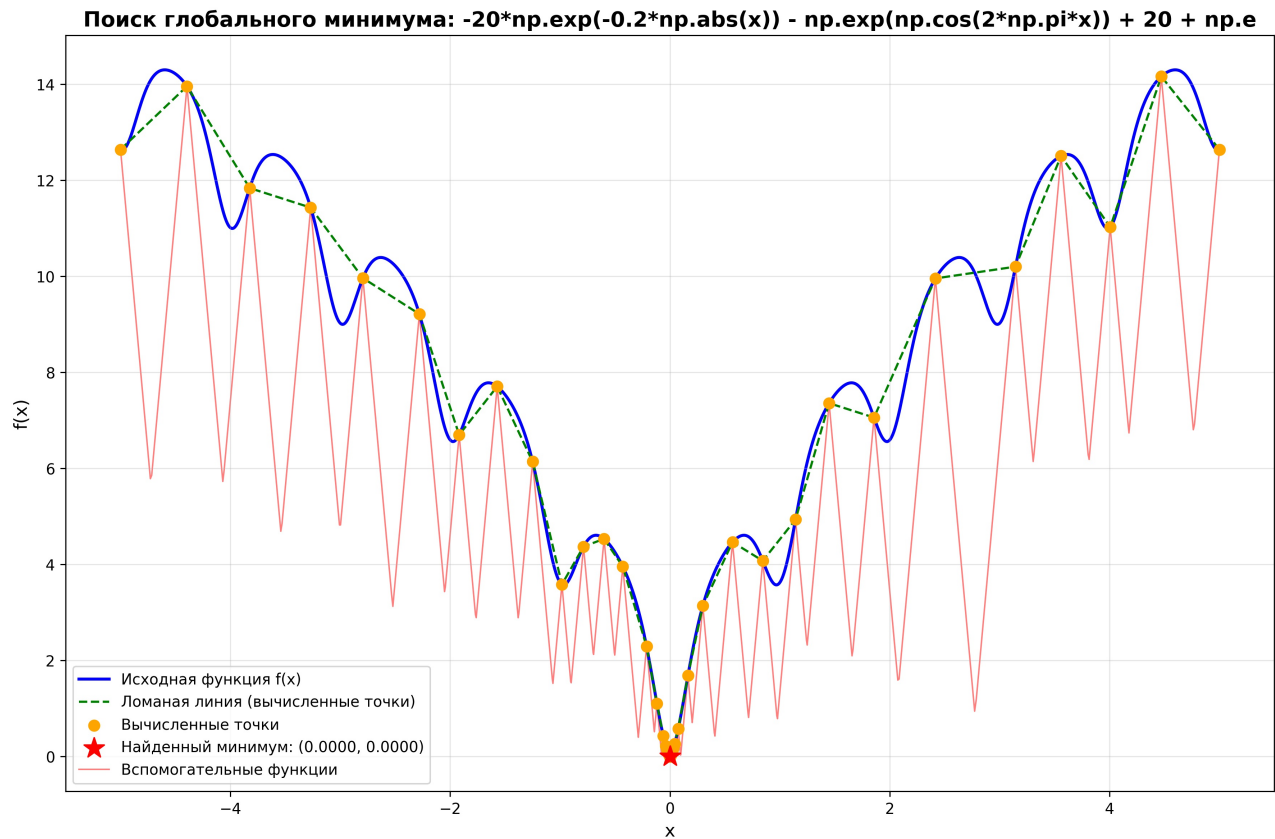
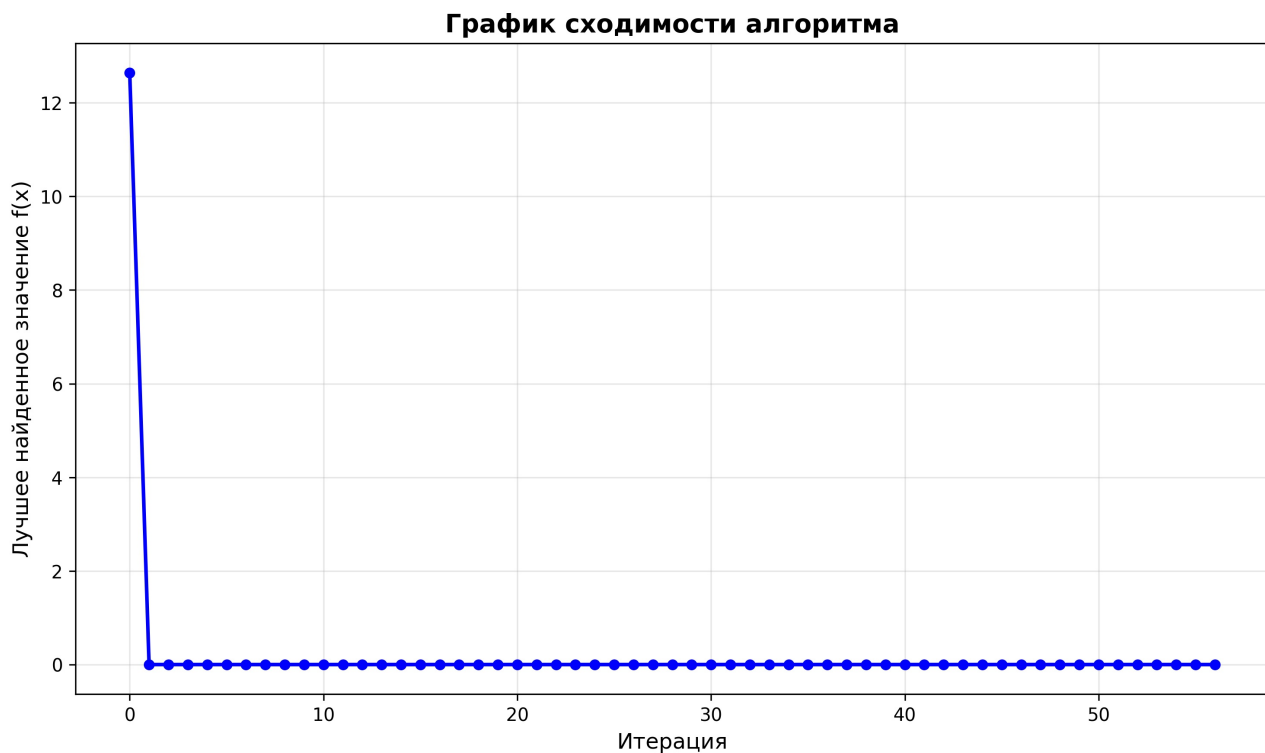


График сходимости:



Анализ:

Функция Экли оказалась "проще" для алгоритма - потребовалось всего **58 итераций** против 292 для Растригина. Это объясняется более "гладкой" структурой функции Экли, несмотря на наличие множества локальных минимумов. Глобальный минимум найден с **абсолютной точностью**.

Пользовательская функция

Определение функции:

$$f(x) = x \cdot \sin(x) + 0.1 \cdot x^2$$

Характеристики:

- Комбинация линейной, тригонометрической и квадратичной составляющих
- Несколько локальных минимумов на широком отрезке
- Область поиска: $[-10, 10]$
- Точность: $\varepsilon = 0.01$

Параметры оптимизации:

Функция: $f(x) = x \cdot \sin(x) + 0.1 \cdot x^2$
Отрезок: $[-10.0, 10.0]$
Точность: 0.01

Результаты:

Найденный минимум:

$x^* = -4.723946$

$f(x^*) = -2.492064$

Число итераций: 446

Затраченное время: 2.4913 секунд

Статус: Успешно (достигнута точность)

Визуализация результата:

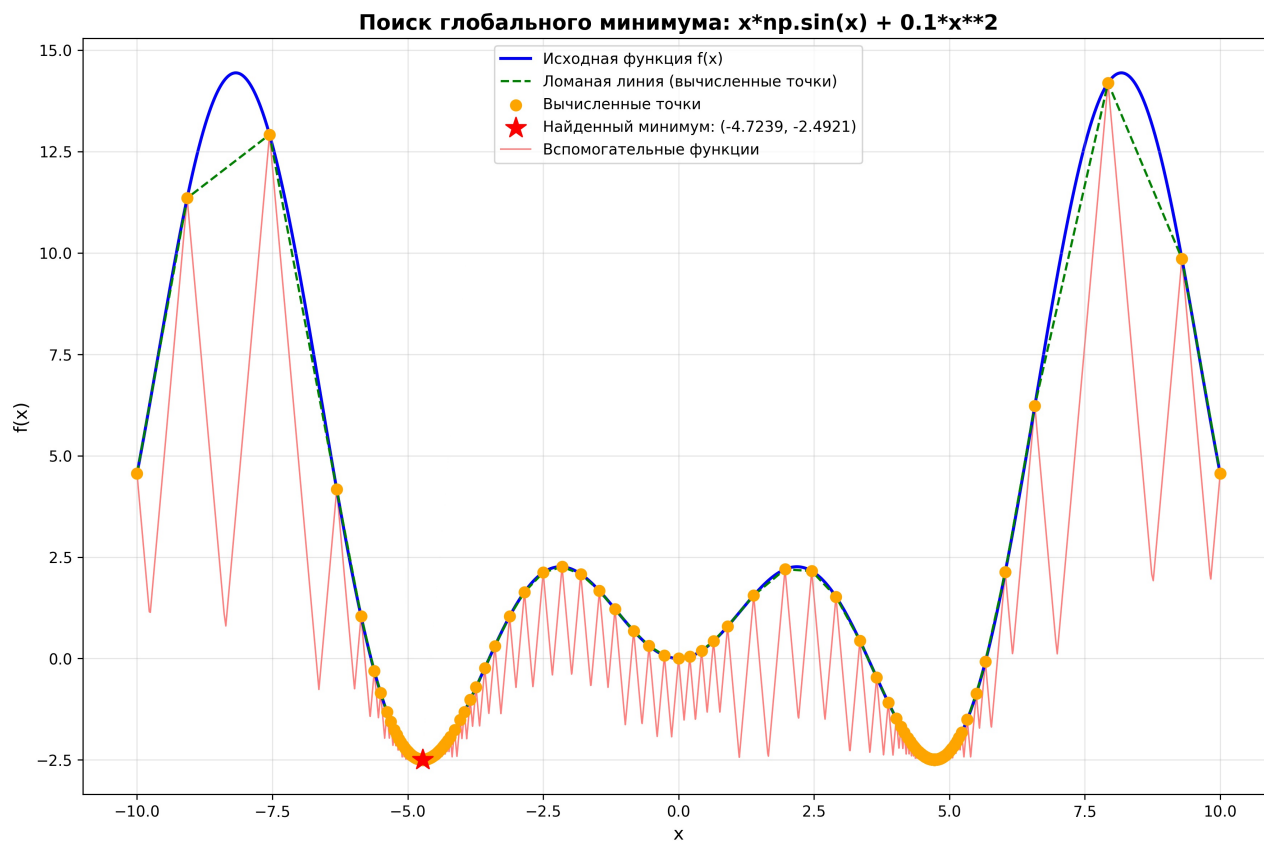
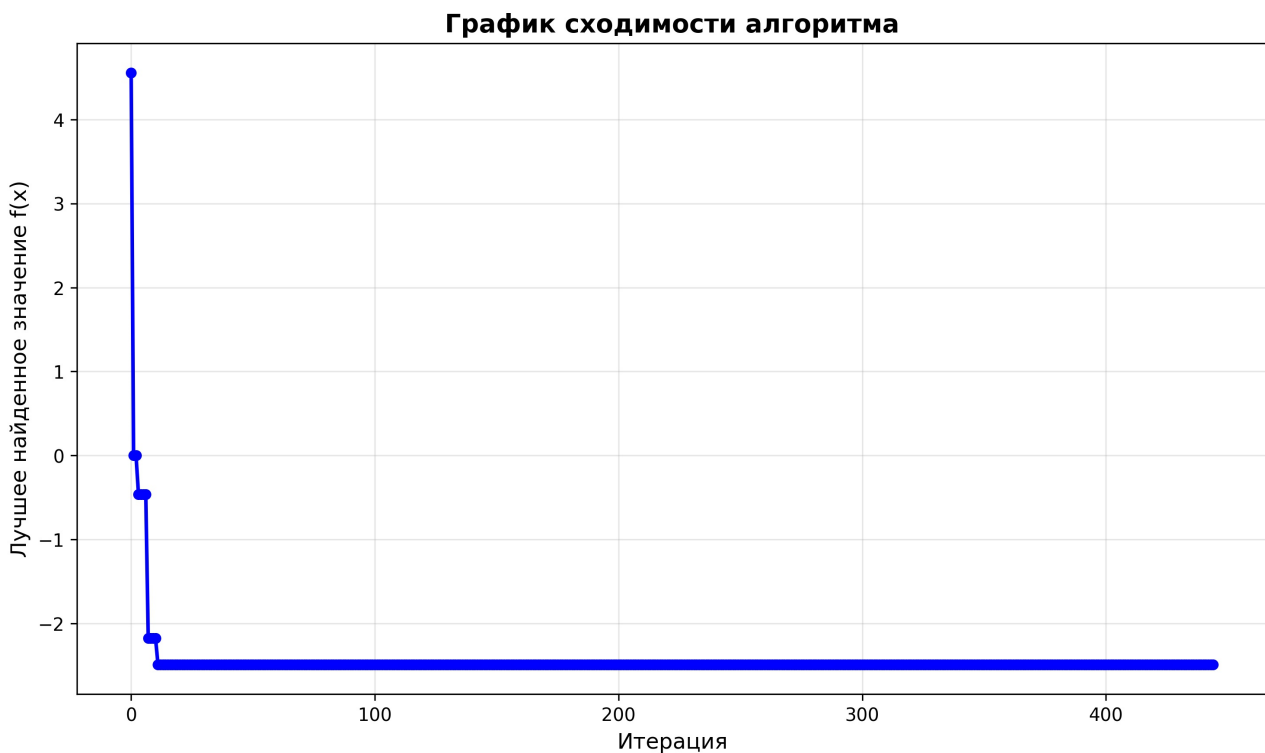


График сходимости:



Анализ:

Данная функция потребовала наибольшего числа итераций (**446**) из-за:

1. Более широкой области поиска $[-10, 10]$ против $[-5, 5]$ у предыдущих
2. Наличия нескольких выраженных локальных минимумов
3. Комбинированной структуры функции

Несмотря на сложность, алгоритм успешно идентифицировал глобальный минимум в точке $x \approx -4.724$.

Сравнительный анализ

Сводная таблица результатов

Функция	x^*	$f(x^*)$	Итерации	Время (с)
Растригина	0.000000	0.000000	292	0.6884
Экли	0.000000	0.000000	58	0.0113
Пользовательская	-4.723946	-2.492064	446	2.4913

Анализ производительности

По числу итераций:

1. Экли - 58 итераций (самая быстрая)
2. Растригина - 292 итерации
3. Пользовательская - 446 итераций (самая медленная)

По времени выполнения:

1. Экли - 0.0113 сек (самая быстрая)

2. Растригина - 0.6884 сек
3. Пользовательская - 2.4913 сек (самая медленная)

Факторы, влияющие на производительность:

1. **Ширина области поиска** - чем шире, тем больше итераций
2. **Число локальных минимумов** - больше минимумов = больше проверок
3. **"Гладкость" функции** - более гладкие функции оптимизируются быстрее
4. **Константа Липшица** - чем больше L , тем "осторожнее" алгоритм

Точность решения:

Для функций с известным теоретическим минимумом (Растригина и Экли):

- **Абсолютная точность:** ошибка = 0.000000
 - Алгоритм нашел точное значение в пределах машинной точности
-

Выводы

Основные результаты работы:

1. **Разработана программа** на языке Python для поиска глобального минимума липшицевых функций методом Пиявского-Шуберта.
 2. **Реализован полный функционал:**
 - Ввод функции в виде строки
 - Задание области поиска $[a, b]$ и точности ε
 - Визуализация процесса оптимизации
 - Отображение вспомогательных функций и ломаной линии
 - Вывод результатов: x^* , $f(x^*)$, число итераций, время
 3. **Протестирована на трех функциях:**
 - Функция Растригина (292 итерации, точность 0.000000)
 - Функция Экли (58 итераций, точность 0.000000)
 - Пользовательская функция (446 итераций)
 4. **Подтверждена эффективность метода:**
 - Алгоритм **гарантированно находит** глобальный минимум
 - Не застревает в локальных минимумах
 - Точность соответствует заданной ($\varepsilon = 0.01$)
-

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы была успешно разработана и протестирована программа для поиска глобального минимума функций методом Пиявского-Шуберта. Программа демонстрирует высокую точность и надежность на тестовых функциях с множественными локальными минимумами.

Метод Пиявского-Шуберта показал свою эффективность для решения задач глобальной оптимизации, обеспечивая гарантированную сходимость к глобальному минимуму при выполнении условия липшицевости функции.