Contents

Part I

集合与不等式

Chapter 1

集合与逻辑

1.1 已知 $P=\{x|x=4k,k\in\mathbb{Z}\}$，$Q=\{y|y=2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$，$R=\{s|s=6k+1,k\in\mathbb{Z}\}$，$a\in P$，$b\in Q$ 则以下肯定正确的是（　　）

A. $a+b\in P$　　B. $a+b\in Q$　　C. $a+b\in R$　　D. $a+b\in P\cap Q\cap R$

这道题目用 `Table`.

Chapter 2

等式与不等式

2.1 已知 a 是实数且 $a \neq 0$, 证明: $\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$.

Proof. 欲证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

即证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} + \sqrt{2} - 2$$

即证明

$$a^4 + \frac{1}{a^4} \geq (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + 8 - 4 \cdot \sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{8 - 4 \cdot \sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,
得证.

■

2.2 已知 a,b,c 为实数, 证明 $a^2+b^2+c^2 \geq bc+ca+ab$.

证:
欲证明
$$a^2+b^2+c^2 \geq bc+ca+ab$$

即证明
$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab \geq 0 \tag{2.1}$$

∵
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2) \end{aligned}$$

显然
$$\frac{1}{2}((a-b)^2+(a-c)^2-(b-c)^2) \geq 0$$

∴ (1) 式得证.
∵ 以上步骤均可逆,
得证.

■

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

2.3 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$, 且 $a>b>c$. 求证: $a>0$ 且 $c<0$.

证:
$$\begin{gathered} \because a>b>c \\ \therefore 3a>a+b+c \\ \because a>c, b>c \\ \therefore a+b>2c,\ a+b+c>3c \\ \because a+b+c=0 \\ \therefore 3a>0, 3c<0. \\ \text{即 } a>0, c<0. \end{gathered}$$

■

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

2.4 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x > y$, 比较 $x^3 - y^3$ 与 $xy^2 - x^2y$ 的大小.

证:

$$\begin{aligned}(x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy(y - x)\\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + xy)\\ &= (x - y)(x^2 + 2xy + y^2)\\ &= (x - y)(x + y)^2\\ \because x &> y\\ \therefore (x - y)(x + y)^2 &\geq 0\\ \therefore (x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) &\geq 0.\end{aligned}$$

即 $x^3 - y^3$ 大于 $xy^2 - x^2y$.

■

2.5 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a - 3b - 5 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值是__________.

由条件可得 $a - 3b = 5$，而 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 可化为 $2^a + \frac{1}{2^{3b}}$，由基本不等式可得最小值为 $8\sqrt{2}$.

2.6 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$.

(1) 若 $a = 5$, 解 $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x) - \log_2((a - 4)x + 2a - 5) = 0$ 的解集中仅有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $f(x)$ 在 $[t, t + 1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 **1**, 求 a 的取值范围.

(1) 因为 $\log 2(\frac{1}{x} + a) \geq 0$，所以 $x \in (-\infty, -\frac{1}{x})$.

(2) 由 $\log_2(\frac{1}{x} + a) = \log_2((a - 4)x + 2a - 5)$，变形得 $(a - 4)x^2 + (a - 5)x - 1 = 0$(式 1)，且 $\frac{1}{x} + a \geq 0$.

若 $a = 4$，则 $x = -1$，符合题意;

$\Delta = a^2 - 6a + 9$ ，解得若 $\Delta = 0$，则 $a = 3$；若 $\Delta > 0$，则 $a \neq 3$；若 $\Delta < 0$，则 $a \in \varnothing$;

若 $a = 3$，则 $x = -1$，符合题意;

若 $a \notin \{3, 4\}$，由求根公式得 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{a-4}$;

若 $x = -1$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases}-1 + a > 0\\ 2a - 4 \leq 0\end{cases}$ ，解得 $a \in (1, 2]$;

若 $x = \frac{1}{a-4}$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases}2a - 4 > 0\\ -1 + a \leq 0\end{cases}$ ，解得 $a \in \varnothing$;

综上，$a \in (1,2] \cup \{3,4\}$.

(3) 由复合函数单调性的性质可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上单调减.

由 $f(t) - f(t+1) \leq 1$ 可得 $\log_2 \frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+1}+a} \leq 1$;

进一步化简可得 $\frac{1}{t} + a \leq 2(\frac{1}{t+1} + a)$，得 $\frac{1-t}{t(t+1)} \leq a$;

令 $r = t - 1$，则 $r \in [0,]$；原式化为 $\frac{r}{r^2-3r+2} \leq a$;

若 $r = 0$，$a \geq 0$;

若 $r \in (0, \frac{1}{2}]$，原式继续化为 $\frac{1}{r+\frac{1}{r}-3\leq a}$，由基本不等式解得 $a \geq \frac{2}{3}$.

综上，$a \in [\frac{2}{3}, +\infty]$.

Part II

函数

Chapter 3

函数的性质与应用

3.1 要得到 $y=\log(3-x)$ 的图像，只需要作 $y=\log x$ 关于 y 轴对称的图像，再向__________ 平移个单位而得到.

3.2 如果 $a>0$，设函数 $f(x)=\dfrac{2009^{x+1}+2007}{2009^x+1}+\sin x, x\in[-a,a]$ 的最大值为 M，最小值为 N，那么 $M+N=$__________.

3.3 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^x-1$，若在区间 $(-2,6)$ 内的关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a\geq 0$ 且 $a\neq 1)$ 恰有 4 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-\frac{1}{4},1)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $(1,8)$　　D. $(1,4)$

3.4 函数 $f(x)=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$ 的定义域为____________.

3.5 设 $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+2y=1$, 则函数 $\omega=3y^2+2x$ 的值域为____________.

3.6 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(kx^2-2x+5)$ 在 $[-1,2]$ 上严格增, 则实数 $k\in$____________.

3.7 已知函数 $f(x)=\lg(2^x+x^{-x}+a-1)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是____________.

3.8 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$, 且 $f(1)=0$, 若不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 则方程的实根个数为________.

3.9 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称. 若对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 不等式 $f(x^2-6x+21)+f(y^2-8y)<0$ 恒成立, 则当 $x>3$ 时, x^2+y^2 的取值范围是____________.

3.10 设函数 $f(x)=x|x-a|, a\in\mathbb{R}$. 当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$ 时, 不等式 $f(x)\leq 2$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

3.11 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(x)=x^2-2ax+4, a\geq 1, g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值 $m(a)$;

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$, $f(x_2)>g(x_1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

3.12 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值.

3.13 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1)<f(1-3x)$, 则 x 的取值范围是__________.

这种题目得考虑自变量在定义域内，再求解.

3.14 已知函数 $f(x)=4+log_a(2x-3),(a>0\wedge a\neq 1)$ 的图像恒过定点 P, 且点 P 在函数 $g(x)=x^a$ 的图像上, 则 $a=$_______________.

这边定点求错了.

3.15 已知函数 $f(x)=|x-1|(x+1), x\in[a,b]$ 的值域为 $[0,8]$, 则 $a+b$ 的取值范围是_______________.

图是画对了的，但是脑子卡住了，关于值域没反应过来.

3.16 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1)+f(2m-1)>0$, 则实数 m 的取值范围是_______________.

这题跟 26 号套路一样一样的，只是增加了对奇函数性质的考察.

3.17 函数 $g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $g(x)+g(-x)=x^2$, 设函数 $f(x)=g(x)-\dfrac{x^2}{2}$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上增, 若 $f(a)+f(a^2-2)\leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_______________.

本题难点在对于 $g(x)+g(-x)=x^2$ 的运用.

3.18 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-0.5)(x-1), & x<1\\ -x^2-ax+2a+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是__________.

一通分析后得出不等式组 $\begin{cases}a-\frac{1}{2}<0\\ -\frac{a}{2}\leq 1\\ a\leq 0\end{cases}$ ，很多人会忽略最下面一个不等式.

3.19 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_5(1-x)| & x<1\\ -(x-2)^2+2 & x\geq 1\end{cases}$，则方程 $f(x+\frac{1}{x}-2)=a,(a\in\mathbb{R})$ 的实根个数不可能为 ( ).

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

比较变态的一道题，听说需要分很多类.

3.20 已知函数 $f(x)=2x|x+a|-1$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是__________.

移项化成关于 a 的等式，画图，数个数.

3.21 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)\cdot f(-x)=1$ 和 $f(1+x)\cdot f(1-x)=4$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 恒成立. 若当 $x\in[0.1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\mathbf{1,2}]$, 则当 $x\in[-100,100]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为__________.

对于这题，要进行一个定义域的外延.

3.22 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in[0,2]\\ 0.5f(x-2), x\in(2,+\infty)\end{cases}$，有下列 **2** 个命题:

命题 p: $\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{x}$;

命题 q: 函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 3 个零点, 则下列判断正确的是 (　　)

A. p 是真命题,q 是真命题;
B. p 是假命题,q 是假命题;
C. p 是真命题,q 是假命题;
D. p 是假命题,q 是真命题.

我们先判断命题 p，可见 $x=2.5$ 时有极大值，带入发现矛盾，故命题 p 为假. 然后判断命题 q，先画出 $f(x)$ 的图像，然后画出 $y=\ln(x-1)$ 的图像. 用计算器求解得分别在 $x=1.39, x=2, x=2.6$ 时有零点，故有 3 个零点，命题 q 成立.

3.23 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4-3a)x+3a, x<0\\ log_a(x+1)+1, & x\geq 0\end{cases}$ $(a>0\wedge a\neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是__________.

要仔细考虑 $x^2+(4-3a)x+3a$ 和 $|f(x)|=2-x$ 相切时的情况.

Chapter 4

导数

4.1 若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $(a,6-a^2)$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围是__________.

Chapter 5

导数大题

5.1 已知函数 $f(x)=mx-\frac{m}{x}, g(x)=2\ln x$.

(a) 当 $m=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(b) 当 $m=1$ 时, 判断方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数;

(c) 若 $x\in(1,e]$ 时, 不等式 $f(x)-g(x)<2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

Part III

三角, 复数与向量

Chapter 6

三角

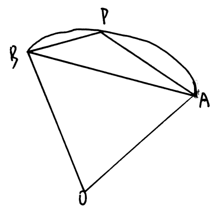
6.1 三角形 ABC 的外心为 O, 三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}a(a-\frac{8}{5}c), b=4$, 则三角形 ABC 面积的最大值为__________.

由外心的性质可知，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2$，于是 $\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{4}{5}ac$

6.2 水域养殖水产, AO, BO 为直线岸线, $OA=1000\text{m}$, $OB=1500\text{m}$, $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ 水域边界为某圆的一段弧 $\widehat{AB}$, 过 $\widehat{AB}$ 上一点按线段 PA 和 PB 修养殖网箱, 知 $\angle APB=\frac{2\pi}{3}$.

(1) 求岸线上 A 与 B 之间的距离;

(2) 若 PA 上每米 **40** 元利润,PB 上每米 **30** 元利润, 记 $\angle PAB=\theta$, 则两段最大经济收益是?(精确到元).



(1) 由余弦定理得 $|AB|=500\sqrt{7}\text{m}$.

(2) 由正弦定理得 $\frac{PA}{\sin\theta}=\frac{PA}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{500\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}$，设 $\frac{500\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=c$，则 $PA=c\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$PB=\sin\theta$，利润为 $40c\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)+30c\sin\theta$，化简可得 $10c(2\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$，使用辅助角公式可得 $10\sqrt{13}c\sin(\theta+\arctan 2\sqrt{3})$，求得最大值为 16166 元.

Chapter 7

向量

7.1 已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2$, 且 $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(3\mathbf{b}-\mathbf{c})$, 则 $|\mathbf{c}-\mathbf{a}|$ 最小值为______________.

Part IV

几何体与空间几何

Chapter 8

立体几何

8.1 在如图的长方体中, $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 点 E 在棱 AB 上移动, 求异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值.

Part V

概率与统计

Chapter 9

计数原理

9.1 $(2x+1)^{10}$ 的二项展开式中第八项为__________

Chapter 10

概率初步

10.1 把一个骰子连续抛掷两次, 记事件 M 为 "两次所得点数均为奇数", N 为 "至少有一次点数是 **5**", 则 $P(N|M=)$__________.

我们知道 $P(N|M) = \frac{P(M)}{P(MN)} = \dfrac{\frac{3\times 3}{36}}{\frac{1+C_2^1C_2^1}{36}} = \frac{5}{9}$.

10.2 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

10.3 在一次抽奖活动中, 假设每 **10** 张奖券中有一等奖券 **1** 张, 可获价值 **50** 元的奖品; 有二等奖券 **3** 张, 每张可获得价值 **10** 元的奖品; 其余 **6** 张没有奖. 某顾客从这 **10** 张奖券中任抽 **2** 张, 求该顾客获奖的概率.

10.4 事件 A 与事件 B 互斥, 它们都不发生的概率是 $\frac{3}{5}$, 且 $P(A)=2P(B)$, 则 $P(\overline{A})$__________.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生 A 或发生 B 的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{3}$. 接下来就很方便了.

Chapter 11

统计

11.1 已知一组数据点 $(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, 用最小二乘法得到其线性回归方程 $\hat{y} = -\sqrt{2}x + 4$, 若数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的均值为 $\sqrt{2}$, 则可以估计数据 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 的均值为__________.

Chapter 12

分布

12.1 已知随机变量 ξ, η, 满足 $\xi \sim B(2, p)$, 且 $P_{(\xi \leq 1)=\frac{3}{4}}$, 则 $p =$__________.

判断该分布为伯努利分布 ,$\xi \sim B(2, p)$ 中的 2 代表实验次数,p 代表每一次实验的成功概率，故 $P_{(\xi \leq 1)} = P_{(\xi=0)} + P_{(\xi=1)}$，等于 $(1-p)^2 + 2P(1-p) = \frac{3}{4}$，解得 $p = \frac{1}{2}$.

Part VI

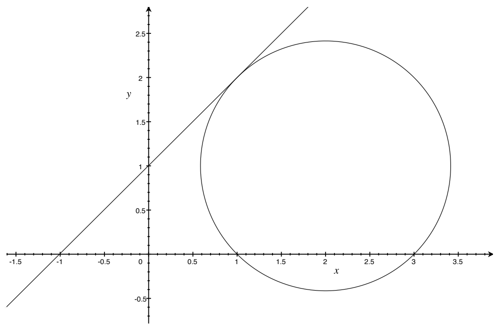
圆锥曲线

Chapter 13

椭圆

13.1 已知圆 C: $x^2+y^2-4x-2y+3=0$, 若圆 C 的切线在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 求此切线的方程.

我们知道，对于圆心为 (a,b)，半径为 r 的圆，它的切线方程为 $(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$，则圆 C 的切线方程就是 $(x-2)\cos\theta+(y-1)\sin\theta=\sqrt{2}$．因为在 x 轴和 y 轴上的截距相等，那么易得要么切线过原点，要么切线的法向量为 $(1,1)$．先来看法向量为 $(1,1)$ 时的情况，我们将直线方程化为 $\cos\theta x+\sin\theta y-2\cos\theta-\sin\theta-\sqrt{2}=0$，求解 $\cos\theta=\sin\theta$ 得出 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$．化简得 $x+y-5=0$ 或 $x+y-1=0$．现在考虑过原点的情况，因为沿用之前的切线方程较为不便，我们设方程为 $kx-y=0$．由点到直线距离公式得圆心 $(2,1)$ 到直线距离为 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得 $k=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，对应直线的方程为 $\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}x-y=0$．所以综上可得答案．



13.2 已知 A, B 是由直线 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所围成矩形相邻的两个顶点, 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 上的任意一点, 且存在实数 m,n 满足 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$, 则 $m+n$ 的取值范围是____________.

我们先进行一个仿射变换，令 $x'=\frac{x}{a},y'=\frac{y}{b}$ 得到圆 C' 方程 $x^2+y^2=1$，
则 $\overrightarrow{OP}=(cos\theta,sin\theta),m\cdot\overrightarrow{OA}=(m,m),n\cdot\overrightarrow{OB}=(n,-n)$，
由 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$ 可得 $m+n=cos\theta$．
这样，由于三角函数的值域，答案就呼之欲出了．

13.3 直线 $l: y=kx+b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A,B 两点, 按下列条件, 求直线 l 的方程:

(1) 若 $b=1,|AB|=\frac{4\sqrt{5}}{3}$;

(2) 若 $b=1$, 且直线 l 和 y 轴交于点 P, 满足 $\overrightarrow{PA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$;

(3) 使线段 AB 被 $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 平分;

(4) 若以 AB 为直径的圆过原点, 求 k,b 满足的等式.

Chapter 14

双曲线

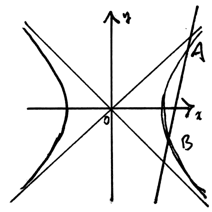
14.1 已知 $l_1 : y = x, l_2 : y = -x$, 动点 $M(x, y)$, 且 $|x| > |y|$, 记 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 d_1, d_2, 满足 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}(a > 0)$.

(1) 动点 M 的轨迹 Γ 的方程;

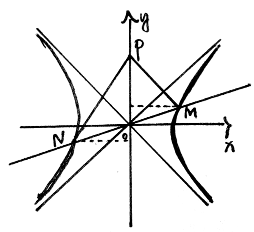
(2) 若直线的方向向量为 $(1, 2)$, 过 $(\sqrt{2}a, 0)$ 的直线 l 与 Γ 交于 A, B 两点, 那么以 AB 为直径的圆是否恰过原点 O? 若是, 求 a 的值; 若否, 判断原点在圆内还是圆外, 说明理由.

(3) 过原点 O 作斜率 k 为的直线交于 M,N 两点, 设 $P(0, 1)$, 求 $\triangle PMN$ 的面积 S 关于 k 的函数解析式, 并求 S 的取值范围.

(1) 由点到直线距离公式可得 $d_1 = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|x+4|}{\sqrt{2}}$，代入 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}$ 中得 $x^2 + y^2 = 1$.



(2) 设 l 的方程为 $y = 2(2 - \sqrt{2}a)$，与 Γ 联立化简得 $-3x^2 + 8\sqrt{2}ax - 9a^2 = 0$，由于 AB 是圆的直径，且 O 在圆上，所以设 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$，故 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a$ ，$x_1x_2 = 3a^2$，$y_1y_2 = 4x_1x_2 - \sqrt{2}a(x_1 + x_2) + 2a^2$. 于是得到 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{35}{3}a^2 = 0$，而 $a = 0$ 与题意不符，故原点不在圆上. 又 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$，故 $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >< \frac{\pi}{2}$. 原点在圆外.



(3) 设 $M(x_m, y_m), N(x_n, y_n)$，则 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_m| + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_n| = \frac{1}{2}|x_m - x_n|$. 设直线 $y = kx + b$，与 Γ 联立得 $(1 - k^2)x^2 - a = 0$，又由韦达定理得 $\frac{1}{2}|x_m - x_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(x_m + x_n)^2 - 4x_m x_n} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{1-k^2}, k \in (-1, 1)$，$S \in [a, +\infty]$.

Chapter 15

抛物线

Part VII

数列

15.1 如果 $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}(n \in \mathbb{N}^*)$, 那么 $f(k+1) - f(k)$ 共有__________ 项.

15.2 首项不为 0 的等差数列 a_n 前 n 项和是 S_n, 若不等式 $a_n{}^2 + \dfrac{S_n{}^2}{n^2} \geq \lambda a_1{}^2$ 对任意 a_n 和正整数 n 恒成立, 则实数 λ 的最大值为__________.

Part VIII

A

15.3 当 $x \in [a, +\infty)$ 时，幂函数 $y = x^2$ 的图像总在 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 图像的上方，则 a 取值范围为_________.

15.4 若对任意 $x \in [1, 2]$, 均有 $|x^2 - a| + |x + a| = |x^2 + qx|$, 则实数 a 的取值范围为_________.

15.5 四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC, AB \perp BC, AB = AD, BC = 2AB, E, F$ 为 BC, BP 中点。

i、求证平面 $AEF//$ 平面 DCP;

ii、若 $PBC \perp ABCD, AP$ 与 PBC 所成角为 $45°, CP \perp PB$, 求 $P - AB - C$ 大小。