1 要得到 $y=\log(3-x)$ 的图像，只需要作 $y=\log x$ 关于 y 轴对称的图像，再向__________ 平移个单位而得到.

2 $(2x+1)^{10}$ 的二项展开式中第八项为__________

3 如果 $a>0$，设函数 $f(x)=\dfrac{2009^{x+1}+2007}{2009^x+1}+\sin x, x\in[-a,a]$ 的最大值为 M，最小值为 N，那么 $M+N=$__________.

4 若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $(a,6-a^2)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围是__________.

5 首项不为 0 的等差数列 a_n 前 n 项和是 S_n，若不等式 ${a_n}^2+\dfrac{{S_n}^2}{n^2}\geq\lambda {a_1}^2$ 对任意 a_n 和正整数 n 恒成立，则实数 λ 的最大值为__________.

6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^x-1$，若在区间 $(-2,6)$ 内的关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a\geq 0$ 且 $a\neq 1)$ 恰有 4 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是 (　　).

A. $(-\frac{1}{4},1)$　　B. $(8,+\infty)$　　C. $(1,8)$　　D. $(1,4)$

7 在如图的长方体中, $AD = AA_1 = 1, AB = 2$, 点 E 在棱 AB 上移动, 求异面直线 AC_1 与 A_1D 所成角的余弦值.

8 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

9 如图, 扇形 ABC 是一块半径为 2 千米, 圆心角为 60° 的风景区,P 点在弧 BC 上, 现欲在风景区中规划三条商业街道, 要求街道 PQ 与 AB 垂直, 街道 PR 与 AB 垂直, 线段 RQ 表示第三条街道.

(a) 如果 P 位于弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点, 求三条街道的总长度.

(b) 由于环境的原因, 三条街道 PQ, PR, RQ 每年能产生的经济效益分别为每千米 300 万元, 200 万元及 400 万元, 则这三条街道每年能产生的经济总效益最高为多少? (精确到 1 万元)

10 已知函数 $f(x) = mx - \frac{m}{x}, g(x) = 2\ln x$.

(a) 当 $m = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(b) 当 $m = 1$ 时, 判断方程 $f(x) = g(x)$ 的实根个数;

(c) 若 $x \in (1, e]$ 时, 不等式 $f(x) - g(x) < 2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

11 函数 $f(x)=\dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$ 的定义域为______________.

12 设 $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+2y=1$, 则函数 $\omega=3y^2+2x$ 的值域为______________.

13 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(kx^2-2x+5)$ 在 $[-1,2]$ 上严格增, 则实数 $k\in$______________.

14 已知函数 $f(x)=\lg(2^x+x^{-x}+a-1)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是______________.

15 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$, 且 $f(1)=0$, 若不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 则方程的实根个数为__________.

16 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 函数 $y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称. 若对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$, 不等式 $f(x^2-6x+21)+f(y^2-8y)<0$ 恒成立, 则当 $x>3$ 时, x^2+y^2 的取值范围是______________.

17 设函数 $f(x)=x|x-a|, a\in\mathbb{R}$. 当 $x\in[\dfrac{1}{2},2]$ 时, 不等式 $f(x)\leq 2$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

18 已知定义在区间 $[0,2]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(x)=x^2-2ax+4, a\geq 1, g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的最小值 $m(a)$;

(2) 若 $\forall x_1,x_2\in[0,2]$, $f(x_2)>g(x_1)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19 已知一组数据点 $(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_3,y_3),\dots,(x_n,y_n)$, 用最小二乘法得到其线性回归方程 $\hat{y}=-\sqrt{2}x+4$, 若数据 $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ 的均值为 $\sqrt{2}$, 则可以估计数据 $y_1,y_2,y_3,\dots,y_n$ 的均值为__________.

20 在一次抽奖活动中, 假设每 **10** 张奖券中有一等奖券 **1** 张, 可获价值 **50** 元的奖品; 有二等奖券 **3** 张, 每张可获得价值 **10** 元的奖品; 其余 **6** 张没有奖. 某顾客从这 **10** 张奖券中任抽 **2** 张, 求该顾客获奖的概率.

21 已知函数 $f(x)=2x^3-3x^2+2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值.

22 已知 a 是实数且 $a \neq 0$, 证明: $\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$.

Proof. 欲证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}}-\sqrt{2} \geq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

即证明

$$\sqrt{a^4+\frac{1}{a^4}} \geq a^2+\frac{1}{a^2}+\sqrt{2}-2$$

即证明

$$a^4+\frac{1}{a^4} \geq (a^2+\frac{1}{a^2})^2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2+2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+(\sqrt{2}-2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2}-2)(a^2+\frac{1}{a^2})+8-4\cdot\sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{8-4\cdot\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2+\frac{1}{a^2}-2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2+\frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,
得证.

■

23 已知 a, b, c 为实数, 证明 $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$.

证:
欲证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$$

即证明

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0 \tag{1}$$

$\because$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 - (b-c)^2) \geq 0$$

$\therefore$ (1) 式得证.
$\because$ 以上步骤均可逆,
得证.

$\blacksquare$

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

24 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$, 且 $a>b>c$. 求证: $a>0$ 且 $c<0$.

证:

$$\begin{gathered}\because a>b>c\\ \therefore 3a>a+b+c\\ \because a>c, b>c\\ \therefore a+b>2c,\ a+b+c>3c\\ \because a+b+c=0\\ \therefore 3a>0, 3c<0.\\ \text{即 } a>0, c<0.\end{gathered}$$

■

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

25 已知 $x,y\in\mathbb{R}$, 且 $x>y$, 比较 x^3-y^3 与 xy^2-x^2y 的大小.

证:

$$\begin{aligned}(x^3-y^3)-(xy^2-x^2y)&=(x-y)(x^2+xy+y^2)-xy(y-x)\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2+xy)\\&=(x-y)(x^2+2xy+y^2)\\&=(x-y)(x+y)^2\\ \because x>y&\\ \therefore (x-y)(x+y)^2\geq 0&\\ \therefore (x^3-y^3)-(xy^2-x^2y)\geq 0.&\end{aligned}$$

即 x^3-y^3 大于 xy^2-x^2y.

■

26 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的减函数, 且 $f(x-1)<f(1-3x)$, 则 x 的取值范围是__________.

这种题目得考虑自变量在定义域内，再求解.

27 已知函数 $f(x)=4+log_a(2x-3),(a>0\wedge a\neq 1)$ 的图像恒过定点 P, 且点 P 在函数 $g(x)=x^a$ 的图像上, 则 $a=$_______________.

这边定点求错了.

28 已知函数 $f(x)=|x-1|(x+1),x\in[a,b]$ 的值域为 $[0,8]$, 则 $a+b$ 的取值范围是_______________.

图是画对了的，但是脑子卡住了，关于值域没反应过来.

29 已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的减函数, 若 $f(m-1)+f(2m-1)>0$, 则实数 m 的取值范围是_______________.

这题跟 26 号套路一样一样的，只是增加了对奇函数性质的考察.

30 函数 $g(x)$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $g(x)+g(-x)=x^2$, 设函数 $f(x)=g(x)-\dfrac{x^2}{2}$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上增, 若 $f(a)+f(a^2-2)\leq 0$, 则实数 a 的取值范围是_______________.

本题难点在对于 $g(x)+g(-x)=x^2$ 的运用.

31 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-0.5)(x-1), & x<1\\ -x^2-ax+2a+1, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是__________.

一通分析后得出不等式组 $\begin{cases}a-\frac{1}{2}<0\\ -\frac{a}{2}\leq 1\\ a\leq 0\end{cases}$ ，很多人会忽略最下面一个不等式.

32 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_5(1-x)| & x<1\\ -(x-2)^2+2 & x\geq 1\end{cases}$ ，则方程 $f(x+\frac{1}{x}-2)=a,(a\in\mathbb{R})$ 的实根个数不可能为 ( ).

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

比较变态的一道题，听说需要分很多类.

33 已知函数 $f(x)=2x|x+a|-1$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_______________.

移项化成关于 a 的等式，画图，数个数.

34 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)\cdot f(-x)=1$ 和 $f(1+x)\cdot f(1-x)=4$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 恒成立. 若当 $x\in[0.1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[\mathbf{1},\mathbf{2}]$, 则当 $x\in[-100,100]$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为____________.

对于这题，要进行一个定义域的外延.

35 事件 A 与事件 B 互斥, 它们都不发生的概率是 $\frac{3}{5}$, 且 $P(A)=2P(B)$, 则 $P(\overline{A})$__________.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生 A 或发生 B 的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{3}$. 接下来就很方便了.

36 已知平面向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2$, 且 $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(3\mathbf{b}-\mathbf{c})$, 则 $|\mathbf{c}-\mathbf{a}|$ 最小值为____________.

37 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4-3a)x+3a, x<0\\ log_a(x+1)+1, \quad x\geq 0\end{cases}$ $(a>0\wedge a\neq 1)$ 在 $\mathbb{R}$ 上减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是________________.

要仔细考虑 $x^2+(4-3a)x+3a$ 和 $|f(x)|=2-x$ 相切时的情况.

38 已知 A, B 是由直线 $x=\pm a$, $y=\pm b$ 所围成矩形相邻的两个顶点，点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 上的任意一点，且存在实数 m,n 满足 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$，则 $m+n$ 的取值范围是__________.

我们先进行一个仿射变换，令 $x'=\dfrac{x}{a}, y'=\dfrac{y}{b}$ 得到圆 C' 方程 $x^2+y^2=1$，
则 $\overrightarrow{OP}=(cos\theta,sin\theta), m\cdot\overrightarrow{OA}=(m,m), n\cdot\overrightarrow{OB}=(n,-n)$，
由 $\overrightarrow{OP}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$ 可得 $m+n=cos\theta$.
这样，由于三角函数的值域，答案就呼之欲出了.

39 已知 $P=\{x|x=4k,k\in\mathbb{Z}\}$, $Q=\{y|y=2k+1,k\in\mathbb{Z}\}$, $R=\{s|s=6k+1,k\in\mathbb{Z}\}$, $a\in P$, $b\in Q$ 则以下肯定正确的是 (　　)

A. $a+b\in P$　　B. $a+b\in Q$　　C. $a+b\in R$　　D. $a+b\in P\cap Q\cap R$

这道题目用 Table.

40 对于函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in[0,2]\\ 0.5f(x-2), & x\in(2,+\infty)\end{cases}$，有下列 **2** 个命题:

命题 p: $\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow f(x)\le\dfrac{1}{x}$;

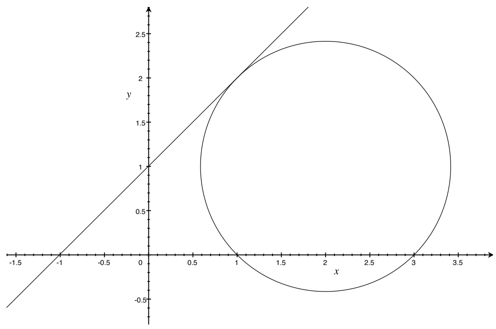
命题 q: 函数 $y=f(x)-\ln(x-1)$ 有 3 个零点，则下列判断正确的是 (　　)

A. p 是真命题,q 是真命题;
B. p 是假命题,q 是假命题;
C. p 是真命题,q 是假命题;
D. p 是假命题,q 是真命题.

我们先判断命题 p，可见 $x=2.5$ 时有极大值，带入发现矛盾，故命题 p 为假. 然后判断命题 q，先画出 $f(x)$ 的图像，然后画出 $y=\ln(x-1)$ 的图像. 用计算器求解得分别在 $x=1.39, x=2, x=2.6$ 时有零点，故有 3 个零点，命题 q 成立.

41 已知圆 C: $x^2+y^2-4x-2y+3=0$, 若圆 C 的切线在 x 轴和 y 轴上的截距相等，求此切线的方程.

我们知道，对于圆心为 (a,b)，半径为 r 的圆，它的切线方程为 $(x-a)\cos\theta+(y-b)\sin\theta=r$，则圆 C 的切线方程就是 $(x-2)\cos\theta+(y-1)\sin\theta=\sqrt{2}$. 因为在 x 轴和 y 轴上的截距相等，那么易得要么切线过原点，要么切线的法向量为 $(1,1)$. 先来看法向量为 $(1,1)$ 时的情况，我们将直线方程化为 $\cos\theta x+\sin\theta y-2\cos\theta-\sin\theta-\sqrt{2}=0$，求解 $\cos\theta=\sin\theta$ 得出 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}$. 化简得 $x+y-5=0$ 或 $x+y-1=0$. 现在考虑过原点的情况，因为沿用之前的切线方程较为不便，我们设方程为 $kx-y=0$. 由点到直线距离公式得圆心 $(2,1)$ 到直线距离为 $\dfrac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得 $k=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}$，对应直线的方程为 $\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2}x-y=0$. 所以综上可得答案.



42 直线 $l: y = kx + b$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 相交于 A, B 两点, 按下列条件, 求直线 l 的方程:

(1) 若 $b = 1, |AB| = \frac{4\sqrt{5}}{3}$;

(2) 若 $b = 1$, 且直线 l 和 y 轴交于点 P, 满足 $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$;

(3) 使线段 AB 被 $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平分;

(4) 若以 AB 为直径的圆过原点, 求 k, b 满足的等式.

Part I

集合与不等式

43 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$.

(1) 若 $a = 5$, 解 $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $f(x) - \log_2((a-4)x + 2a - 5) = 0$ 的解集中仅有一个元素, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, 函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 **1**, 求 a 的取值范围.

(1) 因为 $\log 2(\frac{1}{x} + a) \geq 0$，所以 $x \in (-\infty, -\frac{1}{x})$.

(2) 由 $\log_2(\frac{1}{x} + a) = \log_2((a-4)x + 2a - 5)$，变形得 $(a-4)x^2 + (a-5)x - 1 = 0$(式 1)，且 $\frac{1}{x} + a \geq 0$.

若 $a = 4$，则 $x = -1$，符合题意；

$\Delta = a^2 - 6a + 9$ ，解得若 $\Delta = 0$，则 $a = 3$；若 $\Delta > 0$，则 $a \neq 3$；若 $\Delta < 0$，则 $a \in \varnothing$；

若 $a = 3$，则 $x = -1$，符合题意；

若 $a \notin \{3, 4\}$，由求根公式得 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{a-4}$；

若 $x = -1$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases} -1 + a > 0 \\ 2a - 4 \leq 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in (1, 2]$；

若 $x = \frac{1}{a-4}$ 是解，代入到式 1 中得 $\begin{cases} 2a - 4 > 0 \\ -1 + a \leq 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in \varnothing$；

综上，$a \in (1, 2] \cup \{3, 4\}$.

(3) 由复合函数单调性的性质可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上单调减.

由 $f(t) - f(t+1) \leq 1$ 可得 $\log_2 \frac{\frac{1}{t} + a}{\frac{1}{t+1} + a} \leq 1$；

进一步化简可得 $\frac{1}{t} + a \leq 2(\frac{1}{t+1} + a)$，得 $\frac{1-t}{t(t+1)} \leq a$；

令 $r = t - 1$，则 $r \in [0,]$；原式化为 $\frac{r}{r^2 - 3r + 2} \leq a$；

若 $r = 0$，$a \geq 0$；

若 $r \in (0, \frac{1}{2}]$，原式继续化为 $\frac{1}{r + \frac{1}{r} - 3 \leq a}$，由基本不等式解得 $a \geq \frac{2}{3}$.

综上，$a \in [\frac{2}{3}, +\infty]$.

44 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, $a - 3b - 5 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值是__________.

由条件可得 $a - 3b = 5$，而 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 可化为 $2^a + \frac{1}{2^{3b}}$，由基本不等式可得最小值为 $8\sqrt{2}$.

Part II

概率与分布

45 已知随机变量 ξ,η, 满足 $\xi \sim B(2,p)$, 且 $P_{(\xi\leq 1)=\frac{3}{4}}$, 则 $p=$__________.

判断该分布为伯努利分布,$\xi \sim B(2,p)$ 中的 2 代表实验次数,p 代表每一次实验的成功概率，故 $P_{(\xi\leq 1)} = P_{(\xi=0)} + P_{(\xi=1)}$，等于 $(1-p)^2 + 2P(1-p) = \frac{3}{4}$，解得 $p=\frac{1}{2}$.

46 把一个骰子连续抛掷两次, 记事件 M 为 "两次所得点数均为奇数", N 为 "至少有一次点数是 5", 则 $P(N|M=)$__________.

我们知道 $P(N|M) = \frac{P(M)}{P(MN)} = \dfrac{\frac{3\times 3}{36}}{\frac{1+C_2^1C_2^1}{36}} = \frac{5}{9}$.