# Felieton o Długości i Wybrzeżu

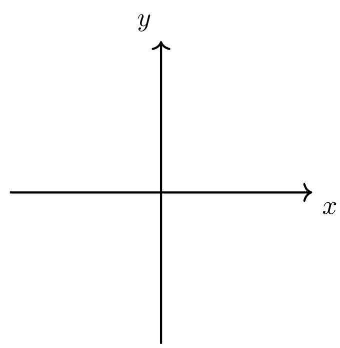
FoxGhost

## Wstęp

Jak długa jest linia? Jak ją można zmierzyć, jak to zrobić, gdy jest to odcinek? Co zrobić, gdy mamy do czynienie z krzywą? Czy jeżeli linia jest ograniczona, to czy może mieć nieograniczoną długość? I gdzie w tym wszystkim są fraktale?

## 1 Plan działania

Będziemy działać w typowy sposób, zaczniemy od najprostszych problemów i idąc dalej będziemy komplikować sprawę coraz bardziej. By ułatwi swoja spraw będziemy działać na paszczyźnie $\mathbb{R}^2$ czy inaczej mówiąc, w układzie współrzędnych.




## Odcinki i łamane

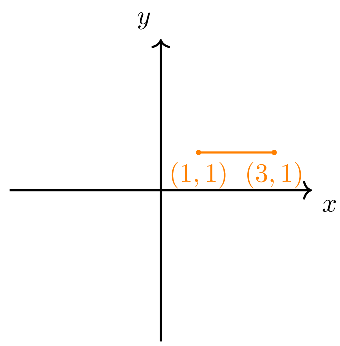
Najprostsza sytuacja, to odcinek równoległy, do którejś z osi współrzędnych. Sprowadza się on do działania na osi współrzędnych. Od końca odcinka odejmujemy początek. Jeśli nie chcemy się martwić o to, co jest początkiem, a co końcem możemy całość obłożyć modułem. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y$ mamy

$$|x - y| = |y - x|$$

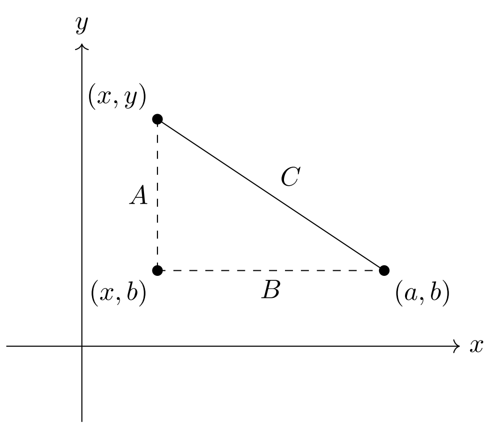
.


W układzie współrzędnych postępujemy analogicznie, ponieważ odcinek jest równoległy do osi, to zmienia się tylko jedna z współrzędnych. Odejmujemy więc "tą drugą" na moduł i mamy długość odcinka.

Biorąc nasz przykład mamy $3 - 1 = 2$.




Pierwsze trudności mogą się pojawić, gdy odcinek leży pod innym kątem. W tym miejscu uratować na może jednak nieżyjący od dwóch tysięcy lat (o ile istniejący) grek.



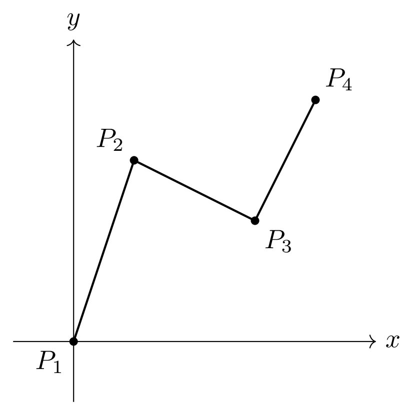

Chcemy, policzyć długość odcinka oznaczoną przez $C$ o końcach w punktach $(x, y)$ i $(a, b)$. By to zrobić dorysowujemy, odcinki o długościach $A$ i $B$ by powstał trójkąt prostokątny. I byje jego boki, były prostopadłe do odpowiednich ośi. Przypominamy sobie takie coś

$$A^2 + B^2 = C^2$$

i korzystamy z wiedzy którą już mamy $A = y - b$ i $B = (a - x)$ i dostajemy, że

$$C = \sqrt{(y - b)^2 + (a - x)^2}$$

Jest to znany nam z szkoły wzór na odległość miedzy dwoma punktami czyli długość odcinka łączącego owe punkty.
To wyczerpuje temat długości odcinka. Przejdźmy do łamanej, czym ona jest? To linia złożona z kilku odcinków w taki sposób, że koniec n-tego odcinka jest początkiem pierwszego. Takie punkty nazywamy wierzchołkami i będziemy je dalej oznaczać przez $P_k$ gdzie $k \in \mathbb{N}$. Jeśli odcinki w łamanej mają punkt wspólny to jest on tylko jeden.




Jak policzyć jej długość? Zastosujemy idea dziel i rząd. Dzielimy ją na odcinki, obliczamy ich długość, sumujemy długości wszystkich odcinki. Mając łamaną o $n+1$ wierzchołkach i oznaczając długość odcinka $AB$ jako $|AB|$ dostajemy, że długość łamanej jako

$$|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + ... + |P_{n-1}P_n|$$

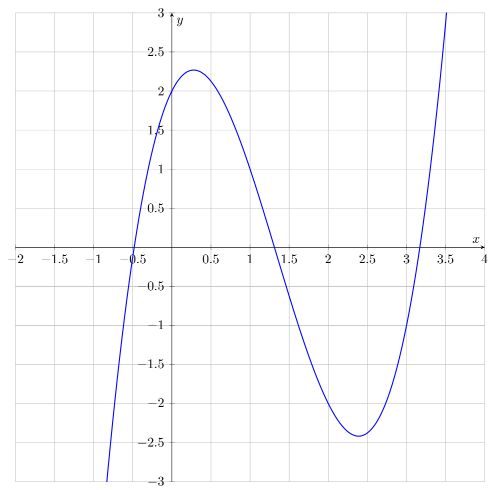
Pisanie jednak takich sum nie zbyt przyjemne więc przyjęło się notacje, która to ułatwia.

$$\sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}P_k| = |P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + ... + |P_{n-1}P_n|$$

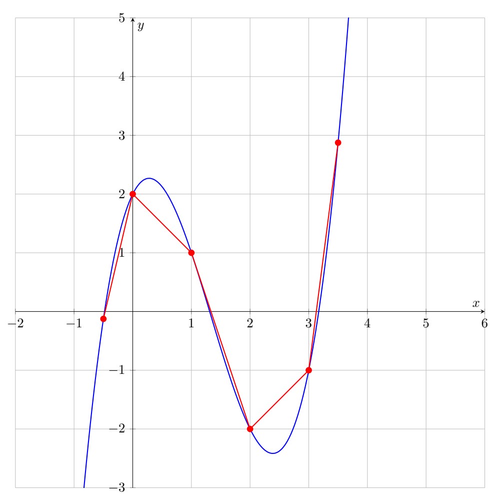
Znak $\Sigma$ oznacza, że sumujemy, dolny indenks mówi nam od jakiego $k$ zaczynamy, górny mówi nam o tym, na jakim $k$ kończymy sumować. Za sumą mamy to co dodajemy.

# Krzywe

Tu sprawy zaczynają się komplikować. Pamiętam praktykę z lat szkolnych gdy by zmierzyć wisłe brało się sznurek, przykładało na mapę Wisły, zaznaczało się długość, mierzyło ową odległość z linijką i otrzymywało się odpowiedz.




Nie zawsze jednak użycie sznurka wchodzi w grę, natomiast znamy już inny obiekt, który niczym sznurek będziemy mogli dopasować do wykresu krzywej. Zobaczmy to pierw graficznie, przybliżymy fragment krzywej dla argumentów od $(-0.5)$ do $(3.5)$.




Zauważmy, że im krótsze odcinki dobieramy tym lepiej przybliżają naszą krzywą.


No dobra. Mamy więc pewną strategie działania. Do naszej krzywej dopasowujemy łamaną, w taki sposób by wierzchołki leżały na krzywej, liczymy długość łamanej i mamy jakieś przybliżenie.
Ale czy możemy policzyć dokładnie jak długa jest ta krzywa? Tak! Jeżeli będziemy brać kolejne łamane, które będą mieć coraz więcej coraz krótszych odcinków, to nasza łamana pokryje się coraz lepiej z krzywą.
Jak dobrać takie łamane, a właściwie ciąg takich łamanych? Ważne aby długość najdłuższych odcinki w naszych łamanych zbliżała sie do zera.
Ciąg takich łamanych, będzie coraz lepiej i lepiej przybliżał nam krzywą, a w tak zwanej granicy się z nią pokryje. Granica ciągu $a_n$ zapisywana jako

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

jest formalnym matematycznym narzędziem do badania analogicznych sytuacji. Poniekąd odpowiada ona na pytanie "Co się dzieje z ciągiem, gdy jego wyrazy zmierzają do nieskończoności?". Zainteresowanych odsyłam do niezliczonych książek i materiałów z analizy matematycznej, która w całości jest oparta na tym koncepcie.
Długość krzywej L możemy wyraz z urzyciem granicy możemy zatem zapisać jako

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}P_k|$$

Gdzie, w każdym kroku zliczamy długość kolejnych krzywych w naszym ciągu aproksymacyjnym. Granica ciągu zawsze istnieje w $\bar{\mathbb{R}}$, gdyż ten ciąg jest monotoniczny, może ona jednak być liczbą rzeczywistą lub $\infty$. Ten wzór, będzie istotą naszych dalszych rozważań.

# Przypadek, w którym wszystko jest piękne.

Ten akapit kieruje do osób, które miały doczynienia z analizą matematyczną. Jeśli jednak nie jesteś tą osobą wystarczy, że zapamiętasz, że jeżeli krzywa jest gładka, to długość krzywej jest skończona i da się ją wyrazić przyjemniejszym wzorem niż podana wcześniej granica.
Wyprowadzimy wzór na długość krzywej.
Weźmy funkcje $f$, które jest $C^1$ i której wykres na przedzielę $[a, b]$ jest krzywą której długość chcemy policzyć. Będziemy ją przybliżać łamanymi na przedziale $[a, b]$.
Wierzchołki $P_i$ leża na wykresie funkcji więc są one postaci $(x, f(x))$. Stosując wzór na długość odcinka dostajemy

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Z twierdzenia o własności średniej Lagrange (które jest super, ale o nim kiedyś indziej) na przedziele $[x_{i-1}, x_i]$ mamy takie $\dot{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takie, że

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\dot{x})(x_{i-1} - x_i)$$

Dokonując dalszych przekształceń dostajemy

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(\dot{x})^2(x_{i-1} - x_i)^2}$$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(\dot{x})^2} =$$

. Zatem

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + f'(\dot{x})^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Ta da! Dodatkowo $f'$ jest ciagła, więc przyjmuje swoje kresy na zwartym przedziale $[a, b]$ zatem

$$L \leq (b - a) \max_{x\in[a,b]} f'(x) < \infty$$

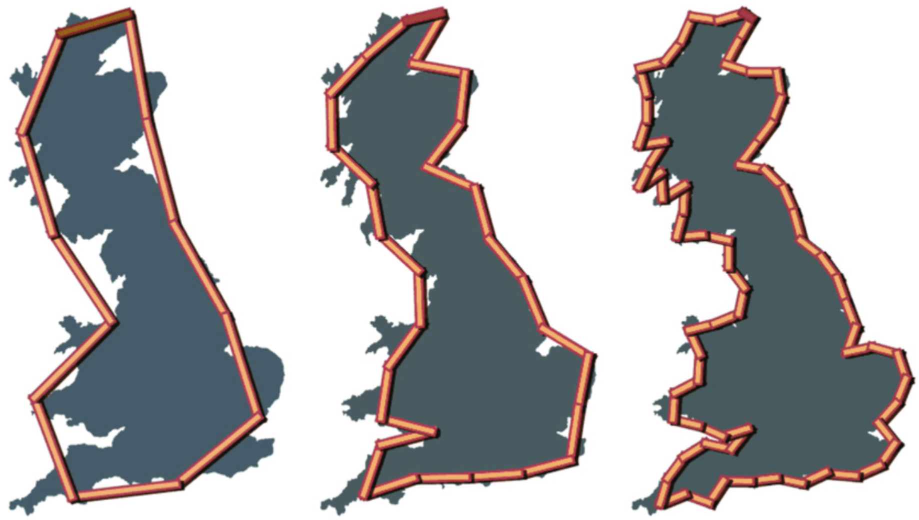
Widzimy, już jednak że potrzebowaliśmy aż by $f$ była $C^1$. Jak się okaże, że jest to naprawdę istotnie.

# Problem wybrzeża

Nie wszystkie krzywe są jednak gładkie. W latach 50-siątych ubiegłego stulecia Lewis Fry Richardson odkrył, że różne kraje mają notują drastycznie różne długości w wybrzeży. Badając ten fakt doszedł do następujących wniosków. Próbując zmierzyć długość wybrzeża np. wysp brytyjskich, okaże się, że otrzymana przez nas długość będzie rosnąc w zależności od użytej przez nas jednoski pomiaru!

Mówiąc bardziej matematycznie, jeżeli będziemy przybliżać linie wybrzeża łamaną złożoną z odcinków o długości $l$, to ze zmniejszaniem $l$ długość wybrzeża $d$, będzie rosnąć. To jeszcze nie jest martwiące, ponieważ podobny efekt zachodzi, gdy przybliżamy tak krzywą regularną. Różnica polega na tym, że gdy

$$l \to 0, \text{ to } d \to \infty.$$



To dość zaskakujące, że ograniczona linia, może mieć nieskończona długość. Jest to, jednak własność nierozerwanie związana z fraktalami, a konkretnie z wymiarem Hausdorffa.

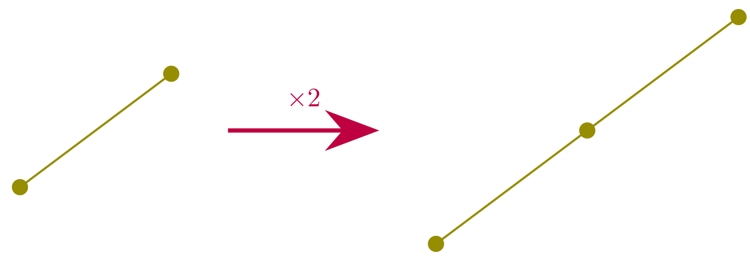
## Wymiar Hausdorffa

W tym miejscu artykuł może stać się trudniejszy, a zaraz wręcz formalny co wynika z istoty zagadnienia jakim są fraktale, natomiast zachęcam do spróbowania się też z tą tematyką.

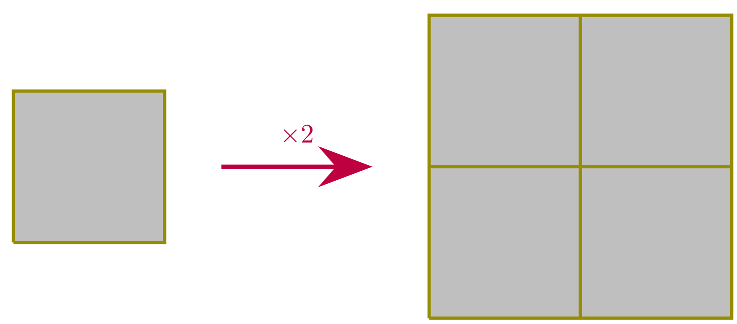
Zaczniemy od zbudowania intuicji.

Rozważmy $F$ będące podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Zastanówmy się jakie własności powinna spełniać liczba $s$ będąca wymiarem $F$. Na pewno chcemy, aby $s$ było nie większe niż wymiar przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Chcemy również, aby wymiar $F$ w przypadku, gdy jest to odcinek, kwadrat, sześcian był równy odpowiednio jeden, dwa i trzy. Poczyńmy następujące obserwacje:

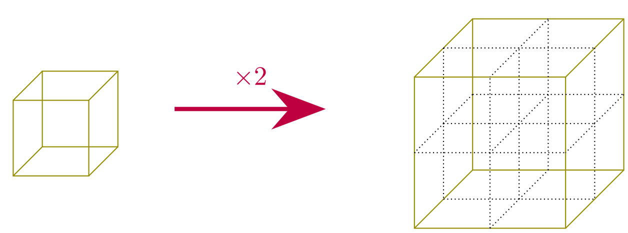
Gdy zwiększmy odcinek dwa razy, jego długość wzrośnie dwa razy.




Gdy zwiększmy kwadrat dwa razy (co rozumiemy jako zwiększenie długości każdego boku), jego pole wzrośnie cztery razy.




Gdy zwiększmy sześcian dwa razy, jego pole wzrośnie osiem razy.




Widzimy tu zależność, która jest związana z rodziną $s$ wymiarowych miar Lebesgue. Zwiększając $F$ dwuktornie, zwięszkamy $s$-wymiarowa miarę Lebesgue $2^s$ razy.
Rozpatrzmy sytułację, gdyby mierzymy $s_0$-wymiarową miarą obiekt $s$-wymiarowy.

- Gdy $s < s_0$ wtedy sprowadza się to do pytania „jakie jest pole odcinka?", gdzie naturalną odpowiedzią jest zero.
- Gdy $s > s_0$ rozważmy analogiczne pytanie „jaka jest długość kwadratu?", (`intuicyjnie i nieformalnie!`) przyjmiemy, że wynosi ona $\infty$.
- Jak $s = s_0$, to $s_0$-wymiarową miarą $F$ będzie liczbą z przedziału $[0, \infty]$, gdzie nieskończoność pojawi się tylko dla podzbiorów nieograniczonych.

W tym momencie, mamy już prawie cała potrzebną intuicję do wprowadzenia formalnej definicji wymiaru Hausdorffa.
Zobaczmy, ponownie na przykład z wybrzeżem. Tam okazuje, się że jego wymiar Hausdorffa powinien być większy niż jeden bo długość tej krzywej to $\infty$ ale mniejszy niż dwa bo jej pole to dalej zero. Ten przykład pokazuje nam jeszcze, że zamiast zwiększać figurę, możemy zmniejszać „skale", w jakiej go mierzymy.

## Formalna definicja

Średnicą niepustego zbioru $U$ przestrzeni metrycznej nazywamy liczbę

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

Powiemy, że $\{U_i\}_i \in \mathbb{N}$ jest $\delta$-pokryciem $F$ gdy $\forall_i |U_i| \leq \delta$ oraz $F \subset \bigcup_i U_i$.

Niech $F$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i niech $s \in [0, \infty)$, dla każdego $\delta > 0$ definiujemy

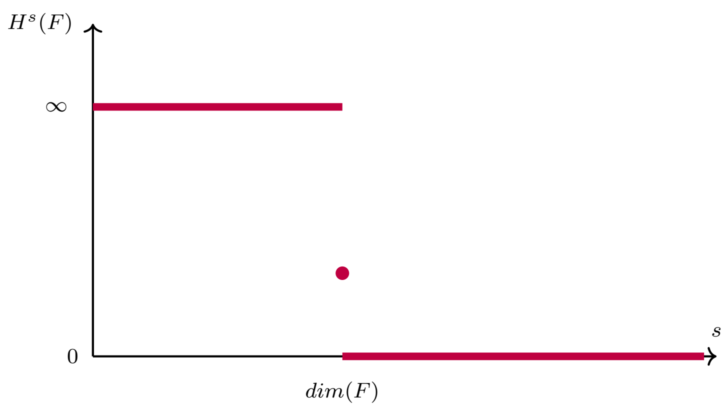
$$H^s_\delta(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{jest } \delta\text{-pokryciem } F\}$$

Biorąc coraz mniejsze $\delta$, bierzemy infimum po coraz mniejszym zbiorze, zatem $H^s_\delta(F)$ rośnie. Definiujemy $s$-wymiarową miarę Hausdorffa

$$H^s(F) = \lim_{\delta\to 0} H^s_\delta(F)$$

Z definicji $H^s_\delta(F)$ dla ustalonego $F$ i $s < t$ mamy

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^s |U_i|^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s.$$




Rozważmy funkcje $[0, \infty) \ni s \to H^s(F)$. Widzimy, że istnieje dokładnie, jednak wartość krytyczna mająca szanse być różna od 0 lub $\infty$. Wymiar Hausdorffa zbioru $F$ definiujemy jako tą wartość krytyczna, tzn.

$$dim(F) = \inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}$$

`Uwaga! Istnieją inne definicje wymiaru fraktalnego.`

## Źrodła

Kenneth Falconer *Fractal Geometry*
https://www.math.us.edu.pl/pgladki/faq/node84.html