Отчёт по лабораторной работе

Оптимальное управление инвестиционным портфелем методом динамического программирования

Зотеев Максим Евгеньевич К3339

---

1. Цель работы и постановка задачи

Цель работы

Разработать оптимальный план управления инвестиционным портфелем, состоящим из двух видов ценных бумаг и депозитов, с использованием метода динамического программирования и критерия Байеса для максимизации математического ожидания дохода.

Постановка задачи

К началу периода планирования инвестор располагает: - ЦБ1 (ценные бумаги первого вида): 100 д.е. - ЦБ2 (ценные бумаги второго вида): 800 д.е. - Депозиты: 400 д.е. - Свободные денежные средства: 600 д.е. - Общий капитал: 1900 д.е.

Период планирования разбит на три этапа. На каждом этапе возможно наступление одного из трёх событий: - Благоприятное (сильный рост) - Нейтральное (слабый рост) - Негативное (падение)

Управляющие воздействия: изменение объёмов активов на величину, кратную 25% от начального объёма:

- Шаг для ЦБ1: 25 д.е.
- Шаг для ЦБ2: 200 д.е.
- Шаг для депозитов: 100 д.е.

Ограничения:

- Минимальный объём ЦБ1: 30 д.е.
- Минимальный объём ЦБ2: 150 д.е.
- Минимальный объём депозитов: 100 д.е.
- Инвестор не может брать кредит (свободные средства ≥ 0)

Комиссии брокеров (при покупке):

- ЦБ1: 4%
- ЦБ2: 7%
- Депозиты: 5%

---

2. Общая математическая формулировка задачи динамического программирования

Элементы задачи динамического программирования

1. Этапы (стадии): $k = 1, 2, 3$ - номера этапов планирования
2. Состояние системы: $S_k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, c^k)$, где:
    - x_1^k - объём ЦБ1 на этапе k
    - x_2^k - объём ЦБ2 на этапе k
    - x_3^k - объём депозитов на этапе k

- c^k - свободные денежные средства

3. Управляющее воздействие: $u_k = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$ - изменения объёмов активов
4. Случайные факторы: $\omega_k \in \{\text{благопр.}, \text{нейтр.}, \text{негатив.}\}$ с заданными вероятностями
5. Критерий оптимальности: максимизация математического ожидания конечной стоимости портфеля (критерий Байеса)

Уравнение динамики системы

После принятия решения u_k и реализации случайного события ω_k:

$$S_{k+1} = f(S_k, u_k, \omega_k)$$

где новые значения активов вычисляются как: - $x_i^{k+1} = (x_i^k + \Delta x_i) \cdot r_i^k(\omega_k)$

$r_i^k(\omega_k)$ - коэффициент доходности актива i на этапе k при событии ω_k.

---

3. Рекуррентное соотношение Беллмана

Обозначения

- $V_k(S)$ - функция Беллмана (оптимальная ожидаемая стоимость портфеля), начиная с этапа k при состоянии S
- $P_k(\omega)$ - вероятность события ω на этапе k
- $U(S)$ - множество допустимых управлений в состоянии S

Формула в общем случае

Рекуррентное соотношение Беллмана:

$$V_k(S) = \max_{u \in U(S)} \left\{ \sum_{\omega} P_k(\omega) \cdot V_{k+1}(f(S, u, \omega)) \right\}$$

Граничное условие (терминальная функция):

$$V_{N+1}(S) = x_1 + x_2 + x_3 + c$$

где $N = 3$ - количество этапов.

Описание алгоритма решения

Алгоритм состоит из трёх основных шагов:

Шаг 1. Генерация достижимых состояний (прямой проход для построения пространства состояний):

1. Начинаем с начального состояния S_0 на этапе 1
2. Для каждого этапа генерируем все состояния следующего этапа путём перебора:
   - Всех допустимых управлений из текущих состояний
   - Всех возможных случайных событий
3. Результат: множества достижимых состояний для этапов 1, 2 и 3

Шаг 2. Обратный проход (вычисление функции Беллмана):

Алгоритм выполняется от последнего этапа к первому:

1. Этап 3 (терминальный): Для каждого достижимого состояния S и каждого допустимого управления u вычисляем ожидаемую терминальную стоимость и выбираем оптимальное управление.
2. Этап 2: Используя значения $V_3(S)$, вычисленные на предыдущем шаге, определяем $V_2(S)$ для всех достижимых состояний.
3. Этап 1: Аналогично определяем $V_1(S_0)$ для начального состояния.

Шаг 3. Прямой проход (симуляция сценариев):

После завершения обратного прохода выполняется прямой проход для демонстрации оптимальной политики:

1. Начиная с начального состояния S_0, применяем оптимальное управление $u_1^* = \pi_1(S_0)$
2. Для демонстрации симулируем конкретные сценарии (последовательности событий)
3. В каждом сценарии на этапах 2 и 3 применяем оптимальное управление $\pi_k(S)$ для фактического состояния S

---

4. Обозначения и рекуррентное соотношение для конкретной задачи

Конкретные обозначения

Обозначение	Описание	Значение
x_1^0	Начальный объём ЦБ1	100 д.е.
x_2^0	Начальный объём ЦБ2	800 д.е.
x_3^0	Начальный объём депозитов	400 д.е.
c^0	Начальные свободные средства	600 д.е.
δ_1	Шаг управления для ЦБ1	25 д.е.
δ_2	Шаг управления для ЦБ2	200 д.е.
δ_3	Шаг управления для депозитов	100 д.е.
γ_1	Комиссия для ЦБ1	4%
γ_2	Комиссия для ЦБ2	7%
γ_3	Комиссия для депозитов	5%

Вероятности событий

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	0.60	0.30	0.10
2	0.30	0.20	0.50
3	0.40	0.40	0.20

Коэффициенты доходности

ЦБ1:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.20	1.05	0.80
2	1.40	1.05	0.60
3	1.15	1.05	0.70

ЦБ2:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.10	1.02	0.95
2	1.15	1.00	0.90
3	1.12	1.01	0.94

Депозиты:

Этап	Благоприятный	Нейтральный	Негативный
1	1.07	1.03	1.00
2	1.01	1.00	1.00
3	1.05	1.01	1.00

Рекуррентное соотношение для конкретной задачи

$$V_k(x_1, x_2, x_3, c) = \max_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} p_k^j \cdot V_{k+1}(S_{k+1}^j) \right\}$$

где $j = 1, 2, 3$ соответствует благоприятному, нейтральному и негативному сценариям.

Ограничения на управление: - $x_i + \Delta x_i \geq x_i^{\min}$ для всех i - $c - \text{cost}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \geq 0$

где стоимость управления:

$$\text{cost} = \sum_{i=1}^{3} \begin{cases} \Delta x_i \cdot (1 + \gamma_i), & \text{если } \Delta x_i > 0 \\ \Delta x_i, & \text{если } \Delta x_i \leq 0 \end{cases}$$

---

5. Псевдокод алгоритма

```
АЛГОРИТМ: Динамическое программирование для управления портфелем

ВХОД:
    S0 = (x1_0, x2_0, x3_0, c0)  // Начальное состояние
    P[k][j]                        // Вероятности событий
    R[k][i][j]                     // Коэффициенты доходности

ВЫХОД:
    V1(S0)                         // Оптимальная ожидаемая стоимость
    policy[k][S]                   // Оптимальная политика управления

// ===== ШАГ 1: ГЕНЕРАЦИЯ ДОСТИЖИМЫХ СОСТОЯНИЙ =====
```

```
// Генерируем все достижимые состояния ВПЕРЁД от начального
reachable_states[1] = {S0}  // Этап 1: только начальное состояние

ДЛЯ k ОТ 1 ДО 2:  // Для этапов 1–2 генерируем состояния для следующего этапа
    reachable_states[k+1] = ∅

    ДЛЯ КАЖДОГО S В reachable_states[k]:
        ДЛЯ КАЖДОГО допустимого управления u:
            S' = применить_управление(S, u)

            ДЛЯ j ОТ 1 ДО 3:  // Для каждого сценария
                S'' = применить_случайное_событие(S', k, j)
                reachable_states[k+1] = reachable_states[k+1] ∪ {округлить(S'')}

// ===== ШАГ 2: ОБРАТНЫЙ ПРОХОД =====
// Вычисляем функцию Беллмана от последнего этапа к первому
ДЛЯ k ОТ 3 ДО 1:
    V[k] = {}

    ДЛЯ КАЖДОГО S В reachable_states[k]:
        best_value = −∞
        best_action = NULL

        ДЛЯ КАЖДОГО допустимого управления u:
            S' = применить_управление(S, u)

            expected_value = 0
            ДЛЯ j ОТ 1 ДО 3:  // Для каждого сценария
                S'' = применить_случайное_событие(S', k, j)

                ЕСЛИ k == 3:  // Терминальный этап
                    value = терминальная_стоимость(S'')
                ИНАЧЕ:
                    value = V[k+1][округлить(S'')]  // Используем функцию Беллмана

                expected_value += P[k][j] * value

            ЕСЛИ expected_value > best_value:
                best_value = expected_value
                best_action = u

        V[k][S] = best_value
        policy[k][S] = best_action

// ===== ШАГ 3: ПРЯМОЙ ПРОХОД (симуляция сценариев) =====
// Оптимальная стратегия − это политика π(S), зависящая от состояния.
// Для демонстрации симулируем конкретные сценарии.

ДЛЯ КАЖДОЙ последовательности событий scenario[1..3]:
    S = S0
    ДЛЯ k ОТ 1 ДО 3:
        u* = policy[k][S]  // Оптимальное решение для ТЕКУЩЕГО состояния
        S = применить_управление(S, u*)
        S = применить_событие(S, k, scenario[k])  // Конкретное событие
```

```
    ВЫВЕСТИ "Сценарий: итоговая стоимость = сумма(S)"

ВЕРНУТЬ V[1][S0], policy
```

---

6. Ручное решение (пример расчёта)

Для демонстрации работы алгоритма выполним ручной расчёт для упрощённого примера. Рассмотрим задачу с одним активом (депозиты) и двумя этапами.

Упрощённая постановка

- Начальное состояние: Депозиты = 400 д.е., Свободные средства = 200 д.е.
- Шаг управления: 100 д.е.
- Комиссия при пополнении: 5%
- Минимальный объём: 100 д.е.

Вероятности и доходности (упрощённые):

Этап	Событие	Вероятность	Коэфф. доходности
1	Благопр.	0.6	1.07
1	Негатив.	0.4	1.00
2	Благопр.	0.5	1.05
2	Негатив.	0.5	1.00

Этап 2 (терминальный) — Обратный проход

Рассмотрим состояние после этапа 1: Деп = 428 д.е., Кэш = 200 д.е. (возникло при благоприятном исходе этапа 1 и управлении Δ = 0).

Допустимые управления: - Δ = -300 (снять 300): Деп = 128, Кэш = 500 → допустимо (Деп ≥ 100) - Δ = -200 (снять 200): Деп = 228, Кэш = 400 → допустимо - Δ = -100 (снять 100): Деп = 328, Кэш = 300 → допустимо - Δ = 0 (без изменений): Деп = 428, Кэш = 200 → допустимо - Δ = +100 (пополнить): стоимость = 100 × 1.05 = 105, Кэш = 200 - 105 = 95 ≥ 0 → допустимо

Вычисление ожидаемой терминальной стоимости:

Для Δ = 0 (Деп = 428, Кэш = 200):

$$E[V] = 0.5 \times (428 \times 1.05 + 200) + 0.5 \times (428 \times 1.00 + 200)$$

$$E[V] = 0.5 \times (449.4 + 200) + 0.5 \times (428 + 200)$$

$$E[V] = 0.5 \times 649.4 + 0.5 \times 628 = 324.7 + 314.0 = 638.7$$

Для Δ = -100 (Деп = 328, Кэш = 300):

$$E[V] = 0.5 \times (328 \times 1.05 + 300) + 0.5 \times (328 \times 1.00 + 300)$$

$$E[V] = 0.5 \times (344.4 + 300) + 0.5 \times (328 + 300)$$

$$E[V] = 0.5 \times 644.4 + 0.5 \times 628 = 322.2 + 314.0 = 636.2$$

Для Δ = +100 (Деп = 528, Кэш = 95):

$$E[V] = 0.5 \times (528 \times 1.05 + 95) + 0.5 \times (528 \times 1.00 + 95)$$

$$E[V] = 0.5 \times (554.4 + 95) + 0.5 \times (528 + 95)$$

$$E[V] = 0.5 \times 649.4 + 0.5 \times 623 = 324.7 + 311.5 = 636.2$$

Вывод для состояния (428, 200): Оптимальное управление Δ* = 0, $V_2(428, 200) = 638.7$

Этап 1 — Обратный проход

Начальное состояние: Деп = 400 д.е., Кэш = 200 д.е.

Допустимые управления: - Δ = -300: Деп = 100, Кэш = 500 → допустимо - Δ = -200: Деп = 200, Кэш = 400 → допустимо - Δ = -100: Деп = 300, Кэш = 300 → допустимо - Δ = 0: Деп = 400, Кэш = 200 → допустимо - Δ = +100: стоимость = 105, Деп = 500, Кэш = 95 → допустимо

Вычисление для Δ = 0 (Деп = 400, Кэш = 200):

После управления: (400, 200)

Возможные исходы после этапа 1: - Благопр. (p=0.6): Деп = 400 × 1.07 = 428, Кэш = 200 → состояние (428, 200) - Негатив. (p=0.4): Деп = 400 × 1.00 = 400, Кэш = 200 → состояние (400, 200)

Нужно вычислить V_2 для этих состояний (аналогично примеру выше): - $V_2(428, 200) = 0.5 \times (428 \times 1.05 + 200) + 0.5 \times (428 + 200) = 0.5 \times 649.4 + 0.5 \times 628 = 638.7$ - $V_2(400, 200) = 0.5 \times (400 \times 1.05 + 200) + 0.5 \times (400 + 200) = 0.5 \times 620 + 0.5 \times 600 = 610.0$

$$E[V_1|\Delta = 0] = 0.6 \times V_2(428, 200) + 0.4 \times V_2(400, 200)$$

$$E[V_1|\Delta = 0] = 0.6 \times 638.7 + 0.4 \times 610.0 = 383.2 + 244.0 = 627.2$$

Вычисление для Δ = +100 (Деп = 500, Кэш = 95):

После управления: (500, 95)

Возможные исходы после этапа 1: - Благопр. (p=0.6): Деп = 500 × 1.07 = 535, Кэш = 95 → состояние (535, 95) - Негатив. (p=0.4): Деп = 500 × 1.00 = 500, Кэш = 95 → состояние (500, 95)

Вычисляем V_2: - $V_2(535, 95) = 0.5 \times (535 \times 1.05 + 95) + 0.5 \times (535 + 95) = 0.5 \times 656.75 + 0.5 \times 630 = 643.4$ - $V_2(500, 95) = 0.5 \times (500 \times 1.05 + 95) + 0.5 \times (500 + 95) = 0.5 \times 620 + 0.5 \times 595 = 607.5$

$$E[V_1|\Delta = +100] = 0.6 \times 643.4 + 0.4 \times 607.5 = 386.0 + 243.0 = 629.0$$

Вычисление для Δ = -100 (Деп = 300, Кэш = 300):

После управления: (300, 300)

- Благопр. (p=0.6): Деп = 300 × 1.07 = 321, Кэш = 300
- Негатив. (p=0.4): Деп = 300 × 1.00 = 300, Кэш = 300

Вычисляем V_2: - $V_2(321, 300) = 0.5 \times (321 \times 1.05 + 300) + 0.5 \times (321 + 300) = 0.5 \times 637.05 + 0.5 \times 621 = 629.0$ - $V_2(300, 300) = 0.5 \times (300 \times 1.05 + 300) + 0.5 \times (300 + 300) = 0.5 \times 615 + 0.5 \times 600 = 607.5$

$$E[V_1|\Delta = -100] = 0.6 \times 629.0 + 0.4 \times 607.5 = 377.4 + 243.0 = 620.4$$

Итоговая таблица для этапа 1

Управление Δ	Деп после	Кэш после	E[V]
-100	300	300	620.4
0	400	200	627.2
+100	500	95	629.0

Оптимальное решение: $\Delta^* = +100$ (пополнить депозит на 100 д.е.)

Оптимальная ожидаемая стоимость: $V_1(400, 200) = 629.0$ д.е.

Вывод по ручному расчёту

Ручной расчёт демонстрирует: 1. Обратный проход: вычисление начинается с терминального этапа 2. Перебор управлений: для каждого состояния перебираются все допустимые управления 3. Критерий Байеса: выбирается управление с максимальным математическим ожиданием 4. Рекурсия: значения V_{k+1} используются для вычисления V_k

В полной задаче с тремя активами и тремя этапами количество состояний и управлений значительно больше (>700 000 состояний), поэтому необходима программная реализация.

---

7. Демонстрационные примеры программы

Результаты выполнения программы

Обратный проход

Этап	Обработано состояний	Оценено действий
3	734 501	211 056 551
2	990	289 784
1	1	330
Всего	735 492	211 346 665

Примечание: Состояния генерируются прямым проходом от начального состояния, что гарантирует корректность алгоритма

Оптимальное решение на этапе 1 (из начального состояния)

- Начальное состояние: ЦБ1 = 100, ЦБ2 = 800, Деп = 400, Кэш = 600
- Ожидаемая стоимость портфеля (из функции Беллмана): 2036.18 д.е.
- Оптимальное решение:
  - Купить ЦБ1 на 50 д.е.
  - Купить ЦБ2 на 200 д.е.
  - Пополнить депозиты на 300 д.е.
- Состояние после решения: ЦБ1 = 150, ЦБ2 = 1000, Деп = 700, Кэш = 19

Возможные исходы после этапа 1:

Сценарий	Вероятность	ЦБ1	ЦБ2	Депозиты	Кэш	Итого
Благоприятный	60%	180	1100	749	19	2048
Нейтральный	30%	157.5	1020	721	19	1917.5
Негативный	10%	120	950	700	19	1789

Прямой проход - Симуляция конкретных сценариев   Ниже представлены траектории для конкретных последовательностей событий с оптимальными решениями для фактических состояний:

Сценарий	Вероятность	Итоговая стоимость	Доходность
Все благоприятные	7.20%	2458.91 д.е.	+29.42%
Все негативные	1.00%	1608.10 д.е.	-15.36%
Все нейтральные	2.40%	1940.80 д.е.	+2.15%
Благопр.-Негатив.-Благопр.	12.00%	2069.45 д.е.	+8.92%
Негатив.-Благопр.-Нейтр.	1.20%	1977.64 д.е.	+4.09%

Пример траектории “Все благоприятные”:

Этап	Состояние (ЦБ1, ЦБ2, Деп, Кэш)	Решение	Событие
1	(100, 800, 400, 600)	Δ ЦБ1=+50, Δ ЦБ2=+200, Δ Деп=+300	Благоприятный
2	(180, 1100, 749, 19)	Δ ЦБ1=-100, Δ ЦБ2=0, Δ Деп=0	Благоприятный
3	(112, 1265, 756.49, 119)	Без изменений	Благоприятный
Итого			2458.91 д.е.

---

8. Итоговые результаты

Оптимальная стратегия управления

Этап 1 (детерминированное решение из начального состояния):

Действие
Купить ЦБ1 на 50 д.е., купить ЦБ2 на 200 д.е., пополнить депозиты на 300 д.е.

Этапы 2-3: Решения зависят от фактического состояния портфеля после реализации случайных событий. Конкретные решения для различных сценариев представлены в разделе “Симуляция конкретных сценариев”.

Финансовые показатели

Показатель	Значение
Начальная стоимость портфеля	1 900.00 д.е.
Ожидаемая стоимость портфеля	2 036.18 д.е.
Ожидаемая прибыль	136.18 д.е.
Ожидаемая доходность	7.17%

Примечание: Ожидаемая стоимость 2036.18 д.е. вычислена из функции Беллмана $V_1(S_0)$ и учитывает оптимальные решения во всех возможных состояниях на всех этапах.

Интерпретация результатов

1. Этап 1: Умеренно-консервативная стратегия - основной акцент на депозиты (+300 д.е.) с умеренным увеличением позиций в ценных бумагах. Высокая вероятность благоприятного исхода на этапе 1 (60%) компенсируется высокой вероятностью негативного исхода на этапе 2 (50%).
2. Этапы 2-3: Оптимальные решения адаптируются к фактическому состоянию портфеля. При благоприятных исходах — частичная продажа ЦБ1 для фиксации прибыли. Политика учитывает:
   - Текущие объёмы активов после реализации случайных событий
   - Вероятности событий на оставшихся этапах
   - Комиссии брокеров и ограничения на минимальные объёмы

Диапазон возможных исходов

Сценарий	Итоговая стоимость	Доходность
Лучший (все благоприятные)	2458.91 д.е.	+29.42%
Ожидаемый (средневзвешенный)	2036.18 д.е.	+7.17%
Худший (все негативные)	1608.10 д.е.	-15.36%

---

9. Заключение

Что сделано

1. Разработана математическая модель задачи оптимального управления инвестиционным портфелем как задачи динамического программирования
2. Реализован алгоритм решения с использованием рекуррентного соотношения Беллмана и критерия Байеса (максимизация математического ожидания)
3. Программа выполняет обратный проход для вычисления функции ценности и прямой проход с симуляцией конкретных сценариев
4. Получена оптимальная стратегия управления портфелем с ожидаемой доходностью 7.17% за три периода

Методологические особенности

Важно: В задачах стохастического динамического программирования оптимальная стратегия — это политика π(S), а не фиксированная последовательность действий. Решение на каждом этапе зависит от фактического состояния системы после реализации случайных событий

Генерация достижимых состояний: Алгоритм использует прямую генерацию достижимых состояний от начального состояния. Это гарантирует, что каждое состояние в обратном проходе корректно вычислено

Прямой проход демонстрирует стратегию через симуляцию конкретных сценариев (последовательностей событий), а не через усреднённые состояния, что обеспечивает корректность интерпретации результатов

Чему удалось научиться

1. Формализация задачи ДП: определение состояний, управлений, функции перехода и критерия оптимальности для задач со случайными факторами
2. Применение критерия Байеса: использование математического ожидания для принятия решений в условиях неопределённости
3. Реализация алгоритма Беллмана: программная реализация обратного и прямого проходов с учётом большого пространства состояний
4. Корректная интерпретация: понимание того, что оптимальная стратегия в стохастической задаче — это политика, зависящая от состояния, а не детерминированная последовательность действий