**1** 要得到 $y=\log(3-x)$ 的图像，只需要作 $y=\log x$ 关于 $y$ 轴对称的图像，再向__________ 平移个单位而得到.

**2** $(2x+1)^{10}$ 的二项展开式中第八项为__________

**3** 如果 $a>0$，设函数 $f(x)=\dfrac{2009^{x+1}+2007}{2009^{x}+1}+\sin x, x\in[-a,a]$ 的最大值为 $M$，最小值为 $N$，那么 $M+N=$__________.

**4** 若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $(a,6-a^2)$ 上有最小值，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

**5** 首项不为 0 的等差数列 $a_n$ 前 $n$ 项和是 $S_n$，若不等式 ${a_n}^2+\dfrac{{S_n}^2}{n^2}\geq\lambda{a_1}^2$ 对任意 $a_n$ 和正整数 $n$ 恒成立，则实数 $\lambda$ 的最大值为__________.

**6** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^x-1$，若在区间 $(-2,6)$ 内的关于 $x$ 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a\geq 0$ 且 $a\neq 1)$ 恰有 4 个不同的实数根，则实数 $a$ 的取值范围是 (　　).

A. $(-\frac{1}{4},1)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $(1,8)$　　D. $(1,4)$

**7** 在如图的长方体中, $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 点 $E$ 在棱 $AB$ 上移动, 求异面直线 $AC_1$ 与 $A_1D$ 所成角的余弦值.

**8** 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

**9** 如图, 扇形 $ABC$ 是一块半径为 2 千米, 圆心角为 $60^\circ$ 的风景区,$P$ 点在弧 $BC$ 上, 现欲在风景区中规划三条商业街道, 要求街道 $PQ$ 与 $AB$ 垂直, 街道 $PR$ 与 $AB$ 垂直, 线段 $RQ$ 表示第三条街道.

(a) 如果 $P$ 位于弧 $\widehat{BC}$ 的中点, 求三条街道的总长度.

(b) 由于环境的原因, 三条街道 $PQ, PR, RQ$ 每年能产生的经济效益分别为每千米 300 万元, 200 万元及 400 万元, 则这三条街道每年能产生的经济总效益最高为多少? (精确到 1 万元)

**10** 已知函数 $f(x)=mx-\dfrac{m}{x}, g(x)=2\ln x$.

**(a)** 当 $m=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

**(b)** 当 $m=1$ 时, 判断方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数;

**(c)** 若 $x\in(1,e]$ 时, 不等式 $f(x)-g(x)<2$ 恒成立, 求实数 $m$ 的取值范围.

**11** 函数 $f(x)=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$ 的定义域为______________.

**12** 设 $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+2y=1$, 则函数 $\omega=3y^2+2x$ 的值域为______________.

**13** 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(kx^2-2x+5)$ 在 $[-1,2]$ 上严格增, 则实数 $k\in$______________.

**14** 已知函数 $f(x)=\lg(2^x+x^{-x}+a-1)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则实数 $a$ 的取值范围是______________.

**15** 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$, 且 $f(1)=0$, 若不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 则方程的实根个数为__________.

**16** 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称. 若对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 不等式 $f(x^2-6x+21)+f(y^2-8y)<0$ 恒成立, 则当 $x>3$ 时, $x^2+y^2$ 的取值范围是______________.

**17** 设函数 $f(x)=x|x-a|, a\in\mathbb{R}$. 当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$ 时, 不等式 $f(x)\leq 2$ 恒成立, 试求实数 $a$ 的取值范围.

**18** 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(x)=x^2-2ax+4, a\geq 1, g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

**(1)** 求函数 $y=f(x)$ 的最小值 $m(a)$;

**(2)** 若 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$, $f(x_2)>g(x_1)$ 恒成立, 求 $a$ 的取值范围.

**19** 已知一组数据点 $(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\dots,(x_n,y_n)$, 用最小二乘法得到其线性回归方程 $\hat{y}=-\sqrt{2}x+4$, 若数据 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ 的均值为 $\sqrt{2}$, 则可以估计数据 $y_1,y_2,y_3,\dots,y_n$ 的均值为__________.

**20** 在一次抽奖活动中, 假设每 **10** 张奖券中有一等奖券 **1** 张, 可获价值 **50** 元的奖品; 有二等奖券 **3** 张, 每张可获得价值 **10** 元的奖品; 其余 **6** 张没有奖. 某顾客从这 **10** 张奖券中任抽 **2** 张, 求该顾客获奖的概率.

**21** 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值.

**22** 已知 $a$ 是实数且 $a \neq 0$, 证明: $\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$.

*Proof.* 欲证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

即证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}} \geq a^2+\frac{1}{a^2}+\sqrt{2}-2$$

即证明

$$a^4+\frac{1}{a^4} \geq (a^2+\frac{1}{a^2})^2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+8-4\cdot\sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{8-4\cdot\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,
得证.

■

**23** 已知 $a, b, c$ 为实数, 证明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$.

证:
欲证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$$

即证明

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0 \tag{1}$$

∵

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2) \geq 0$$

∴ (1) 式得证.
∵ 以上步骤均可逆,
得证.

■

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

**24** 已知实数 $a, b, c$ 满足 $a+b+c=0$, 且 $a>b>c$. 求证: $a>0$ 且 $c<0$.

证:

$$\begin{gathered}
\because a>b>c \\
\therefore 3a>a+b+c \\
\because a>c, b>c \\
\therefore a+b>2c,\ a+b+c>3c \\
\because a+b+c=0 \\
\therefore 3a>0, 3c<0. \\
\text{即 } a>0, c<0.
\end{gathered}$$

∎

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

**25** 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x>y$, 比较 $x^3-y^3$ 与 $xy^2-x^2y$ 的大小.

证:

$$\begin{aligned}
(x^3-y^3)-(xy^2-x^2y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(y-x) \\
&= (x-y)(x^2+xy+y^2+xy) \\
&= (x-y)(x^2+2xy+y^2) \\
&= (x-y)(x+y)^2 \\
\because x &> y \\
\therefore (x-y)(x+y)^2 &\geq 0 \\
\therefore (x^3-y^3)-(xy^2-x^2y) &\geq 0.
\end{aligned}$$

即 $x^3-y^3$ 大于 $xy^2-x^2y$.

∎

**26** 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1)<f(1-3x)$, 则 $x$ 的取值范围是__________.

这种题目得考虑自变量在定义域内，再求解.

**27** 已知函数 $f(x)=4+log_a(2x-3),(a>0\wedge a\neq 1)$ 的图像恒过定点 $P$, 且点 $P$ 在函数 $g(x)=x^a$ 的图像上, 则 $a=$_______________.

这边定点求错了.

**28** 已知函数 $f(x)=|x-1|(x+1),x\in[a,b]$ 的值域为 $[0,8]$, 则 $a+b$ 的取值范围是_______________.

图是画对了的，但是脑子卡住了，关于值域没反应过来.

**29** 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1)+f(2m-1)>0$, 则实数 $m$ 的取值范围是_______________.

这题跟 26 号套路一样一样的，只是增加了对奇函数性质的考察.

**30** 函数 $g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $g(x)+g(-x)=x^2$, 设函数 $f(x)=g(x)-\frac{x^2}{2}$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上增, 若 $f(a)+f(a^2-2)\leq 0$, 则实数 $a$ 的取值范围是_______________.

本题难点在对于 $g(x)+g(-x)=x^2$ 的运用.

**31** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-0.5)(x-1), & x<1\\ -x^2-ax+2a+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 则 $a$ 的取值范围是__________.

一通分析后得出不等式组 $\begin{cases}a-\frac{1}{2}<0\\ -\frac{a}{2}\leq 1\\ a\leq 0\end{cases}$ ，很多人会忽略最下面一个不等式.

**32** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_5(1-x)| & x<1\\ -(x-2)^2+2 & x\geq 1\end{cases}$ ，则方程 $f(x+\frac{1}{x}-2)=a,(a\in\mathbb{R})$ 的实根个数不可能为 ( ).

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

比较变态的一道题，听说需要分很多类.

**33** 已知函数 $f(x)=2x|x+a|-1$ 有三个不同的零点, 则实数 $a$ 的取值范围是_______________.

移项化成关于 a 的等式，画图，数个数.

**34** 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)\cdot f(-x)=1$ 和 $f(1+x)\cdot f(1-x)=4$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 恒成立. 若当 $x\in[0.1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\mathbf{1,2}]$, 则当 $x\in[-100,100]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为______________.

对于这题，要进行一个定义域的外延.

**35** 事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥, 它们都不发生的概率是 $\dfrac{3}{5}$, 且 $P(A)=2P(B)$, 则 $P(\overline{A})$__________.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生 $A$ 或发生 $B$ 的概率为 $1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{3}$. 接下来就很方便了.

**36** 已知平面向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2$, 且 $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(3\mathbf{b}-\mathbf{c})$, 则 $|\mathbf{c}-\mathbf{a}|$ 最小值为______________.

**37** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4-3a)x+3a, x<0\\ log_a(x+1)+1, \quad x\geq 0\end{cases}$ $(a>0\wedge a\neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上减, 且关于 $x$ 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰有两个不相等的实数解, 则 $a$ 的取值范围是___________________.

要仔细考虑 $x^2+(4-3a)x+3a$ 和 $|f(x)|=2-x$ 相切时的情况.

**38** 已知 $A$, $B$ 是由直线 $x = \pm a$, $y = \pm b$ 所围成矩形相邻的两个顶点, 点 $P$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 上的任意一点, 且存在实数 $m, n$ 满足 $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$, 则 $m + n$ 的取值范围是__________.

我们先进行一个仿射变换，令 $x' = \dfrac{x}{a}, y' = \dfrac{y}{b}$ 得到圆 $C'$ 方程 $x^2 + y^2 = 1$，
则 $\overrightarrow{OP} = (cos\theta, sin\theta), m \cdot \overrightarrow{OA} = (m, m), n \cdot \overrightarrow{OB} = (n, -n)$，
由 $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$ 可得 $m + n = cos\theta$.
这样，由于三角函数的值域，答案就呼之欲出了.

**39** 已知 $P = \{x|x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$, $Q = \{y|y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{s|s = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $a \in P$, $b \in Q$ 则以下肯定正确的是 (　　)

A. $a + b \in P$　　B. $a + b \in Q$　　C. $a + b \in R$　　D. $a + b \in P \cap Q \cap R$

这道题目用 `Table`.

**40** 对于函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 2] \\ 0.5f(x-2), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$, 有下列 **2** 个命题:

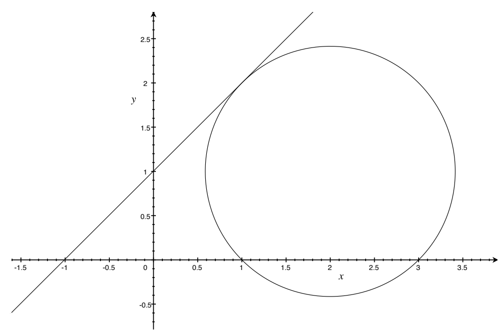
命题 $p$: $\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \le \dfrac{1}{x}$;
命题 $q$: 函数 $y = f(x) - \ln(x-1)$ 有 3 个零点, 则下列判断正确的是 (　　)

A. $p$ 是真命题,$q$ 是真命题;
B. $p$ 是假命题,$q$ 是假命题;
C. $p$ 是真命题,$q$ 是假命题;
D. $p$ 是假命题,$q$ 是真命题.

我们先判断命题 $p$，可见 $x = 2.5$ 时有极大值，带入发现矛盾，故命题 $p$ 为假. 然后判断命题 $q$，先画出 $f(x)$ 的图像，然后画出 $y = \ln(x-1)$ 的图像. 用计算器求解得分别在 $x = 1.39, x = 2, x = 2.6$ 时有零点，故有 3 个零点，命题 $q$ 成立.

**41** 已知圆 $C$: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, 若圆 $C$ 的切线在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距相等, 求此切线的方程.

我们知道，对于圆心为 $(a, b)$，半径为 $r$ 的圆，它的切线方程为 $(x-a)\cos\theta + (y-b)\sin\theta = r$，则圆 $C$ 的切线方程就是 $(x-2)\cos\theta + (y-1)\sin\theta = \sqrt{2}$. 因为在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距相等，那么易得要么切线过原点，要么切线的法向量为 $(1, 1)$. 先来看法向量为 $(1, 1)$ 时的情况，我们将直线方程化为 $\cos\theta x + \sin\theta y - 2\cos\theta - \sin\theta - \sqrt{2} = 0$，求解 $\cos\theta = \sin\theta$ 得出 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$. 化简得 $x + y - 5 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$. 现在考虑过原点的情况，因为沿用之前的切线方程较为不便，我们设方程为 $kx - y = 0$. 由点到直线距离公式得圆心 $(2, 1)$ 到直线距离为 $\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{2}$，解得 $k = \dfrac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$，对应直线的方程为 $\dfrac{2 \pm \sqrt{6}}{2}x - y = 0$. 所以综上可得答案.



**42** 直线 $l: y=kx+b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 $A, B$ 两点, 按下列条件, 求直线 $l$ 的方程:

**(1)** 若 $b=1, |AB|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$;

**(2)** 若 $b=1$, 且直线 $l$ 和 $y$ 轴交于点 $P$, 满足 $\overrightarrow{PA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$;

**(3)** 使线段 $AB$ 被 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 平分;

**(4)** 若以 $AB$ 为直径的圆过原点, 求 $k, b$ 满足的等式.

**Part I**

# 集合与不等式

**43** 已知 $a\in\mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\log_2(\frac{1}{x}+a)$.

**(1)** 若 $a=5$, 解 $f(x)\geq 0$;

**(2)** 若 $f(x)-\log_2((a-4)x+2a-5)=0$ 的解集中仅有一个元素, 求 $a$ 的取值范围;

**(3)** 设 $a>0$, 若对任意 $t\in[\frac{1}{2},1]$, 函数 $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 **1**, 求 $a$ 的取值范围.

(1) 因为 $\log 2(\frac{1}{x}+a)\geq 0$，所以 $x\in(-\infty,-\frac{1}{x})$.

(2) 由 $\log_2(\frac{1}{x}+a)=\log_2((a-4)x+2a-5)$，变形得 $(a-4)x^2+(a-5)x-1=0$(式 1)，且 $\frac{1}{x}+a\geq 0$.

若 $a=4$，则 $x=-1$，符合题意;

$\Delta=a^2-6a+9$ ，解得若 $\Delta=0$，则 $a=3$；若 $\Delta>0$，则 $a\neq 3$；若 $\Delta<0$，则 $a\in\varnothing$;

若 $a=3$，则 $x=-1$，符合题意;

若 $a\notin\{3,4\}$，由求根公式得 $x_1=-1,x_2=\frac{1}{a-4}$;

若 $x=-1$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases}-1+a>0\\2a-4\leq 0\end{cases}$ ，解得 $a\in(1,2]$;

若 $x=\frac{1}{a-4}$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases}2a-4>0\\-1+a\leq 0\end{cases}$ ，解得 $a\in\varnothing$;

综上，$a\in(1,2]\cup\{3,4\}$.

(3) 由复合函数单调性的性质可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上单调减.

由 $f(t)-f(t+1)\leq 1$ 可得 $\log_2\frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+1}+a}\leq 1$;

进一步化简可得 $\frac{1}{t}+a\leq 2(\frac{1}{t+1}+a)$，得 $\frac{1-t}{t(t+1)}\leq a$;

令 $r=t-1$，则 $r\in[0,]$；原式化为 $\frac{r}{r^2-3r+2}\leq a$;

若 $r=0$，$a\geq 0$;

若 $r\in(0,\frac{1}{2}]$，原式继续化为 $\frac{1}{r+\frac{1}{r}-3\leq a}$，由基本不等式解得 $a\geq\frac{2}{3}$.

综上，$a\in[\frac{2}{3},+\infty]$.

**44** 已知 $a,b\in\mathbb{R}$, $a-3b-5=0$, 则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值是__________.

由条件可得 $a-3b=5$，而 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 可化为 $2^a+\frac{1}{2^{3b}}$，由基本不等式可得最小值为 $8\sqrt{2}$.

**Part II**

# 概率与分布

**45** 已知随机变量 $\xi,\eta$, 满足 $\xi\sim B(2,p)$, 且 $P_{(\xi\leq 1)=\frac{3}{4}}$, 则 $p=$__________.

判断该分布为伯努利分布,$\xi\sim B(2,p)$ 中的 2 代表实验次数,$p$ 代表每一次实验的成功概率，故 $P_{(\xi\leq 1)}=P_{(\xi=0)}+P_{(\xi=1)}$，等于 $(1-p)^2+2P(1-p)=\frac{3}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$.

**46** 把一个骰子连续抛掷两次, 记事件 $M$ 为“两次所得点数均为奇数”, $N$ 为“至少有一次点数是 5”, 则 $P(N|M=)$__________.

我们知道 $P(N|M)=\frac{P(M)}{P(MN)}=\dfrac{\frac{3\times 3}{36}}{\frac{1+C_2^1C_2^1}{36}}=\frac{5}{9}$.

**Part III**

# 三角, 复数与向量

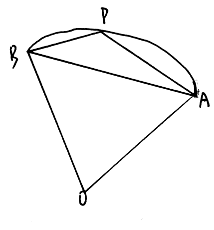
**47** 三角形 $ABC$ 的外心为 $O$, 三个内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}a(a-\frac{8}{5}c), b=4$, 则三角形 $ABC$ 面积的最大值为__________.

由外心的性质可知，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2$，于是 $\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{4}{5}ac$

**48** 水域养殖水产, $AO,BO$ 为直线岸线, $OA=1000\text{m}$, $OB=1500\text{m}$, $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ 水域边界为某圆的一段弧 $\overset{\frown}{AB}$, 过 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点按线段 $PA$ 和 $PB$ 修养殖网箱, 知 $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$.

**(1)** 求岸线上 $A$ 与 $B$ 之间的距离;

**(2)** 若 $PA$ 上每米 **40** 元利润,$PB$ 上每米 **30** 元利润, 记 $\angle PAB=\theta$, 则两段最大经济收益是?(精确到元).




(1) 由余弦定理得 $|AB|=500\sqrt{7}\text{m}$.

(2) 由正弦定理得 $\frac{PA}{\sin\theta}=\frac{PA}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{500\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，设 $\frac{500\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=c$，则 $PA=c\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$PB=\sin\theta$，利润为 $40c\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)+30c\sin\theta$，化简可得 $10c(2\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$，使用辅助角公式可得 $10\sqrt{13}c\sin(\theta+\arctan 2\sqrt{3})$，求得最大值为 16166 元.

**Part IV**

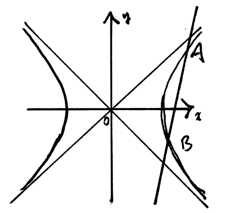
# 圆锥曲线

**49** 已知 $l_1 : y = x, l_2 : y = -x$, 动点 $M(x, y)$, 且 $|x| > |y|$, 记 $M$ 到 $l_1, l_2$ 的距离分别为 $d_1, d_2$, 满足 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}(a > 0)$.

**(1)** 动点 $M$ 的轨迹 $\Gamma$ 的方程;

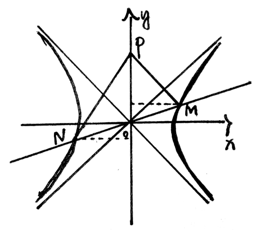
**(2)** 若直线的方向向量为 $(1, 2)$, 过 $(\sqrt{2}a, 0)$ 的直线 $l$ 与 $\Gamma$ 交于 $A, B$ 两点, 那么以 $AB$ 为直径的圆是否恰过原点 $O$? 若是, 求 $a$ 的值; 若否, 判断原点在圆内还是圆外, 说明理由.

**(3)** 过原点 $O$ 作斜率 $k$ 为的直线交于 $M,N$ 两点, 设 $P(0, 1)$, 求 $\triangle PMN$ 的面积 $S$ 关于 $k$ 的函数解析式, 并求 $S$ 的取值范围.




(1) 由点到直线距离公式可得 $d_1 = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|x+4|}{\sqrt{2}}$，代入 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}$ 中得 $x^2 + y^2 = 1$.

(2) 设 $l$ 的方程为 $y = 2(2 - \sqrt{2}a)$，与 $\Gamma$ 联立化简得 $-3x^2 + 8\sqrt{2}ax - 9a^2 = 0$，由于 $AB$ 是圆的直径，且 $O$ 在圆上，所以设 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，故 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a$ ，$x_1x_2 = 3a^2$，$y_1y_2 = 4x_1x_2 - \sqrt{2}a(x_1 + x_2) + 2a^2$. 于是得到 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{35}{3}a^2 = 0$，而 $a = 0$ 与题意不符，故原点不在圆上. 又 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$，故 $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} > < \frac{\pi}{2}$. 原点在圆外.




(3) 设 $M(x_m, y_m), N(x_n, y_n)$，则 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_m| + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_n| = \frac{1}{2}|x_m - x_n|$. 设直线 $y = kx + b$，与 $\Gamma$ 联立得 $(1 - k^2)x^2 - a = 0$，又由韦达定理得 $\frac{1}{2}|x_m - x_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(x_m + x_n)^2 - 4x_mx_n} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{1-k^2}, k \in (-1, 1)$，$S \in [a, +\infty]$.