1 要得到 $y=\log(3-x)$ 的图像, 只需要作 $y=\log x$ 关于 y 轴对称的图像, 再向__________ 平移个单位而得到.

2 $(2x+1)^{10}$ 的二项展开式中第八项为__________

3 如果 $a>0$, 设函数 $f(x)=\dfrac{2009^{x+1}+2007}{2009^x+1}+\sin x, x\in[-a,a]$ 的最大值为 M, 最小值为 N, 那么 $M+N=$__________.

4 若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $(a,6-a^2)$ 上有最小值, 则实数 a 的取值范围是__________.

5 首项不为 0 的等差数列 a_n 前 n 项和是 S_n, 若不等式 ${a_n}^2+\dfrac{{S_n}^2}{n^2}\geq\lambda {a_1}^2$ 对任意 a_n 和正整数 n 恒成立, 则实数 λ 的最大值为__________.

6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $f(2+x)=f(2-x)$, 当 $x\in[-2,0]$ 时, $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^x-1$, 若在区间 $(-2,6)$ 内的关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a\geq 0$ 且 $a\neq 1)$ 恰有 4 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-\frac{1}{4},1)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $(1,8)$　　D. $(1,4)$

7 在如图的长方体中, $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 点 E 在棱 AB 上移动, 求异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值.

8 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

9 如图, 扇形 ABC 是一块半径为 2 千米, 圆心角为 $60°$ 的风景区,P 点在弧 BC 上, 现欲在风景区中规划三条商业街道, 要求街道 PQ 与 AB 垂直, 街道 PR 与 AB 垂直, 线段 RQ 表示第三条街道.

(a) 如果 P 位于弧 $\widehat{BC}$ 的中点, 求三条街道的总长度.

(b) 由于环境的原因, 三条街道 PQ, PR, RQ 每年能产生的经济效益分别为每千米 300 万元, 200 万元及 400 万元, 则这三条街道每年能产生的经济总效益最高为多少? (精确到 1 万元)

10 已知函数 $f(x)=mx-\frac{m}{x}, g(x)=2\ln x$.

(a) 当 $m=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(b) 当 $m=1$ 时, 判断方程 $f(x)=g(x)$ 的实根个数;

(c) 若 $x\in(1,e]$ 时, 不等式 $f(x)-g(x)<2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

11 函数 $f(x)=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$ 的定义域为______________.

12 设 $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+2y=1$, 则函数 $\omega=3y^2+2x$ 的值域为______________.

13 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(kx^2-2x+5)$ 在 $[-1,2]$ 上严格增, 则实数 $k\in$______________.

14 已知函数 $f(x)=\lg(2^x+x^{-x}+a-1)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是______________.

15 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$, 且 $f(1)=0$, 若不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 则方程的实根个数为_________.

16 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称. 若对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 不等式 $f(x^2-6x+21)+f(y^2-8y)<0$ 恒成立, 则当 $x>3$ 时, x^2+y^2 的取值范围是______________.

17 设函数 $f(x)=x|x-a|, a\in\mathbb{R}$. 当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$ 时, 不等式 $f(x)\leq 2$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

18 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(x)=x^2-2ax+4, a\geq 1, g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值 $m(a)$;

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$, $f(x_2)>g(x_1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19 已知一组数据点 $(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\ldots,(x_n,y_n)$, 用最小二乘法得到其线性回归方程 $\hat{y}=-\sqrt{2}x+4$, 若数据 $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ 的均值为 $\sqrt{2}$, 则可以估计数据 $y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n$ 的均值为__________.

20 在一次抽奖活动中, 假设每 **10** 张奖券中有一等奖券 **1** 张, 可获价值 **50** 元的奖品; 有二等奖券 **3** 张, 每张可获得价值 **10** 元的奖品; 其余 **6** 张没有奖. 某顾客从这 **10** 张奖券中任抽 **2** 张, 求该顾客获奖的概率.

21 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值.

22 已知 a 是实数且 $a \neq 0$, 证明: $\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$.

Proof. 欲证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

即证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}} \geq a^2+\frac{1}{a^2}+\sqrt{2}-2$$

即证明

$$a^4+\frac{1}{a^4} \geq (a^2+\frac{1}{a^2})^2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+8-4\cdot\sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{8-4\cdot\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,
得证.

$\blacksquare$

23 已知 a, b, c 为实数, 证明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$.

证:
欲证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$$

即证明

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0 \tag{1}$$

$\because$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2) \geq 0$$

$\therefore$ (1) 式得证.
$\because$ 以上步骤均可逆,
得证.

■

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

24 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$**,** 且 $a>b>c$**.** 求证**:** $a>0$ 且 $c<0$**.**

证:

$$\because a>b>c$$
$$\therefore 3a>a+b+c$$
$$\because a>c, b>c$$
$$\therefore a+b>2c,\ a+b+c>3c$$
$$\because a+b+c=0$$
$$\therefore 3a>0, 3c<0.$$
$$\text{即 } a>0, c<0.$$

■

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

25 已知 $x,y\in\mathbb{R}$**,** 且 $x>y$**,** 比较 x^3-y^3 与 xy^2-x^2y 的大小**.**

证:

$$\begin{aligned}(x^3-y^3)-(xy^2-x^2y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(y-x)\\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2+xy)\\ &= (x-y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= (x-y)(x+y)^2\\ \because x &> y\\ \therefore (x-y)(x+y)^2 &\geq 0\\ \therefore (x^3-y^3)-(xy^2-x^2y) &\geq 0.\end{aligned}$$

即 x^3-y^3 大于 xy^2-x^2y.

■

26 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1)<f(1-3x)$, 则 x 的取值范围是__________.

这种题目得考虑自变量在定义域内，再求解.

27 已知函数 $f(x)=4+log_a(2x-3),(a>0\wedge a\neq 1)$ 的图像恒过定点 P, 且点 P 在函数 $g(x)=x^a$ 的图像上, 则 $a=$______________.

这边定点求错了.

28 已知函数 $f(x)=|x-1|(x+1),x\in[a,b]$ 的值域为 $[0,8]$, 则 $a+b$ 的取值范围是______________.

图是画对了的，但是脑子卡住了，关于值域没反应过来.

29 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1)+f(2m-1)>0$, 则实数 m 的取值范围是______________.

这题跟 26 号套路一样一样的，只是增加了对奇函数性质的考察.

30 函数 $g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $g(x)+g(-x)=x^2$, 设函数 $f(x)=g(x)-\dfrac{x^2}{2}$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上增, 若 $f(a)+f(a^2-2)\leq 0$, 则实数 a 的取值范围是______________.

本题难点在对于 $g(x)+g(-x)=x^2$ 的运用.

31 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-0.5)(x-1), & x<1\\ -x^2-ax+2a+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是__________.

一通分析后得出不等式组 $\begin{cases}a-\frac{1}{2}<0\\ -\frac{a}{2}\leq 1\\ a\leq 0\end{cases}$ ，很多人会忽略最下面一个不等式.

32 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_5(1-x)| & x<1\\ -(x-2)^2+2 & x\geq 1\end{cases}$ ，则方程 $f(x+\frac{1}{x}-2)=a,(a\in\mathbb{R})$ 的实根个数不可能为 (　　).

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

比较变态的一道题，听说需要分很多类.

33 已知函数 $f(x)=2x|x+a|-1$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是______________.

移项化成关于 a 的等式，画图，数个数.

34 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且 $f(x)\cdot f(-x)=1$ 和 $f(1+x)\cdot f(1-x)=4$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 恒成立. 若当 $x\in[0.1]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[\mathbf{1,2}]$，则当 $x\in[-100,100]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域为____________.

对于这题，要进行一个定义域的外延.

35 事件 A 与事件 B 互斥，它们都不发生的概率是 $\dfrac{3}{5}$，且 $P(A)=2P(B)$，则 $P(\overline{A})$__________.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生 A 或发生 B 的概率为 $1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{3}$. 接下来就很方便了.

36 已知平面向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2$，且 $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(3\mathbf{b}-\mathbf{c})$，则 $|\mathbf{c}-\mathbf{a}|$ 最小值为____________.

37 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+(4-3a)x+3a, x<0 \\ log_a(x+1)+1, \qquad x\geq 0\end{cases}$ $(a>0\wedge a\neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是________________.

要仔细考虑 $x^2+(4-3a)x+3a$ 和 $|f(x)|=2-x$ 相切时的情况.

38 已知 A, B 是由直线 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所围成矩形相邻的两个顶点, 点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 上的任意一点, 且存在实数 m,n 满足 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$, 则 $m+n$ 的取值范围是_______________.

我们先进行一个仿射变换，令 $x'=\dfrac{x}{a},y'=\dfrac{y}{b}$ 得到圆 C' 方程 $x^2+y^2=1$，
则 $\overrightarrow{OP}=(cos\theta,sin\theta),m\cdot\overrightarrow{OA}=(m,m),n\cdot\overrightarrow{OB}=(n,-n)$，
由 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$ 可得 $m+n=cos\theta$.
这样，由于三角函数的值域，答案就呼之欲出了.

39 已知 $P=\{x|x=4k,k\in\mathbb{Z}\}$, $Q=\{y|y=2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$, $R=\{s|s=6k+1,k\in\mathbb{Z}\}$, $a\in P$, $b\in Q$ 则以下肯定正确的是 (　　)

A. $a+b\in P$　　B. $a+b\in Q$　　C. $a+b\in R$　　D. $a+b\in P\cap Q\cap R$

这道题目用 Table.

40 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in[0,2]\\ 0.5f(x-2), & x\in(2,+\infty)\end{cases}$, 有下列 **2** 个命题:

命题 p: $\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{x}$;

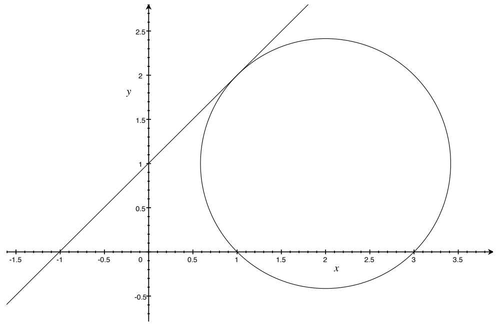
命题 q: 函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 3 个零点, 则下列判断正确的是 (　　)

A. p 是真命题,q 是真命题;
B. p 是假命题,q 是假命题;
C. p 是真命题,q 是假命题;
D. p 是假命题,q 是真命题.

我们先判断命题 p，可见 $x=2.5$ 时有极大值，带入发现矛盾，故命题 p 为假. 然后判断命题 q，先画出 $f(x)$ 的图像，然后画出 $y=\ln(x-1)$ 的图像. 用计算器求解得分别在 $x=1.39,x=2,x=2.6$ 时有零点，故有 3 个零点，命题 q 成立.

41 已知圆 C: $x^2+y^2-4x-2y+3=0$, 若圆 C 的切线在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 求此切线的方程.

我们知道，对于圆心为 (a,b)，半径为 r 的圆，它的切线方程为 $(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$，则圆 C 的切线方程就是 $(x-2)\cos\theta+(y-1)\sin\theta=\sqrt{2}$. 因为在 x 轴和 y 轴上的截距相等，那么易得要么切线过原点，要么切线的法向量为 $(1,1)$. 先来看法向量为 $(1,1)$ 时的情况，我们将直线方程化为 $\cos\theta x+\sin\theta y-2\cos\theta-\sin\theta-\sqrt{2}=0$，求解 $\cos\theta=\sin\theta$ 得出 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$. 化简得 $x+y-5=0$ 或 $x+y-1=0$. 现在考虑过原点的情况，因为沿用之前的切线方程较为不便，我们设方程为 $kx-y=0$. 由点到直线距离公式得圆心 $(2,1)$ 到直线距离为 $\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得 $k=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，对应直线的方程为 $\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}x-y=0$. 所以综上可得答案.



42 直线 $l: y = kx + b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A, B 两点, 按下列条件, 求直线 l 的方程:

(1) 若 $b = 1, |AB| = \frac{4\sqrt{5}}{3}$;

(2) 若 $b = 1$, 且直线 l 和 y 轴交于点 P, 满足 $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$;

(3) 使线段 AB 被 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平分;

(4) 若以 AB 为直径的圆过原点, 求 k, b 满足的等式.

Part I

集合与不等式

43 $a \in \mathbb{R}, f(x) = \log 2(\frac{1}{x} + a)$.

(1)