2025-01-09
Tags: [[DHBW]] [[Grundlagen Lineare Algebra und Analytische Geometrie]] [[Mathe]]

---

# Theorie

## Definitionen

### Vektor

- **Spaltenvektor**
  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \ v_2 \ \vdots \ v_n \end{pmatrix}$$

- **Zeilenvektor**
  $$\vec{v}^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
  Ein Zeilenvektor ist ein *transponierter* Spaltenvektor.

- **Nullvektor**
  $$\vec{0}=\begin{pmatrix}
  0\
  0\
  0\
  \end{pmatrix}$$
  Alle Elemente sind 0.

- **Einheitsvektor**
  $$\vec{e}=\begin{pmatrix}
  0\
  0\
  1\
  \end{pmatrix}$$
  Alle Elemente bis auf eines sind 0.

- **Skalar**:
  Eine Zahl, die kein Vektor ist, wird als **Skalar** bezeichnet.

### Beträge

- Die Länge eines Vektors ist dessen Betrag. $|\vec{v}|$
- Ein Betrag ist immer positiv.
  $$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^T\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+ ... + a_n^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i^2}}$$

### Normen

- Eine **Norm** ist eine Funktion, die einem Vektor eine Zahl zuordnet, die als *Größe* oder *Länge* des Vektors interpretiert werden kann. $p(\vec{x})=||\vec{x}||$

- Bedingungen von Normen:

1. **Dreiecksungleichung**: $||\vec{x}+\vec{y}||\leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ $\space\forall \vec{x},\vec{y}\in \R^n$
2. **absolute Homogenität**: $||s\vec{x}||=|s|||\vec{x}||$ $\space\forall\vec{x}\in X und \space\forall s\in \R$
3. **Definitheit**: $\forall \vec{x}\in \R^n$ gilt, wenn $||\vec{x}||= 0$ dann $\vec{x}=\vec{0}$

- Wichtige Normen
  - L1-Norm
    $$||\vec{x}|1 = \sum{i=1}^n |x_i| \quad \text{(Taxi-, Manhattan-Distanz)}$$
  - L2-Norm (euklidische Norm)
    $$||\vec{x}|2 = \|\vec{x}\| = \sqrt{\sum{i=1}^n |x_i|^2}$$
  - p-Norm
    $$||\vec{x}|p = \left( \sum{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
  - $\infty$-Norm / Maximum-Norm
    $$||\vec{x}|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \quad \text{(Größter Wert der Elemente eines Vektors)}$$

#### Linearkombination, Lineare Hülle

- Mulitplikative Kombination mehrere Vektoren $\vec{a_1},\vec{a_2}, ... ,\vec{a_n}$
  $$\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}{(\lambda_i \cdot \vec{a_i})}=\lambda_1 \cdot \vec{a_1}+\lambda_2 \cdot \vec{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$$
  mit $\lambda_i \in \R$ (Multiplikator)
- $\vec{b}$ ist dann eine **Linearkombination** von $\vec{a_1},\vec{a_2}, ... ,\vec{a_n}$
- Die lineare Hülle ist die Menge aller Linearkombinationen von $\vec{a_1},\vec{a_2}, ... ,\vec{a_n}$

##### Kollinearität

- Vektoren sind parallel (kollinear), wenn sich Vielfache voneinander sind.
- Es existiert ein $k\in\R$ sodass $\vec{a}=k\vec{b}$

##### Orthogonoalität

- Vektoren sind senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn das Skalarprodukt $\vec{a}^T\cdot\vec{b}=0$ ergibt.

#### Lineare Unabhängigkeit

- Vektoren sind **linear unabhängig** wenn $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2+ ... +\lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ nur erfüllt ist, wenn alle $\lambda_i=0.$
- Vektoren sind **linear abhängig** wenn außer $\lambda_i=0$ noch mindestens eine weitere Lösung vorliegt.
  - Ist in der Reihe ein **Nullvektor** enthalten, sind sie immer linear abhängig.

## Geraden und Ebenen

- Ein Ortsvektor führt vom Ursprung zu einem Punkt in den Raum.

## Geraden

- Eine Gerade ist eine Linie im Raum
- Hat keinen Anfang und kein Ende

#### Parameterdarstelleung

$$\vec{x}=\vec{p} + \lambda \cdot \vec{q},\space\lambda\in\R$$

- $\vec{p}$ ist der Stützvektor (Ortsvektor)
- $\vec{q}$ Richtungsvektor
- $\lambda$ ist die Schrittweite entlang des Richtungsvektor von dem Stützvektor aus
- $\vec{x}$ ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden

## Ebenen

- Wird von 2 Richtungsvektoren aufgespannt.

#### Parameterdarstelleung

$$\vec{x}=\vec{p} + \lambda \cdot \vec{q} + \mu \cdot \vec{r},\space\space\space\space\lambda,\mu\in\R$$

- $\vec{p}$ ist der Stützvektor (Ortsvektor, Aufpunkt)
- $\vec{q}$ Richtungsvektor 1
- $\vec{r}$ Richtungsvektor 2, darf nicht kollinear zu dem anderen Richtungsvektor sein
- $\lambda,\mu$ sind die Schrittweiten entlang der Richtungsvektoren von dem Stützvektor aus
- $\vec{x}$ ist ein beliebiger Punkt auf der Ebene

#### Koordinatengleichung

- Aus der Parameterdarstellung kann ein LGS erstellte werden, das 3 Zeilen hat. Wenn man dieses löst, erhält man die Koordinatengleichung.
  $$n_0+n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3 = 0, \space\space\space n_i\in\R$$
- $n_0$ legt die Höhe der Ebene fest

#### Normalenvektor

- Aus der Koordinatengleichung kann der **Normalenvektor** abgelesen werden.
  $$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$$

#### Kreuzprodukt

- mit dem Kreuzprodukt $\vec{q}\times\vec{r}$ kann schnell der Normalenvektor gebildet werden.
  $$
  \vec{a} \times \vec{b} =
  \begin{pmatrix}
  a_1 \
  a_2 \
  a_3

\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
b_1 \
b_2 \
b_3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_2 b_3 - a_3 b_2 \
a_3 b_1 - a_1 b_3 \
a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{pmatrix}
= \vec{n}
$$

- Um $n_0$ zu berechnen, wird ein Punkt der Ebene (Stützvektor) in die Koordinatenform eingesetzt für $x_1, x_2 \space und \space x_3$.

### Abstände

#### Ursprung-Ebene

- $\frac{|n_0|}{|\vec{n}|}$ ist der Abstand der Ebene zum Ursprung.

#### Punkt-Ebene

- Punkt $\vec{p}$ in die Koordinatenform einsetzen.
  $$\frac{|\vec{p}^T\vec{n}+n_0|}{|\vec{n}|}$$

---

## Operationen

### Skalarprodukt

- Ein Skalar $c \in \mathbb{R}$ multipliziert mit einem Vektor $\vec{v}$ ergibt:
  $$c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \ v_2 \ \vdots \ v_n \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} c \cdot v_1 \ c \cdot v_2 \ \vdots \ c \cdot v_n \end{pmatrix}$$
  - Ein Zeilenvektor $\vec{a}^T$ multipliziert mit einem Vektor $\vec{b}$:
    $$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1,a_2,...,a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \ b_2 \ \vdots \ b_n \end{pmatrix}= a_1 \cdot b_1+a_2 \cdot b_2 \space +\space ... \space +\space a_n \cdot b_n$$
    Es gilt stets, Zeilenvektor mal Spaltenvektor!

### Addition / Subtraktion von Vektoren

- mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ :
  $$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1\a_2\\vdots\a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1\b_2\\vdots\b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1\a_2 \pm b_2\\vdots\a_n \pm b_n

\end{pmatrix}$$
Die Vektoren müssen zur Addition/Subtraktion das gleiche Format aufweisen

---

## Anwendung

- **Multiplikation mit ( c = 2 ) und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \ 3 \ -2 \end{pmatrix}$**:
  $$
  2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \ 3 \ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \ 6 \ -4
  \end{pmatrix}$$

- **Transponieren eines Vektors**:
  $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \end{pmatrix}
  \longrightarrow
  \vec{v}^T = (1, 2)$$