Отчёт по лабораторной работе

Оптимальное управление инвестиционным портфелем методом динамического программирования

Зотеев Максим Евгеньевич К3339

---

1. Цель работы и постановка задачи

Цель работы

Разработать оптимальный план управления инвестиционным портфелем, состоящим из двух видов ценных бумаг и депозитов, с использованием метода динамического программирования и критерия Байеса для максимизации математического ожидания дохода.

Постановка задачи

К началу периода планирования инвестор располагает: - **ЦБ1** (ценные бумаги первого вида): 100 д.е. - **ЦБ2** (ценные бумаги второго вида): 800 д.е. - **Депозиты**: 400 д.е. - **Свободные денежные средства**: 600 д.е. - **Общий капитал**: 1900 д.е.

Период планирования разбит на **три этапа**. На каждом этапе возможно наступление одного из трёх событий: - Благоприятное (сильный рост) - Нейтральное (слабый рост) - Негативное (падение)

Управляющие воздействия: изменение объёмов активов на величину, кратную 25% от начального объёма:

- Шаг для ЦБ1: 25 д.е.
- Шаг для ЦБ2: 200 д.е.
- Шаг для депозитов: 100 д.е.

Ограничения:

- Минимальный объём ЦБ1: 30 д.е.
- Минимальный объём ЦБ2: 150 д.е.
- Минимальный объём депозитов: 100 д.е.
- Инвестор не может брать кредит (свободные средства ≥ 0)

Комиссии брокеров (при покупке):

- ЦБ1: 4%
- ЦБ2: 7%
- Депозиты: 5%

---

2. Общая математическая формулировка задачи динамического программирования

Элементы задачи динамического программирования

1. **Этапы (стадии)**: $k = 1, 2, 3$ - номера этапов планирования
2. **Состояние системы**: $S_k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, c^k)$, где:
   - x_1^k - объём ЦБ1 на этапе k
   - x_2^k - объём ЦБ2 на этапе k
   - x_3^k - объём депозитов на этапе k
   - c^k - свободные денежные средства
3. **Управляющее воздействие**: $u_k = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ - изменения объёмов активов

4. **Случайные факторы**: $\omega_k \in \{\text{благопр., нейтр., негатив.}\}$ с заданными вероятностями
5. **Критерий оптимальности**: максимизация математического ожидания конечной стоимости портфеля (критерий Байеса)

Уравнение динамики системы

После принятия решения u_k и реализации случайного события ω_k:

$$S_{k+1} = f(S_k, u_k, \omega_k)$$

где новые значения активов вычисляются как: - $x_i^{k+1} = (x_i^k + \Delta x_i) \cdot r_i^k(\omega_k)$

$r_i^k(\omega_k)$ - коэффициент доходности актива i на этапе k при событии ω_k.

---

3. Рекуррентное соотношение Беллмана

Обозначения

- $V_k(S)$ - функция Беллмана (оптимальная ожидаемая стоимость портфеля), начиная с этапа k при состоянии S
- $P_k(\omega)$ - вероятность события ω на этапе k
- $U(S)$ - множество допустимых управлений в состоянии S

Формула в общем случае

Рекуррентное соотношение Беллмана:

$$V_k(S) = \max_{u \in U(S)} \left\{ \sum_{\omega} P_k(\omega) \cdot V_{k+1}(f(S, u, \omega)) \right\}$$

Граничное условие (терминальная функция):

$$V_{N+1}(S) = x_1 + x_2 + x_3 + c$$

где $N = 3$ - количество этапов.

Описание алгоритма решения

Алгоритм состоит из трёх основных шагов:

Шаг 1. Генерация достижимых состояний (прямой проход для построения пространства состояний):

1. Начинаем с начального состояния S_0 на этапе 1
2. Для каждого этапа генерируем все состояния следующего этапа путём перебора:
   - Всех допустимых управлений из текущих состояний
   - Всех возможных случайных событий
3. Результат: множества достижимых состояний для этапов 1, 2 и 3

Шаг 2. Обратный проход (вычисление функции Беллмана):

Алгоритм выполняется от последнего этапа к первому:

1. **Этап 3** (терминальный): Для каждого достижимого состояния S и каждого допустимого управления u вычисляем ожидаемую терминальную стоимость и выбираем оптимальное управление.

2. **Этап 2**: Используя значения $V_3(S)$, вычисленные на предыдущем шаге, определяем $V_2(S)$ для всех достижимых состояний.
3. **Этап 1**: Аналогично определяем $V_1(S_0)$ для начального состояния.

Шаг 3. Прямой проход (симуляция сценариев):

После завершения обратного прохода выполняется прямой проход для демонстрации оптимальной политики:

1. Начиная с начального состояния S_0, применяем оптимальное управление $u_1^* = \pi_1(S_0)$
2. Для демонстрации симулируем конкретные сценарии (последовательности событий)
3. В каждом сценарии на этапах 2 и 3 применяем оптимальное управление $\pi_k(S)$ для фактического состояния S

---

4. Обозначения и рекуррентное соотношение для конкретной задачи

Конкретные обозначения

Обозначение	Описание	Значение
x_1^0	Начальный объём ЦБ1	100 д.е.
x_2^0	Начальный объём ЦБ2	800 д.е.
x_3^0	Начальный объём депозитов	400 д.е.
c^0	Начальные свободные средства	600 д.е.
δ_1	Шаг управления для ЦБ1	25 д.е.
δ_2	Шаг управления для ЦБ2	200 д.е.
δ_3	Шаг управления для депозитов	100 д.е.
γ_1	Комиссия для ЦБ1	4%
γ_2	Комиссия для ЦБ2	7%
γ_3	Комиссия для депозитов	5%

Вероятности событий

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	0.60	0.30	0.10
2	0.30	0.20	0.50
3	0.40	0.40	0.20

Коэффициенты доходности

ЦБ1:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.20	1.05	0.80
2	1.40	1.05	0.60
3	1.15	1.05	0.70

ЦБ2:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.10	1.02	0.95
2	1.15	1.00	0.90
3	1.12	1.01	0.94

Депозиты:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.07	1.03	1.00
2	1.01	1.00	1.00
3	1.05	1.01	1.00

Рекуррентное соотношение для конкретной задачи

$$V_k(x_1, x_2, x_3, c) = \max_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} p_k^j \cdot V_{k+1}(S_{k+1}^j) \right\}$$

где $j = 1, 2, 3$ соответствует благоприятному, нейтральному и негативному сценариям.

Ограничения на управление: - $x_i + \Delta x_i \geq x_i^{\min}$ для всех i - $c - \text{cost}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \geq 0$

где стоимость управления:

$$\text{cost} = \sum_{i=1}^{3} \begin{cases} \Delta x_i \cdot (1 + \gamma_i), & \text{если } \Delta x_i > 0 \\ \Delta x_i, & \text{если } \Delta x_i \leq 0 \end{cases}$$

---

5. Псевдокод алгоритма

```
АЛГОРИТМ: Динамическое программирование для управления портфелем

ВХОД:
  S0 = (x1_0, x2_0, x3_0, c0)  // Начальное состояние
  P[k][j]                  // Вероятности событий
  R[k][i][j]               // Коэффициенты доходности

ВЫХОД:
  V1(S0)                   // Оптимальная ожидаемая стоимость
  policy[k][S]             // Оптимальная политика управления

// ===== ШАГ 1: ГЕНЕРАЦИЯ ДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ =====
// Генерируем все достижимые состояния ВПЕРЁД от начального
reachable_states[1] = {S0}  // Этап 1: только начальное состояние

ДЛЯ k ОТ 1 ДО 2:  // Для этапов 1-2 генерируем состояния для следующего этапа
  reachable_states[k+1] = ∅

  ДЛЯ КАЖДОГО S В reachable_states[k]:
    ДЛЯ КАЖДОГО допустимого управления u:
      S' = применить_управление(S, u)

      ДЛЯ j ОТ 1 ДО 3:  // Для каждого сценария
        S'' = применить_случайное_событие(S', k, j)
```

```
            reachable_states[k+1] = reachable_states[k+1] ∪ {округлить(S'')}

// ===== ШАГ 2: ОБРАТНЫЙ ПРОХОД =====
// Вычисляем функцию Беллмана от последнего этапа к первому
ДЛЯ k ОТ 3 ДО 1:
  V[k] = {}

  ДЛЯ КАЖДОГО S В reachable_states[k]:
    best_value = -∞
    best_action = NULL

    ДЛЯ КАЖДОГО допустимого управления u:
      S' = применить_управление(S, u)

      expected_value = 0
      ДЛЯ j ОТ 1 ДО 3:  // Для каждого сценария
        S'' = применить_случайное_событие(S', k, j)

        ЕСЛИ k == 3:  // Терминальный этап
          value = терминальная_стоимость(S'')
        ИНАЧЕ:
          value = V[k+1][округлить(S'')]  // Используем функцию Беллмана

        expected_value += P[k][j] * value

      ЕСЛИ expected_value > best_value:
        best_value = expected_value
        best_action = u

    V[k][S] = best_value
    policy[k][S] = best_action

// ===== ШАГ 3: ПРЯМОЙ ПРОХОД (симуляция сценариев) =====
// Оптимальная стратегия - это политика π(S), зависящая от состояния.
// Для демонстрации симулируем конкретные сценарии.

ДЛЯ КАЖДОЙ последовательности событий scenario[1..3]:
  S = S0
  ДЛЯ k ОТ 1 ДО 3:
    u* = policy[k][S]  // Оптимальное решение для ТЕКУЩЕГО состояния
    S = применить_управление(S, u*)
    S = применить_событие(S, k, scenario[k])  // Конкретное событие

  ВЫВЕСТИ "Сценарий: итоговая стоимость = сумма(S)"

ВЕРНУТЬ V[1][S0], policy
```

---

6. Демонстрационные примеры программы

Результаты выполнения программы

Обратный проход

Этап	Обработано состояний	Оценено действий
3	734 501	211 056 551
2	990	289 784
1	1	330
Всего	**735 492**	**211 346 665**

Примечание: Состояния генерируются прямым проходом от начального состояния, что гарантирует корректность алгоритма

Оптимальное решение на этапе 1 (из начального состояния)

- Начальное состояние: ЦБ1 = 100, ЦБ2 = 800, Деп = 400, Кэш = 600
- **Ожидаемая стоимость портфеля (из функции Беллмана): 2036.18 д.е.**
- **Оптимальное решение:**
  - Купить ЦБ1 на 50 д.е.
  - Купить ЦБ2 на 200 д.е.
  - Пополнить депозиты на 300 д.е.
- Состояние после решения: ЦБ1 = 150, ЦБ2 = 1000, Деп = 700, Кэш = 19

Возможные исходы после этапа 1:

Сценарий	Вероятность	ЦБ1	ЦБ2	Депозиты	Кэш	Итого
Благоприятный	60%	180	1100	749	19	2048
Нейтральный	30%	157.5	1020	721	19	1917.5
Негативный	10%	120	950	700	19	1789

Прямой проход - Симуляция конкретных сценариев Ниже представлены траектории для конкретных последовательностей событий с оптимальными решениями для фактических состояний:

Сценарий	Вероятность	Итоговая стоимость	Доходность
Все благоприятные	7.20%	2458.91 д.е.	+29.42%
Все негативные	1.00%	1608.10 д.е.	-15.36%
Все нейтральные	2.40%	1940.80 д.е.	+2.15%
Благопр.-Негатив.-Благопр.	12.00%	2069.45 д.е.	+8.92%
Негатив.-Благопр.-Нейтр.	1.20%	1977.64 д.е.	+4.09%

Пример траектории “Все благоприятные”:

Этап	Состояние (ЦБ1, ЦБ2, Деп, Кэш)	Решение	Событие
1	(100, 800, 400, 600)	Δ ЦБ1=+50, Δ ЦБ2=+200, Δ Деп=+300	Благоприятный
2	(180, 1100, 749, 19)	Δ ЦБ1=-100, Δ ЦБ2=0, Δ Деп=0	Благоприятный
3	(112, 1265, 756, 119)	Без изменений	Благоприятный
Итого			**2458.91 д.е.**

7. Итоговые результаты

Оптимальная стратегия управления

Этап 1 (детерминированное решение из начального состояния):

Действие
Купить ЦБ1 на 50 д.е., купить ЦБ2 на 200 д.е., пополнить депозиты на 300 д.е.

Этапы 2-3: Решения зависят от фактического состояния портфеля после реализации случайных событий. Конкретные решения для различных сценариев представлены в разделе “Симуляция конкретных сценариев”.

Финансовые показатели

Показатель	Значение
Начальная стоимость портфеля	1 900.00 д.е.
Ожидаемая стоимость портфеля	**2 036.18 д.е.**
Ожидаемая прибыль	136.18 д.е.
Ожидаемая доходность	**7.17%**

Примечание: Ожидаемая стоимость 2036.18 д.е. вычислена из функции Беллмана $V_1(S_0)$ *и учитывает оптимальные решения во всех возможных состояниях на всех этапах.*

Интерпретация результатов

1. **Этап 1**: Умеренно-консервативная стратегия - основной акцент на депозиты (+300 д.е.) с умеренным увеличением позиций в ценных бумагах. Высокая вероятность благоприятного исхода на этапе 1 (60%) компенсируется высокой вероятностью негативного исхода на этапе 2 (50%).
2. **Этапы 2-3**: Оптимальные решения адаптируются к фактическому состоянию портфеля. При благоприятных исходах — частичная продажа ЦБ1 для фиксации прибыли. Политика учитывает:
   - Текущие объёмы активов после реализации случайных событий
   - Вероятности событий на оставшихся этапах
   - Комиссии брокеров и ограничения на минимальные объёмы

Диапазон возможных исходов

Сценарий	Итоговая стоимость	Доходность
Лучший (все благоприятные)	2458.91 д.е.	+29.42%
Ожидаемый (средневзвешенный)	2036.18 д.е.	+7.17%
Худший (все негативные)	1608.10 д.е.	-15.36%

---

8. Заключение

Что сделано

1. Разработана математическая модель задачи оптимального управления инвестиционным портфелем как задачи динамического программирования

2. Реализован алгоритм решения с использованием рекуррентного соотношения Беллмана и критерия Байеса (максимизация математического ожидания)
3. Программа выполняет обратный проход для вычисления функции ценности и прямой проход с симуляцией конкретных сценариев
4. Получена оптимальная стратегия управления портфелем с ожидаемой доходностью **7.17%** за три периода

Методологические особенности

Важно: В задачах стохастического динамического программирования оптимальная стратегия — это политика $\pi(S)$, а не фиксированная последовательность действий. Решение на каждом этапе зависит от фактического состояния системы после реализации случайных событий

Генерация достижимых состояний: Алгоритм использует прямую генерацию достижимых состояний от начального состояния. Это гарантирует, что каждое состояние в обратном проходе корректно вычислено

Прямой проход демонстрирует стратегию через симуляцию конкретных сценариев (последовательностей событий), а не через усреднённые состояния, что обеспечивает корректность интерпретации результатов

Чему удалось научиться

1. **Формализация задачи ДП**: определение состояний, управлений, функции перехода и критерия оптимальности для задач со случайными факторами
2. **Применение критерия Байеса**: использование математического ожидания для принятия решений в условиях неопределённости
3. **Реализация алгоритма Беллмана**: программная реализация обратного и прямого проходов с учётом большого пространства состояний
4. **Корректная интерпретация**: понимание того, что оптимальная стратегия в стохастической задаче — это политика, зависящая от состояния, а не детерминированная последовательность действий