新 生 手 册

八云的魔法书　出品

策划：小飞舞

校对：……　　排版：云与星与歌

作者（按作品先后为序）：

云与星与歌、食人妖怪、山舞银蛇、小飞舞、小麻雀

仓库链接：

……

更新时间：2022 年 10 月 31 日

目录
Contents

第一章　初等数学知识拾遗

Pre-knowledge of Advanced Mathematics

云与星与歌

前言

金秋已至，又一批新生踏入了大学校园。然而，无论是数学专业，还是非数理科，抑或是工农经管，甚至某些学校的文史哲类，都开设了高等数学课程。对很多新生来说，“高数”这个名字是地狱般的存在：极限、连续、可导等一系列概念把大家绕得团团转，不仅如此，反三角函数、归纳法、极坐标系等“高中老师讲过”的初等知识也是大家的薄弱之处。这里，我们为大家总结了一些初等数学中常用，却在中学阶段被遗漏的知识和方法，以供学习和参考。

第零节　凡例

记号	说明
$a \mid b$	a 整除 b，即 b/a 是整数
$\exists!$	存在且唯一
$\lfloor\cdots\rfloor$	下取整函数

第一节　三角函数知识补充

在高中阶段，我们已经学习了三角函数的相关知识。对大家来说，分析形如 $f(x) = A\sin(\omega x + b)$ 的函数的增减性并非难事，利用正弦公式和余弦公式解三角形（当然，包括其他与函数最值结合的阴间题目）也为大家所熟悉。然而，由于教学大纲的变化，许多重要的三角函数知识被删去，对三角

恒等变换的要求降低，这无疑给大家适应大学数学的学习带来了不少困难。下面，我们就来补充一些常用的三角函数知识。

（一）　和差化积与积化和差

我们熟知如下 cos 的两角和差公式

$$\cos(\delta+\theta)=\cos\delta\cos\theta-\sin\delta\sin\theta, \tag{1.1}$$

$$\cos(\delta-\theta)=\cos\delta\cos\theta+\sin\delta\sin\theta. \tag{1.2}$$

(1)(2) 两式相加后，我们在等式两边除以 2 之后得到

$$\cos\delta\cos\theta=\frac{1}{2}[\cos(\delta+\theta)+\cos(\delta-\theta)], \tag{1.3}$$

如果我们用 α,β 分别替换括号内的 $\delta+\theta,\delta-\theta$, 就得到

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \tag{1.4}$$

这就是积化和差与和差化积公式之一。用完全相同的方法，我们可以得出另外 6 个公式。限于篇幅，就不在此处一一列出了。

然而，我们不仅要知道公式本身，还得掌握它的用法。

例 1. *在 $\triangle ABC$ 中, 求证：* $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

证明. 这是三角形中一个经典的结论，利用它我们可以解决很多问题。

$$\begin{aligned}
&\sin A+\sin B+\sin C\\
=&\sin A+\sin B+\sin[\pi-(A+B)]\\
=&\sin A+\sin B+\sin(A+B)\\
=&2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\\
=&2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\\
=&2\sin\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\\
=&4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

例 2. 求证一个奇怪的等式：$\cos x=2\sin x(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\cdots)$.

证明. 据积化和差公式

$$2\sin nx\sin x=\cos(n+1)x-\cos(n-1)x.$$

所以

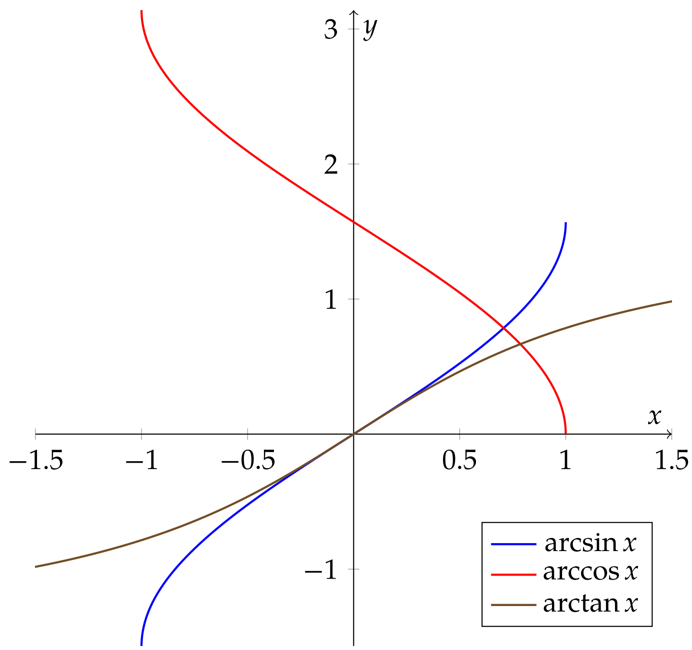
$$\begin{aligned}
\cos x&=(\cos x-\cos 3x)+(\cos 3x-\cos 5x)+(\cos 5x-\cos 7x)+\cdots\\
&=2\sin x\sin 2x+\sin x\sin 4x+\sin x\sin 6x+\cdots\\
&=2\sin x(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x+\cdots).
\end{aligned}$$

（二） 反三角函数

对于反三角函数，我们有定义如下表:

函数名	定义	定义域	值域
反正弦	若 $x=\sin y$, 则 $y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
反余弦	若 $x=\cos y$, 则 $y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反正切	若 $x=\tan y$, 则 $y=\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

反三角函数



事实上, 这里的值域实际上是指反三角函数的**主值**的取值范围。主值与自变量一一对应，仍然满足函数的定义。

下面我们给出一些关于反三角函数的基本恒等式 (其中所有 x 的取值须满足对应函数的定义域)。

$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad \arccos(\cos x) = x, \qquad \arctan(\tan x) = x,$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arccos x) = x, \qquad \tan(\arctan x) = x,$$
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x, \qquad \arctan(-x) = -\arctan x,$$
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

反三角函数最基本的作用，是在已知角的三角函数值时，拿来表示这个角（这在高中物理中偶尔会用到)。它身上也有许多奇妙的性质，譬如，它们的导函数居然可以用有理式（或有理式的二次根式）表示。

例 3. 求 $(\arctan x)'$.

解. 先把这个函数写出来（这不是废话吗)，替换其自变量，尝试把等号右边变得简单（换元是本题的关键）

$$f(\tan x) = x.$$

对两边求导，根据复合函数求导的法则[1]，有

$$[f(\tan x)]' = f'(\tan x)(1+\tan^2 x) = x' = 1,$$

所以

$$f'(\tan x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}.$$

把自变量还原为 x, 得到:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

这就是我们要求的结果。

上述变换的过程看起来有些不可思议。但实际上它用到了数学中的一个通法——换元（代换）。利用换元法，我们可以化繁为简，化不可能为可能。今后在求极限、积分的时候，也会反复运用到这个方法。换元法的基本思路可以总结为：**用简单的变量替换复杂的变量；尽量把复杂未知的式子化成简单的已知式子**（例如之后会求的 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 的各种变式。）

（三）　双曲函数与反双曲函数

我们定义双曲函数如下表:

函数名	定义	定义域	值域
双曲正弦	$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
双曲余弦	$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty)$
双曲正切	$\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$(-1,1)$

对双曲正弦，它有着与正弦完全类似的和差角公式（双曲余弦的和差角则略有不同）。特别地

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \tag{1.5}$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x, \tag{1.6}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x. \tag{1.7}$$

这些式子的证明都很简单。

反双曲函数的定义与反三角函数类似, 几何上, 将对应双曲函数的图像绕直线 $x=y$“对折”即可。

[1]这里用到了 $(\tan x)' = (\sin x/\cos x)' = 1/\cos^2 x = 1+\tan^2 x$

我们尝试求出反双曲正弦的表达式：由反函数的定义，我们有 $x = \sinh y$，即

$$x = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}.$$

令 $t = \mathrm{e}^y$，上式改写为

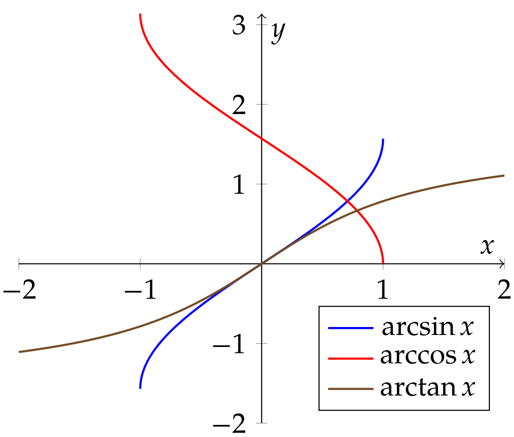
$$t^2 - 2xt - 1 = 0.$$

解之得 $t = x \pm \sqrt{x^2+1}$，考虑到 $t = \mathrm{e}^y > 0$，负值应舍去。故 $t = x + \sqrt{x^2+1}$.

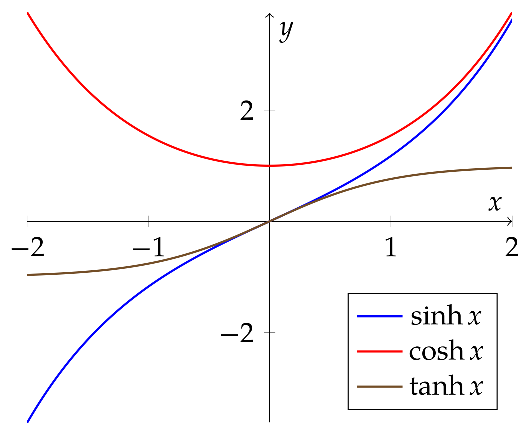
由于 $y = \ln t$，于是 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

剩余若干反双曲函数的表达式请自行推导。下面，我们给出反三角函数、双曲函数与反双曲函数的图像，试从中总结它们的性质。

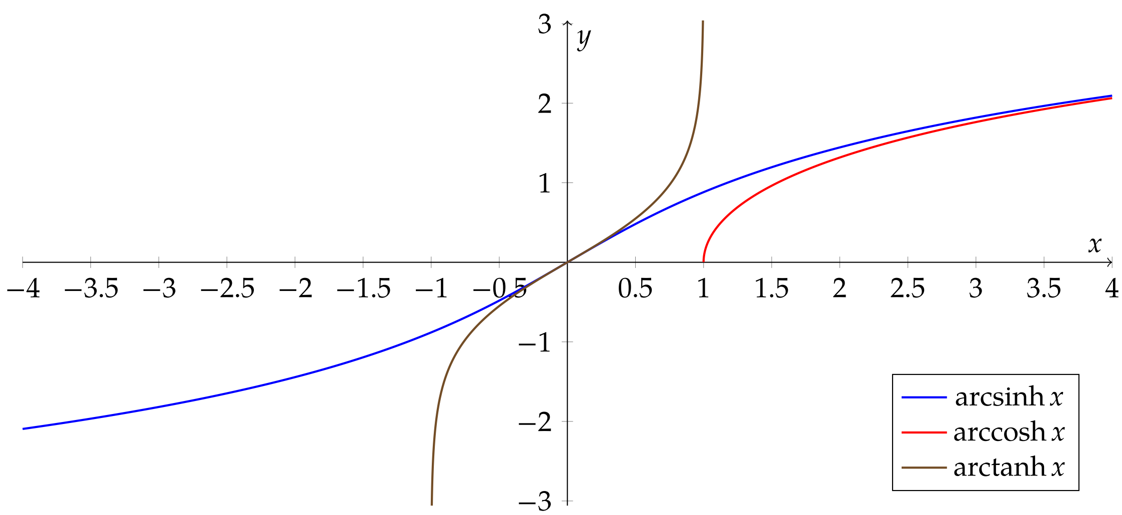
反三角函数



双曲函数



双曲函数



第二节　“充要条件”的理解

在部编版高中数学教材的必修一（旧版的选修 2-1）中，大家已经学习了简易的逻辑术语, 包括特称、全称量词，以及充分条件、必要条件与充分必要条件的定义。但实际上，大家只有在选择填空题中才会见到它们的身影（特别是几种“条件”）而很少在证明题中应用到它们。下面我们就通过一些例子来更加深入的理解这几种“条件”。

（一）　必要条件——自信的估计

我们知道 p 是 q 的必要条件可以用 $q \Rightarrow p$ 来表示，但仅有符号无法帮助我们很好地理解抽象的概念。举一个简单的例子: “幽幽子吃东西”是“幽幽子吃饱饭”的必要条件。因为**不（表示否定）**“吃东西”就一定**不可能（同样表示否定）**“吃饱饭”；由“幽幽子吃饱饭”这一事实，我们就一定可以得出“幽幽子吃东西”这一前提条件。（即 q:“幽幽子吃饱饭” $\Rightarrow p$:“幽幽子吃东西”）

从更“数学”一点的角度看，我们在高中会遇到这样一类导数题——已知函数满足一定的不等条件，求参数的取值范围。这时，“必要性探路”[2]往往是很常用的方法，但它有时候也会失效。

例 4. 当 $x \geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^x + ax^2 - x \geqslant \frac{1}{2}x^3 + 1$，求 a 的取值范围。

解. 本题是 2020 年高考全国一卷理科数学的导数大题，很明显，本题可以用分离参数的方法解出。但如果我们用必要性探路，会有什么后果呢?

记

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax^2 - x - \left(\frac{x^3}{2} + 1\right).$$

容易发现 $f(0) = 0$，那么必须有 $f'(0) \geqslant 0$，而 $f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1.$, 则 $f'(0) = 0$ 那么又必须有 $f''(0) \geqslant 0$, 而 $f''(x) = \mathrm{e}^x - 3x + 2a$，则 $a \geqslant -\frac{1}{2}$.

然而，这并非正确的答案。事实上，利用分离参数法，我们解得 a 的取值范围为 $\left[\frac{7-\mathrm{e}^2}{4}, +\infty\right)$，在 $x = 2$ 时取得最小值。这说明“便捷”的必要性探路并非万能。究其原因，必要条件是“被扩大的前提”。在它之中，仅有一部分能够推断出“结果” q，这就好比说“吃了东西的幽幽子不一定能吃饱”。

（二）　充分条件——不一定完备的前提

比起必要条件，充分条件理解起来似乎轻松一些。正如 $p \Rightarrow q$ 中的右箭头一样，它的定义符合我们一般的思维顺序——由因及果。需要注意的是，一个结果可以对应多种原因，因此，充分条件是不唯一的。

[2]先取某点的函数值解出参数的一个取值范围, 再证明这个取值范围是恒成立的

(三)　充要条件——终极目标

可以这么说：充要条件是数学中最精美的需要。一个命题被提出后，只有找到它的充要条件，才能说它得到了解决。

拆解充要条件的符号“⇔”，我们发现它由“⇐”“⇒”两部分组成。这看起来像是在说废话，实际上却蕴含了这么一种思想：如果你想证明两个命题等价，只需要证明由任意一方可以推出另外一方即可。还是像废话？我们来看一个实际的思路：如果 a, b 之间满足一定关系，证明 $a = b$ 不仅可以由等量关系推出，也可分别证明 $a \geqslant b, b \geqslant a$，从而得出 $a = b$.

例 5. 已知集合 $A = \{x \mid x = 2m - 1, m \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \mid x = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}\}$，求证：$A = B$.

证明. 一方面，若 $x \in A$，则当 $m = 2k$ 时,$x = 4k - 1$ 且 $k \in \mathbb{Z}$,
当 $m = 2k + 1$ 时，$x = 2(2k + 1) - 1 = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$, 从而 $x \in B$，即得 $A \subseteq B$.
另一方面，若 $x \in B$，则 $x = 4k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$.
当 $x = 4k - 1$ 时，$x = 2(2k) - 1$，令 $m = 2k \in \mathbb{Z}$，有 $x = 2m - 1 \in A$.
当 $x = 4k + 1 = 2(2k + 1) - 1$，令 $m = 2k + 1 \in \mathbb{Z}$，有 $x = 2m - 1 \in A$.
从而 $x \in A$，即得 $B \subseteq A$，综合以上两方面即得 $A = B$.

我们再用一个例子简单地介绍证明“p 是 q 的充要条件”的思路。

例 6. 已知 $a, m, n \in \mathbb{N}^*$，求证：$a^m - 1 \mid a^n - 1$ 的充要条件是 $m \mid n$.

证明. 充分性：由 $m \mid n$ 可设 $n = km(k \in \mathbb{Z})$，我们有

$$a^m - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}),$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{km-1}).$$

上式可由等比数列求和公式得到。又

$$\begin{aligned}
&(a - 1)\left(a + a^2 + \cdots + a^{km-1}\right) \\
&= 1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1} + a^m + \cdots + a^{2m} + \cdots + a^{km-1} \\
&= (a - 1)\left(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{(k-1)m}\right) \\
&= (a^m - 1)\left(1 + a^m + a^{2m} + \cdots + a^{(k-1)m}\right).
\end{aligned}$$

故 $a^m - 1 \mid a^n - 1$. 充分性得证

必要性：设 $a^m = t$，则 $a^n = (a^m)^{\frac{n}{m}} = t^{\frac{n}{m}}$. 由

$$t^{\frac{n}{m}} - 1 = (t - 1)\left(1 + t + t^2 + \cdots + t^{\frac{n}{m}-1}\right).$$

是整数且 $t-1 \mid t^{\frac{n}{m}}-1$ 可知 $\frac{n}{m}$ 是整数，由此 $m \mid n$ 得证.

综上所述，$a^m-1 \mid a^n-1$ 的充要条件是 $m \mid n$.

上面这个例子向我们展示了证明充要性的基本方式：分别证明充分性和必要性。很多情况下，某一方面的证明需要利用反证法，而且两个方面的证明思路互相提示。

第三节　常用方法——放缩、夹逼与归纳

（一）　放缩法

进入高等数学的学习之后，我们不会再像高中那样特意地证明一些不等式。但在证明某些命题，或者求极限的时候，仍需要证明不等式，这个时候放缩法的使用就显得尤为重要。这一节，我们会针对高等数学（数学分析）的学习需要，介绍一些常用的放缩技巧和思路。

放缩的常用工具

1. **与绝对值有关的不等式**

   关于绝对值，我们熟知有以下不等式：

$$||a|-|b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

   a,b 间取加号时，左边等号的成立条件是 a,b 异号，右边等号的成立条件是 a,b 同号。取减号是恰好相反。

   在之后证明收敛数列极限唯一、极限乘法规则和柯西审敛准则时，都会用到这一工具。

   例 7. 求证：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

   证明. 由已知，对于任意正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

   由绝对值不等式，当 $n>N$ 时，总有 $||a_n|-|a|| \leqslant |a_n-a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

   另外，对于任意 n 个数，上述不等式还有拓展：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

   取等条件为 $a_1 \sim a_n$ 全部同号。

2. **与三角函数有关的不等式**

我们可以通过几何方法证明:

$$\sin x < x < \tan x, \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

具体过程可以参照各类高数或数分教材。然而，在刚接触高数时，我们往往不需要用到这么精细的放缩。注意到正弦和余弦函数的绝对值均不大于 1，利用这一性质就可以解决很多问题了。

3. **与指对数有关的不等式**

我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. 事实上，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是递增的，证明过程如下:

证明. 由均值不等式,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right) < \left(\frac{1+n\cdot\frac{n+1}{n}}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

另外，我们还可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$，且数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是递减的。结合以上事实，我们得到:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

取对数后，我们得到一个很有用的结论:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad (n\in\mathbb{N}).$$

我们在高中时利用导数工具得到过这个结论，事实上，在正整数范围内，它可以仅由数列极限的知识得到。

4. **与阶乘有关的不等式**

阶乘有许多重要的性质，这里我们只介绍在不等关系方面的性质。

可以这么说，阶乘是比常数的指数更“大”的存在，见下面的例子。

例 8. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = 0$.

证明.

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{2\times2\times\cdots\times2}{1\times2\times\cdots\times n} < 2\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}.$$

余略。

例 9. 求证：对 $n \in \mathbb{N}$，$n! > \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

证明. 我们取数列 $a_n = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，则

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\mathrm{e}}, \tag{1.8}$$

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 < n(n-1) \cdot \cdots 2 \cdot a_1 < n(n-1) \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!. \tag{1.9}$$

证毕。

例 9 揭示了 n 的阶乘与 n 的 n 次幂之间的关系，它与重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 密切相关。事实上，我们有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

放缩的常用手段

许多时候，面对一些形式复杂的式子，我们一时想不到如何对其进行放缩。下面我们将用几个例子介绍放缩的常用手段。

1. 朝着可以化简的方向放缩

要证明某些累加式或累乘式的值在某个范围内，我们一般把舍弃某些项，把它们放缩成可以求和或求积的形式。

例 10. 求证：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \mathrm{e}$.

证明. 由 3.1.1.3 的最后一个结论，我们有 $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^k}(k = 1, 2, \cdots, n)$. 则

$$\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1.$$

从而 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < \mathrm{e}$.

上面的例子中，我们观察到待证式左边暗含等比数列，就想办法将其提取出来。恰好，取对数之后放缩可以把“1”消去，便完成了化简的工作。

2. 待定系数，先猜后证

某些不等式，特别是证明某式子大于或小于某个非 0 常数，（这在求极限时很常见）可以用待定系数的方法来进行放缩。

例 11. 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明. 下面我们将会用到 3.2 节会学到的夹逼定理——事实上，我们的目标是证明 $\sqrt[n]{n}-1$ 小于一个极限为 0 的数列。观察到 $\sqrt[n]{n}-1$ 的特点，我们发现移去 1 对原式取 n 次方后可以实现有效的化简。

令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$，则

$$n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2.$$

由此解得 $\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$，因此 $0<\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}$. 由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

关于这种技巧，在初等数学的范围内也有很多应用，例如用均值不等式、柯西不等式等解题时，利用取等条件限制，解出配凑的系数。类似的例子还有很多，限于篇幅，就不在此处赘述了。

总之，放缩法的技巧和工具五花八门。只有勤加练习，多积累有关知识，才能得心应手地应用。然而，我们也没有必要像高中时那样，为了应试，而刻意去寻找各种偏、怪的不等式，掌握常用且有用的那部分即可。

（二）　夹逼定理

在几乎所有高数教材中，我们都会看到这样一条定理：若数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 a，且对所有充分大的 n，有 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，则数列 $\{a_n\}$ 也收敛，且极限也为 a. 这就是有名的夹逼定理。

关于夹逼定理的证明，请参照各种教材。我们之所以在此特别提到夹逼定理，是因为其背后蕴含着一个重要思想——夹逼思想，即“从两边往中间靠”。事实上，这一思想贯穿我们的数学学习历程。

例 12. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $(-1,0)$，且对 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $4x-12\leqslant f(x)\leqslant 2x^2-8x+6$. 求 $f(x)$.

解. 这道题节选自 2021 年广东省中考数学卷 25 题，其关键一步就利用了夹逼思想。

当 $x=3$ 时，$4x-12=2x^2-8x+6=0$，则 $f(3)=0$，即 $f(x)=a(x+1)(x-3)=ax^2-2ax-3a$.

又 $4x-12\leqslant f(x)$, 则 $ax^2-(2a+4)x+12-3a\geqslant 0$，即

$$\Delta=(2a+4)^2-4a(12-3a)=16a^2-32a+16=0.$$

解得 $a=1$.

从而 $f(x)=x^2-2x-3$.

无论是初等的不等式问题，还是高等的求极限，夹逼思想都非常重要。其思路也类似于放缩的基本手段——用可直接求极限的式子，去“夹”出不那么容易直接求出极限的式子。总而言之，就是由未知联想已知，再由已知导出未知。下面的例子就是夹逼定理在求极限中的经典应用。

例 13. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解. 注意到

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1, \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1.$$

由夹逼定理即得 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

上面的例子也用到了 **??** 提到的放缩手段——朝着可以化简的方向放缩。

（三） 数学归纳法

在高中时，我们已经对数学归纳法有所了解，但并没有深入地研究其应用，并且仅局限于常见的第一数学归纳法。下面我们更深入地介绍一下数学归纳法的奇妙之用。

第一数学归纳法

第一数学归纳法，顾名思义，就是我们最常用的归纳法。其具体内容就不在此处展开，我们通过一个例子来帮助大家回忆一下它的使用。

例 14. 设 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$（$n$ 重根式），求证 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其极限。

解. a_n 满足递推关系：$a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.

注意到 $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>a_1, a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}>a_2$.

我们猜想，如果 $a_n>a_{n-1}$，那么

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+2}-\sqrt{a_{n-1}+2}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{a_n+2}+\sqrt{a_{n-1}+2}}>0.$$

从而 $a_{n+1}>a_n$，由数学归纳法可得 $\{a_n\}$ 单调递增。

同样由数学归纳法可以证得 $a_n<2$，因此 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，则 $\{a_n\}$ 收敛。设其极限为 a，在递推式两边取极限可以解得 $a=2$（负值舍去），从而 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

这个例子中，我们两次运用数学归纳法证明了很“显然”，却不方便用常规方法证明的结论，可见其作用强大。

第二数学归纳法

第二数学归纳法与第一数学归纳法类似，但却比它更强，其内容如下：

1. 前提：当 $n = m(m \in \mathbb{N})$ 时，结论成立；
2. 假设与归纳：假设 $n \leqslant k$（注意与第一数学归纳法比较）时结论成立，若由此推得 $n = k + 1$ 时结论也成立，则结论对 $n \geqslant m$ 总成立。

我们可以利用高中数学教材中多米诺骨牌的例子来理解：第一数学归纳法是“前一块骨牌倒下”推出“后一块骨牌倒下”，而第二数学归纳法是“前面所有的骨牌倒下”推出“后一块骨牌倒下”，它同样是合理的。

例 15. 【Chebyshev（切比雪夫）多项式】求证：$\cos n\theta, (n \in \mathbb{N})$ 可以表示为关于 $\cos\theta$ 的整系数多项式。

证明. 首先理解题干意思：我们要将 $\cos n\theta$ 的展开式写成 $a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos^2\theta + \cdots + a_n\cos^n\theta$ 的形式，其中 a_k 均为整数。

我们考虑积化和差公式（见 1.1 节），有 $2\cos k\theta\cos\theta = \cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta$. 显然 $n = 1, 2$ 时 $\cos n\theta, (n \in \mathbb{N})$ 均可以表示为关于 $\cos\theta$ 的整系数多项式[3]。假设 $n \leqslant k$ 时 $\cos n\theta$ 均可以表示为关于 $\cos\theta$ 的整系数多项式，则

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos k\theta\cos\theta - \cos(k-1)\theta.$$

是整系数多项式的减法运算，故 $\cos(k+1)\theta$ 仍为整系数多项式，由第二数学归纳法知结论成立。

仔细体会上面的证明过程，你会渐渐认识到数学归纳法的强大威力。

第四节 参数方程与坐标系补充

(一) 参数方程简介

平面直角坐标系上的参数方程，就是分别用参量 t 定义坐标分量 x, y，x, y 之间通过 t 形成某种关系（很多时候可以统一到一个方程里），并在坐标系上体现为曲线。简而言之，参数方程是曲线方程（函数图像）的一种形式。

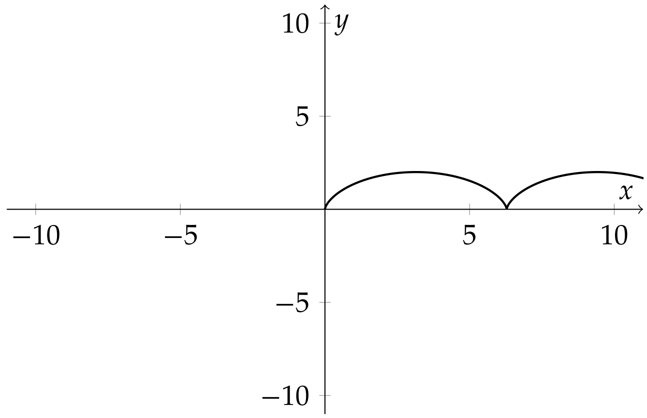
例 16. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 是圆的参数方程，可以化为圆的标准方程 $x^2 + y^2 = r^2$.

例 17. $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ 是椭圆的参数方程，可以化为椭圆的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

[3] $n = 2$ 时即二倍角公式。

例 18. 滚轮线是匀速直线运动和匀速圆周运动的叠加运动的轨迹。一个半径为 r 刚体圆形滚轮沿直线往前滚动 θ 角时，质心前进的距离是 $r\theta$，高度保持为 r 不变，其初始坐标记作 $(0,r)$. 设 $\theta=0$ 时轮沿上某点 P 接触地面，其坐标为 $(0,0)$. 则滚动 θ 角后，P 点的运动即质心匀速直线运动与 P 点相对质心匀速圆周运动的线性叠加，满足：$(x,y)=(r\theta,r)+(-r\sin\theta,-r\cos\theta)=(r(\theta-\sin\theta),r(1-\cos\theta))$. 这样就得出一个 x,y 关于参数 θ 的参数方程，称为滚轮线或摆线。

当 $r=1$ 时的摆线



事实上，并非所有参数方程都可以简单地消去参数，转化为关于 x,y 的方程。（如例 **??** 中的滚轮线）但它们仍可以进行求切线斜率等操作。

（二）　极坐标、柱坐标与球坐标

极坐标系

极坐标系由一个原点——极点，和以极点为端点的一条射线——极轴构成。与我们熟知的平面直角坐标系类似，极坐标系也包含两个坐标分量：与极点的距离——极径 ρ，以及与极轴正方向的夹角——极角 θ，其中 ρ 都只能取非负值，而 θ 可以取任意实数值，且每增加 2π，就相当于绕极点“转了一圈”。

容易发现，极坐标与直角坐标有转换关系如下：

$$\rho^2=x^2+y^2,\ \rho\cos\theta=x,\ \rho\sin\theta=y.$$

对于一些更“对称”的曲线来说，用极坐标描述它们，比用直角坐标系简单便捷得多。

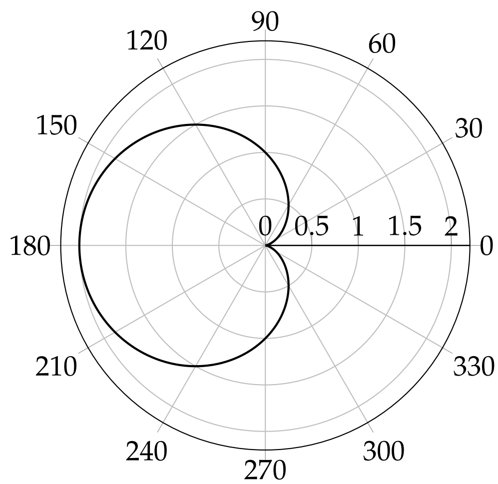
例 19. 以圆锥曲线的一个焦点（椭圆取左焦点，双曲线取右焦点）为极点，以过焦点的对称轴为极轴（向右为正方向），其极坐标方程可以表示为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

其中 e 为圆锥曲线的离心率，p 为焦准距。

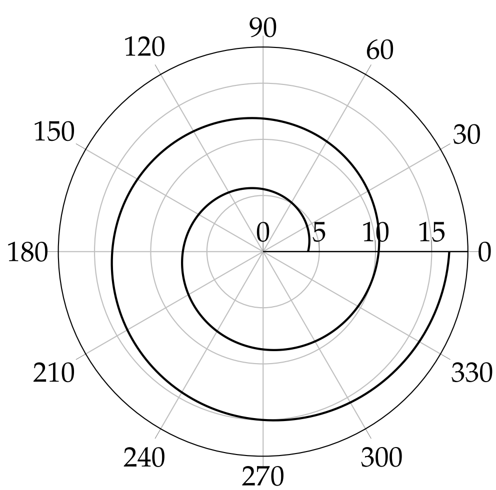
这一极坐标方程暗含圆锥曲线的统一定义，足见极坐标系的优势所在，其推导过程请读者自行尝试。

例 20. 心形线 $\rho = 1 - \cos\theta, (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 若改写为直角方程，其表达式将变为 $(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$，不够直观。

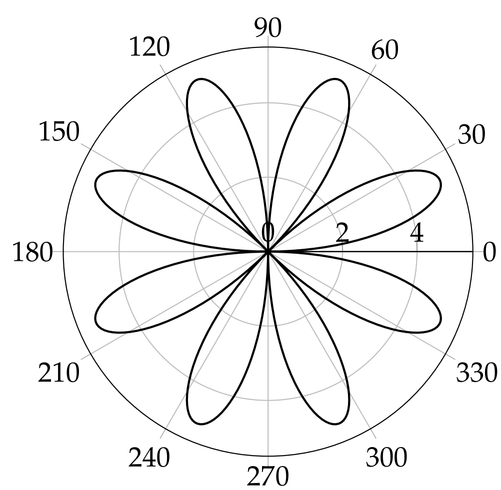


以上两个例子向我们展示了极坐标系适用的几个场景。此外，阿基米德螺线，玫瑰线等都是极坐标的典型例子。

阿基米德螺线 $\rho = 4 + \theta, (0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi)$



玫瑰线 $\rho = 5\sin(4\theta), (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$



柱坐标与球坐标简介

柱坐标可以看作在极坐标系平面上，再“拉”出一条垂直的 z 轴。我们熟知的等距螺线就可以方便地用它来表示。

球坐标系是极坐标系在空间中的延伸。它有两个角分量：连线与正 z 轴（垂直轴）的夹角——天顶角 θ，以及连线在 xy 平面的投影与正 x 轴的夹角——方位角 ϕ. 它在研究球对称的情况时十分便捷。

第五节 极限思维与实数理论概述

高中时有位数学老师的话让我印象深刻：“没学过微积分，人半辈子都是黑暗的哦。”这种看法虽然比较极端，但也暗示了微积分对人思维的重要性。其中，最重要的一点，就是如何用精确的数学语言去描述看似浅显的“极限”“连续”概念。

（一） 从定义看极限

高数课本上重点阐述了关于数列极限的“ε-N 语言”和关于函数极限的“ε-δ 语言”, 这里我们重点从数列极限的角度切入，帮助大家弄懂极限是什么，要怎么证明有关收敛性的题目。

仔细观察 ε-N 语言的内容：若对于所有正数 ε，均存在正整数 N，使得对于所有大于 N 的整数 n，都有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 记住 ε 是可以**任意**小的，只要它比 0 大，取什么值都没问题。但我们的 $|a_n - a|$ 居然比它还要小！也就是说，只要有无穷多个（可以说明，这等价于“存在正整数 N，使得对于所有大于 N 的整数 n”）$|a_n - a|$ 比任意小的 ε 还要小，就可以说 a_n 收敛于 a.

这样，我们就用自然语言描述了极限的意思——无论多小，总还存在更小的。需要注意的是，这种描述有道理，但并不完全准确。而下面我们就来介绍如何准确地理解和应用极限的定义。

例 21. 求证：若 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明. 题设等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{l} = t < 1$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - t\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < t + \varepsilon..$$

我们取 $\varepsilon = 1 - t - \tau$，其中 $\tau > 0$ 且 $\tau + t < 1$. 即得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \tau$. 因此,$\forall n > N$,

$$a_n = a_{N+1} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_{N+1}(1-\tau)^{n-N-1}.$$

对于任意正数 δ, 我们取 $n > \left\lfloor \log_{1-\tau} \frac{\delta}{a_{N+1}} \right\rfloor + N + 2$，则有

$$a_n < a_{N+1}(1-\tau)^{\lfloor \log_{1-\tau}(\delta/a_{N+1}) \rfloor + 1} < a_{N+1}(1-\tau)^{\log_{1-\tau}(\delta/a_{N+1})} = \delta.$$

又 $a_n > 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

上面的例子中，我们直观地感觉到 a_n 类似于“公比小于 1 的等比数列”，再利用极限的定义，构造放缩得到“等比数列”。从始至终，极限的定义都得到了应用。

无论如何，最基本的定义或定理都是许多题目的关键，熟练掌握的重要性不言而喻。

（二）　实数完备性的理解

我们知道，数的概念发展经历了由自然数到整数，再到有理数，最后到实数和复数的过程。其中，有理数与实数的辨析是这一节内容的重点。

我们知道，一个数是有理数的充要条件是，它可以被表示为 $\frac{q}{p}$ 的形式，其中 p, q 是互质（最大公因数为 1）的整数。我们说有理数是稠密的，是指任意两个实数之间必存在有理数。（利用前述的放缩法可以证明，这作为一道小小的思考题）

但它并不是连续（参照 5.1 节关于连续性的定义）的，因为任意两个有理数之间必存在无理数（事实上，对任意有理数 a, b, 取 $c = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(b-a)$ 即可）。这说明有理数并不“完美”，直观上来说，仅由有理数并不能生成一条连续的数轴，只能得到一系列离散的点——有理数与有理数之间是有“空隙”的。

而引入实数的概念后，连续性的问题得到了解决。我们是这样阐述实数的连续性的：对于集合 X, Y，若 $\forall x \in X, y \in Y, x \leqslant y$，则 $\exists c \in \mathbb{R}, x \leqslant c \leqslant y$. 可以这么说，无论两个实数多么“接近”，总有那么一个实数可以“插入”到它们中间，这就是所谓“连续不断”。

例 22. 取集合 $X = \{x \mid x^2 \leqslant 2\}, Y = \{y \mid y^2 > 2\}$，显然满足 $\forall x \in X, y \in Y, x \leqslant y$. 而 $\exists! c \in \mathbb{R}, c^2 = 2, x \leqslant c \leqslant y$. 如果限制在有理数范围内，则无法找到这样的 c.

上面几段文字的描述可能显得很抽象。但不要紧，多去找一些实例或推论，尝试自己去证明一些结论，理解必然会不断加深。具体可以查询有关“实数完备性等价定理”的资料。