



# به نام خدا

دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

---

## تمرین شماره ۲

بخش کتبی

مدرسین:

دکتر فدائی

دکتر یعقوبزاده

نگارش:

فاطمه محمدی 810199489

بخش کتبی

3..... Bayes' Nets

3..... سوال اول

3..... الف)

3..... ب)

3..... ج)

4..... د)

7..... HMM

7..... سوال اول

7..... الف)

7..... ب)

9..... ج)

10..... د)

## Bayes' Nets

### سوال اول

(الف)

Step 1: Joining factor

O	W	P (O, W)
+	+	0.45
+	-	0.05
-	+	0.1
-	-	0.4

Step 2: Marginalization:

W	P(W)
+	0.55
-	0.45

(ب)

$$\begin{aligned}
 P(+o, -w, +f, -r, +a) &= P(+o) P(-w|+o) P(+f|+o, -w) P(-r|+o, -w, +f) P(+a|+o, -w, +f, -r) \\
 &= P(+o) P(-w|+o) P(+f|+o, -w) P(-r) P(+a|+f, -r) \\
 &= 0.5 * 0.1 * 0.6 * 0.8 * 0.7 = 0.0168
 \end{aligned}$$

(ج)

1. درصورت دانستن F، احتمال A از O مستقل است. (فرض شده تصادف کردن در جاده، همان تصادف خوردو باشد).  
 درست؛ هر نود به شرط دانستن والدانش، از دیگر نودهای غیر نوادگانش مستقل میشود. در اینجا نیز F والد A است و O نیز جز نوادگان A نمیباشد.  
 همچنین درصورت محاسبه مقادیر در میابیم:

$$\begin{aligned}
 P(A|F) &= P(A|F, O) \\
 P(O|F) &= P(O|F, A) \\
 P(A, O|F) &= P(A|F)P(O|F)
 \end{aligned}$$

2. احتمال F و R به شرط A مستقل اند.  
 نادرست؛ دو والد به شرط دانستن فرزند به یک دیگر وابسته میشوند.  
 همچنین درصورت محاسبه مقادیر در میابیم:

$$P(F|A) \neq P(F|A, R)$$

$$P(R|A) \neq P(R|A, F)$$

$$P(R, F|A) \neq P(R|A)P(F|A)$$

3. احتمال F به شرط دانستن W و O از A مستقل است.

نادرست؛ هر نود به شرط دانستن والدانش، از دیگر نود های غیر نوادگانش مستقل میشود. در اینجا W, O, والدین F هستند ولی A جز نوادگان F میباشد.

$$P(F|W, O) \neq P(F|A, W, O)$$

$$P(A|W, O) \neq P(A|F, W, O)$$

$$P(A, F|W, O) \neq P(A|W, O)P(F|W, O)$$

4. احتمال R از F مستقل است

درست؛ هیچ کدام جز نوادگان/والد های دیگری نیستند.  
همچنین در صورت محاسبه مقادیر در میابیم:

$$P(A) = P(A|F)$$

$$P(F) = P(F|A)$$

$$P(A, F) = P(A)P(F)$$

(د)

$$P(+o|-a) = ?$$

1. Select P (-a | F, R)

F	R	A	
+	+	-	0.1
+	-	-	0.3
-	+	-	0.6
-	-	-	0.7

2. Join P (-a | F, R) P(R) -> P (-a, R | F)

F	R	A	
+	+	-	0.02
+	-	-	0.24
-	+	-	0.12
-	-	-	0.56

3. Eliminate R -> P (-a | F)

F	A	
+	-	0.26
-	-	0.68

4. Join  $P(O)P(W|O) \rightarrow P(O, W)$

O	W	
+	+	0.45
+	-	0.05
-	+	0.1
-	-	0.4

5. Join  $P(O, W) P(F|O, W) \rightarrow P(O, F, W)$

O	W	F	
+	+	+	0.405
+	+	-	0.045
+	-	+	0.03
+	-	-	0.02
-	+	+	0.07
-	+	-	0.03
-	-	+	0.08
-	-	-	0.32

6. Eliminate W  $\rightarrow P(O, F)$

O	F	
+	+	0.435
+	-	0.065
-	+	0.15
-	-	0.35

7. Join  $P(-a | F) P(O, F) \rightarrow P(-a, O, F)$

O	F	A	
+	+	-	0.1131
+	-	-	0.034
-	+	-	0.0442
-	-	-	0.238

8. Eliminate F  $\rightarrow P(-a, O)$

O	A	
+	-	0.1471
-	-	0.2822

9. Normalize  $\rightarrow P(O, -a)$

O	A	
---	---	--

+	-	0.34265
-	-	0.65735

10. Select  $P(+o|-a)$

0.34265

- با توجه به اینکه مقدار عددی خواسته نشده است، روی صحت اعداد تاکید نشده است.
- بعضی از مراحل میتوانند جایجا شوند (مثلا مرحله 4 میتواند در ابتدا نیز انجام شود).

خلاصه:

$$P(+o|-a) = \text{normalize} \left( \sum_f \left( \left( \sum_w P(O)P(W|O) \right) P(F|O,W) \right) \left( \sum_r P(-a|F,R) P(R) \right) \right)$$

# HMM

## سوال اول

ترتیب index برای استتیت ها به صورت زیر است:

Hidden States:  $X = \{s=0, a=1, h=2, r=3\}$

Observations:  $Y = \{B=0, H=1, P=2, L=3\}$

(الف)

	from/to	s	a	h	r
A =	s	0.4	0.1	0	0.5
	a	0.4	0.4	0.2	0
	h	0	0.1	0.5	0.4
	r	0.2	0	0.2	0.6

	state/observation	B	H	P	L
B =	s	0.8	0	0	0.2
	a	0	1	0	0
	h	0	0.1	0.9	0
	r	0.2	0	0.1	0.7

$$\pi = \begin{matrix} s & a & h & r \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{matrix}$$

(ب)

$$P = (Y = B, B, L, H) = ?$$

step 1: B

$$\alpha_1(j) = \pi_j b_j(o_1), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\rightarrow \alpha_1(s) = P(s)P(B|s) = 0.25 * 0.8 = 0.2$$

$$\rightarrow \alpha_1(a) = P(a)P(B|a) = 0.25 * 0 = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1(h) = P(h)P(B|h) = 0.25 * 0 = 0$$

$$\rightarrow \alpha_1(r) = P(r)P(B|r) = 0.25 * 0.2 = 0.05$$

step 2: B

$$\alpha_2(j) = \sum_{i=1}^4 \alpha_1(i) a_{ij} b_j(o_3), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \alpha_2(s) &= \alpha_1(s)P(s|s)P(B|s) + \alpha_1(a)P(s|a)P(B|s) + \alpha_1(h)P(s|h)P(B|s) + \alpha_1(r)P(s|r)P(B|s) = 0.8 * (0.2 * 0.4 + 0 + 0 + 0.05 * 0.2) = 0.072 \\
\rightarrow \alpha_2(a) &= \alpha_1(s)P(a|s)P(L|a) + \alpha_1(a)P(a|a)P(L|a) + \alpha_1(h)P(a|h)P(L|a) + \alpha_1(r)P(a|r)P(L|a) = 0 \\
\rightarrow \alpha_2(h) &= \alpha_1(s)P(h|s)P(L|h) + \alpha_1(a)P(h|a)P(L|h) + \alpha_1(h)P(h|h)P(L|h) + \alpha_1(r)P(h|r)P(L|h) = 0 \\
\rightarrow \alpha_2(r) &= \alpha_1(s)P(r|s)P(B|r) + \alpha_1(a)P(r|a)P(B|r) + \alpha_1(h)P(r|h)P(B|r) + \alpha_1(r)P(r|r)P(B|r) = 0.2 * (0.2 * 0.5 + 0 + 0 + 0.05 * 0.6) = 0.026
\end{aligned}$$

step 3: L

$$\alpha_3(j) = \sum_{i=1}^4 \alpha_2(i) a_{ij} b_j(o_3), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \alpha_3(s) &= \alpha_2(s)P(s|s)P(L|s) + \alpha_2(a)P(s|a)P(L|s) + \alpha_2(h)P(s|h)P(L|s) + \alpha_2(r)P(s|r)P(L|s) = 0.2 * (0.072 * 0.4 + 0 + 0 + 0.026 * 0.2) = 0.0068 \\
\rightarrow \alpha_3(a) &= \alpha_2(s)P(a|s)P(L|a) + \alpha_2(a)P(a|a)P(L|a) + \alpha_2(h)P(a|h)P(L|a) + \alpha_2(r)P(a|r)P(L|a) = 0 \\
\rightarrow \alpha_3(h) &= \alpha_2(s)P(h|s)P(L|h) + \alpha_2(a)P(h|a)P(L|h) + \alpha_2(h)P(h|h)P(L|h) + \alpha_2(r)P(h|r)P(L|h) = 0 \\
\rightarrow \alpha_3(r) &= \alpha_2(s)P(r|s)P(L|r) + \alpha_2(a)P(r|a)P(L|r) + \alpha_2(h)P(r|h)P(L|r) + \alpha_2(r)P(r|r)P(L|r) = 0.7 * (0.072 * 0.5 + 0 + 0 + 0.026 * 0.6) = 0.03612
\end{aligned}$$

step 4: H

$$\alpha_4(j) = \sum_{i=1}^4 \alpha_3(i) a_{ij} b_j(o_4), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \alpha_4(s) &= \alpha_3(s)P(s|s)P(H|s) + \alpha_3(a)P(s|a)P(H|s) + \alpha_3(h)P(s|h)P(H|s) + \alpha_3(r)P(s|r)P(H|s) = 0 \\
\rightarrow \alpha_4(a) &= \alpha_3(s)P(a|s)P(H|a) + \alpha_3(a)P(a|a)P(H|a) + \alpha_3(h)P(a|h)P(H|a) + \alpha_3(r)P(a|r)P(H|a) = 1 * (0.0068 * 0.1 + 0 + 0 + 0) = 0.00068 \\
\rightarrow \alpha_4(h) &= \alpha_3(s)P(h|s)P(H|h) + \alpha_3(a)P(h|a)P(H|h) + \alpha_3(h)P(h|h)P(H|h) + \alpha_3(r)P(h|r)P(H|h) = 0.1 * (0 + 0 + 0 + 0.03612 * 0.2) = 0.0007224 \\
\rightarrow \alpha_4(r) &= \alpha_3(s)P(r|s)P(H|r) + \alpha_3(a)P(r|a)P(H|r) + \alpha_3(h)P(r|h)P(H|r) + \alpha_3(r)P(r|r)P(H|r) = 0
\end{aligned}$$

$$P(Y = B, B, L, H) = \sum_{i=1}^4 \alpha_4(i)$$

$$\rightarrow P(Y = B, B, L, H) = 0 + 0.00068 + 0.0007224 + 0 = \mathbf{0.0014024}.$$



$$P(X_2 = s | Y_{1:4} = B, B, L, H) = ?$$

$$answer = \max \left( \frac{\alpha_2(i) * \beta_2(i)}{p(o)} \right) \text{ for } i = s, a, h, r$$

*Forward Algorithm:* (با استفاده از قسمت "ب")

$$\alpha_2(s) = 0.072$$

*Backward Algorithm:*

step 1:

$$\beta_{T=4}(i) = 1, \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$\rightarrow \beta_4(s) = 1$$

$$\rightarrow \beta_4(a) = 1$$

$$\rightarrow \beta_4(h) = 1$$

$$\rightarrow \beta_4(r) = 1$$

step 2:

$$\beta_3(i) = \sum_{j=1}^4 a_{ij} b_j(o_4) \beta_4(j), \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$\rightarrow \beta_3(s) = P(s|s)P(H|s)\beta_4(s) + P(a|s)P(H|a)\beta_4(a) + P(h|s)P(H|h)\beta_4(h) + P(r|s)P(H|r)\beta_4(r) = (0.4 * 0 + 0.1 * 1 + 0 * 0.1 + 0.5 * 0) * 1 = 0.1$$

$$\rightarrow \beta_3(a) = P(s|a)P(H|s)\beta_4(s) + P(a|a)P(H|a)\beta_4(a) + P(h|a)P(H|h)\beta_4(h) + P(r|a)P(H|r)\beta_4(r) = (0.4 * 0 + 0.4 * 1 + 0.2 * 0.1 + 0 * 0) * 1 = 0.42$$

$$\rightarrow \beta_3(h) = P(s|h)P(H|s)\beta_4(s) + P(a|h)P(H|a)\beta_4(a) + P(h|h)P(H|h)\beta_4(h) + P(r|h)P(H|r)\beta_4(r) = (0 * 0 + 0.1 * 1 + 0.5 * 0.1 + 0.4 * 0) * 1 = 0.15$$

$$\rightarrow \beta_3(r) = P(s|r)P(H|s)\beta_4(s) + P(a|r)P(H|a)\beta_4(a) + P(h|r)P(H|h)\beta_4(h) + P(r|r)P(H|r)\beta_4(r) = (0.2 * 0 + 0 * 1 + 0.2 * 0.1 + 0.6 * 0) * 1 = 0.02$$

step 3:

$$\beta_2(i) = \sum_{j=1}^4 a_{ij} b_j(o_3) \beta_3(j), \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$\rightarrow \beta_2(s) = P(s|s)P(L|s)\beta_3(s) + P(a|s)P(L|a)\beta_3(a) + P(h|s)P(L|h)\beta_3(h) + P(r|s)P(L|r)\beta_3(r) = (0.4 * 0.2 * 0.1 + 0.1 * 0 * 0.42 + 0 * 0 * 0.15 + 0.5 * 0.7 * 0.02) = 0.015$$

$$\rightarrow \beta_2(a) = P(s|a)P(L|s)\beta_3(s) + P(a|a)P(L|a)\beta_3(a) + P(h|a)P(L|h)\beta_3(h) + P(r|a)P(L|r)\beta_3(r) = (0.4 * 0.2 * 0.1 + 0.4 * 0 * 0.42 + 0.2 * 0 * 0.15 + 0 * 0.7 * 0.02) = 0.015 = 0.008$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \beta_2(h) &= P(s|h)P(L|s)\beta_3(s) + P(a|h)P(L|a)\beta_3(a) + P(h|h)P(L|h)\beta_3(h) + \\ &P(r|h)P(L|r)\beta_3(r) = (0 * 0.2 * 0.1 + 0.1 * 0 * 0.42 + 0.5 * 0 * 0.15 + 0.4 * 0.7 * \\ &0.02) = 0.015 = 0.0056 \\ \rightarrow \beta_2(r) &= P(s|r)P(L|s)\beta_3(s) + P(a|r)P(L|a)\beta_3(a) + P(h|r)P(L|h)\beta_3(h) + \\ &P(r|r)P(L|r)\beta_3(r) = (0.2 * 0.2 * 0.1 + 0 * 0 * 0.42 + 0.2 * 0 * 0.15 + 0.6 * 0.7 * 0.02) = \\ &0.015 = 0.0124 \end{aligned}$$

step 4:

$$\text{answer} = \max\left(\frac{\alpha_2(i) * \beta_2(i)}{p(o)}\right) = \max\left(\frac{0.072 * 0.015}{0.0014024}, 0, 0, \frac{0.026 * 0.0124}{0.0014024}\right) = 0.7701083856$$

(د)

step 1: B

$$v(j) = \pi_j b_j(o_1), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$bt_1(j) = 0, \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v_1(s) &= P(s)P(B|s) = 0.25 * 0.8 = 0.2 \\ \rightarrow v_1(a) &= P(a)P(B|a) = 0.25 * 0 = 0 \\ \rightarrow v_1(h) &= P(h)P(B|h) = 0.25 * 0 = 0 \\ \rightarrow v_1(r) &= P(r)P(B|r) = 0.25 * 0.2 = 0.05 \end{aligned}$$

$$bt_1 = s$$

step 2: B

$$v_2(j) = \max\left(v_1(i)a_{ij}b_j(o_2)\right) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$bt_{2(j)} = \operatorname{argmax}(v_1 a_{ij} b_j(o_2)) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v_2(s) &= \max\{v_1(s)P(s|s)P(B|s), v_1(a)P(s|a)P(B|s), v_1(h)P(s|h)P(B|s), v_1 \\ &(r)P(s|r)P(B|s)\} = 0.8 * \max\{0.2 \times 0.4, 0, 0, 0.05 \times 0.2\} = 0.064 \\ \rightarrow v_2(a) &= \max\{v_1(s)P(a|s)P(L|a), v_1(a)P(a|a)P(L|a), v_1(h)P(a|h)P(L|a), v_1 \\ &(r)P(a|r)P(L|a)\} = 0 \\ \rightarrow v_2(h) &= \max\{v_1(s)P(h|s)P(L|h), v_1(a)P(h|a)P(L|h), v_1(h)P(h|h)P(L|h), v_1 \\ &(r)P(h|r)P(L|h)\} = 0 \\ \rightarrow v_2(r) &= \max\{v_1(s)P(r|s)P(B|r), v_1(a)P(r|a)P(B|r), v_1(h)P(r|h)P(B|r), v_1 \\ &(r)P(r|r)P(B|r)\} = 0.2 * \max\{0.2 \times 0.5, 0, 0, 0.05 \times 0.6\} = 0.02 \end{aligned}$$

$$bt_2 = s$$

step 3: L

$$v_3(j) = \max\left(v_2(i)a_{ij}b_j(o_3)\right) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), \quad 1 \leq j \leq 4$$

$bt_{3(j)} = \text{argmax}(v_2 a_{ij} b_j(o_3)) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), 1 \leq j \leq 4$

- $v_3(s) = \max\{v_2(s)P(s|s)P(L|s), v_2(a)P(s|a)P(L|s), v_2(h)P(s|h)P(L|s), v_2(r)P(s|r)P(L|s)\} = 0.2 \times \max\{0.064 \times 0.4, 0, 0, 0.02 \times 0.2\} = 0.00512$
- $v_3(a) = \max\{v_2(s)P(a|s)P(L|a), v_2(a)P(a|a)P(L|a), v_2(h)P(a|h)P(L|a), v_2(r)P(a|r)P(L|a)\} = 0$
- $v_3(h) = \max\{v_2(s)P(h|s)P(L|h), v_3(a)P(h|a)P(L|h), v_3(h)P(h|h)P(L|h), v_3(r)P(h|r)P(L|h)\} = 0$
- $v_3(r) = \max\{v_2(s)P(r|s)P(L|r), v_3(a)P(r|a)P(L|r), v_3(h)P(r|h)P(L|r), v_3(r)P(r|r)P(L|r)\} = 0.7 \times \max\{0.064 \times 0.5, 0, 0, 0.02 \times 0.6\} = 0.0224$

$bt_3 = r$

step 4: H

$v_3(j) = \max(v_3(i) a_{ij} b_j(o_4)) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), 1 \leq j \leq 4$

$bt_{3(j)} = \text{argmax}(v_3 a_{ij} b_j(o_4)) \text{ for } i \text{ in range}(1,4), 1 \leq j \leq 4$

- $v_4(s) = \max\{v_3(s)P(s|s)P(H|s), v_3(a)P(s|a)P(H|s), v_3(h)P(s|h)P(H|s), v_3(r)P(s|r)P(H|s)\} = 0$
- $v_4(a) = \max\{v_3(s)P(a|s)P(H|a), v_3(a)P(a|a)P(H|a), v_3(h)P(a|h)P(H|a), v_3(r)P(a|r)P(H|a)\} = 1 \times \max\{0.00512 \times 0.1, 0, 0, 0\} = 0.000512$
- $v_4(h) = \max\{v_3(s)P(h|s)P(H|h), v_3(a)P(h|a)P(H|h), v_3(h)P(h|h)P(H|h), v_3(r)P(h|r)P(H|h)\} = 0.1 \times \max\{0, 0, 0, 0.0224 \times 0.2\}$
- $v_4(r) = \max\{v_3(s)P(r|s)P(H|r), v_3(a)P(r|a)P(H|r), v_3(h)P(r|h)P(H|r), v_3(r)P(r|r)P(H|r)\} = 0$

$bt_4 = a$

Answer = {s, s, r, a} (قطعی نیست ولی بیشترین احتمال را دارد!)

$P(X = \{s, s, r, a\} | Y = \{B, B, L, H\}) = 0.000512$