

Contents

I	集合与不等式	3
1	集合与逻辑	4
2	等式与不等式	5
II	函数	9
3	函数的性质与应用	10
4	导数	14
5	导数大题	15
III	三角, 复数与向量	16
6	三角	17
7	向量	18
IV	几何体与空间几何	19
8	立体几何	20
V	概率与统计	21
9	计数原理	22
10	概率初步	23
11	统计	24
12	分布	25
VI	圆锥曲线	26
13	椭圆	27
14	双曲线	28
15	抛物线	29
VII	数列	30

Part I

集合与不等式

Chapter 1

集合与逻辑

1.1 已知 $P = \{x|x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$, $Q = \{y|y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $R = \{s|s = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $a \in P$, $b \in Q$ 则以下肯定正确的是 ()

A. $a + b \in P$

B. $a + b \in Q$

C. $a + b \in R$

D. $a + b \in P \cap Q \cap R$

这道题目用 Table.

Chapter 2

等式与不等式

2.1 已知 a 是实数且 $a \neq 0$, 证明: $\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$.

Proof. 欲证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

即证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} + \sqrt{2} - 2$$

即证明

$$a^4 + \frac{1}{a^4} \geq (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + 8 - 4 \cdot \sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{8 - 4 \cdot \sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,
得证. ■

2.2 已知 a, b, c 为实数, 证明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$.

证:

欲证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$$

即证明

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0 \quad (2.1)$$

\therefore

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0$$

\therefore (1) 式得证.

\therefore 以上步骤均可逆,

得证. ■

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

2.3 已知实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, 且 $a > b > c$. 求证: $a > 0$ 且 $c < 0$.

证:

$$\begin{aligned} &\because a > b > c \\ &\therefore 3a > a + b + c \\ &\because a > c, b > c \\ &\therefore a + b > 2c, a + b + c > 3c \\ &\because a + b + c = 0 \\ &\therefore 3a > 0, 3c < 0. \\ &\text{即 } a > 0, c < 0. \end{aligned}$$

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

2.4 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x > y$, 比较 $x^3 - y^3$ 与 $xy^2 - x^2y$ 的大小.

证:

$$\begin{aligned}(x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy(y - x) \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + xy) \\ &= (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= (x - y)(x + y)^2\end{aligned}$$

$$\because x > y$$

$$\therefore (x - y)(x + y)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) \geq 0.$$

即 $x^3 - y^3$ 大于 $xy^2 - x^2y$.

2.5 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a - 3b - 5 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值是_____.

由条件可得 $a - 3b = 5$, 而 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 可化为 $2^a + \frac{1}{2^{3b}}$, 由基本不等式可得最小值为 $8\sqrt{2}$.

2.6 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$.

(1) 若 $a = 5$, 解 $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x) - \log_2((a - 4)x + 2a - 5) = 0$ 的解集中仅有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $f(x)$ 在 $[t, t + 1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

(1) 因为 $\log_2(\frac{1}{x} + a) \geq 0$, 所以 $x \in (-\infty, -\frac{1}{x})$.

(2) 由 $\log_2(\frac{1}{x} + a) = \log_2((a - 4)x + 2a - 5)$, 变形得 $(a - 4)x^2 + (a - 5)x - 1 = 0$ (式 1), 且 $\frac{1}{x} + a \geq 0$.

若 $a = 4$, 则 $x = -1$, 符合题意;

$\Delta = a^2 - 6a + 9$, 解得若 $\Delta = 0$, 则 $a = 3$; 若 $\Delta > 0$, 则 $a \neq 3$; 若 $\Delta < 0$, 则 $a \in \emptyset$;

若 $a = 3$, 则 $x = -1$, 符合题意;

若 $a \notin \{3, 4\}$, 由求根公式得 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{a - 4}$;

若 $x = -1$ 是解, 代入到式 1 中得 $\begin{cases} -1 + a > 0 \\ 2a - 4 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $a \in (1, 2]$;

若 $x = \frac{1}{a - 4}$ 是解, 代入到式 1 中得 $\begin{cases} 2a - 4 > 0 \\ -1 + a \leq 0 \end{cases}$, 解得 $a \in \emptyset$;

综上, $a \in (1, 2] \cup \{3, 4\}$.

(3) 由复合函数单调性的性质可知 $f(x)$ 在 \mathbb{D} 上单调减.

由 $f(t) - f(t+1) \leq 1$ 可得 $\log_2 \frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+1}+a} \leq 1$;

进一步化简可得 $\frac{1}{t} + a \leq 2(\frac{1}{t+1} + a)$, 得 $\frac{1-t}{t(t+1)} \leq a$;

令 $r = t - 1$, 则 $r \in [0, 1]$; 原式化为 $\frac{r}{r^2-3r+2} \leq a$;

若 $r = 0$, $a \geq 0$;

若 $r \in (0, \frac{1}{2}]$, 原式继续化为 $\frac{1}{r+\frac{1}{r}-3} \leq a$, 由基本不等式解得 $a \geq \frac{2}{3}$.

综上, $a \in [\frac{2}{3}, +\infty)$.

Part II

函数

Chapter 3

函数的性质与应用

3.1 要得到 $y = \log(3 - x)$ 的图像, 只需要作 $y = \log x$ 关于 y 轴对称的图像, 再向_____ 平移个单位而得到.

3.2 如果 $a > 0$, 设函数 $f(x) = \frac{2009^{x+1} + 2007}{2009^x + 1} + \sin x, x \in [-a, a]$ 的最大值为 M , 最小值为 N , 那么 $M + N =$ _____.

3.3 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且 $f(2+x) = f(2-x)$, 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^x - 1$, 若在区间 $(-2, 6)$ 内的关于 x 的方程 $f(x) - \log_a(x+2) = 0 (a \geq 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 恰有 4 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-\frac{1}{4}, 1)$

B. $(8, +\infty)$

C. $(1, 8)$

D. $(1, 4)$

3.4 函数 $f(x) = \frac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$ 的定义域为_____.

3.5 设 $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y = 1$, 则函数 $\omega = 3y^2 + 2x$ 的值域为_____.

3.6 设函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(kx^2 - 2x + 5)$ 在 $[-1, 2]$ 上严格增, 则实数 $k \in$ _____.

3.7 已知函数 $f(x) = \lg(2^x + x^{-x} + a - 1)$ 的值域为 \mathbb{R} , 则实数 a 的取值范围是_____.

3.8 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$, 且 $f(1) = 0$, 若不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 \mathbb{R} , 则方程的实根个数为_____.

3.9 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的增函数, 函数 $y = f(x-1)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称. 若对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 不等式 $f(x^2 - 6x + 21) + f(y^2 - 8y) < 0$ 恒成立, 则当 $x > 3$ 时, $x^2 + y^2$ 的取值范围是_____.

3.10 设函数 $f(x) = x|x-a|, a \in \mathbb{R}$. 当 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, 不等式 $f(x) \leq 2$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

3.11 已知定义在区间 $[0, 2]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(x) = x^2 - 2ax + 4, a \geq 1, g(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小值 $m(a)$;

(2) 若 $\forall x_1, x_2 \in [0, 2], f(x_2) > g(x_1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

3.12 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值.

3.13 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1) < f(1-3x)$, 则 x 的取值范围是_____.

这种题目得考虑自变量在定义域内, 再求解.

3.14 已知函数 $f(x) = 4 + \log_a(2x-3), (a > 0 \wedge a \neq 1)$ 的图像恒过定点 P , 且点 P 在函数 $g(x) = x^a$ 的图像上, 则 $a =$ _____.

这边定点求错了.

3.15 已知函数 $f(x) = |x-1|(x+1), x \in [a, b]$ 的值域为 $[0, 8]$, 则 $a+b$ 的取值范围是_____.

图是画对了的, 但是脑子卡住了, 关于值域没反应过来.

3.16 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1) + f(2m-1) > 0$, 则实数 m 的取值范围是_____.

这题跟 26 号套路一样一样的, 只是增加了对奇函数性质的考察.

3.17 函数 $g(x)$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $g(x) + g(-x) = x^2$, 设函数 $f(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上增, 若 $f(a) + f(a^2-2) \leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_____.

本题难点在对于 $g(x) + g(-x) = x^2$ 的运用.

3.18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (a-0.5)(x-1), & x < 1 \\ -x^2 - ax + 2a + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上是减函数, 则 a 的取值范围是_____.

一通分析后得出不等式组 $\begin{cases} a - \frac{1}{2} < 0 \\ -\frac{a}{2} \leq 1 \\ a \leq 0 \end{cases}$, 很多人会忽略最下面一个不等式.

3.19 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_5(1-x)| & x < 1 \\ -(x-2)^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$, 则方程 $f(x + \frac{1}{x} - 2) = a, (a \in \mathbb{R})$ 的实根个数不可能为 ().

- A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

比较变态的一道题, 听说需要分很多类.

3.20 已知函数 $f(x) = 2x|x+a| - 1$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

移项化成关于 a 的等式, 画图, 数个数.

3.21 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且 $f(x) \cdot f(-x) = 1$ 和 $f(1+x) \cdot f(1-x) = 4$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 恒成立. 若当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[1, 2]$, 则当 $x \in [-100, 100]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为_____.

对于这题, 要进行一个定义域的外延.

3.22 对于函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 2] \\ 0.5f(x-2), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$, 有下列 2 个命题:

命题 $p: \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$;

命题 $q: \text{函数 } y = f(x) - \ln(x-1) \text{ 有 } 3 \text{ 个零点, 则下列判断正确的是 ()}$

- A. p 是真命题, q 是真命题;
B. p 是假命题, q 是假命题;
C. p 是真命题, q 是假命题;
D. p 是假命题, q 是真命题.

我们先判断命题 p , 可见 $x = 2.5$ 时有极大值, 带入发现矛盾, 故命题 p 为假. 然后判断命题 q , 先画出 $f(x)$ 的图像, 然后画出 $y = \ln(x-1)$ 的图像. 用计算器求得分别在 $x = 1.39, x = 2, x = 2.6$ 时有零点, 故有 3 个零点, 命题 q 成立.

3.23 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4-3a)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$ 在 \mathbb{R} 上减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是_____.

要仔细考虑 $x^2 + (4-3a)x + 3a$ 和 $|f(x)| = 2 - x$ 相切时的情况.

Chapter 4

导数

4.1 若函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $(a, 6 - a^2)$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

Chapter 5

导数大题

5.1 已知函数 $f(x) = mx - \frac{m}{x}$, $g(x) = 2 \ln x$.

- (a) 当 $m = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (b) 当 $m = 1$ 时, 判断方程 $f(x) = g(x)$ 的实根个数;
- (c) 若 $x \in (1, e]$ 时, 不等式 $f(x) - g(x) < 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

Part III

三角, 复数与向量

Chapter 6

三角

6.1 三角形 ABC 的外心为 O , 三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a(a - \frac{8}{5}c)$, $b = 4$, 则三角形 ABC 面积的最大值为_____.

由外心的性质可知, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2$, 于是 $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{4}{5}ac$

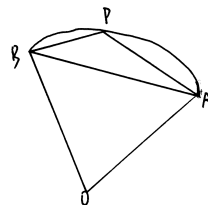
6.2 水域养殖水产, AO, BO 为直线岸线, $OA = 1000\text{m}$, $OB = 1500\text{m}$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 水域边界为某圆的一段弧 \widehat{AB} , 过 \widehat{AB} 上一点按线段 PA 和 PB 修养殖网箱, 知 $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求岸线上 A 与 B 之间的距离;

(2) 若 PA 上每米 40 元利润, PB 上每米 30 元利润, 记 $\angle PAB = \theta$, 则两段最大经济收益是?(精确到元).

(1) 由余弦定理得 $|AB| = 500\sqrt{7}\text{m}$.

(2) 由正弦定理得 $\frac{PA}{\sin \theta} = \frac{PB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)} = \frac{500\sqrt{7}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$, 设 $\frac{500\sqrt{7}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = c$, 则 $PA = c \sin(\frac{\pi}{3} - \theta)$, $PB = c \sin \theta$, 利润为 $40c \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) + 30c \sin \theta$, 化简可得 $10c(2\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)$, 使用辅助角公式可得 $10\sqrt{13}c \sin(\theta + \arctan 2\sqrt{3})$, 求得最大值为 16166 元.



Chapter 7

向量

7.1 已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, 且 $(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - \mathbf{c})$, 则 $|\mathbf{c} - \mathbf{a}|$ 最小值为_____.

Part IV

几何体与空间几何

Chapter 8

立体几何

8.1 在如图的长方体中, $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 点 E 在棱 AB 上移动, 求异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值.

Part V

概率与统计

Chapter 9

计数原理

9.1 $(2x + 1)^{10}$ 的二项展开式中第八项为_____

Chapter 10

概率初步

10.1 把一个骰子连续抛掷两次, 记事件 M 为“两次所得点数均为奇数”, N 为“至少有一次点数是 5”, 则 $P(N|M) =$ _____.

我们知道 $P(N|M) = \frac{P(M)}{P(MN)} = \frac{\frac{3 \times 3}{36}}{\frac{1 + C_2^1 C_2^1}{36}} = \frac{5}{9}$.

10.2 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

10.3 在一次抽奖活动中, 假设每 10 张奖券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获得价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖. 某顾客从这 10 张奖券中任抽 2 张, 求该顾客获奖的概率.

10.4 事件 A 与事件 B 互斥, 它们都不发生的概率是 $\frac{3}{5}$, 且 $P(A) = 2P(B)$, 则 $P(\overline{A})$ _____.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生 A 或发生 B 的概率为 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. 接下来就很方便了.

Chapter 11

统计

11.1 已知一组数据点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$, 用最小二乘法得到其线性回归方程 $\hat{y} = -\sqrt{2}x + 4$, 若数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的均值为 $\sqrt{2}$, 则可以估计数据 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ 的均值为_____.

Chapter 12

分布

12.1 已知随机变量 ξ, η , 满足 $\xi \sim B(2, p)$, 且 $P_{(\xi \leq 1)} = \frac{3}{4}$, 则 $p =$ _____.

判断该分布为伯努利分布, $\xi \sim B(2, p)$ 中的 2 代表实验次数, p 代表每一次实验的成功概率, 故 $P_{(\xi \leq 1)} = P_{(\xi=0)} + P_{(\xi=1)}$, 等于 $(1-p)^2 + 2P(1-p) = \frac{3}{4}$, 解得 $p = \frac{1}{2}$.

Part VI

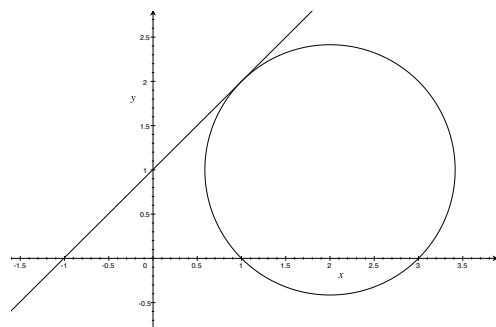
圆锥曲线

Chapter 13

椭圆

13.1 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$, 若圆 C 的切线在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 求此切线的方程.

我们知道, 对于圆心为 (a, b) , 半径为 r 的圆, 它的切线方程为 $(x - a)\cos\theta + (y - b)\sin\theta = r$, 则圆 C 的切线方程就是 $(x - 2)\cos\theta + (y - 1)\sin\theta = \sqrt{2}$. 因为在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 那么易得要么切线过原点, 要么切线的法向量为 $(1, 1)$. 先看法向量为 $(1, 1)$ 时的情况, 我们将直线方程化为 $\cos\theta x + \sin\theta y - 2\cos\theta - \sin\theta - \sqrt{2} = 0$, 求解 $\cos\theta = \sin\theta$ 得出 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$. 化简得 $x + y - 5 = 0$ 或 $x + y - 1 = 0$. 现在考虑过原点的情况, 因为沿用之前的切线方程较为不便, 我们设方程为 $kx - y = 0$. 由点到直线距离公式得圆心 $(2, 1)$ 到直线距离为 $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$, 解得 $k = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$, 对应直线的方程为 $\frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}x - y = 0$. 所以综上可得答案.



13.2 已知 A, B 是由直线 $x = \pm a, y = \pm b$ 所围成矩形相邻的两个顶点, 点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 上的任意一点, 且存在实数 m, n 满足 $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$, 则 $m + n$ 的取值范围是_____.

我们先进行一个仿射变换, 令 $x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}$ 得到圆 C' 方程 $x'^2 + y'^2 = 1$,

则 $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta, \sin\theta), m \cdot \overrightarrow{OA} = (m, m), n \cdot \overrightarrow{OB} = (n, -n)$,

由 $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$ 可得 $m + n = \cos\theta$.

这样, 由于三角函数的值域, 答案就呼之欲出了.

13.3 直线 $l: y = kx + b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A, B 两点, 按下列条件, 求直线 l 的方程:

(1) 若 $b = 1, |AB| = \frac{4\sqrt{5}}{3}$;

(2) 若 $b = 1$, 且直线 l 和 y 轴交于点 P , 满足 $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$;

(3) 使线段 AB 被 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平分;

(4) 若以 AB 为直径的圆过原点, 求 k, b 满足的等式.

Chapter 14

双曲线

14.1 已知 $l_1: y = x, l_2: y = -x$, 动点 $M(x, y)$, 且 $|x| > |y|$, 记 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 d_1, d_2 , 满足 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2} (a > 0)$.

(1) 动点 M 的轨迹 Γ 的方程;

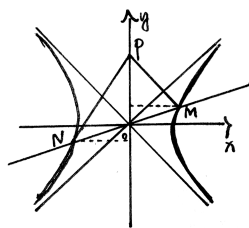
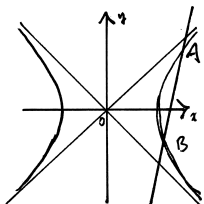
(2) 若直线的方向向量为 $(1, 2)$, 过 $(\sqrt{2}a, 0)$ 的直线 l 与 Γ 交于 A, B 两点, 那么以 AB 为直径的圆是否恰过原点 O ? 若是, 求 a 的值; 若否, 判断原点在圆内还是圆外, 说明理由.

(3) 过原点 O 作斜率 k 为的直线交于 M, N 两点, 设 $P(0, 1)$, 求 $\triangle PMN$ 的面积 S 关于 k 的函数解析式, 并求 S 的取值范围.

(1) 由点到直线距离公式可得 $d_1 = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|x+4|}{\sqrt{2}}$, 代入 $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}$ 中得 $x^2 + y^2 = 1$.

(2) 设 l 的方程为 $y = 2(2 - \sqrt{2}a)$, 与 Γ 联立化简得 $-3x^2 + 8\sqrt{2}ax - 9a^2 = 0$, 由于 AB 是圆的直径, 且 O 在圆上, 所以设 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 故 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a$, $x_1x_2 = 3a^2$, $y_1y_2 = 4x_1x_2 - \sqrt{2}a(x_1 + x_2) + 2a^2$. 于是得到 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{35}{3}a^2 = 0$, 而 $a = 0$ 与题意不符, 故原点不在圆上. 又 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$, 故 $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$. 原点在圆外.

(3) 设 $M(x_m, y_m), N(x_n, y_n)$, 则 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_m| + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_n| = \frac{1}{2} |x_m - x_n|$. 设直线 $y = kx + b$, 与 Γ 联立得 $(1 - k^2)x^2 - a = 0$, 又由韦达定理得 $\frac{1}{2} |x_m - x_n| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_m + x_n)^2 - 4x_mx_n} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{1-k^2}, k \in (-1, 1), S \in [a, +\infty]$.



Chapter 15

抛物线

Part VII

数列

- 15.1 如果 $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 那么 $f(k+1) - f(k)$ 共有_____项.
- 15.2 首项不为 0 的等差数列 a_n 前 n 项和是 S_n , 若不等式 $a_n^2 + \frac{S_n^2}{n^2} \geq \lambda a_1^2$ 对任意 a_n 和正整数 n 恒成立, 则实数 λ 的最大值为_____.