

# Contents

<b>I</b>	<b>集合与不等式</b>	<b>3</b>
1	集合与逻辑	4
2	等式与不等式	5
<b>II</b>	<b>函数</b>	<b>9</b>
3	函数的性质与应用	10
4	导数	14
5	导数大题	15
<b>III</b>	<b>三角, 复数与向量</b>	<b>16</b>
6	三角	17
7	向量	18
<b>IV</b>	<b>几何体与空间几何</b>	<b>19</b>
8	立体几何	20
<b>V</b>	<b>概率与统计</b>	<b>21</b>
9	计数原理	22
10	概率初步	23
11	统计	24
12	分布	25
<b>VI</b>	<b>圆锥曲线</b>	<b>26</b>
13	椭圆	27
14	双曲线	28
15	抛物线	29

**VII 数列 30**

**VIII A 32**

## Part I

### 集合与不等式

## Chapter 1

### 集合与逻辑

1.1 已知  $P = \{x|x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $Q = \{y|y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $R = \{s|s = 6k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $a \in P$ ,  $b \in Q$  则以下肯定正确的是 ( )

A.  $a + b \in P$

B.  $a + b \in Q$

C.  $a + b \in R$

D.  $a + b \in P \cap Q \cap R$

这道题目用 Table.

## Chapter 2

### 等式与不等式

**2.1** 已知  $a$  是实数且  $a \neq 0$ , 证明:  $\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$ .

*Proof.* 欲证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} - \sqrt{2} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

即证明

$$\sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}} \geq a^2 + \frac{1}{a^2} + \sqrt{2} - 2$$

即证明

$$a^4 + \frac{1}{a^4} \geq (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2 + 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + (\sqrt{2} - 2)^2$$

即证明

$$0 \geq 2(\sqrt{2} - 2)(a^2 + \frac{1}{a^2}) + 8 - 4 \cdot \sqrt{2}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{8 - 4 \cdot \sqrt{2}}{2(\sqrt{2} - 2)}$$

即证明

$$0 \leq a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$$

因为

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

显然

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

因为以上步骤均可逆,  
得证. ■

**2.2** 已知  $a, b, c$  为实数, 证明  $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$ .

证:

欲证明

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ca + ab$$

即证明

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab \geq 0 \quad (2.1)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab &= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab) \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2) \geq 0$$

$\therefore$  (1) 式得证.

$\therefore$  以上步骤均可逆,

得证. ■

22, 23 题的证明都用到了分析法, 这是一种由结论推导至条件的方法. 除此之外证明不等式的常用方法还有综合法, 比较法 (做差或做商), 以及反证法.

**2.3** 已知实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 0$ , 且  $a > b > c$ . 求证:  $a > 0$  且  $c < 0$ .

证:

$$\begin{aligned} &\because a > b > c \\ &\therefore 3a > a + b + c \\ &\because a > c, b > c \\ &\therefore a + b > 2c, a + b + c > 3c \\ &\because a + b + c = 0 \\ &\therefore 3a > 0, 3c < 0. \\ &\text{即 } a > 0, c < 0. \end{aligned}$$

本题用到了不等式的加法性质, 值得注意.

2.4 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x > y$ , 比较  $x^3 - y^3$  与  $xy^2 - x^2y$  的大小.

证:

$$\begin{aligned}(x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) &= (x - y)(x^2 + xy + y^2) - xy(y - x) \\&= (x - y)(x^2 + xy + y^2 + xy) \\&= (x - y)(x^2 + 2xy + y^2) \\&= (x - y)(x + y)^2\end{aligned}$$

$$\because x > y$$

$$\therefore (x - y)(x + y)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x^3 - y^3) - (xy^2 - x^2y) \geq 0.$$

即  $x^3 - y^3$  大于  $xy^2 - x^2y$ .

2.5 已知  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a - 3b - 5 = 0$ , 则  $2^a + \frac{1}{8^b}$  的最小值是\_\_\_\_\_.

由条件可得  $a - 3b = 5$ , 而  $2^a + \frac{1}{8^b}$  可化为  $2^a + \frac{1}{2^{3b}}$ , 由基本不等式可得最小值为  $8\sqrt{2}$ .

2.6 已知  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2(\frac{1}{x} + a)$ .

(1) 若  $a = 5$ , 解  $f(x) \geq 0$ ;

(2) 若  $f(x) - \log_2((a - 4)x + 2a - 5) = 0$  的解集中仅有一个元素, 求  $a$  的取值范围;

(3) 设  $a > 0$ , 若对任意  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ , 函数  $f(x)$  在  $[t, t + 1]$  上的最大值与最小值的差不超过 1, 求  $a$  的取值范围.

(1) 因为  $\log_2(\frac{1}{x} + a) \geq 0$ , 所以  $x \in (-\infty, -\frac{1}{x})$ .

(2) 由  $\log_2(\frac{1}{x} + a) = \log_2((a - 4)x + 2a - 5)$ , 变形得  $(a - 4)x^2 + (a - 5)x - 1 = 0$  (式 1), 且  $\frac{1}{x} + a \geq 0$ .

若  $a = 4$ , 则  $x = -1$ , 符合题意;

$\Delta = a^2 - 6a + 9$ , 解得若  $\Delta = 0$ , 则  $a = 3$ ; 若  $\Delta > 0$ , 则  $a \neq 3$ ; 若  $\Delta < 0$ , 则  $a \in \emptyset$ ;

若  $a = 3$ , 则  $x = -1$ , 符合题意;

若  $a \notin \{3, 4\}$ , 由求根公式得  $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{a - 4}$ ;

若  $x = -1$  是解, 代入到式 1 中得  $\begin{cases} -1 + a > 0 \\ 2a - 4 \leq 0 \end{cases}$ , 解得  $a \in (1, 2]$ ;

若  $x = \frac{1}{a - 4}$  是解, 代入到式 1 中得  $\begin{cases} 2a - 4 > 0 \\ -1 + a \leq 0 \end{cases}$ , 解得  $a \in \emptyset$ ;

综上,  $a \in (1, 2] \cup \{3, 4\}$ .

(3) 由复合函数单调性的性质可知  $f(x)$  在  $\mathbb{D}$  上单调减.

由  $f(t) - f(t+1) \leq 1$  可得  $\log_2 \frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+1}+a} \leq 1$ ;

进一步化简可得  $\frac{1}{t} + a \leq 2(\frac{1}{t+1} + a)$ , 得  $\frac{1-t}{t(t+1)} \leq a$ ;

令  $r = t - 1$ , 则  $r \in [0, 1]$ ; 原式化为  $\frac{r}{r^2-3r+2} \leq a$ ;

若  $r = 0$ ,  $a \geq 0$ ;

若  $r \in (0, \frac{1}{2}]$ , 原式继续化为  $\frac{1}{r+\frac{1}{r}-3} \leq a$ , 由基本不等式解得  $a \geq \frac{2}{3}$ .

综上,  $a \in [\frac{2}{3}, +\infty)$ .



## Part II

### 函数

## Chapter 3

### 函数的性质与应用

3.1 要得到  $y = \log(3 - x)$  的图像, 只需要作  $y = \log x$  关于  $y$  轴对称的图像, 再向\_\_\_\_\_ 平移个单位而得到.

3.2 如果  $a > 0$ , 设函数  $f(x) = \frac{2009^{x+1} + 2007}{2009^x + 1} + \sin x, x \in [-a, a]$  的最大值为  $M$ , 最小值为  $N$ , 那么  $M + N =$ \_\_\_\_\_.

3.3 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 且  $f(2+x) = f(2-x)$ , 当  $x \in [-2, 0]$  时,  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^x - 1$ , 若在区间  $(-2, 6)$  内的关于  $x$  的方程  $f(x) - \log_a(x+2) = 0 (a \geq 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  恰有 4 个不同的实数根, 则实数  $a$  的取值范围是 ( ).

A.  $(-\frac{1}{4}, 1)$

B.  $(8, +\infty)$

C.  $(1, 8)$

D.  $(1, 4)$

3.4 函数  $f(x) = \frac{\log_2(x-1)}{\sqrt{|x-2|-1}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

3.5 设  $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y = 1$ , 则函数  $\omega = 3y^2 + 2x$  的值域为\_\_\_\_\_.

3.6 设函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(kx^2 - 2x + 5)$  在  $[-1, 2]$  上严格增, 则实数  $k \in$ \_\_\_\_\_.

3.7 已知函数  $f(x) = \lg(2^x + x^{-x} + a - 1)$  的值域为  $\mathbb{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

3.8 设二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + 1$ , 且  $f(1) = 0$ , 若不等式  $f(x) \geq 0$  的解集为  $\mathbb{R}$ , 则方程的实根个数为\_\_\_\_\_.

3.9 已知函数  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的增函数, 函数  $y = f(x-1)$  的图像关于点  $(1, 0)$  对称. 若对任意的  $x, y \in \mathbb{R}$ , 不等式  $f(x^2 - 6x + 21) + f(y^2 - 8y) < 0$  恒成立, 则当  $x > 3$  时,  $x^2 + y^2$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

3.10 设函数  $f(x) = x|x-a|, a \in \mathbb{R}$ . 当  $x \in [\frac{1}{2}, 2]$  时, 不等式  $f(x) \leq 2$  恒成立, 试求实数  $a$  的取值范围.

3.11 已知定义在区间  $[0, 2]$  上的两个函数  $f(x)$  和  $g(x)$ , 其中  $f(x) = x^2 - 2ax + 4, a \geq 1, g(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

(1) 求函数  $y = f(x)$  的最小值  $m(a)$ ;

(2) 若  $\forall x_1, x_2 \in [0, 2], f(x_2) > g(x_1)$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

3.12 已知函数  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ , 求函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 2]$  上的最大值.

3.13 已知  $f(x)$  是定义在  $[-1, 1]$  上的减函数, 且  $f(x-1) < f(1-3x)$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

这种题目得考虑自变量在定义域内, 再求解.

3.14 已知函数  $f(x) = 4 + \log_a(2x-3), (a > 0 \wedge a \neq 1)$  的图像恒过定点  $P$ , 且点  $P$  在函数  $g(x) = x^a$  的图像上, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

这边定点求错了.

3.15 已知函数  $f(x) = |x-1|(x+1), x \in [a, b]$  的值域为  $[0, 8]$ , 则  $a+b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

图是画对了的, 但是脑子卡住了, 关于值域没反应过来.

3.16 已知奇函数  $f(x)$  是定义在  $(-2, 2)$  上的减函数, 若  $f(m-1) + f(2m-1) > 0$ , 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

这题跟 26 号套路一样一样的, 只是增加了对奇函数性质的考察.

3.17 函数  $g(x)$  对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 有  $g(x) + g(-x) = x^2$ , 设函数  $f(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$ , 且  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上增, 若  $f(a) + f(a^2-2) \leq 0$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

本题难点在对于  $g(x) + g(-x) = x^2$  的运用.

3.18 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (a-0.5)(x-1), & x < 1 \\ -x^2 - ax + 2a + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  在  $\mathbb{R}$  上是减函数, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

一通分析后得出不等式组  $\begin{cases} a - \frac{1}{2} < 0 \\ -\frac{a}{2} \leq 1 \\ a \leq 0 \end{cases}$ , 很多人会忽略最下面一个不等式.

3.19 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\log_5(1-x)| & x < 1 \\ -(x-2)^2 + 2 & x \geq 1 \end{cases}$ , 则方程  $f(x + \frac{1}{x} - 2) = a, (a \in \mathbb{R})$  的实根个数不可能为 ( ).

- A. 5 个                      B. 6 个                      C. 7 个                      D. 8 个

比较变态的一道题, 听说需要分很多类.

3.20 已知函数  $f(x) = 2x|x+a| - 1$  有三个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

移项化成关于  $a$  的等式, 画图, 数个数.

3.21 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 且  $f(x) \cdot f(-x) = 1$  和  $f(1+x) \cdot f(1-x) = 4$  对  $\forall x \in \mathbb{R}$  恒成立. 若当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x)$  的值域为  $[1, 2]$ , 则当  $x \in [-100, 100]$  时, 函数  $f(x)$  的值域为\_\_\_\_\_.

对于这题, 要进行一个定义域的外延.

3.22 对于函数  $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 2] \\ 0.5f(x-2), & x \in (2, +\infty) \end{cases}$ , 有下列 2 个命题:

命题  $p: \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$ ;

命题  $q: \text{函数 } y = f(x) - \ln(x-1) \text{ 有 } 3 \text{ 个零点, 则下列判断正确的是 ( )}$

- A.  $p$  是真命题,  $q$  是真命题;  
B.  $p$  是假命题,  $q$  是假命题;  
C.  $p$  是真命题,  $q$  是假命题;  
D.  $p$  是假命题,  $q$  是真命题.

我们先判断命题  $p$ , 可见  $x = 2.5$  时有极大值, 带入发现矛盾, 故命题  $p$  为假. 然后判断命题  $q$ , 先画出  $f(x)$  的图像, 然后画出  $y = \ln(x-1)$  的图像. 用计算器求得分别在  $x = 1.39, x = 2, x = 2.6$  时有零点, 故有 3 个零点, 命题  $q$  成立.

3.23 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4-3a)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x+1) + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$  在  $\mathbb{R}$  上减, 且关于  $x$  的方程  $|f(x)| = 2 - x$  恰有两个不相等的实数解, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

要仔细考虑  $x^2 + (4-3a)x + 3a$  和  $|f(x)| = 2 - x$  相切时的情况.

## Chapter 4

### 导数

4.1 若函数  $f(x) = x^3 - 3x$  在区间  $(a, 6 - a^2)$  上有最小值, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## Chapter 5

### 导数大题

5.1 已知函数  $f(x) = mx - \frac{m}{x}$ ,  $g(x) = 2 \ln x$ .

- (a) 当  $m = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程;
- (b) 当  $m = 1$  时, 判断方程  $f(x) = g(x)$  的实根个数;
- (c) 若  $x \in (1, e]$  时, 不等式  $f(x) - g(x) < 2$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

## Part III

### 三角, 复数与向量



## Chapter 6

### 三角

6.1 三角形  $ABC$  的外心为  $O$ , 三个内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a(a - \frac{8}{5}c)$ ,  $b = 4$ , 则三角形  $ABC$  面积的最大值为\_\_\_\_\_.

由外心的性质可知,  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2$ , 于是  $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{4}{5}ac$

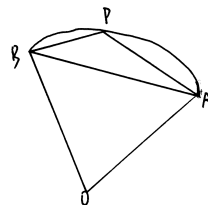
6.2 水域养殖水产,  $AO, BO$  为直线岸线,  $OA = 1000\text{m}$ ,  $OB = 1500\text{m}$ ,  $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$  水域边界为某圆的一段弧  $\widehat{AB}$ , 过  $\widehat{AB}$  上一点按线段  $PA$  和  $PB$  修养殖网箱, 知  $\angle APB = \frac{2\pi}{3}$ .

(1) 求岸线上  $A$  与  $B$  之间的距离;

(2) 若  $PA$  上每米 40 元利润,  $PB$  上每米 30 元利润, 记  $\angle PAB = \theta$ , 则两段最大经济收益是?(精确到元).

(1) 由余弦定理得  $|AB| = 500\sqrt{7}\text{m}$ .

(2) 由正弦定理得  $\frac{PA}{\sin \theta} = \frac{PB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)} = \frac{500\sqrt{7}}{\sin \frac{2\pi}{3}}$ , 设  $\frac{500\sqrt{7}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = c$ , 则  $PA = c \sin(\frac{\pi}{3} - \theta)$ ,  $PB = c \sin \theta$ , 利润为  $40c \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) + 30c \sin \theta$ , 化简可得  $10c(2\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)$ , 使用辅助角公式可得  $10\sqrt{13}c \sin(\theta + \arctan 2\sqrt{3})$ , 求得最大值为 16166 元.



## Chapter 7

### 向量

7.1 已知平面向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  满足  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ , 且  $(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - \mathbf{c})$ , 则  $|\mathbf{c} - \mathbf{a}|$  最小值为\_\_\_\_\_.

## **Part IV**

### 几何体与空间几何

## Chapter 8

### 立体几何

8.1 在如图的长方体中,  $AD = AA_1 = 1, AB = 2$ , 点  $E$  在棱  $AB$  上移动, 求异面直线  $AC_1$  与  $A_1D$  所成角的余弦值.

## Part V

### 概率与统计

## Chapter 9

### 计数原理

9.1  $(2x + 1)^{10}$  的二项展开式中第八项为\_\_\_\_\_

## Chapter 10

### 概率初步

10.1 把一个骰子连续抛掷两次, 记事件  $M$  为“两次所得点数均为奇数”,  $N$  为“至少有一次点数是 5”, 则  $P(N|M=)$ \_\_\_\_\_.

我们知道  $P(N|M) = \frac{P(M)}{P(MN)} = \frac{\frac{3 \times 3}{36}}{\frac{1 + C_2^1 C_2^1}{36}} = \frac{5}{9}$ .

10.2 某超市在节日期间进行有奖促销, 凡在该超市购物满 400 元的顾客, 将获得一次摸奖机会, 规则如下: 奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球, 1 个黄球, 1 个白球和 1 个黑球, 顾客不放回的每次摸出 1 个球, 若摸到黑球则停止摸奖, 否则就继续摸球, 规定摸到红球奖励 20 元, 摸到白球或黄球奖励 10 元, 摸到黑球不奖励. 求 1 名顾客摸球 2 次停止摸奖的概率.

10.3 在一次抽奖活动中, 假设每 10 张奖券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获得价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖. 某顾客从这 10 张奖券中任抽 2 张, 求该顾客获奖的概率.

10.4 事件  $A$  与事件  $B$  互斥, 它们都不发生的概率是  $\frac{3}{5}$ , 且  $P(A) = 2P(B)$ , 则  $P(\bar{A})$ \_\_\_\_\_.

互斥意味着两件事不可能同时发生. 则仅发生  $A$  或发生  $B$  的概率为  $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ . 接下来就很方便了.

## Chapter 11

### 统计

11.1 已知一组数据点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ , 用最小二乘法得到其线性回归方程  $\hat{y} = -\sqrt{2}x + 4$ , 若数据  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  的均值为  $\sqrt{2}$ , 则可以估计数据  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  的均值为\_\_\_\_\_.



## Chapter 12

### 分布

**12.1** 已知随机变量  $\xi, \eta$ , 满足  $\xi \sim B(2, p)$ , 且  $P_{(\xi \leq 1)} = \frac{3}{4}$ , 则  $p =$ \_\_\_\_\_.

判断该分布为伯努利分布,  $\xi \sim B(2, p)$  中的 2 代表实验次数,  $p$  代表每一次实验的成功概率, 故  $P_{(\xi \leq 1)} = P_{(\xi=0)} + P_{(\xi=1)}$ , 等于  $(1-p)^2 + 2P(1-p) = \frac{3}{4}$ , 解得  $p = \frac{1}{2}$ .

## Part VI

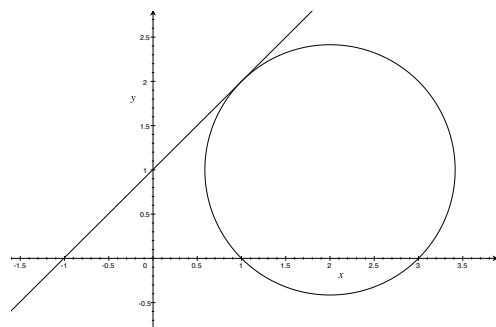
### 圆锥曲线

## Chapter 13

### 椭圆

**13.1** 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ , 若圆  $C$  的切线在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距相等, 求此切线的方程.

我们知道, 对于圆心为  $(a, b)$ , 半径为  $r$  的圆, 它的切线方程为  $(x - a)\cos\theta + (y - b)\sin\theta = r$ , 则圆  $C$  的切线方程就是  $(x - 2)\cos\theta + (y - 1)\sin\theta = \sqrt{2}$ . 因为在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距相等, 那么易得要么切线过原点, 要么切线的法向量为  $(1, 1)$ . 先看法向量为  $(1, 1)$  时的情况, 我们将直线方程化为  $\cos\theta x + \sin\theta y - 2\cos\theta - \sin\theta - \sqrt{2} = 0$ , 求解  $\cos\theta = \sin\theta$  得出  $\theta = \frac{\pi}{4}$  或  $\frac{3\pi}{4}$ . 化简得  $x + y - 5 = 0$  或  $x + y - 1 = 0$ . 现在考虑过原点的情况, 因为沿用之前的切线方程较为不便, 我们设方程为  $kx - y = 0$ . 由点到直线距离公式得圆心  $(2, 1)$  到直线距离为  $\frac{|2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{2}$ , 解得  $k = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ , 对应直线的方程为  $\frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}x - y = 0$ . 所以综上可得答案.



**13.2** 已知  $A, B$  是由直线  $x = \pm a, y = \pm b$  所围成矩形相邻的两个顶点, 点  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$  上的任意一点, 且存在实数  $m, n$  满足  $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$ , 则  $m + n$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

我们先进行一个仿射变换, 令  $x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}$  得到圆  $C'$  方程  $x'^2 + y'^2 = 1$ ,

则  $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta, \sin\theta), m \cdot \overrightarrow{OA} = (m, m), n \cdot \overrightarrow{OB} = (n, -n)$ ,

由  $\overrightarrow{OP} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$  可得  $m + n = \cos\theta$ .

这样, 由于三角函数的值域, 答案就呼之欲出了.

**13.3** 直线  $l: y = kx + b$  和椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$  相交于  $A, B$  两点, 按下列条件, 求直线  $l$  的方程:

(1) 若  $b = 1, |AB| = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ ;

(2) 若  $b = 1$ , 且直线  $l$  和  $y$  轴交于点  $P$ , 满足  $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$ ;

(3) 使线段  $AB$  被  $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  平分;

(4) 若以  $AB$  为直径的圆过原点, 求  $k, b$  满足的等式.

## Chapter 14

### 双曲线

14.1 已知  $l_1: y = x, l_2: y = -x$ , 动点  $M(x, y)$ , 且  $|x| > |y|$ , 记  $M$  到  $l_1, l_2$  的距离分别为  $d_1, d_2$ , 满足  $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2} (a > 0)$ .

(1) 动点  $M$  的轨迹  $\Gamma$  的方程;

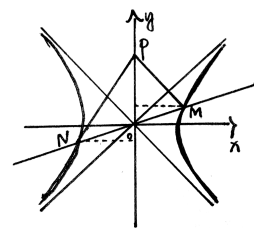
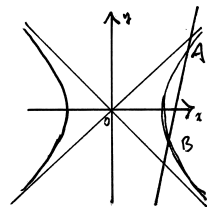
(2) 若直线的方向向量为  $(1, 2)$ , 过  $(\sqrt{2}a, 0)$  的直线  $l$  与  $\Gamma$  交于  $A, B$  两点, 那么以  $AB$  为直径的圆是否恰过原点  $O$ ? 若是, 求  $a$  的值; 若否, 判断原点在圆内还是圆外, 说明理由.

(3) 过原点  $O$  作斜率  $k$  为的直线交于  $M, N$  两点, 设  $P(0, 1)$ , 求  $\triangle PMN$  的面积  $S$  关于  $k$  的函数解析式, 并求  $S$  的取值范围.

(1) 由点到直线距离公式可得  $d_1 = \frac{|x-4|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|x+4|}{\sqrt{2}}$ , 代入  $d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2}{2}$  中得  $x^2 + y^2 = 1$ .

(2) 设  $l$  的方程为  $y = 2(2 - \sqrt{2}a)$ , 与  $\Gamma$  联立化简得  $-3x^2 + 8\sqrt{2}ax - 9a^2 = 0$ , 由于  $AB$  是圆的直径, 且  $O$  在圆上, 所以设  $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ ,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ , 故  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ . 由韦达定理得  $x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a$ ,  $x_1x_2 = 3a^2$ ,  $y_1y_2 = 4x_1x_2 - \sqrt{2}a(x_1 + x_2) + 2a^2$ . 于是得到  $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{35}{3}a^2 = 0$ , 而  $a = 0$  与题意不符, 故原点不在圆上. 又  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ , 故  $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ . 原点在圆外.

(3) 设  $M(x_m, y_m), N(x_n, y_n)$ , 则  $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_m| + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x_n| = \frac{1}{2} |x_m - x_n|$ . 设直线  $y = kx + b$ , 与  $\Gamma$  联立得  $(1 - k^2)x^2 - a = 0$ , 又由韦达定理得  $\frac{1}{2} |x_m - x_n| = \frac{1}{2} \sqrt{(x_m + x_n)^2 - 4x_mx_n} = \frac{a\sqrt{1-k^2}}{1-k^2}, k \in (-1, 1), S \in [a, +\infty]$ .



## Chapter 15

### 抛物线

## Part VII

### 数列

- 15.1 如果  $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 那么  $f(k+1) - f(k)$  共有\_\_\_\_\_项.
- 15.2 首项不为 0 的等差数列  $a_n$  前  $n$  项和是  $S_n$ , 若不等式  $a_n^2 + \frac{S_n^2}{n^2} \geq \lambda a_1^2$  对任意  $a_n$  和正整数  $n$  恒成立, 则实数  $\lambda$  的最大值为\_\_\_\_\_.

## Part VIII

### A



15.3 当  $x \in [a, +\infty)$  时, 幂函数  $y = x^2$  的图像总在  $y = x^{\frac{1}{2}}$  图像的上方, 则  $a$  取值范围为\_\_\_\_\_.

15.4 若对任意  $x \in [1, 2]$ , 均有  $|x^2 - a| + |x + a| = |x^2 + x|$ , 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

15.5 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为直角梯形,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp BC$ ,  $AB = AD$ ,  $BC = 2AB$ ,  $E, F$  为  $BC, BP$  中点。

i、求证平面  $AEF \parallel$  平面  $DCP$ ;

ii、若  $PBC \perp ABCD$ ,  $AP$  与  $PBC$  所成角为  $45^\circ$ ,  $CP \perp PB$ , 求  $P-AB-C$  大小。

