МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет

В.Л. Котов

ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Учебное пособие

Рекомендовано Ученым советом механико-математического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород

2015

УДК 519.6
ББК 22.193
К73

К73 **Котов В.Л. Задания и упражнения по численным методам:** Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 111 с.

ISBN xxx-x-xxx-xx-xxx-xx

Рецензенты: д.ф.-м.н., профессор **В.И. Ерофеев**
к.ф.-м.н., доцент **Н.Н. Берендеев**

Учебное пособие содержит основные определения и необходимые теоремы в объеме, достаточном для их успешного применения при выполнении заданий в рамках типовой программы годового курса «Численные методы». В качестве упражнений рассмотрены примеры решения различных вариантов задач.

Предназначено для студентов механико-математического факультета ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика».

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии механико-математического факультета ННГУ,
к.ф.-м.н., доцент **Н.А. Денисова**

УДК 519.6
ББК 22.193

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

1. Погрешности приближенных вычислений

Число, незначительно отличающееся от точного числа A и заменяющее последнее в вычислениях, называется *приближенным числом a*.

Определение 1.1. Абсолютной погрешностью Δ приближенного числа a называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом A и числом a, т.е.

$$\Delta = |A - a|.$$

Определение 1.2. Под **предельной абсолютной погрешностью** приближенного числа понимается всякое число, не меньше абсолютной погрешности этого числа.

Таким образом, если Δ_a – *предельная абсолютная погрешность* приближенного числа a, заменяющего точное A, то

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a.$$

Отсюда следует, что точное число A заключено в границах

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a.$$

Для погрешности данные измерений существенна *абсолютная погрешность*, приходящаяся на единицу длины, которая носит название *относительной погрешности.*

Определение 1.3. Относительной погрешностью δ приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности Δ этого числа к модулю соответствующего точного числа A ($A \neq 0$), т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{A}.$$

Отсюда $\quad \Delta = |A|\delta$.

Так же как и для абсолютной погрешности, введем понятие *предельной относительной погрешности*.

Определение 1.4. Предельной относительной погрешностью δ_a данного приближенного числа a называется всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа.

По определению 1.4 имеем:

$$\delta \le \delta_a,$$

т.е. $\dfrac{\Delta}{A} \le \delta_a$, отсюда $\Delta \le |A|\delta_a$.

Следствие. За *предельную абсолютную погрешность* числа a можно принять:

$$\Delta_a = |A|\delta_a.$$

На практике преимущественно приходится иметь дело с приближенными числами, представляющими собой конечные десятичные дроби

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1}10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1}10^{m-n+1} \quad (\beta_m \neq 0).$$

Определение 1.5. Все сохраняемые десятичные знаки β_i ($i= m$, m-1,…, m-n+1) называются **значащими цифрами** приближенного числа b, причем возможно, что некоторые из них равны нулю (за исключением β_m).

При позиционном изображении числа b в десятичной системе счисления иногда приходится вводить лишние нули в начале или конце числа. Такие нули не считаются *значащими цифрами* [4].

Определение 1.6. Значащей цифрой приближенного числа называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда.

Все остальные нули, входящие в состав приближенного числа и служащие лишь для обозначения десятичных разрядов его, не причисляются к значащим цифрам.

Введем понятие о *верных десятичных знаках* приближенного числа.

Определение 1.7. Говорят, что n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближенного числа являются **верными в узком смысле**, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

Таким образом, если для приближенного числа a, заменяющего точное число A, известно, что

$$\Delta = |A - a| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1},$$

то, по определению, первые n цифр $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_{m-n+1}$ этого числа являются верными.

Замечание. В некоторых случаях удобно говорить, что число a является приближением точного числа A с n верными знаками *в широком смысле*, понимая под этим, что абсолютная погрешность $\Delta = |A - a|$ не превышает единицы десятичного разряда, выражаемого n-ой значащей цифрой приближенного числа.

Правило округления (по дополнению). Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры его, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями. При этом:

1) если первая из отброшенных цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки сохраняются без изменения;

2) если первая из отброшенных цифр больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица;
3) если первая из отброшенных цифр равна 5 и среди остальных отброшенных цифр имеются ненулевые, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу;
4) если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра сохраняется неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная (правило четной цифры).

Иными словами, если при округлении числа отбрасывается меньше половины единицы последнего сохраняемого десятичного разряда, то цифры всех сохраненных разрядов остаются неизменными; если же отброшенная часть числа составляет больше половины единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то цифра этого разряда увеличивается на единицу. В исключительном случае, когда отброшенная часть в точности рана половине единицы последнего сохраненного десятичного разряда, то для компенсации знаков ошибок округления используется правило честной цифры.

Очевидно, что при применении правила округления погрешность округления не превосходит $\frac{1}{2}$ единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества *верных значащих цифр*. В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к *округлению*.

Обычно руководствуются следующим *практическим правилом*:

при выполнении приближенных вычислений число значащих цифр промежуточных результатов не должно превышать числа верных цифр более чем на одну или две единицы.

Окончательный результат может содержать не более чем одну излишнюю значащую цифру, по сравнению с верными. Если при этом абсолютная погрешность результата не превышает двух единиц последнего сохраненного десятичного разряда, то излишняя цифра называется *сомнительной*.

Теорема 1.1. Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, деленную на первую значащую цифру данного числа, т.е.

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Замечание 1. Можно получить более точную оценку относительной погрешности δ.

Следствие 1. За предельную относительную погрешность числа a можно принять:

$$\delta_a = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, \tag{1.1}$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Следствие 2. Если число a имеет больше двух верных знаков, т.е. $n \ge 2$, то практически справедлива формула

$$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \tag{1.2}$$

Замечание 2. Если приближенное число a имеет n верных десятичных знаков в широком смысле, то оценки (1.1) и (1.2) следует увеличить в два раза.

Теорема 1.2 о погрешности произведения. Относительная погрешность δ произведения нескольких приближенных чисел $x_i \ (i = 1,2,...,n)$, отличных от нуля, не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел

$$\delta \le \delta_1 + \delta_2 + ...\delta_n \tag{1.3}$$

где δ_i - относительные погрешности чисел $x_i \ (i = 1,2,...,n)$.

Формула (1.3), очевидно, остается верной также, если сомножители имеют разные знаки.

Следствие. Предельная относительная погрешность δ_u произведения нескольких приближенных чисел $x_i \ (i = 1,2,...,n)$, отличных от нуля, равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел

$$\delta_u = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + ...\delta_{x_n} \tag{1.4}$$

где δ_{x_i} - предельные относительные погрешности чисел $x_i \ (i = 1,2,...,n)$.

Упражнения

а) Обозначим точные значения чисел большими буквами

$A = 8.9$, $B = 1.1$, $C = A \cdot B$.

Приближенные числа обозначим малыми буквами: a, b, c.

Оценку сверху абсолютной погрешности (предельную абсолютную погрешность) обозначим Δ_C (определение 1.2). Тогда $c = a \cdot b = C \pm \Delta_C$.

Определим C, c и Δ_C.

Запишем десятичные представления чисел A и B

$$A = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1}10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1}10^{m-n+1} = \underline{8}\cdot 10^0 + 9\cdot 10^{-1},$$

$$B = \beta_m 10^m + \beta_{m-1}10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1}10^{m-n+1} = \underline{1}\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1},$$

Старший разряд – единицы, всего разрядов два, следовательно, m=0, n = 2

Оценим абсолютную погрешность

$\Delta \le \Delta_a \le \frac{1}{2}10^{m-n+1}$ (определение 1.7).

Предельная абсолютная погрешность равна половине разряда – десятые или 0.510^{-1}, $\Delta_a = \Delta_b = 0.05 \Rightarrow a = 8.9 \pm 0.05$, $b = 1.1 \pm 0.05$

Оценим относительную погрешность

$\delta_a = \frac{1}{2\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, $\delta_b = \frac{1}{2\beta_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ (следствие 2 из теоремы 1.1)

Значения старших разрядов в десятичном представлении чисел A и B (подчеркнуты) α_m= 8, $\beta_m = 1$, $\Rightarrow \delta_a = 0.00625$, $\delta_b = 0.05$.

Относительная погрешность произведения $\delta_c = \delta_a + \delta_b$ (теорема 1.2)

Вычислим точное значение произведения $C = 8.9 \cdot 1.1 = 9.79$,

и его относительную погрешность $\delta_c = \delta_a + \delta_b = 0.00625+0.05=0.05625$.

Вычислим абсолютную погрешность числа, зная его относительную погрешность

$\Delta_C = \delta_C |C|$ (следствие из определения 1.4) $\Rightarrow$

$\Delta_C = 0.05625\cdot 9.79 = 0.5506875 \approx 0.55$,

Запишем приближенное число с учетом погрешности, применив правило округления по дополнению

$c = 9.79 \pm 0.55$, $0.5\cdot 10^0 < \Delta_c \le 0.5\cdot 10^1 \Rightarrow$ округлим до десятков (m =1)

m-n+1=1 $\Rightarrow n = 1$

$\Delta_{C_1} = \Delta_C + 0.21$, $c_1 = 10 \pm 0.76$, $0.5\cdot 10^0 < \Delta_{C_1} \le 0.5\cdot 10^1 \Rightarrow n = 1$,

$c_1 = 1\cdot 10^1 \pm 0.76$

Результат вычислений содержит только одну верную значащую цифру.

Ответ: $C = A\cdot B = 1\cdot 10^1 \pm 0.76$.

б) Что нужно изменить, чтобы ответ содержал больше верных значащих цифр? Относительная погрешность δ_b должна быть меньше, т.е., число b необходимо задавать с большим числом верных значащих цифр.

Положим n =3, тогда A = 8.9, B = 1.10,

$\Delta_a = 0.05$, $\Delta_b = 0.005$, $\delta_a = 0.00625$, $\delta_b = 0.005$,

$\delta_c = \delta_a + \delta_b = 0.01125$, $\Delta_C = \delta_C |C| = 0.1101375 \approx 0.11$,

$0.5\cdot 10^{-1} < \Delta_C \le 0.5\cdot 10^0$ округлим до единиц

$\Delta_{C_1} = \Delta_C + 0.21$, $c = 9.79$, $c_1 = 10 \pm 0.32$,

$0.5\cdot10^{-1} < \Delta_C \leq 0.5\cdot10^{0}$, $m\text{-}n+1=0$, $m = 1 \Rightarrow n = 2$,

Результат вычислений содержит две верные значащие цифры.

Ответ: $C=A\cdot B = 10 \pm 0.32$.

2. Интерполяционный полином Лагранжа

Постановка задачи интерполирования: пусть для функции $F(x)$, определенной на какой-либо части действительной оси, известны ее значения на некотором конечном множестве точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим их $F(x_0), F(x_1), \ldots, F(x_n)$. Требуется вычислить, хотя бы приближенно, значения при всех остальных x из области определения [1, 4].

Такой способ приближения называют *интерполяцией* или *интерполированием*. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *узлами интерполяции*. Если точка x, в которой вычисляется $F(x)$ лежит вне отрезка $[y_1, y_2]$, то употребляют термин *экстраполяция*. Здесь $y_1 = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $y_2 = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Наибольшее распространение получило так называемое алгебраическое интерполирование, при котором приближающая функция ищется среди полиномов степени n.

Определение 2.1. Полином $L_n(x)$, удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_i) = F(x_i) \quad i = 0,1,\ldots,n$$

называется **интерполяционным полиномом** для функции $F(x)$, построенным по узлам $x_i \;\; i = 0,1,\ldots,n$.

Определение 2.2.Искомый интерполяционный полином $L_n(x)$ может быть записан **в форме Лагранжа** следующим образом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{2.1}$$

Рассмотрим еще одну форму того же полинома. Введем обозначение $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Очевидно $\omega_n'(x) = \sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)$, $\omega_n'(x_i) = \prod_{j=0}^{n}(x_i - x_j)$.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i)\frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}.$$

Оценка остаточного члена интерполяционного многочлена Лагранжа (2.1) осуществляется следующим образом. Предположим, что функция $F(x)$ имеет непрерывную производную порядка $n+1$.

$$F(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{x}). \qquad (2.2)$$

Заметим, что ξ в этом выражении, вообще говоря, зависит от точки $\bar{x}$ в которой рассматривается разность $F_n(\bar{x}) - L_n(\bar{x})$.

Из (2.2) сразу следует

$$|F_n(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|, \qquad M_{n+1} = \max_{x\in[y_1, y_2]}\left|F^{(n+1)}(x)\right|$$

Определение 2.3. Правую часть (2.2) называют **остаточным членом** полинома Лагранжа ($R_n(x)$ – обозначение), для которого справедлива оценка [1, 4, 5]

$$R_n(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x), \qquad |R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)| \qquad (2.3)$$

Упражнения

а) Дана таблица узлов интерполяции для функции $F(x) = x^3$

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	8

$a = 0$, $b = 2$, $n=2$

Запишем определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ i\ne j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа при $n=2$

$$L_2 = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_{01})(x_2-x_1)}$$

Вычислим и приведем подобные члены

$$L_2 = 0 + 1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 8\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = -x(x-2) + 4x(x-1) = 3x^2 - 2x.$$

Проверка, что полученный полином является интерполяционным (по определению 2.1)

$L_2(0)=0=F(0)$.

$L_2(1)=3\cdot1^2 - 2\cdot1=1=F(1)$.

$L_2(2)=3\cdot2^2 - 2\cdot2=12-4=8=F(2)$.

Определим погрешность по формуле (2.3) при $n = 2$

$$F(x)\text{-}L_2(x) = R_2(x), \quad R_2 = \frac{F^{(2+1)}_{\xi\in[a,b]}(\xi)\prod_{j=0}^{2}(x - x_j)}{(2+1)!}.$$

погрешность или остаточный член.

$$\Delta = |F(x) - L_2(x)| \le \frac{\max\limits_{\xi\in[a,b]}\left|F^{(2+1)}(\xi)\right|}{(2+1)!}|\omega_{2+1}(x)|.$$

оценка погрешности (остаточного члена).

Вычислим погрешность в произвольной точке, удовлетворяющей условиям $x = \bar{x} \notin \{x_i\}_{i=0}^{2}, \quad i = 0, 1, 2$, Например, примем $\bar{x} = 0.1$,

$F(0.1) = (0.1)^3 = 0.001$, $L_2(0.1) = 3(0.1)^2 - 2\cdot 0.1 = 0.03\text{-}0.2 = -0.17$.

$\Delta = F(0.1) – L_2(0.1) =$<u>0.171</u>.

$M_3 = \max_{\xi\in[a,b]}\left|F^{(3)}(\xi)\right|$, $F^{(3)} = 6$, $\Rightarrow M_3 = 6$, максимум производной не зависит от x.

$\omega_2 = (0\text{-}0.1)(1\text{-}0.1)(2\text{-}0.1) = -0.1\cdot 0.9\cdot 1.9 = -0.171$

$R_2 = \frac{6}{6}\cdot 0.171=$<u>0.171</u>,

$\Delta=0.171=R_2=0.171$ - оценка остаточного члена совпала с абсолютной погрешностью.

Ответ: $L_2(x) = 3x^2 – 2x$, $0.171=R_2(0.1)\le 0.171$.

б) $F(x) = x^4$

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	16

Определение 2.2 интерполяционного полинома в форме Лагранжа при n=2

$$L_2 = f(x_0)\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_{01})(x_2 - x_1)}$$

$$L_2 = 1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 16\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = -x(x-2) + 8x(x-1) = 7x^2 - 6x.$$

Проверка (по определению 2.1)

$L_2(0)=0=F(0)$.

$L_2(1)= 7\cdot 1^2 - 6\cdot 1=1=F(1)$.

$L_2(2)= 7\cdot 2^2 - 6\cdot 2=28\text{-}12 = 16 =F(2)$.

Оценка погрешности

$\bar{x} = 0.1$, $F(0.1) = (0.1)^3 = 0.001$, $L_2(0.1) = 0.07 - \cdot 0.6 = -0.53$.
$\Delta = 0.0001-(-0.53) = 0.5301$.
$F^{(3)}(x) = 24x$, $M_3 = \max_{x\in[0,2]}|24x| = 48$.

$\omega_3 = 0.171$, $R_3 \le \frac{48}{6}\cdot 0.171 = 1.386$, $\Delta = 0.171 \le 1.386$ - абсолютная погрешность (значение остаточного члена) меньше оценки остаточного члена.

Ответ: $L_2 = 7x^2 - 6x$, $0.171 = R_2(0.1) \le 1.386$.

3. Интерполяционный полином Эрмита

Определение 3.1. **Разделенной разностью** нулевого порядка назовем значение функции в точке x_i. $F(x_i)$ – обозначение. Разделенную разность κ-го порядка следующим образом определим через разделенные разности κ-1 порядка

$$F(x_1;x_2;\ldots;x_k;x_{k+1}) = \frac{F(x_2;x_3;\ldots;x_k;x_{k+1}) - F(x_1;x_2;\ldots;x_k)}{x_{k+1}-x_k}.$$

При вычислении разделенных разностей принято [8] записывать их в виде таблицы

Таблица 3.1

Схема вычисления разделенных разностей

x_0	$F(x_0)$				
		$F(x_0;x_1)$			
x_1	$F(x_1)$		$F(x_0;x_1;x_2)$		
		$F(x_1;x_2)$	.		
x_2	$F(x_2)$	.	.	.	$F(x_0;x_1;\ldots;x_n)$
.	.	.	.		
.	.	.	$F(x_{n-2};x_{n-1};x_n)$		
.	.	$F(x_{n-1};x_n)$			
x_n	$F(x_n)$				

Приведем следующие свойства разделенных разностей [1, 5].

1. $$F(x_j;x_{j+1};\ldots;x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{F(x_i)}{\prod\limits_{\substack{l=j \\ l\ne j}}^{j+k} x_i - x_l}.$$
2. Разделенная разность является линейным оператором
$$(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(x_1;x_2;\ldots;x_k) = \alpha_1 F_1(x_1;x_2;\ldots;x_k) + \alpha_2 F_2(x_1;x_2;\ldots;x_k)$$
3. Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов (т.е. не меняется при любой их перестановке), например

$$F(x_1;x_2;\ldots;x_k;x_{k+1}) = F(x_{k+1};x_k;\ldots;x_2;x_1)$$

Определение 3.2. Интерполяционный полином $L_n(x)$ по узлам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ может быть представлен **в форме Ньютона** с разделенными разностями:

$$L_n(x) = F(x_0) + F(x_0;x_1)(x - x_0) + \ldots +$$
$$+ F(x_0;x_1;\ldots;x_n)\cdot(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (3.1)$$

Интерполяционную формулу Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция $F(x)$, но число узлов интерполяции постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

Замечание 1. При выводе формулы (3.1) не предполагалось, что узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ расположены в каком-то определенном порядке. Поэтому роль точки x_0 в формуле (3.1) может играть любая из точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Соответствующее множество интерполяционных формул можно получить из (3.1) перенумераций узлов

$$L_n(x) = F(x_n) + F(x_n;x_{n-1})(x - x_n) + \ldots +$$
$$+ F(x_n;x_{n-1};\ldots;x_0)\cdot(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1) \qquad (3.2)$$

Если $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то (3.1) называется формулой *интерполирования вперед*, а (3.2) – формулой *интерполирования назад*.

Замечание 2. Поскольку многочлены Лагранжа и Ньютона отличаются только формой записи, представление погрешности в виде (2.2) справедливо как для формулы Лагранжа, так и для формулы Ньютона. Однако погрешность интерполирования можно представить и в другом виде

$$F(x) - L_n(x) = F(x;x_0;\ldots;x_n)\omega_n(x),\ F(x;x_0;x_1;\ldots;x_n) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Постановка задачи интерполирования Эрмита: пусть имеется $m+1$ различных вещественных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_m$ - узлов интерполирования. Предположим, что в узле x_j заданы значения функции $f(x)$ и значения всех ее производных до порядка k_j-1

$$f(x_j), f'(x_j), \ldots, f^{(k_j-1)}(x_j), \quad j = 0,1,\ldots,m$$

Таким образом, о функции $f(x)$ известно $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n + 1$ данных.

Рассмотрим задачу о построении многочлена степени не выше n

$$H_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (3.3)$$

удовлетворяющего условиям

$$H_n^{(s)}(x_j) = f^{(s)}(x_j), \quad j = 0,1,\ldots,m, \quad s = 0,1,\ldots,k_j - 1. \qquad (3.4)$$

Здесь под $f^{(0)}(x)$ понимается $f(x)$.

Условия (3.4) представляют собой линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена (3.3).

Определение 3.3. Построение многочлена (3.3) по условиям (3.4) называется **интерполированием Эрмита** или *интерполированием с кратными узлами*. Число k_j называется *кратностью* узла x_j ($j = 0,1, \ldots, m$).

Отметим, что может существовать лишь один многочлен (3.3), удовлетворяющий условиям (3.4).

Из единственности интерполяционного многочлена Эрмита вытекает его существование [1, 5].

Приведем теорему о представлении остаточного члена интерполирования Эрмита для вещественной $n + 1$ раз дифференцируемой функции.

Теорема 3.1. Если $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на промежутке $[a, b]$, содержащем узлы интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то для любой точки $x \in [a,b]$

$$R_n(f,x) = \frac{\Omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где $a < \xi < b$, $\Omega(x) = (x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}$ и $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n+1$.

Связь разделенной разности и производной функции $F(x)$ задается выражением

$$F(x; x_1; x_2; \ldots; x_N) = \frac{F^{(N)}(\xi)}{N!},$$

поэтому примем за определение

$$F\left(\underbrace{x_i; x_i; \ldots; x_i}_{M-L+1\,раз}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(x_{i\ell}^{\varepsilon}; \ldots; x_{iM}^{\varepsilon}\right) = \frac{F^{(M-\ell)}\left(\bar{x}_i\right)}{(M-L)!}.$$

Будем иметь

$$H_n(x) = F(x_0) + F(x_0; x_0)(x-x_0) + \ldots + F\left(\underbrace{x_0; \ldots; x_0}_{k_0\,раз}\right)(x-x_0)^{k_0-1} +$$

$$+ F\left(\underbrace{x_0; \ldots; x_0}_{k_0\,раз}; x_1\right)(x-x_0)^{k_0} + F\left(\underbrace{x_0; \ldots; x_0}_{k_0\,раз}; x_1; x_1\right)(x-x_0)^{k_0} \cdot \qquad (3.5)$$

$$(x-x_1) + \ldots + F\left(\underbrace{x_0; \ldots; x_0}_{k_0\,раз}\underbrace{x_1; \ldots; x_1}_{k_1\,раз}\right)(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1-1} +$$

$$+\ldots+F\left(\underbrace{x_0;\ldots;x_0}_{k_0\ раз};\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1\ раз};\ldots;\underbrace{x_m;\ldots;x_m}_{k_m\ раз}\right)(x-x_0)^{k_0}\cdot(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m-1}.$$

Остаточный член формулы (3.5) определяется теоремой 3.1 и записывается следующим образом:

$$F(x)-H_n(x)=\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

$$\omega_n(x)=\prod_{i=0}^{m}\prod_{j=0}^{k_i}(x-x_i)=(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m} \text{ и } k_0+k_1+\ldots+k_m=n+1..$$

Упражнения

а) $F(x) = x^3$

x	$F(x)$	$F'(x)$
0	0	
2	8	12

x_0	F_0		
x_1	F_1	F_{01}	
x_1	F_1	F_{11}	F_{011}

$H_2 = f_0 + f_{01}(x - x_0) + f_{011}(x - x_0)(x - x_1)$ (формула (3.1))

Составим таблицу разделенных разностей с учетом кратности узлов интерполирования, учитывая также, что $F_{11}=F'(2)=12$. Остальные разности вычисляем по определению.

0	0		
2	8	4	
2	8	12	4

$H_2 = 0 + 4(x - 0)+4(x - 0)(x - 2)=4x +4x(x - 2)= \underline{4x^2 - 4x}$,

Проверим 2-ой вариант (формула (3.2))

$H_2 = f_1 + f_{11}(x - x_1) + f_{011}(x - x_1)^2$,

$H_2 = 8 + 12(x - 2) + 4(x - 2)^2 = 8 + 12x - 24 + 4(x^2 - 4x + 4) =$

$=-16 + 16 + 12x - 16x + 4x^2 = \underline{4x^2 - 4x}$.

Проверка по определению 3.3

$H_2(0) = 4\cdot0^2 - 4\cdot0 = 0 = F(0)$,

$H_2(2) = 4\cdot2^2 - 4\cdot2 = 16 - 8 = 8 = F(2)$,

$H_2'(x) = 8x - 4$, $H_2'(2) = 8\cdot2 - 4 = 12 = F'(2)$.

Вычислим и оценим погрешность в точке $x = \bar{x} \notin \{x_i\}_{i=0}^{2}, \quad i = 0, 1, 2$

$\bar{x} = 0.1,\ \Delta = F(\bar{x}) - H_2(\bar{x}),\ R_2 = \dfrac{F^{(3)}(\xi)}{3!}\omega_3(\bar{x}).$

$F(0.1) = 0.001$, $H_2(0.1) = 0.04 - 0.4 = -0.36$,
$F^{(3)}(x) = 6$, $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_2)^2$,
$\omega_2(0.1) = (0.1\text{-}0)(0.1\text{-}2)^2 = 0.1\cdot(1.9)^2 = 0.361$,
$R_2 = 0.361 = \Delta$.

Ответ: $H_2 = 4x^2 - 4x$, $0.361 = R_2(0.1) \le 0.361$.

б) $F(x) = x^4$

x	$F(x)$	$F'(x)$
0	0	0
2	16	

Составим таблицу разделенных разностей

x_0	F_0		
x_0	F_0	F_{00}	
x_1	F_1	F_{01}	F_{001}

0	0	0	
0	0	8	4
2	16		

$F_{00} = F'(0) = 0$

$H_2 = F_0 + F_{01}(x - x_0) + F_{001}(x - x_0)^2$,
$H_2(x) = 0 + 0 + 4x^2$.

Проверка (определение 3.1)

$H_2(0) = 0 = F(0)$,
$H_2'(0) = 8x = 0 = F'(0)$,
$H_2(2) = 4\cdot2^2 = 16 = F(2)$.

Оценка погрешности.

$\bar{x} = 0.1,\ \Delta = F(\bar{x}) - H_2(\bar{x}) = |0.0001 - 0.04| = 0.0399,$
$F^{(3)}(x) = 24x, M_3 = \max_{x\in[0,2]}|24x| = 48,$
$\omega_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)$,
$\omega_3(0.1) = (0.1)^2\cdot1.9 = 0.019$,
$R_3 \le \dfrac{48}{6}\cdot 0.019 = 0.152,$
$\Delta = 0.0399 \le 0.152$

Ответ: $H_2 = 4x^2$, $0.0399 = R_2(0.1) \le 0.152$.

4. Составная формула трапеций численного интегрирования

Пусть необходимо вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

Для вычисления значения определенного интеграла применяют *квадратурные__формулы*. В этих случаях применяется приближенное равенство вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i), \tag{4.2}$$

где c_i – числовые коэффициенты (веса квадратурной формулы), x_i – точки из отрезка $[a,b]$ (узлы квадратурной формулы); $n \geq 0$ – целое число.

Сумма в правой части приближенного равенства называется *квадратурной суммой*. Разность между левой и правой частями приближенного равенства называется *остаточным членом* квадратурной формулы [1, 8].

Квадратурная формула (4.2) точна для многочлена $P_m(x)$ степени m , если для любого многочлена степени m и выше формула дает точное значение интеграла.

Последнее можно записать следующим образом

$$\int_a^b P_m(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i P_m(x_i).$$

Замечание. Среди двух квадратурных формул, вычисляющих интеграл с заданной точностью, как правило, более эффективной считается та, в которой используется меньшее число узлов.

Традиционно интеграл (4.1) интерпретируют как площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a, x = b$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ точками $x = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Интеграл (4.1) можно представить тогда в виде следующей суммы

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Введем обозначения: $f_i = f(x_i), \quad f_{i-1/2} = f(x_{i-1/2}) = f\left(\dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$. Пусть шаг $h = x_i - x_{i-1}$ постоянная величина.

Суть метода в том, что подынтегральная функция на частичных отрезках заменяется на соответствующий полином, найденный с помощью линейной интерполяции. Геометрически это означает замену криволинейной трапеции ступенчатой фигурой, состоящей из прямоугольных трапеций. Приближенное значение интеграла – сумма площадей полученных трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx I^h = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Оценка погрешности осуществляется по формулам:

$$\left|I - I^h\right| = \left|R^h\right| \le V^h,\ V^h = \frac{(b-a)}{12}M_2h^2,\ M_2 = \max_{[a;b]}\left|f''(x)\right|.$$

Главный член погрешности квадратурной формулы. Применение квадратурной формулы на сетке отрезка $[a,b]$ с шагом $h=(b-a)/n$, позволит получить приближенное значение I^h вычисляемого интеграла. Предположим, что погрешность квадратурной формулы может быть записана в следующем виде

$$I - I^h = Ch^k + o(h^k),$$

где величины $C \ne 0$ и $k > 0$ не зависят от *h*.

Определение 4.1. Величина Ch^k называется *главным членом погрешности* квадратурной формулы. Число k называется *порядком точности* квадратурной формулы.

Для достаточно гладкой функции f существует главный член погрешности каждой составной квадратурной формулы

$$I \approx I^h = \sum_{i=0}^{n} h\sum_{j=0}^{n} a_j f(x_{i-1/2}+t_j h/2). \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. Пусть $\sum_{j=0}^{m} a_j = 1$ и k – минимальное среди натуральных чисел, для которых величина

$$\sigma_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^k dt - \sum_{j=0}^{m} a_j t_j^k$$

отлична от нуля. Если функция f непрерывно дифференцируемая k раз на отрезке $[a,b]$, то для погрешности квадратурной формулы (4.6) справедливо представление

$$I - I^h = Ch^k + o(h^k),$$

$$C = \frac{\sigma_k}{2^k k!}\int_a^b f^{(k)}(x)dx = \frac{\sigma_k}{2^k k!}\left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right).$$

Следствие 1. Для квадратурной формулы трапеций справедливо следующее представление

$$I - I_{тр}^h = C_{тр}h^2 + o(h^2),\ C_{тр} = -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx.$$

Следствие 2. Уменьшение шага h в M раз приводит к уменьшению погрешности квадратурной формулы примерно в M^k раз. Если $h_1 = h/M$, то

$$I - I^{h_1} \approx Ch_1^k = \frac{1}{M^k}Ch^k \approx \frac{1}{M^k}(I - I^h).$$

Частным случаем этого результата является результат с уменьшением шага h в два раза: уменьшение шага h в два раза приводит к уменьшению погрешности примерно в 2^k раз:

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k \approx \frac{1}{2^k}(I - I^h).$$

Правило Рунге оценки погрешности. Непосредственное использование формул из теоремы для оценки погрешности $I - I^h$ неудобно. На практике поступают по-другому [3, 6]. Так как

$$I - I^h \approx Ch^k$$

и, кроме того, справедливо

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k,$$

то можем получить

$$I^{h/2} - I^h \approx \frac{1}{2^k}Ch^k(2^k - 1).$$

Учитывая в последнем выражении, что

$$I - I^h \approx Ch^k,$$

получаем

$$I^{h/2} - I^h \approx (I - I^{h/2})(2^k - 1).$$

Окончательно можем записать

$$I - I^{h/2} \approx \frac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1}.$$

Использование этой формулы на практике называют *правилом Рунге* или правилом двойного пересчета [6].

Замечание 1. Так как

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k}Ch^k \approx \frac{1}{2^k}(I - I^h),$$

то можем записать

$$I - I^h \approx 2^k(I - I^{h/2}).$$

Используя формулу правила Рунге

$$I - I^{h/2} \approx \frac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1},$$

можем получить следующее представление

$$I - I^h \approx \frac{2^k (I^{h/2} - I^h)}{2^k - 1}.$$

Если формула правила Рунге используется для апостериорной оценки погрешности значения $I^{h/2}$, то полученная формула может быть использована для приближенной оценки погрешности значения I^h.

Замечание 2. Заменив h на $2h$ формула правила Рунге приводится к виду

$$I - I^h \approx \frac{I^h - I^{2h}}{2^k - 1}.$$

Так как для формулы трапеций $k = 2$, то можем записать

$$I - I_{mp}^h \approx \frac{1}{3}(I_{mp}^h - I_{mp}^{2h}),$$

Экстраполяция Ричардсона. Так как мы имеем

$$I - I^{h/2} \approx \frac{1}{2^k} Ch^k,$$

$$\frac{Ch^k}{2^k} \approx \frac{I^{h/2} - I^h}{2^k - 1},$$

то тогда можем записать

$$I \approx I^{h/2} = \frac{1}{2^k - 1}(I^{h/2} - I^h). \tag{4.7}$$

Таким образом, квадратурная формула I^h порождает новую квадратурную формулу (4.7), имеющую более высокий порядок точности.

Предположим, что для погрешности квадратурной формулы справедливо представление

$$I - I^h = C_1 h^{k_1} + C_2 h^{k_2} + \ldots + C_N h^{k_N} + o(h^{k_N})$$

при всех $N = 1,2,...,$ причем $0 < k_1 < k_2 < ... < k_N < ...$. Такое представление приводит к *методу экстраполяции Ричардсона*. Пусть шаг h измельчается по правилу

$$h_j = h_{j-1}/2, j = 1,2,..., N,$$

тогда, положив

$$I_0^h = I^h,$$

вычисления последующих приближений осуществляют по рекуррентному соотношению

$$I_N^h = I_{N-1}^{h/2} + \frac{1}{2^{k_N} - 1}(I_{N-1}^{h/2} - I_{N-1}^h), N = 1,2,... \,.$$

Метод Ромберга. Для формулы трапеций представление экстраполяции Ричардсона применимо при $k_1 = 2,\ k_2 = 4,...,\ k_N = 2N$. Метод, применяющий экстраполяцию Ричардсона для формулы трапеций, называется *методом Ромберга* [6].

Первый шаг метода Ромберга приводит к следующему уточнению квадратурной формулы трапеций

$$I_{mp}^{h/2}+\frac{1}{3}(I_{mp}^{h/2}-I_{mp}^{h})=\frac{4}{3}I_{mp}^{h/2}-\frac{1}{3}I_{mp}^{h}=$$

$$=\frac{2h}{3}\left[\frac{f_0+f_n}{2}+\sum_{i=1}^{2n-1}f_{i/2}\right]-\frac{h}{3}\left[\frac{f_i+f_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f_i\right]=$$

$$=\frac{h}{6}\left(f_0+f_n+4\sum_{i=1}^{h}f_{i-1/2}+2\sum_{i=1}^{h-1}f_i\right)=I_C^h.$$

Таким образом, получили формулу Симпсона [8].

Вывод квадратур Ромберга основывается на аппроксимации интеграла по составной формуле трапеций в следующем виде

$$I=I^h+C_2^{(0)}h^2+C_4^{(0)}h^4+...+C_{2m}^{(0)}h^{2m}+\circ(h^{2m}), \tag{4.8}$$

где величины $C_i^{(0)},i=2,4,...$ не зависят от h.

Определим теперь новую аппроксимацию интеграла следующей формулой

$$I_1=\frac{1}{3}\left[4I^{h/2}-I^h\right].$$

Коэффициенты этой линейной комбинации выбраны таким образом, чтобы при вычислении с помощью экстраполяционной формулы Ричардсона (4.8) ошибки аппроксимации формула I_1 коэффициент при h^2 обращалась в ноль. Следовательно

$$I_1=I^h+C_4^{(1)}h^4+\ldots+o(h^{2m}).$$

Интеграл аппроксимируется с четвертым порядком точности (метод Симпсона). Процесс можно продолжить, выводя новую аппроксимацию I_2 как линейную комбинацию I_1^h и $I_1^{h/2}$, разложение которой по h не будет содержать члена порядка h^4. В общем случае мы можем построить треугольный массив

I^h

$I^{h/2}I_1^h$

$I^{h/4}I_1^{h/2}I_2^h$

———

где

$$I_k^{h/2^{j-1}}=\left[4^jI_{k-1}^{h/2^j}-I_{k-1}^{h/2^{j-1}}\right]/(4^j-1).$$

Элементы i-го столбца этого массива сходятся к значению интеграла со скоростью порядка h^{2i}.

Упражнения

а) $f(x) = 3x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 3x^2dx=1,\; I^h=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right).$$

Положим в формуле $n = 1$.

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{1}=1,\; I^h=\frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)=\frac{3}{2}=1.5,$$

$$\Delta_h=I-I^h=1-3/2=-1/2=-0.5,$$

$$h/2=\frac{b-a}{2}=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$I^{h/2}=\frac{h/2}{2}\left(f(0)+f(1)+2f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(3+2\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8}=1.125,$$

$$\Delta_{h/2}=I-I^{h/2}=1-9/8=-1/8=-0.125.$$

Погрешность составной формулы

$$R^h=-\frac{b-a}{12}f''(\xi)h^2,\; \xi\in[a, b]$$

Для $f'' = 6$, $R^h=-\frac{1}{2}=-0.5$.

$$R^{h/2}=-\frac{b-a}{12}f''(\xi)h^2=-\frac{1}{8}=-0.125.$$

$$\Delta_h=R^h,\; \Delta_{h/2}=R^{h/2},$$

$$\frac{h}{h/2}=2,\; \frac{R^h}{R^{h/2}}=4,\; I-I_h=O(h^2).$$

Оценка погрешности по правилу Рунге

$\left|I-I^{h/2}\right|\approx\frac{1}{3}\left|I^h-I^{h/2}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{8}\right|=\frac{1}{8}$ – оценка погрешности совпала с точным значением абсолютной погрешности.

Уточнение по Ричардсону

$I\approx I^{h/2}+\frac{1}{3}\left(I^{h/2}-I^h\right)=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=1$ – уточненное значение интеграла совпадает с точным значением.

Ответ: $I^h=1.5$, $R^h=-0.5$, $I^{h/2}=1.125$, $R^{h/2}=-0.125$, $\left|I-I^{h/2}\right|\approx 0.125$, $I\approx 1$.

б) $f(x) = 4x^3, a = 0,\ b = 1.$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 4x^3 dx = 1.$$

Рассмотрим приближенные решения при $h_1 = b\text{-}a = 1$ и $h_2 = h_1/2$

$$I_{h_1} = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) = 2,\ |R_1| = \left|I - I_{h_1}\right| = |1-2| = 1.$$

$$I_{h_2} = \frac{1}{4}\left(f_0 + f_1 + 2f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(0 + 4 + 24\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} = 1.25,\ |R_2| = \left|1 - \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4} = 0.25$$

Оценка погрешности

$f''(x) = 24x,\ M_2 = \max_{x\in[0,1]}|24x| = 24.$

$$|R| \le \frac{b-a}{12}M_2h^2, R_1 \le \frac{24}{12}\cdot 1^2 = 2,\ R_2 \le \frac{24}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$R_1 = 1 \le 2,\ R_2 = 1/4 \le 2/4.$

Оценка погрешности по Рунге

$$\Delta_R = \left|I - I_{h_2}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{h_1} - I_{h_2}\right| = \frac{1}{3}\left|2 - \frac{5}{4}\right| = \frac{1}{4}.$$

Уточнение по Ричардсону

$$I \approx I_{h_2} + \frac{1}{3}\left(I_{h_2} - I_{h_1}\right) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$$

Ответ: $I^h = 2,\ R^h = 1 < 2,\ I^{h/2} = 1.25,\ R^{h/2} = 0.25 < 0.5,\ \left|I - I^{h/2}\right| \approx 0.25,\ I \approx 1.$

в) $f(x) = 5x^4,\ a = 0,\ b = 1.$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 5x^4 dx = 1,$$

$h_1 = b\text{-}a = 1$ и $h_2 = h_1/2$

$$I_{h_1} = \frac{1}{2}(0+5) = \frac{5}{2},\ I_{h_2} = \frac{1}{24}\left(0 + 5 + 2\cdot 5\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = \frac{1}{4}\left(5 + \frac{5}{8}\right) = \frac{45}{32},$$

$R_1 = 3/2,\ R_2 = 13/32,$

$f'' = 60x^2,\ M_2 = \max_{x\in(0,1)}\left|60x^2\right| = 60.$

$$|R_1| \le \frac{1-0}{12}\cdot 60\cdot 1^2 = 5,\ |R_2| \le \frac{1-0}{12}\cdot 60\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Оценка погрешности по Рунге

$$\left|R_2\right| = \left|I - I_{h_2}\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_{h_1} - I_{h_2}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{5}{2} - \frac{45}{32}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{80-45}{32}\right| = \frac{35}{96}.$$

Сравним точное значение абсолютной погрешности (модуль остаточного члена), ее оценку сверху и оценку по Рунге

$$\left|R_2\right| = \frac{39}{96} \le \frac{120}{96},\ \left|R_2\right| \approx \frac{35}{96}$$

Оценка по Рунге более точная.

Уточнение по Ричардсону

$$I \approx I_{h_2} + \frac{1}{3}\left(I_{h_2} - I_{h_1}\right) = \frac{45}{32} + \frac{1}{3}\left(\frac{45}{32} - \frac{5}{2}\right) = \frac{45}{32} - \frac{35}{46} = \frac{100}{96}$$

ошибка в этом случае составляет $1/24$.

Уточнение по Ричардсону эквивалентно применению формулы Симпсона 4-го порядка точности.

Ответ: I^h=2.5, R^h=1.5<5, $I^{h/2}$=1.40625, $R^{h/2}$=0.40625<1.25, $\left|I - I^{h/2}\right| \approx 0.3646$, $I \approx 1.0417$

5. Конечно-разностные формулы численного дифференцирования

Методы численного дифференцирования используют в тех случаях, когда нахождение производной очень сложно, требует длинных и громоздких расчетов, а также в случае таблично заданных функций.

Простейшие формулы численного дифференцирования

Вычисление первой производной. Предположим, что в окрестности точки x функция f дифференцируема достаточное число раз. Исходя из определения производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

естественно попытаться использовать для ее вычисления две простейшие приближенные формулы:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \text{(правая)} \qquad (5.13)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad \text{(левая)} \qquad (5.14)$$

соответствующие выбору фиксированных значений $\Delta x = h$ и $\Delta x = -h$. Здесь $h > 0$ – малый параметр (шаг). Разностные отношения в правых частях формул (5.13) и (5.14) часто называют правой и левой разностными производными.

Для оценки погрешностей

$$r_+(x,h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$r_-(x,h) = f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

введенных формул численного дифференцирования (погрешностей аппроксимации) воспользуемся формулами Тейлора:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(\xi_\pm)}{2} h^2. \qquad (5.15)$$

Здесь и ниже ξ_+ и ξ_- – некоторые точки, расположенные на интервалах $(x, x+h)$ и $(x-h, x)$ соответственно. Подставляя разложения (5.15) в выражения для $r_\pm$, получаем $r_+(x,h) = -\frac{1}{2} f''(\xi_+)h,\ r_-(x,h) = \frac{1}{2} f''(\xi_-)h$. Следовательно,

$$|r_+(x,h)| \le \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x,x+h]} |f''(\xi)|,$$

$$|r_-(x,h)| \le \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x-h,x]} |f''(\xi)|.$$

Таким образом, формулы (5.13), (5.14) имеют первый порядок точности по h. Иначе говоря, правая и левая разностные производные аппроксимируют производную $f'(x)$ с первым порядком точности.

Соответствующая приближенная формула центральной разностной производной имеет вид

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Величину в правой части этой формулы часто называют центральной разностной производной.

Подставляя в выражение для погрешности

$$r_0(x,h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

соответствующие разложения по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2} h^2 \pm \frac{f^{(3)}(\xi_\pm)}{6} h^3,$$

получим, $r_0(x,h) = -\frac{f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)}{12} h^2$. Следовательно, справедлива оценка погрешности

$$|r_0(x,h)| \le \frac{M_3}{6} h^2, \quad M_3 = \max_{[x-h,x+h]} \left| f^{(3)}(\xi) \right|.$$

Таким образом, центральная разностная производная аппроксимирует производную $f'(x)$ со вторым порядком точности относительно h.

Вычисление второй производной. Наиболее простой и широко применяемой для приближенного вычисления второй производной является следующая формула:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}. \qquad (5.16)$$

Величину в правой части этого приближенного равенства часто называют второй разностной производной.

Подставляя в выражение для погрешности

$$r(x,h) = f''(x) - \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2},$$

соответствующие разложения по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_\pm)}{24}h^4,$$

получим $r(x,h) = -\dfrac{f^{(4)}(\xi_+) + f^{(4)}(\xi_-)}{24}h^2$. Следовательно,

$$\left|r(x,h)\right| \le \frac{M_4}{12}h^2, \; M_4 = \max_{[x-h,\, x+h]}\left|f^{(4)}(\xi)\right|.$$

Таким образом, формула (5.16) имеет второй порядок точности.

Использование разложения в ряд Тейлора не позволяет развить идею численного дифференцирования на табличные функции для целей построения производной требуемого порядка точности.

Для вычисления $f'(x)$ и $f''(x)$ могут потребоваться формулы любого порядка точности. В таких формулах с ростом порядка точности возрастает и число используемых значений функции. В качестве примера приведем формулы

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}\left(f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right),$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{12h^2}\left(-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)\right)$$

имеющие четвертый порядок точности.

Опишем другой подход. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ таблицей значений в точках $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Далее будем использовать следующие обозначения

$$x_i + h = x_{i+1}, \; x_i - h = x_{i-1}, \; x_i \pm kh = x_{i\pm k},$$

$$f(x_i) = f_i, \; f(x_i \pm h) = f(x_{i\pm1}) = f_{i\pm1}, \; f(x_{i\pm k}) = f_{i\pm k}.$$

В этих обозначениях предыдущие формулы перепишутся в виде:

$$f_i'(x) \approx \frac{1}{12h}\left(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}\right),$$

$$f_i''(x) \approx \frac{1}{12h^2}\left(-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}\right)$$

Можно решать два вида задач:

1) найти приближенное значение производной $k-$ого порядка функции $f(x)$ в произвольной точке $x \in [a;b]$;

2) найти таблично заданную функцию, являющуюся приближением к производной $f^{(k)}$ на отрезке $\left[x_0^*; x_m^*\right] \subset [a;b]$.

Первая задача является основной. Вторая после определения аргументов x_i^* сводится к первой. Поэтому будем считать, что задача численного дифференцирования сводится к вычислению приближенного значения производной в точке $x \in [a;b]$ и оценке ее погрешности. Для решения этой задачи функцию $f(x)$ заменяют аналитическим приближением, которое имеет $k-$ую производную, то есть

$$f(x) \approx p(x),\ x \in [a;b],\ f^{(k)}(x) \approx p^{(k)}(x),\ \ x \in [a;b].$$

Формулы для равноотстоящих абсцисс, которые лежат справа (или слева) от точки x_0, называют формулами для правых (или левых) разностей. Эти формулы можно получить *дифференцированием интерполяционного полинома Лагранжа*. Ниже приведены некоторые общие формулы для правых и левых разностей.

$$f_0' \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \qquad \text{(правая разность)}$$

$$f_0' \approx \frac{3f_0 + 4f_{-1} - f_{-2}}{2h} \qquad \text{(левая разность)}$$

$$f_0'' \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \qquad \text{(правая разность)}$$

$$f_0'' \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2} \qquad \text{(левая разность)}$$

В качестве примера опишем способ построения следующей формулы

$$f_0'' \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}.$$

Интерполяционный полином Лагранжа для $f(t)$, построенный по точкам x_0, x_1, x_2, x_3 имеет вид:

$$f(t) \approx f_0 \frac{(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{(t-x_0)(t-x_2)(t-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ f_2 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(t-x_0)(t-x_1)(t-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Продифференцируем дважды произведения в числителях и получим

$$f''(t) \approx f_0 \frac{2((t-x_1)+(t-x_2)+(t-x_3))}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f_1 \frac{2((t-x_0)+(t-x_2)+(t-x_3))}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$
$$+ f_2 \frac{2((t-x_0)+(t-x_1)+(t-x_3))}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{2((t-x_0)+(t-x_1)+(t-x_2))}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Затем подстановка $t = x_0$ и тот факт, что $x_i - x_j = (i-j)h$, дадут

$$f''(x_0) \approx f_0 \frac{2((x_0 - x_1) + (x_0 - x_2) + (x_0 - x_3))}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} +$$

$$+ f_1 \frac{2((x_0 - x_0) + (x_0 - x_2) + (x_0 - x_3))}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{2((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1) + (x_0 - x_3))}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} +$$

$$+ f_3 \frac{2((x_0 - x_0) + (x_0 - x_1) + (x_0 - x_2))}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= f_0 \frac{2((-h) + (-2h) + (-3h))}{(-h)(-2h)(-3h)} + f_1 \frac{2((0) + (-2h) + (-3h))}{(h)(-h)(-2h)} +$$

$$+ f_2 \frac{2((0) + (-h) + (-3h))}{(2h)(h)(-h)} + f_3 \frac{2((0) + (-h) + (-2h))}{(3h)(2h)(h)} =$$

$$= f_0 \frac{-12h}{-6h^3} + f_1 \frac{-10h}{2h^3} + f_2 \frac{-8h}{-2h^3} + f_3 \frac{-6h}{6h^3} = \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}.$$

При дифференцировании приближенных формул может произойти существенная потеря точности, то есть погрешность формулы $f^{(k)}(x) \approx p^{(k)}(x),\ x \in [a;b]$ будет значительно больше погрешности исходного приближения $f(x) \approx p(x),\ x \in [a;b]$. Задача численного дифференцирования относится к числу задач, неустойчивых по исходным данным, то есть таких, решение которых при малых погрешностях исходных данных приводит к большим погрешностям в результате.

Выбор оптимального шага численного дифференцирования

Общая погрешность вычисления производной может рассматриваться как сумма погрешности метода и погрешности округления. С уменьшением шага h погрешность метода убывает, а погрешность округления возрастает. Можно найти оптимальный шаг, как компромисс этих двух процессов. Так для центрально-разностной производной первого порядка погрешность метода не превосходит следующей величины

$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{h^2}{6} \max_{(x_{-1}, x_1)} |f'''(x)|,$$

Погрешность округления для такой формулы оценивается величиной

$$\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h},$$

где ε – абсолютная погрешность исходных значений функции.

Суммарная погрешность ε_Σ следующая

$$\varepsilon_\Sigma(h) = \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Величина ε_Σ достигает наименьшего значения при условии

$$\varepsilon'_{\Sigma}(h) = \left(\frac{h^2}{6}M_3 + \frac{\varepsilon}{h}\right)' = \frac{h}{3}M_3 - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0.$$

Это условие дает значение h, которое называют оптимальным шагом:

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}.$$

Для каждой формулы численного дифференцирования свой оптимальный шаг.

Упражнения

Определить порядок аппроксимации, главный член погрешности и оптимальный шаг формулы численного дифференцирования

$$\frac{1}{h^2}\left(2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}\right) = f_i'' + \ldots ?$$

Запишем разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_i радиусов h, $2h$ и $3h$ (то есть, для точек $x_{i+1} = x_i + h$, $x_{i+2} = x_i + 2h$, $x_{i+3} = x_i + 3h$)

$$f_{i+1} = f_i + f_i' h + f_i'' \frac{h^2}{2!} + f_i''' \frac{h^3}{3!} + f_i'''' \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

$$f_{i+2} = f_i + f_i' 2h + f_i'' \frac{(2h)^2}{2!} + f_i''' \frac{(2h)^3}{3!} + f_i'''' \frac{(2h)^4}{4!} + O(h^5)$$

$$f_{i+3} = f_i + f_i' 3h + f_i'' \frac{(3h)^2}{2!} + f_i''' \frac{(3h)^3}{3!} + f_i'''' \frac{(3h)^4}{4!} + O(h^5)$$

Подставим разложения в конечно-разностную формулу

$2f_i = 2f_i$

$$-5f_{i+1} = -5f_i - 5f_i' h - 5f_i'' \frac{h^2}{2!} - 5f_i''' \frac{h^3}{3!} - 5f_i'''' \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

$$4f_{i+2} = 4f_i + 4\cdot 2f_i' h + 4\cdot 2^2 f_i'' \frac{h^2}{2!} + 4\cdot 2^3 f_i''' \frac{h^3}{3!} + 4\cdot 2^4 f_i'''' \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

$$-f_{i+3} = -f_i - 3f_i' h - 3^2 f_i'' \frac{h^2}{2!} - 3^3 f_i''' \frac{h^3}{3!} - 3^4 f_i'''' \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$$

и сгруппируем подобные члены в выражении $2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}$

$$2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3}=(2-5+4-1)f_i+(-5+8-3)f_i^{'}h+(-5+16-9)f_i^{''}\frac{h^2}{2!}+$$

$$(-5+32-27)f_i^{'''}\frac{h^3}{3!}+(-5+64-81)f_i^{''''}\frac{h^4}{4!}+O\left(h^5\right)=(0)f_i+(0)f_i^{'}h+(1)f_i^{''}h^2+$$

$$(0)f_i^{'''}\frac{h^3}{3!}+\left(-\frac{11}{12}\right)f_i^{''''}h^4+O\left(h^5\right)=$$

$$=f_i^{''}h^2+\left(-\frac{11}{12}\right)f_i^{''''}h^4+O\left(h^5\right).$$

Окончательно имеем

$$\frac{1}{h^2}(2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3})=\frac{1}{h^2}\left(f_i^{''}h^2+\left(-\frac{11}{12}\right)f_i^{''''}h^4+O\left(h^5\right)\right)=$$

$$f_i^{''}-\left(\frac{11}{12}\right)f_i^{''''}h^2+O\left(h^3\right).$$

Формулу можно также представить в виде

$$\frac{1}{h^2}(2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3})=f_i^{''}-\left(\frac{11}{12}\right)f_\xi^{''''}h^2,\ \xi\in[x_i,x_{i+3}]$$

Таким образом, данное конечно-разностное выражение аппроксимирует вторую производную в точке x_i со вторым порядком (можно также сказать, что конечно-разностное выражение имеет второй порядок точности), так как при стремлении шага к нулю $(h\to 0)$, погрешность формулы численного дифференцирования будет стремиться к нулю как величина одного порядка малости с h^2.

Оптимальный шаг формулы численного дифференцирования вычислим с учетом главного члена погрешности. Обозначим символом ε максимальную абсолютную погрешность задания значений функций $f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}$. Погрешность округления ε_1 для формулы не превосходит сумму абсолютных погрешностей входящих величин

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{h^2}(2+5+4+1)=\frac{12\varepsilon}{h^2}$$

Погрешность метода ε_2 определяется главным членом погрешности и не превосходит величину

$$\varepsilon_2\le\frac{11}{12}M_4h^2=\frac{11}{12}\max_{(x_i,x_{i+3})}\left|f^{''''}(x)\right|h^2$$

Суммарная погрешность ε_Σ следующая

$$\varepsilon_\Sigma(h)=\frac{12\varepsilon}{h^2}+\frac{11}{12}M_4h^2.$$

Величина ε_Σ достигает наименьшего значения при условии

$$\varepsilon'_{\Sigma}(h) = \left(\frac{12\varepsilon}{h^2} + \frac{11}{12}M_4 h^2\right)' = -\frac{24\varepsilon}{h^3} + \frac{11}{6}M_4 h = 0\,.$$

Это условие дает значение h_*, которое называют оптимальным шагом:

$$h_* = \sqrt[4]{\frac{144}{11}\frac{\varepsilon}{M_4}}\,.$$

Задания для самостоятельной работы

Определить порядок аппроксимации, главный член погрешности и оптимальный шаг формулы численного дифференцирования

1. $\frac{1}{6h}\left(-2f_{i-3} + 9f_{i-2} - 18f_{i-1} + 11f_i\right) = f_i' + \ldots?$

2. $\frac{1}{h^3}\left(f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}\right) = f_i''' + \ldots?$

3. $\frac{1}{h^2}\left(2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}\right) = f_i'' + \ldots?$

4. $\frac{1}{6h}\left(f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}\right) = f_i' + \ldots?$

5. $\frac{1}{h^4}\left(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) = f_i'''' + \ldots?$

6. $\frac{1}{6h}\left(-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+1}\right) = f_i' + \ldots?$

7. $\frac{1}{12h}\left(-3f_{i-1} - 10f_i + 18f_{i+1} - 6f_{i+2} + f_{i+3}\right) = f_i' + \ldots?$

8. $\frac{1}{12h^2}\left(-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}\right) = f_i'' + \ldots?$

9. $\frac{1}{6h}\left(-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}\right) = f_i' + \ldots?$

10. $\frac{1}{h^4}\left(f_{i-1} - 4f_i + 6f_{i+1} - 4f_{i+2} + f_{i+3}\right) = f_i'''' + \ldots$

11. $\frac{1}{h^2}\left(-f_{i-3} + 4f_{i-2} - 5f_{i-1} + 2f_i\right) = f_i'' + \ldots?$

12. $\frac{1}{h^3}\left(f_{i+1} - 3f_i + 3f_{i-1} - f_{i-2}\right) = f_i''' + \ldots?$

13. $\frac{1}{2h^3}\left(-3f_{i-1} + 10f_i - 12f_{i+1} + 6f_{i+2} - f_{i+3}\right) = f_i''' + \ldots?$

14. $\frac{1}{12h^2}\left(11f_{i-1}-20f_i+6f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3}\right)=f_i'' + \ldots$

15. $\frac{1}{12h}\left(f_{i-2}-8f_{i-1}+8f_{i+1}-f_{i+2}\right)=f_i' + \ldots?$

16. $\frac{1}{12h}\left(3f_{i+1}+10f_i-18f_{i-1}+6f_{i-2}-f_{i-3}\right)=f_i' + \ldots?$

17. $\frac{1}{10h}\left(-2f_{i-2}-f_{i-1}+f_{i+1}+2f_{i+2}\right)=f_i' + \ldots?$

18. $\frac{1}{6h}\left(-2f_{i-2}+9f_{i-1}-18f_i+11f_{i+1}\right)=f_i' + \ldots?$

19. $\frac{1}{12h}\left(-25f_i+48f_{i+1}-36f_{i+2}+16f_{i+3}-3f_{i+4}\right)=f_i' + \ldots?$

20. $\frac{1}{12h}\left(-f_{i-3}+6f_{i-2}-18f_{i-1}+10f_i+3f_{i+1}\right)=f_i' + \ldots?$

21. $\frac{1}{12h}\left(3f_{i-4}-16f_{i-3}+36f_{i-2}-48f_{i-1}+25f_i\right)=f_i' + \ldots?$

22. $\frac{2}{3h}\left(f_{i+1}-f_{i-1}\right)-\frac{1}{12h}\left(f_{i+2}-f_{i-2}\right)=f_i' + \ldots?$

5. Метод Гаусса решения СЛАУ

Рассматривается система линейных алгебраических уравнений

$$Ax=f$$

где A – матрица $m\times m$, $x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)^T$ – искомый вектор, $f=\left(f_1,f_2,\ldots,f_m\right)^T$ – заданный вектор. Предполагается, что определитель матрицы A отличен от нуля, так что решение x существует и единственно.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы A. Из курса алгебры известно, что систему можно решить по крайней мере двумя способами: либо по формулам Крамера, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших m первый способ, основанный на вычислении определителей, требует порядка $(m!)$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – только $O(m^3)$ действий. Поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении на ЭВМ задач линейной алгебры.

Теорема 5.1 (теорема об LU-разложении). Пусть все угловые миноры матрицы A отличны от нуля, $\Delta_j \neq 0$ $j=1,2,\ldots,m$. Тогда матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде произведения $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами и U – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю.

Следствие. Метод Гаусса можно применять только тогда, когда все угловые миноры матрицы A отличны от нуля.

При реализации на ЭВМ прямого хода метода Гаусса нет необходимости действовать с переменными $x_1, x_2, ..., x_m$. Достаточно указать алгоритм, согласно которому исходная матрица A преобразуется к треугольному виду, и указать соответствующее преобразование правых частей системы.

Известно, что метод Гаусса приводит к разложению исходной матрицы в произведение двух треугольных. Более детально описать структуру этих треугольных матриц можно с помощью так называемых *элементарных треугольных матриц*.

Определение 5.1. Матрица L_j называется **элементарной нижней треугольной матрицей**, если она имеет вид:

$$L_j = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & \dots & l_{jj} & & & \\ 0 & \dots & l_{j+1,j} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & l_{mj} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В матрице L_j все элементы главной диагонали кроме l_{jj} равны единице. Из остальных элементов отличными от нуля могут быть только элементы j-го столбца, расположенные ниже l_{jj}. Обратной к L_j является элементарная нижняя треугольная матрица

$$L_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & \dots & l_{jj}^{-1} & & & \\ 0 & \dots & -l_{j+1,j} l_{jj}^{-1} & 1 & & \\ & & -l_{j+2,j} l_{jj}^{-1} & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \\ 0 & \dots & -l_{mj} l_{jj}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему $Ax = f$, состоящую из трех уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = f_3.$$

После первого шага исключения по методу Гаусса преобразованная система принимает вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad + \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 \quad + \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \quad = \quad \frac{f_1}{a_{11}}, \\
\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} \right) x_3 = f_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} f_1, \\
\left(a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13} a_{31}}{a_{11}} \right) x_3 = f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} f_1.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

Отсюда видно, что матрица A_1 системы (5.1) получается из исходной матрицы A путем умножения A слева на элементарную матрицу

$$
L_1 = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.2}
$$

Так что $A_1 = L_1 A$. При этом систему (5.1) можно записать в виде

$$
L_1 A x = L_1 f.
$$

Матрицу (5.2) будем называть элементарной треугольной матрицей L_1, соответствующей первому шагу исключения метода Гаусса.

Перепишем систему (5.1) в виде

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 = y_1, \\
a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = f_2^{(1)}, \\
a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = f_3^{(1)}
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

И осуществим второй шаг метода Гаусса, т.е. исключим неизвестное x_2 из последнего уравнения. Тогда получим систему вида:

$$
\begin{aligned}
x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 = y_1, \\
x_2 + c_{23} x_3 = y_2, \\
a_{33}^{(2)} x_3 = f_3^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

Нетрудно видеть, что переход от (5.3) к (5.4) осуществляется путем умножения системы на элементарную треугольную матрицу

$$
L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}
$$

Таким образом, после второго шага исключения мы приходим к системе

$$
L_2 L_1 A x = L_2 L_1 f, \tag{5.6}
$$

Где матрицы L_1 и L_2 определены согласно (5.2), (5.5). Наконец умножая (5.6) на матрицу

$$
L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},
$$

Получаем систему

$$L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1f,$$

Матрица которой $U = L_3L_2L_1A$ является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю. Отсюда следует, в частности, что $A = LU$, где $L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$ - нижняя треугольная матрица.

Таким образом, LU – разложение матрицы A может быть получено с помощью элементарных треугольных матриц: сначала строятся матрицы L_1, L_2, L_3 и вычисляется $U = L_3L_2L_1A$ и затем находится $L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$.

Отметим, что матрицы L_k^{-1} (k= 1,2,3) имеют простой вид:

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix},\ L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 \end{bmatrix},\ L_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix},$$

Причем на диагонали матрицы L расположены ведущие элементы метода исключения.

Метод Гаусса с выбором главного элемента - основная идея метода. Может оказаться, что система

$$Ax = f$$

имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы A равен нулю. Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы A отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться непригодным.

Определение 5.2. *Матрицей перестановок* P называется квадратная матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце только один элемент отличен от нуля и равен единице.

Определение 5.3. *Элементарной матрицей перестановок* P_{kl} называется матрица, полученная из единичной матрицы перестановкой k–ой и l-ой строк.

Например, элементарными матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим следующие свойства элементарных матриц перестановок, вытекающие непосредственно из их определения [8].

1. Произведение двух (а следовательно, и любого числа) элементарных матриц перестановок является матрицей перестановок (не обязательно элементарной).

2. Для любой квадратной матрицы A матрица $P_{kl}A$ отличается от A перестановкой k–ой и l-ой строк.

3. Для любой квадратной матрицы A матрица AP_{kl} отличается от A перестановкой k–го и l-го столбца.

Поясним применение элементарных матриц перестановок для описания метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу. Рассмотрим следующий пример [8] системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= f_1, \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 &= f_2, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Система имеет вид $Ax = f$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A находится во второй строке. Поэтому в системе (5.7) надо поменять местами первую и вторую строки и перейти к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + \quad x_3 &= f_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= f_1, \\ 5x_2 + 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Систему (5.8) можно записать в виде

$$P_{12}Ax = P_{12}f, \tag{5.9}$$

Т.е. она получается из системы (5.7) путем умножения на матрицу перестановок

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее, к системе (5.8) надо применить первый шаг обычного метода исключения Гаусса. Этот шаг, как мы видели, эквивалентен умножению системы (5.9) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В результате от (5.9) перейдем к системе

$$L_1P_{12}Ax = L_1P_{12}f \tag{5.10}$$

или, в развернутом виде

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2},\\
x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2},\\
5x_2 + 3x_3 &= f_3.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Из последних двух уравнений системы (5.10) надо исключить переменное x_2. Поскольку максимальным элементом первого столбца укороченной системы

$$
\begin{aligned}
x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2},\\
5x_2 + 3x_3 &= f_3.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

является элемент второй строки, делаем в (5.12) перестановку строк и тем самым от системы (5.11) переходим к эквивалентной системе

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2},\\
5x_2 + 3x_3 &= f_3,\\
x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2},
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

которую можно записать в матричном виде как

$$P_{23}L_1P_{12}Ax = P_{23}L_1P_{12}f \tag{5.14}$$

Таким образом, система (5.14) получена применением элементарной матрицы перестановок

$$
P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

к системе (5.10).

Далее, к системе (5.13) надо применить второй шаг исключения обычного метода Гаусса. Это эквивалентно умножению системы (5.13) на элементарную треугольную матрицу

$$
L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}.
$$

В результате получим систему

$$L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_2P_{23}L_1P_{12}f \tag{5.15}$$

или

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{f_2}{2},\\
x_2 + \frac{3}{5}x_3 &= \frac{1}{5}f_3,\\
-\frac{1}{10}x_3 &= f_1 - \frac{f_2}{2} - \frac{1}{5}f_3.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Заключительный шаг прямого хода метода Гаусса состоит в замене последнего уравнения системы (5.16) уравнением

$$x_3 = -10\left(f_1 - \frac{f_2}{2} - \frac{1}{5} f_3 \right),$$

Что эквивалентно умножению (5.15) на матрицу

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для рассмотренного примера процесс исключения Гаусса с выбором главного элемента по столбцу записывается в виде

$$L_3L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}f.$$

По построению матрица

$$U = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}A \qquad (5.17)$$

является верхней треугольной матрицей с единичной главной диагональю.

Отличие от обычного метода Гаусса состоит в том, что в качестве сомножителей в (5.17) наряду с элементарными треугольными матрицами L_k могут присутствовать элементарные матрицы перестановок P_{kl}.

Покажем еще, что из (5.17) следует разложение

$$PA = LU,$$

где L – нижняя треугольная матрица, имеющая обратную, и P – матрица перестановок. Для этого найдем матрицу

$$\widetilde{L}_1 = P_{23}L_1P_{23}.$$

По свойству 2 матрица $P_{23}L_1$получается из матрицы L_1 перестановкой второй и третьей строк,

$$P_{23}L_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\widetilde{L}_1$ согласно свойству 3 получается из $P_{23}L_1$ перестановкой второго и третьего столбцов,

$$\widetilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (5.18)$$

т.е. $\widetilde{L}_1$ - нижняя треугольная матрица, имеющая обратную.

Из (5.18), учитывая равенство $P_{23}^{-1} = P_{23}$, получим

$$\widetilde{L}_1P_{23} = P_{23}L_1.$$

Отсюда и из (5.17) видим, что

$$U = L_3L_2\widetilde{L}_1P_{23}P_{12}A = L^{-1}PA,$$

где обозначено $P = P_{23}P_{12}$, $L = \widetilde{L}^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$.

Поскольку P – матрица перестановок и L – нижняя треугольная матрица, то существование разложения $PA = LU$ доказано.

Оно означает, что метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен обычному методу Гаусса, примененному к матрице PA, т.е. к системе, полученной из исходной системы перестановкой некоторых уравнений.

$$PAx = Pf,$$

где P – некоторая матрица перестановок.

Теоретическое обоснование метода Гаусса с выбором главного элемента содержится в следующей теореме.

Теорема 5.2. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица перестановок P такая, что матрица PA имеет отличные от нуля угловые миноры.

Следствие. Если $\det A \neq 0$, то существует матрица перестановок P такая, что справедливо разложение

$$PA = LU$$

где L – нижняя треугольная матрица с отличными от нуля диагональными элементами и U – верхняя треугольная матрица с единичной главной диагональю.

Вычисление определителя. В большинстве существующих стандартных программ одновременно с решением системы линейных алгебраических уравнений вычисляется определитель матрицы A. Пусть в процессе исключения найдено LU-разложение, т.е. построены L и U. Тогда

$$\det(PA) = \det L \det U = \det L = l_{11} l_{22} \ldots l_{mm},$$

т.е. произведение диагональных элементов матрицы L равно определителю матрицы PA. Поскольку матрицы PA и A отличаются только перестановкой строк, определитель матрицы PA может отличаться от определителя A только знаком. А именно,

$\det(PA) = \det A$, если число перестановок четно, и

$\det(PA) = -\det A$, если число перестановок нечетно.

Таким образом, для вычисления определителя необходимо знать, сколько перестановок было осуществлено в процессе исключения.

Обращение матрицы. Нахождение матрицы, обратной к A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E,$$

где E – единичная матрица и X – искомая квадратная матрица. Пусть $A=[a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$. Уравнение () можно записать в виде системы m^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Для дальнейшего важно заметить, что система () распадается на m независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями. Эти системы имеют вид

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \; j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $x^{(j)} = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}\right)^T$, у вектора $\delta^{(j)}$ равна единице j-я компонента и равны нулю остальные компоненты.

Например, для матрицы второго порядка система () распадается на две независимые системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Для решения систем используется метод Гаусса (обычный или с выбором главного элемента). Рассмотрим применение метода Гаусса без выбора главного элемента. Поскольку все системы имеют одну и ту же матрицу A, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса, т.е. получить разложение $A = LU$ и запомнить матрицы L и U. Для этого требуется сделать $m(m^2 - 1)/3$ действий умножения и деления [7, 8].

Обратный ход осуществляется путем решения систем уравнений

$$Ly^{(j)} = \delta^{(j)}, \;\; y^{(j)} = \left(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}\right)^T,$$

$$Ux^{(j)} = y^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

с треугольными матрицами L и U. Решение системы при каждом j требует $0{,}5m(m\text{-}1)$ действий. Для решения системы надо еще добавить m делений на диагональные элементы матрицы L, так что здесь потребуется $0{,}5m(m+1)$ умножений и делений. Всего при каждом j на обратный ход затрачивается $0{,}5m(m\text{-}1)+0{,}5m(m+1)m = m^2$ действий.

Для оценок погрешности необходимо ввести понятия норм вектора и матрицы [1, 7, 8].

Определение 5.4. Нормой вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ называется функционал, обозначаемый $\|x\|$ и удовлетворяющий условиям:

$$\|x\| > 0, \quad x \neq 0, \quad \|0\| = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Наиболее употребительны следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x,x)}.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\mathrm{I}}$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{II}}$ называются *эквивалентными*, если для всех $x \in R^n$ справедливы неравенства

$$c_1 \|x\|_{II} \leq \|x\|_I \leq c_2 \|x\|_{II}$$

с одними и теми же положительными постоянными c_1 и c_2.

Определение 5.5. Нормой матрицы A называется функционал, обозначаемый $\|A\|$ и удовлетворяющий условиям:

$$\|A\| > 0, \quad A \neq 0, \quad \|0\| = 0,$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\|AC\| \leq \|A\| \|C\|.$$

Определение 5.6. Нормой матрицы A, **подчиненной** норме вектора, называется число

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Замечание. Имеем следующие нормы матриц, подчиненные введенным выше нормам вектора

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \; \|A\|_2 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \; \|A\|_3 = \sqrt{\max_i \lambda_i \left(A^T A\right)}$$

Введем понятие *обусловленности* системы $Ax = b$.

Решим ее, найдя приближенное решение $\bar{x}$. Подставим данное решение в систему, получим $A\bar{x} = \bar{b}$. Можно ли оценить погрешность, оценивая *невязку* $\|b - \bar{b}\|$?

Оказывается, нет. Рассмотрим $A(x - \bar{x}) = b - \bar{b}$. Предполагая, что система имеет единственное решение, то есть $\det A \neq 0$, получим равенство:

$$x - \bar{x} = A^{-1}(b - \bar{b}),$$

откуда следует неравенство

$$\|x - \bar{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b - \bar{b}\|$$

– оценка абсолютной погрешности. Если норма $\left\|A^{-1}\right\|$ матрицы, обратной матрице A, велика, то при малом $\|b - \bar{b}\|$ абсолютная погрешность $\|x - \bar{x}\|$ может быть велика.

При этом

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b - \bar{b}\|}{\|x\|} = \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq$$

$$\leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}.$$

Оценка относительной погрешности принимает вид:

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|b - \bar{b}\|}{\|b\|}.$$

Определение 5.7. Число $M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называют **числом обусловленности**.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le M_A \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Таким образом, число обусловленности характеризует зависимость относительной погрешности решения от погрешности правой части. Абсолютная погрешность решения определяется нормой обратной матрицы системы.

Так как $E = A \cdot A^{-1}$, то $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \ge 1$. Говорят, что матрица A хорошо обусловлена, если ее число обусловленности мало (<100) и плохо обусловлена, если ее число обусловленности велико (≥100). Конечно, указанная классификация носит условный характер (матрицы с числом обусловленности 99, и 100 фактически обусловлены одинаково), но она все-таки оказывается полезной.

Упражнения

Система $Ax = f$

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 = 15 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -4x_1 + 2x_3 = 10 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы, состоящую из матрицы системы и вектора правой части. В матрице подчеркнут главный (наибольший по модулю) элемент в первом столбце, равный –4,

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \underline{\underline{-4}} & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 0 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

То есть, поменяли местами первую и третью строки, что эквивалентно умножению системы на P_{13}. Далее преобразования соответствуют умножению на матрицу L_1

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_1 P_{13} A x = L_1 P_{13} f.$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 8 & 0 & 15\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & \underline{\underline{8}} & \frac{1}{2} & \frac{35}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Подчеркнут главный элемент во втором столбце расширенной матрицы, равный 8. Меняем местами вторую и третью строки.

$$L_2P_{23}L_1P_{13}Ax = L_2P_{23}L_1P_{13}f.$$

$$L_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ P_{13}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 8 & \frac{1}{2} & \frac{35}{2}\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{35}{16}\\ 0 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{35}{16}\\ 0 & 0 & \frac{33}{16} & \frac{99}{16}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{35}{16}\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$L_3L_2P_{23}L_1P_{13}Ax = L_3L_2P_{23}L_1P_{13}f.$$

$$L_3^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{33}{16}\end{pmatrix},$$

$$L = P_{23}L_1^{-1}P_{23}L_2^{-1}L_3^{-1}$$

Таким образом, имеем

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{16}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & \frac{33}{16}\end{pmatrix},$$

Проверим выполнение равенства $LU = PA$,

$$LU=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P = P_{23}P_{13},\ PA = P_{23}P_{13}A = P_{23}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 1 & 8 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A

$$detPA = detLU = l_{11}l_{22}l_{33} = -66 = det\,A,$$

т.к. число перестановок четно.

Обратный ход метода Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{35}{16} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_3=3,\ x_2 = \frac{35}{16} - \frac{3}{16} = \frac{32}{16} = 2,\ x_1 = -\frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)3 = -\frac{2}{2} = -1.$

$x_* = (-1, 2, 3)^T$.

Проверка осуществляется подстановкой решения в исходную систему

$Ax_* \equiv f$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\quad 1(-1)+8\cdot2+0\cdot3 = 15,$ $\quad 2(-1)-1\cdot2+1\cdot3 = -1,$ $\Rightarrow$ $-4(-1)+0\cdot(2)+2\cdot(3)=10.$ $\quad \equiv \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

То есть, решение найдено верно.

Построение обратной матрицы на основе LU- разложения.

Найдем $L^{-1} = L_3 L_2 P_{23} L_1 P_{23} = L_3 L_2 \widetilde{L}_1$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{33} \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix},\ L_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_1 = P_{23} L_1 P_{23} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{17}{66} & \frac{2}{33} & \frac{16}{33} \end{pmatrix}.$$

Для построения обратной матрицы $(PA)^{-1}$ необходимо решить 3 системы уравнений

$$Ux_{(j)}=y_{(j)},$$

где $x_{(j)}$ – j столбец матрицы $(PA)^{-1}$, $y_{(j)}$ – j столбец матрицы L^{-1}.

1) $Ux_{(1)} = y_{(1)}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{32} \\ \frac{17}{66} \end{pmatrix},$

имеем $x_{31}=\dfrac{17}{66}$,

$x_{21}=\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{17}{66}=\dfrac{66-34}{32\cdot 16}=\dfrac{1}{66}$,

$x_{11}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{66}=\dfrac{-33+16}{2\cdot 66}=-\dfrac{4}{33}$.

$$x_{(1)}=\begin{pmatrix}-4/33\\ 1/66\\ 17/66\end{pmatrix}$$

2) $Ux_{(2)}=y_{(2)}$ или $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/8\\ 2/33\end{pmatrix}$,

имеем $x_{32}=\dfrac{2}{33}$, $x_{22}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{2}{33}=\dfrac{66-2}{33\cdot 16}=\dfrac{4}{33}$,

$x_{12}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{33}=\dfrac{1}{33}$.

$$x_{(2)}=\begin{pmatrix}1/33\\ 4/33\\ 2/33\end{pmatrix}$$

3) $Ux_{(3)}=y_{(3)}$ или $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 1/16\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 16/33\end{pmatrix}$,

имеем $x_{33}=\dfrac{16}{33}$, $x_{23}=-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{16}{33}=-\dfrac{1}{33}$, $x_{13}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{33}=\dfrac{8}{33}$.

$$x_{(3)}=\begin{pmatrix}8/33\\ -1/33\\ 16/33\end{pmatrix}$$

$$(PA)^{-1}=\begin{pmatrix}-4/33 & 1/33 & 8/33\\ 1/66 & 4/33 & -1/33\\ 17/66 & 2/33 & 16/33\end{pmatrix}.$$

$(PA)^{-1}\cdot PA=E$, $(PA)^{-1}\cdot P=A^{-1}$, таким образом

$$(A)^{-1}=(PA)^{-1}P_{23}P_{13}=\begin{pmatrix}-4/33 & 8/33 & 1/33\\ 1/66 & -1/33 & 4/33\\ 17/66 & 16/33 & 2/33\end{pmatrix}P_{13}=\begin{pmatrix}1/33 & 8/33 & -4/33\\ 4/33 & -1/33 & 1/66\\ 2/33 & 16/33 & 17/66\end{pmatrix}.$$

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/33 & 8/33 & -4/33 \\ 4/33 & -1/33 & 1/66 \\ 2/33 & 16/33 & 17/66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Число обусловленности

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max(9,\, 4,\, 6) = 9 ,$$

$$\left\|A^{-1}\right\|_1 = \max_i \sum_j \left|A^{-1}_{(ij)}\right| = \max(\frac{13}{33}, \frac{11}{66}, \frac{53}{66}) = \frac{53}{66} \approx 0.8 ,$$

$$M_A = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = 9 \cdot \frac{53}{66} = \frac{159}{22} \approx 7.2 .$$

6. Метод прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей

Метод прогонки является одним из эффективных методов решения СЛАУ с трехдиагональными матрицами, возникающих при конечно-разностной аппроксимации задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных второго порядка, и является частным случаем метода Гаусса.

Рассмотрим следующую СЛАУ:

$$a_1 = 0$$

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2, \\ \qquad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad a_n x_{n-1} + b_n = d_n, \quad c_n = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

решение которой будем искать в виде:

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i - \overline{1,n}, \tag{6.2}$$

где $A_i, B_i, \quad i = \overline{1,n}$, – прогоночные коэффициенты.

Для их определения выразим из первого уравнения СЛАУ (6.1) x_1 через x_2. Получим:

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} A_1 x_2 + B_1, \tag{6.3}$$

откуда

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Из второго уравнения СЛАУ (6.1) с помощью (6.3) выразим x_2 через x_3

$$x_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1} x_3 + \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1} = A_2 x_3 + B_2,$$

откуда

$$A_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1}.$$

Продолжая этот процесс, получим из i-го уравнения СЛАУ (6.1):

$$x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}.$$

Следовательно,

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}.$$

Из последнего уравнения СЛАУ имеем:

$$x_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n A_{n-1}} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}} = 0 \cdot x_{n+1} + B_n,$$

т.е.

$$A_n = 0 \text{ (т.к. } c_m = 0), \quad B_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}} = x_n.$$

Таким образом, прямой ход метода прогонки по определению прогоночных коэффициентов $A_i, B_i, \quad i = \overline{1,n}$ завершен.

Прогоночные коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \tag{6.4}$$

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}, \quad \text{так как } a_1 = 0, i = 1; \tag{6.5}$$

$$A_n = 0 \text{ (т.к. } c_m = 0), \quad B_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}, \quad i = n. \tag{6.6}$$

Обратный ход метода прогонки осуществляется в соответствии с выражением (6.2):

$$\begin{cases} x_n = A_n x_{n+1} + B_n = 0 \cdot x_{n+1} + B_n = B_n, \\ x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1}, \\ x_{n-2} = A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = A_1 x_2 + B_1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Формулы (6.4)–(6.7) – формулы *правой прогонки*.

Аналогично, начиная с последнего уравнения СЛАУ (6.1) выводятся формулы *левой прогонки*.

Общее число операций в методе прогонки равно $8n+1$, т.е. пропорционально числу уравнений. Такие методы решения СЛАУ называют *экономичными.*

Для устойчивости метода прогонки (6.4)–(6.7) достаточно выполнения следующих условий:

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, i = \overline{1,n}, \quad a_i \neq 0, \quad i = \overline{2,n}, \quad c_i \neq 0, \quad i = \overline{1,n-1},$$

причем строгое неравенство имеет место хотя бы при одном *i.*

Устойчивость понимается в смысле накопления погрешности вектора неизвестных оператором прогонки при малых погрешностях входных данных (правых частей и элементов матрицы СЛАУ).

Обоснование метода прогонки. Метод прогонки содержит операцию деления и, следовательно, возможно накопление ошибок при увеличении числа уравнений в СЛАУ (6.1). Поэтому необходимо гарантировать *корректность,* т.е. выполнение условия:

$$b_i + a_i A_{i-1} \neq 0, \quad i = \overline{1,n} \tag{6.8}$$

и *устойчивость,* т.е. не накопление ошибок при увеличении числа уравнений СЛАУ (6.1).

Пусть прогоночные коэффициенты $A_i, B_i, \quad i = \overline{1,n}$ вычислены точно, а при вычислении x_n допущена ошибка ε_n : $\hat{x}_n = x_n + \varepsilon_n$. Тогда из (6.7) получим следующие равенства:

$$\hat{x}_i = A_i \hat{x}_{i+1} + B_i, \quad i = n-1,...,1,$$

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = n-1,...,1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\varepsilon_i = A_i \varepsilon_{i+1}, \quad i = n-1,...,1,$$

т.е. если выполняются условия:

$$|A_i| < 1, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6.9}$$

то алгоритм метода прогонки не накапливает ошибок и является устойчивым.

Для корректности и устойчивости метода прогонки, т.е. для реализации неравенств (6.8), (6.9), существует следующая лемма.

Лемма (**достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки**): Пусть коэффициенты СЛАУ (6.1) удовлетворяют условиям:

$$|a_i| \geq 0, \quad |b_i| > 0, \quad |c_i| \geq 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad i = \overline{2,n-1}, \tag{6.10}$$

$$|b_1| \geq |c_1|, \quad |b_n| \geq |a_n|, \tag{6.11}$$

причем хотя бы в одном из неравенств (6.10) или (6.11) выполняется строгое неравенство, т.е. матрица СЛАУ (6.1) имеет диагональное преобладание.

Тогда имеют место неравенства (6.8) и (6.9), гарантирующие корректность и устойчивость метода прогонки.

Упражнения

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей $A(n=4)$:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &= 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 &= 10, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_3 - 3x_4 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$(a_1 = 0, c_4 = 0)$.

Решить эту систему методом прогонки.

Прямой ход – вычислим прогоночные коэффициенты:

$$A_1 = \frac{-c_1}{b_1} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}; \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1} = \frac{8}{5} = \frac{8}{5};$$

$$A_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 A_1} = \frac{1}{6 + 3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} = -\frac{5}{21}; \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{b_2 + a_2 A_1} = \frac{10 - 3\cdot\frac{8}{5}}{6 + 3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{26}{21}.$$

$$A_3 = \frac{-c_3}{b_3 + a_3 A_2} = \frac{2}{4 + 1\cdot\left(-\frac{5}{21}\right)} = \frac{42}{79}; \quad B_3 = \frac{d_3 - a_3 B_2}{b_3 + a_3 A_2} = \frac{3 - 1\cdot\frac{26}{21}}{4 + 1\cdot\left(-\frac{5}{21}\right)} = \frac{37}{79}.$$

Обратный ход – найдем решение

$$x_4 = B_4 = \frac{d_4 - a_4 B_3}{b_4 + a_4 A_3} = \frac{-2 - 1\cdot\frac{37}{79}}{-3 + 1\cdot\left(\frac{42}{79}\right)} = 1;$$

$$x_3 = A_3 x_4 + B_3 = \frac{42}{79}\cdot 1 + \frac{37}{79} = 1;$$

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2 = -\frac{5}{21}\cdot 1 + \frac{26}{21} = 1;$$

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1 = -\frac{3}{5}\cdot 1 + \frac{8}{5} = 1.$$

Проверка: подстановкой решения $x_* = (1;1;1;1)^T$ в исходную систему убеждаемся, что задача решена верно:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 5\cdot 1 + 3\cdot 1 = 8 \\ 3\cdot 1 + 6\cdot 1 + 1\cdot 1 = 10 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 = 3 \\ 1\cdot 1 - 3\cdot 1 = -2 \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки (n=4)

$b=(5;6;4;-3)^T$ –	равных 0 элементов нет,
$\lvert b_2\rvert=6>\lvert 3\rvert+\lvert 1\rvert=4$, $\lvert b_3\rvert=4>\lvert 1\rvert+\lvert -2\rvert=3$,	неравенства (6.10) выполнено строго,
$\lvert b_1\rvert=5>\lvert 3\rvert$, $\lvert b_4\rvert=3>\lvert 1\rvert$	неравенства (6.11) выполнены строго.

Ответ: решением СЛАУ является вектор $x_* = (1;1;1;1)^T$, условия применимости метода прогонки выполнены.

7. Метод простой итерации решения СЛАУ

Пусть система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$x = Bx + c \tag{7.1}$$

Здесь B – квадратная матрица с элементами $b_{ij}(i, j = 1,2,...,m)$, с – вектор-столбец с элементами $c_i(i = 1,2,...,m)$.

В развернутой форме записи система (7.1) имеет следующий вид:

$$x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1m}x_m + c_1,$$

$$x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2m}x_m + c_2,$$

....

$$x_m = b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + ... + b_{mm}x_m + c_m.$$

Вообще говоря, операция приведения системы к *виду, удобному для итерации* (т.е. к виду (7.1)), не является простой и требует специальных знаний, а также существенного использования специфики системы [7, 8].

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)},..., x_m^{(0)})^{\mathrm{T}}$. Подставляя его в правую часть системы (7.1) и вычисляя полученное выражение, находим первое приближение:

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + c.$$

Продолжая этот процесс далее, получим последовательность $x^{(0)}, x^{(1)},..., x^{(n)},...$ приближений, вычисляемых по формуле:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, k = 0,1,2,... .$$

В развернутой форме записи формула (7.1) выглядит так:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \ldots + b_{1m}x_m^{(k)} + c_1, \\
x_2^{(k+1)} &= b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + b_{23}x_3^{(k)} + \ldots + b_{2m}x_m^{(k)} + c_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m^{(k+1)} &= b_{m1}x_1^{(k)} + b_{m2}x_2^{(k)} + b_{m3}x_3^{(k)} + \ldots + b_{mm}x_m^{(k)} + c_m.
\end{aligned}
$$

Теорема 7.1 о достаточном условии сходимости метода простой итерации. Пусть выполнено условие

$$\|B\| < 1 \tag{7.2}$$

Тогда:

- решение $\overline{x}$ системы (7.1) существует и единственно;
- при произвольном начальном приближении $x^{(0)}$ метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности

$$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \le \|B\|^n \left\|x^{(0)} - \overline{x}\right\|.$$

Замечание 1. В условии (7.2) имеется в виду некоторая каноническая [4] норма матрицы.

Замечание 2. Норма матрицы должна быть подчинена норме вектора (см. задание 5)

Апостериорная оценка погрешности. Если выполнено условие (7.2), то справедлива апостериорная оценка погрешности:

$$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \le \frac{1}{1 - \|B\|}\left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\|$$

или

$$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \tag{7.3}$$

Если требуется найти решение с точностью ε, то в силу (7.3) следует вести итерации до выполнения неравенства:

$$\frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве критерия окончания итерационного процесса может быть использовано неравенство:

$$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon_1,\ \varepsilon_1 = \frac{1 - \|B\|}{\|B\|}\varepsilon.$$

Теорема 7.2 о необходимом и достаточном условии сходимости метода простой итерации. Для сходимости процесса итерации $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c,\ k = 0,1,2,...$ при любом выборе вектора начального приближения $x^{(0)}$ и любом свободном члене c необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы B, то есть корни характеристического уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$ были по модулю меньше единицы [4].

Упражнения

а) Дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}5x_2 + 1{,}5 \\ x_2 &= -0{,}3x_1 + 1{,}0 \end{aligned},$$

записанная в виде, удобном для итераций $x = Bx + c$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix}$$

Дано также начальное приближение $x^{(0)}=(2;\ 0{,}5)^T$.

Вычислим первое приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Второе приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -0{,}3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}525 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 0{,}475 \end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие сходимости (7.2), т.е. $\|B\| < 1$

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \max_i \begin{pmatrix} 0 + |0{,}5| \\ |-0{,}3| + 0 \end{pmatrix} = 0{,}5 < 1$$

Условие (7.2) выполнено, т.е., итерационный процесс будет сходиться к единственному решению системы.

В этом случае справедлива апостериорная оценка погрешности (7.3)

$$\left\| x^{(2)} - \bar{x} \right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|$$

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\|_1 = \max_i \begin{pmatrix} |1{,}7 - 1{,}75| \\ |0{,}475 - 0{,}4| \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} |-0{,}05| \\ |0{,}075| \end{pmatrix} = 0{,}075,$$

$$\left\| x^{(2)} - \bar{x} \right\| \le \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5} 0{,}075 = 0{,}075.$$

Ответ: решение системы на второй итерации $\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 0{,}475 \end{pmatrix}$, итерационный процесс сходится, т.к. выполняется достаточное условие, погрешность решения на второй итерации не превышает 0.075.

б**)** Дана система двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= -0{,}5x_1 - 0{,}7x_2 + 1{,}5 \\ x_2 &= -0{,}6x_1 + 0{,}6x_1 + 1{,}0 \end{aligned},$$

записанная в виде, удобном для итераций $x = Bx + c$ и начальное приближение $x^{(0)}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix},\ x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вычислим первое приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}85 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}35 \\ 3{,}1 \end{pmatrix}$$

Второе приближение

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}7 \\ -0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0{,}35 \\ 3{,}1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}995 \\ -2{,}07 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}495 \\ 3{,}07 \end{pmatrix}$$

Проверим достаточное условие сходимости $\|B\| < 1$ (теорема 7.1)

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_j |b_{ij}| = \max_i \begin{pmatrix} |-0{,}5| + |0{,}7| \\ |-0{,}6| + |0{,}6| \end{pmatrix} = 1{,}2 > 1$$

Условие (7.2) не выполнено. Можно убедиться, что и использование нормы 2 приводит к такому же результату

$$\|B\|_2 = \max_j \sum_i |b_{ij}| = \max_j \left(|-0.5| + |-0.6|;\quad |-0.7| + |0.6|\right) = 1.3 > 1.$$

Вычислим норму 3

$$\|B\|_3 = \sqrt{\max_i \lambda_i \left(B^T B\right)}$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6 \\ -0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 & -0.7 \\ -0.6 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.74 & -0.12 \\ -0.12 & 0.72 \end{pmatrix},$$

Собственные числа находим, решая характеристическое уравнение

$$\left|B^T B - \lambda E\right| = 0:\ (0.74 - \lambda)(0.72 - \lambda) - 0.0144 = 0:$$

$$\lambda_1 \approx 0.85,\ \lambda_2 \approx 0.61,$$
$$\|B\|_3 = \sqrt{\lambda_1} \approx 0.922 < 1.$$

Отметим, что в случае, когда $\|B\| > 1$, о сходимости (равно как и о расходимости) итерационного процесса сказать ничего нельзя.

Так как $\|B\| < 1$, то справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\left\|x^{(2)} - \overline{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|$$

$$\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|_1 = \max_i \begin{pmatrix} |-0.35 - (-0.495)| \\ |3.1 - 3.07| \end{pmatrix} = \max_i \begin{pmatrix} |0.145| \\ |-0.03| \end{pmatrix} = 0.145,$$

$$\left\|x^{(2)} - \overline{x}\right\| \le \frac{0.922}{1 - 0.922} 0.145 = 1.714$$

Необходимое и достаточное условие сходимости метода простой итерации требует, чтобы все собственные значения матрицы B по модулю были меньше 1 (теорема 7.2). Собственные числа являются корнями характеристического уравнения $|B - \lambda E| = 0$.

В данном случае

$$(-0{,}5 - \lambda)(0{,}6 - \lambda) - 0{,}42 = 0 :\ \lambda_1 = 0{,}9,\ \lambda_2 = -0{,}8,$$
$$|\lambda_1| = |0{,}9| < 1,\ |\lambda_2| = |-0{,}8| = 0{,}8 < 1,$$

то есть, итерационный процесс сходится.

Ответ: решение системы на второй итерации $\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}495 \\ 3{,}07 \end{pmatrix}$, итерационный

процесс сходится, т.к. выполняется необходимое и достаточное условие, погрешность решения на второй итерации не превышает 1.714.

8. Задания для самостоятельной работы

Формулировка заданий

1. Вычислить произведение и определить погрешность вычислений, считая все цифры в записи сомножителей верными значащими в узком смысле. Округлить сомнительные цифры результата, оставив только верные знаки.

2. Для заданных узлов и функции построить таблицу интерполяции и интерполяционный полином Лагранжа. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

3. Для заданных узлов и функции построить таблицу разделенных разностей и интерполяционный полином Эрмита. Вычислить и оценить погрешность в точке, сравнить полученные значения. Объяснить результат

4. Вычислить определенный интеграл по составной формуле трапеций с одним и двумя отрезками разбиения. Вычислить и оценить погрешности, сравнить полученные значения. Применить правило Рунге практической оценки погрешности, уточнить результат по Ричардсону, сравнить с точным значением. Объяснить результат

5. . Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса с частичным выбором главного элемента. В процессе решения получить LU – разложение исходной матрицы системы, найти ее определитель. Получить обратную матрицу и число обусловленности системы

6. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей методом прогонки. Проверить выполнение достаточного условия корректности и устойчивости метода прогонки

7. Получить два приближения к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом простой итерации. Оценить погрешность. Проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости.

8. Вычислить норму матрицы $\| A \|_1$, $\| A \|_2$ или $\| A \|_3$ =?

9. Оценить обусловленность матрицы $M_A = ?$

Вариант 1

$25.1\cdot 1.743 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(6x-5)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv(6x-5)^3$
$\int_{3/2}^{7/2}(6x-5)^2\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $8x_1+12x_2+14x_3=14,$ $2x_1+4x_2+x_3=6.$	$x_1-x_2=3,$ $3x_1+3x_2-12x_3=27,$ $3x_2+x_3-14x_4=30,$ $2x_3+2x_4=13.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+1,$ $x_2=x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_2=?,\ A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 2

$1.9\cdot 2.3=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv x^4$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\},$ $F(x)\equiv x^4$
$\int_1^3\frac{1}{x+1}\,dx=?$	$5x_1+5x_2+5x_3=5,$ $4x_1+6x_2+7x_3=7,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$3x_1-6x_2=3,$ $2x_1+2x_2-18x_3=20,$ $2x_2+x_3-21x_4=13,$ $x_3+x_4=5.$
$x_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_3=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$

Вариант 3

$5\cdot 8.2=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(2x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv(2x-1)^3$
$\int_1^3(2x-1)^3\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $4x_1+6x_2+7x_3=7,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$3x_1-9x_2=6,$ $x_1+2x_2-10x_3=12,$ $x_2+3x_3-15x_4=17,$ $2x_3+2x_4=14.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_2=?\ A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&3&3\\2&2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$

Вариант 4

$5.2\cdot 8 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv 4(x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\},$ $F(x)\equiv 4(x-1)^3$
$\int\limits_0^1 4(x-1)^3\,dx=?$	$2x_1+2x_2+2x_3=1,$ $2x_1+3.5x_2+3.5x_3=3.5,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$2x_1-4x_2=6,$ $3x_1+x_2-14x_3=16,$ $3x_2+x_3-21x_4=10,$ $2x_3+2x_4=26.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_1=?\ A=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&1\\1&2&1\end{bmatrix}$	$M_A=?\ A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 5

$3\cdot 2.1 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv 5x^3+1$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv 5x^3+1$
$\int\limits_0^1 (5x^3+1)dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+3x_2+3.5x_3=3.5,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$x_1-3x_2=3,$ $3x_1+2x_2-33x_3=20,$ $x_2+3x_3-12x_4=7,$ $2x_3+3x_4=9.$
$x_1=x_1+x_2+1,$ $x_2=x_1+\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_3 \quad =?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 6

$5.8\cdot 3 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv (x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\},$ $F(x)\equiv (x-1)^3$
$\int\limits_0^1 (x-1)^3\,dx=?$	$2x_1+2x_2+2x_3=2,$ $4x_1+6x_2+7x_3=7,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$2x_1-6x_2=2,$ $3x_1+2x_2-22x_3=14,$ $2x_2+3x_3-7x_4=16,$ $3x_3+2x_4=16.$
$x_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{3}x_1+x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_2=?,\ A=\begin{bmatrix}2&3&2\\3&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 7

$9\cdot 5.3 \qquad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(7x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv(7x-1)^3$
$\int\limits_0^1 (7x-1)^3\,dx=?$	$5x_1+5x_2+5x_3=5,$ $4x_1+6x_2+7x_3=7,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$2x_1-2x_2=6,$ $2x_1+x_2-9x_3=9,$ $2x_2+2x_3-16x_4=18,$ $3x_3+2x_4=22.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+1,$ $x_2=x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_1=?,\ A=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&3&3\\3&2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$

Вариант 8

$4.6\cdot 3 \qquad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(8x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\},$ $F(x)\equiv(8x-1)^3$
$\int\limits_0^1 (8x-1)^3\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+3x_2+3.5x_3=3.5,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$x_1-2x_2=2,$ $x_1+x_2-9x_3=5,$ $2x_2+3x_3-9x_4=29,$ $2x_3+2x_4=18.$
$x_1=x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_3=?,\ A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0.4\end{bmatrix}.$

Вариант 9

$1.2\cdot 1 \qquad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(x-1)^2$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv(x-1)^2$
$\int\limits_0^1 (x-1)^2\,dx=?$	$10x_1-7x_2+0\cdot x_3=7,$ $-3x_1+2x_2+6x_3=4,$ $2x_1-x_2+5x_3=6.$	$2x_1-6x_2=2,$ $3x_1+3x_2-12x_3=27,$ $x_2+3x_3-12x_4=6,$ $3x_3+x_4=23.$
$x_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_1=?,\ A=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&2&1\\2&2&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 10

$2.6\cdot 3.05=?$	$L_2(x)=?$, $x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv(10x-1)^3$	$H_2(x)=?$, $x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv(10x-1)^3$
$\int_1^2 (10x-1)^3\,dx=?$	$x_1+x_2+2x_3=1,$ $2x_1+3x_2+4.5x_3=3,$ $2x_1+4x_2+2x_3=4.$	$x_1-2x_2=-2,$ $x_1+2x_2-9x_3=6,$ $2x_2+4x_3-9x_4=21,$ $7x_3+2x_4=15.$
$x_1=-x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_2=?,\ A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\2&2&-3\\5&-1&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&0.3\end{bmatrix}.$

Вариант 11

$7.5\cdot 2.2=?$	$L_2(x)=?$, $x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv(x-1)^2$	$H_2(x)=?$, $x=\{1,1,2\}$, $F(x)\equiv(x-1)^2$
$\int_0^1 3x^2\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+3x_2+3.5x_3=3,$ $2x_1+4x_2+6x_3=4.$	$x_1-3x_2=6,$ $x_1+3x_2-8x_3=15,$ $2x_2+4x_3-10x_4=8,$ $5x_3+2x_4=10.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_1=?,\ A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\3&-4&0\\1&5&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}.$

Вариант 12

$1.6\cdot 2.05=?$	$L_2(x)=?$, $x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv(2x+1)^3$	$H_2(x)=?$, $x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv(2x+1)^3$
$\int_1^3 (2x+1)^3\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+3x_2+3.5x_3=2,$ $2x_1+4x_2+6x_3=2.$	$2x_1-4x_2=3,$ $2x_1+2x_2-18x_3=15,$ $4x_2+6x_3-18x_4=10,$ $4x_3+4x_4=8.$
$x_1=x_1-\frac{1}{4}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_2=?,\ A=\begin{bmatrix}3&0&-2\\1&2&6\\0&4&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$

Вариант 13

$7.2\cdot 1.1=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv x^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv x^3$
$\int_0^2 (x-1)^3\,dx=?$	$10x_1-7x_2+0\cdot x_3=7,$ $-3x_1+2x_2+6x_3=4,$ $2x_1-x_2+5x_3=6.$	$2x_1-6x_2=2,$ $3x_1+3x_2-12x_3=27,$ $x_2+3x_3-12x_4=6,$ $3x_3+x_4=23.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_1=?,\ A=\begin{bmatrix}3&-3&3\\5&2&1\\2&4&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 14

$12.6\cdot 3.05=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv 2(x-0.1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\},$ $F(x)\equiv 2(x-0.1)^3$
$\int_0^2 4(x-1)^3\,dx=?$	$-x_1+x_2+2x_3=1,$ $2x_1+5x_2+4.5x_3=-3,$ $2.2x_1+4x_2+2x_3=4.$	$x_1-2x_2=-2,$ $x_1+2x_2-9x_3=6,$ $2x_2+4x_3-9x_4=21,$ $7x_3+2x_4=15.$
$x_1=-x_1+\frac{1}{5}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_2=?,\ A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\2&2&-3\\5&-1&2\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 15

$3\cdot 2.1\qquad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\},$ $F(x)\equiv(2x-1/2)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\},$ $F(x)\equiv(2x-1/2)^3$
$\int_1^2 (2x-1/2)^3\,dx=?$	$x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+3x_2+3.5x_3=3.5,$ $2x_1+4x_2+6x_3=6.$	$x_1-3x_2=3,$ $3x_1+2x_2-33x_3=20,$ $x_2+3x_3-12x_4=7,$ $2x_3+3x_4=9.$
$x_1=x_1+x_2+1,$ $x_2=x_1+\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\lVert A\rVert_3=?,\ A=\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 16

$4.8\cdot 3.01=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv(x-3)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv(x-3)^3$
$\int_2^3 (x-3)^3\,dx=?$	$2.2x_1+2x_2+2x_3=2,$ $4x_1-6x_2+7x_3=-7,$ $2x_1+4x_2+6.1x_3=6.$	$4x_1-6x_2=2,$ $3x_1+5x_2-2.2x_3=14,$ $2x_2+3x_3-7x_4=16,$ $1.3x_3+2x_4=1.6.$
$x_1=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+2,$ $x_2=\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{4}x_2-1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_2=?,\ A=\begin{bmatrix}4&3&-2\\3&-5&2\\-1&2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$

Вариант 17

$9.1\cdot 5.3=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv(2x-1)^2$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\}$, $F(x)\equiv(2x-1)^2$
$\int_1^2 (2x-1)^2\,dx=?$	$5x_1+0.5x_2+5x_3=5,$ $4x_1+6x_2+0.7x_3=7,$ $2x_1+4x_2+0.6x_3=6.$	$2x_1-2x_2=6,$ $2x_1+x_2-9x_3=9,$ $2x_2+2x_3-1.6x_4=1.8,$ $3x_3+2x_4=22.$
$x_1=\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=-\frac{1}{7}x_1-\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_1=?,\ A=\begin{bmatrix}-3&1&1.1\\-2&1.3&-3\\-3&0.2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}.$

Вариант 18

$4.6\cdot 3.01=?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3$
$\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x-1\right)^3 dx=?$	$3x_1+x_2+x_3=1,$ $2x_1+5x_2+3.5x_3=-3.5,$ $2x_1+4x_2+16x_3=6.$	$3x_1-2x_2=2,$ $x_1+4x_2-9x_3=5,$ $2x_2+3x_3-9x_4=9,$ $2x_3+5x_4=18.$
$x_1=-x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\|A\|_3=?,\ A=\begin{bmatrix}0.3&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$

Вариант 19

$9.1 \cdot 5.0 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (x-3)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1, 1, 2\}$, $F(x) \equiv (x-3)^3$
$\int_1^3 (x-3)^3\,dx = ?$	$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 5x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= -4, \\ 3x_1 + 3x_2 - 12x_3 &= -6, \\ x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= -8, \\ 3x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{5}x_2 + 1, \\ x_2 &= -\tfrac{1}{7}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1, 1)^T$	$\lVert A \rVert_1 = ?,\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.1 \\ 2 & 1.1 & -3 \\ -3 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

Вариант 20

$9.1 \cdot 5.3 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (2x-2)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1, 2, 2\}$, $F(x) \equiv (2x-2)^3$
$\int_2^3 (2x-2)^2\,dx = ?$	$\begin{aligned} 5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 0.7x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + 0.6x_3 &= 6. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 &= -6, \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2, \\ 3x_3 + 2x_4 &= 5. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= -\tfrac{1}{7}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1, 1)^T$	$\lVert A \rVert_2 = ?,\ A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1.1 \\ -2 & 1.3 & -3 \\ -3 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

Вариант 21

$9.1 \cdot 5.3 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (3x-1/2)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1, 1, 2\}$, $F(x) \equiv (3x-1/2)^3$
$\int_1^2 (3x-1/2)^3\,dx = ?$	$\begin{aligned} 5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 &= 5, \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 0.6x_3 &= 6. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 &= -23, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_3 + 2x_4 &= 17. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + 1, \\ x_2 &= -\tfrac{1}{7}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1, 1)^T$	$\lVert A \rVert_1 = ?,\ A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0.3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

Вариант 22

$0.1 \cdot 1.0 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (7x-4)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1,1,2\}$, $F(x) \equiv (7x-4)^3$
$\int\limits_1^3 (7x-4)^3 dx = ?$	$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= -4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 12x_3 &= 18, \\ x_2 - 3x_3 + 12x_4 &= 10, \\ 3x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$
$x_1 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 1,$ $x_2 = -\frac{2}{7}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1.$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_1 = ?,\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.1 \\ 2 & 1.1 & -3 \\ -3 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$

Вариант 23

$2.20 \cdot 4.1 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (2x+3)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1,2,2\}$, $F(x) \equiv (2x+3)^3$
$\int\limits_1^3 (2x+3)^2 dx = ?$	$\begin{aligned} 5x_1 + 0.5x_2 + 5x_3 &= 10.5, \\ 4x_1 + x_2 + 0.7x_3 &= 5.7, \\ 2x_1 + x_2 + 0.6x_3 &= 3.6 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 3x_3 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$
$x_1 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 - 1,$ $x_2 = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 1.$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_2 = ?,\ A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1.1 \\ 2 & 1.3 & 3 \\ -3 & 0.2 & 3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Вариант 24

$9.1 \cdot 5.3 = ?$	$L_2(x) = ?,\ x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (3x - 1/3)^3$	$H_2(x) = ?,\ x = \{1,1,2\}$, $F(x) \equiv (3x - 1/3)^3$
$\int\limits_1^2 (3x - 1/3)^3 dx = ?$	$\begin{aligned} x_1 + 0.3x_2 + 5x_3 &= 6.3, \\ 5x_1 + x_2 + 0.7x_3 &= 6.7, \\ 2x_1 - 4x_2 + 0.6x_3 &= -1.4. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 3, \\ x_1 + 10x_2 - 9x_3 &= 2, \\ x_2 + 12x_3 - x_4 &= 12, \\ 3x_3 - 20x_4 &= -17. \end{aligned}$
$x_1 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 1,$ $x_2 = -\frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 1.$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_1 = ?,\ A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0.3 \end{bmatrix}$	$M_A = ?,\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

Вариант 25

$15.20 \cdot 8.4 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv 4(x-1/2)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv 4(x-1/2)^3$
$\int_0^1 (4x-1/2)^3\,dx=?$	$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3&=6,\\ 2x_1+3.5x_2+3.5x_3&=9,\\ 2x_1+4x_2+6x_3&=12.\end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1-4x_2&=-2,\\ 3x_1+x_2-14x_3&=-10,\\ 3x_2+x_3-21x_4&=-17,\\ 2x_3+2x_4&=4.\end{aligned}$
$x_1=\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{5}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{5}x_2-1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_1=?\ A=\begin{bmatrix}-1&3&3\\3&2&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$	$M_A=?\ A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 26

$0.3 \cdot 2.10 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv 5x^3+2$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,1,2\}$, $F(x)\equiv 5x^3+2$
$\int_0^1 (5x^3+2)dx=?$	$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=3,\\ 2x_1+3x_2+3.5x_3&=8.5,\\ 2x_1+4x_2+6x_3&=12.\end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1-3x_2&=-2,\\ 3x_1+2x_2-33x_3&=-28,\\ x_2+3x_3-12x_4&=-8,\\ 2x_3+3x_4&=5.\end{aligned}$
$x_1=x_1+0.1x_2+1,$ $x_2=-x_1+\frac{1}{2}x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_3\quad=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 27

$5.8 \cdot 3 \quad =?$	$L_2(x)=?,\ x=\{0,1/2,1\}$, $F(x)\equiv (x-1)^3$	$H_2(x)=?,\ x=\{1,2,2\}$, $F(x)\equiv (x-1)^3$
$\int_0^1 (x-1)^3\,dx=?$	$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3&=2,\\ 4x_1+6x_2+7x_3&=7,\\ 2x_1+4x_2+6x_3&=6.\end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1-6x_2&=2,\\ 3x_1+2x_2-22x_3&=14,\\ 2x_2+3x_3-7x_4&=16,\\ 3x_3+2x_4&=16.\end{aligned}$
$x_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+1,$ $x_2=\frac{1}{3}x_1+x_2+1.$ $x^{(0)}=(1,1)^T$	$\\|A\\|_2=?,\ A=\begin{bmatrix}2&3&2\\3&3&2\\1&2&3\end{bmatrix}$	$M_A=?,\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$

Вариант 28

$12.6 \cdot 13.05 = ?$	$L_2(x) = ?$, $x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (x-10)^3$	$H_2(x) = ?$, $x = \{1, 2, 2\}$, $F(x) \equiv (x-10)^3$
$\int_1^2 (x-10)^3 dx = ?$	$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 &= -6, \\ 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= -1, \\ 5x_3 + 2x_4 &= 7. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 - 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_2 = ?$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	$M_A = ?$, $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$.

Вариант 29

$0.77 \cdot .02 = ?$	$L_2(x) = ?$, $x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (x-9)^3$	$H_2(x) = ?$, $x = \{1, 1, 2\}$, $F(x) \equiv (x-9)^3$
$\int_0^1 (x-9)^3 dx = ?$	$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 12. \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 1, \\ 2x_2 + 4x_3 - 10x_4 &= 0, \\ 5x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{5}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_1 = ?$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$M_A = ?$, $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Вариант 30

$3.14 \cdot 2.71 = ?$	$L_2(x) = ?$, $x = \{0, 1/2, 1\}$, $F(x) \equiv (x+1)^3$	$H_2(x) = ?$, $x = \{1, 2, 2\}$, $F(x) \equiv (x+1)^3$
$\int_1^3 (x+1)^3 dx = ?$	$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 6. \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= -2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 18x_3 &= -14, \\ 4x_2 + 6x_3 - 18x_4 &= -8, \\ 2x_3 + 3x_4 &= 5. \end{aligned}$
$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 + 1, \\ x_2 &= \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + 1. \end{aligned}$ $x^{(0)} = (1,1)^T$	$\Vert A \Vert_2 = ?$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$	$M_A = ?$, $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Метод Ньютона решения нелинейного уравнения

Рассматривается задача нахождения корней уравнения вида

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ – непрерывная функция.

Методы решения уравнений делятся на *прямые* и *итерационные*. Прямые методы позволяют записать решение в виде некоторого конечного соотношения (формулы). На практике данная группа методов не всегда применима.

Зачастую решить данные уравнения удается только с помощью универсальных вычислительных алгоритмов – *итерационных методов* или *методов последовательных приближений*. В них необходимо задать некоторое приближенное решение – *начальное приближение*. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый *итерацией*. В результате итерации находят новое приближение. Итерации проводятся до получения решения с заданной точностью.

Процесс решения уравнения делится на два этапа:

1) *отделение корня* и нахождение начального приближения (может быть произведено графически или аналитически),

2) *уточнение корня* – прохождение необходимого числа шагов итерации.

Будем говорить, что корень t отделен на отрезке $[a;b] \subset D_f$, если $t \in [a;b]$ и других корней на этом отрезке нет. При этом сам отрезок $[a;b]$ называется *отрезком изоляции корня*. Отделить корень фактически означает найти для него отрезок изоляции.

Теорема 1.1 (об отделении корней). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то есть $f(a)f(b) < 0$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $t \in [a;b]$, в которой $f(t) = 0$ (рис. 1.1).

Замечание. Если же $f(x)$ непрерывна и дифференцируема и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то на $[a,b]$ находится только один корень уравнения.

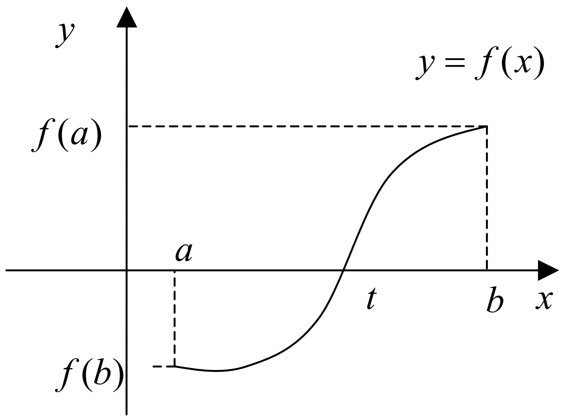

Рис. 1.1. Графическое отделение корня

Наиболее полно изучен вопрос о расположении корней *алгебраического многочлена* n -й степени.

$$P_n(x) = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \,,\ (a_n \neq 0). \qquad (1.1)$$

Рассмотрим случай *действительного уравнения*. Алгебраическое уравнение (1.1) называется действительным, если все его коэффициенты a_i действительные числа. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.2 (о числе корней алгебраического уравнения). Алгебраическое уравнение (1.1) n-й степени имеет ровно n корней, действительных или комплексных, при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Теорема 1.3. (о свойстве парной сопряженности комплексных корней уравнения). Если $x_i = \alpha + \beta i$ – корень алгебраического уравнения (1.1) кратности k, то сопряженное число также является корнем той же кратности.

Следствие. Алгебраическое уравнение нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Поиск приближенного значения корня с точностью до заданного достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ называется *процессом уточнения* корня. Задача уточнения считается решенной, если найдется число x, такое что $|t - x| \leq \varepsilon$. Тогда $t \approx x$ с точность до малого $\varepsilon > 0$.

Построим касательную к кривой $y = f(x)$. Каждое приближение к точному решению будет абсциссой точки пересечения соответствующей касательной и оси OX. Важным является вопрос о выборе начального приближения $x_0 \in [a;b]$. Начальное приближение удовлетворяет неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Принято следующее правило: если $f'(x)$ и $f''(x)$ одного знака на отрезке $[a;b]$, то следует брать $x_0 = b$, а если разных знаков, то $x_0 = a$.

После того, как начальное приближение выбрано, строят касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0\left(x_0; f(x_0)\right)$, уравнение которой имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Следующее приближение корня x_1 найдем, исходя из того, что это абсцисса точки пересечения касательной и оси абсцисс, а значит $y = 0$. Получим

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для $n-$го приближения будем иметь рекуррентную формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{1.2}$$

где $f'(x_{n-1}) \neq 0$.

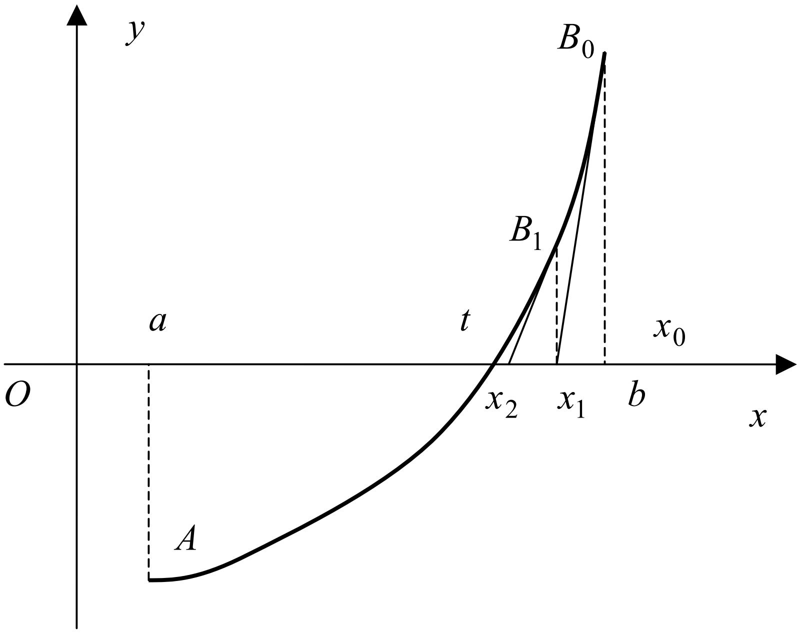

Рис. 1.2. Графическое изображение метода Ньютона (касательных)

Теорема 1.4 (достаточное условие сходимости метода Ньютона). Пусть $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на отрезке $[a;b]$ изоляции корня t, причем:

- $f(a)f(b) < 0$,
- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a;b]$,
- производная $f'(x) \neq 0$.

Тогда, исходя из начального приближения $x_0 \in [a;b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно построить последовательность, определяемую рекуррентной формулой и сходящуюся к единственному корню t на отрезке $[a;b]$.

Пусть также существуют положительные числа m и M такие, что $|f'(x)| \geq m_1$, $|f''(x)| \leq M_2$, $x \in [a;b]$. Погрешность приближений к t, найденных методом касательных, оценивается формулой

$$|t - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|t - x_{n-1}|^2, \ n = 1,2,... \tag{1.3}$$

Обычно берут $M_2 = \max\limits_{[a;b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{[a;b]}|f'(x)|$.

На практике итерационный процесс (1.2) останавливают при выполнении условия

$$|x_n - t| \leq |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon, \tag{1.4}$$

где ε – заданная точность.

Упражнения

Дано: $f(x) \equiv x^3 - 2x$, т.о. $f(x)$=0 является алгебраическим уравнением. По Теореме 1.2 уравнение имеет 3 корня, среди которых по крайней мере 1 действительный.

Отделим корни аналитически. Найдем производную и вычислим корни уравнения $f'(x)$=0

$f'(x) = 3x^2 - 2$=0 при $x = \pm\sqrt{2/3} \approx \pm 0.82 \approx \pm 1$

Составим таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равными критически значениям функции (корням уравнения $f'(x)$=0) или близким к ним

Таблица 1.1

Таблица перемены знаков функции

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\operatorname{sign} f(x)$	–	+	–	+

Так как происходят три перемены знака функции, то уравнение имеет три действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции $f(x)$

Таблица 1.2

Уточненная таблица перемены знаков функции

x	-2	-1	1	2
$\operatorname{sign} f(x)$	–	+	–	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках: $x_1 \in [-2,-1]$, $x_2 \in [-1,1]$, $x_3 \in [1,2]$.

Проверим условия применимости метода Ньютона на отрезке $[1,2]$, определяемые теоремой 1.2.

Таблица 1.3

Проверка условий применимости метода Ньютона на отрезке

$[a,b]$	$[1,2]$	выполнение
$f(a)\,f(b)<0$	$(1^3-2\cdot 1)\cdot(2^3-2\cdot 2)$= -4<0	выполнено
$f'(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$ sign $f'(x)$=const	$f'(x)=3x^2-2$=0, $x=\pm\sqrt{2/3}\notin[1,2]$ $f'(x)>0$ при $x\in[1,2]$	выполнено
sign $f''(x)$=const $\forall x\in[a,b]$	$f''(x)=6x>0$ при $x\in[1,2]$	выполнено

В случае выполнения условий применимости, как в нашем случае, начальное приближение метода Ньютона должно удовлетворять неравенству: $f(x_0)f''(x_0)>0$. Так как вторая производная положительна и $f(b)>0$ (табл. 1.2, 1.3), то в качестве начального приближения выбираем правую границу отрезка $x_0=2$.

Выполним две итерации метода Ньютона по формуле

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,...$$

Первая итерация:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{2^3-2\cdot 2}{3\cdot 2^2-2}=2-\frac{4}{10}=1.6;$$

Вторая итерация:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.6-\frac{1.6^3-2\cdot 1.6}{3\cdot 1.6^2-2}=1.6\left(1-\frac{2.56-2}{3\cdot 2.56-2}\right)=1.4422.$$

Получим оценку погрешности, используя оценки для производных функции $f(x)$:

$$M_2=\max_{[a;b]}|f''(x)|=\max_{[1;2]}|6x|=12,\ m_1=\min_{[a;b]}|f'(x)|=\min_{[1;2]}\left|3x^2-2\right|=1,$$

$$|t-x_2|\le\frac{M_2}{2m_1}|x_2-x_1|^2=\frac{12}{2\cdot 1}|1.4422-1.6|^2\le 0.15.$$

В соответствии с этой оценкой верными являются не более, чем два десятичных знака приближенного числа (или один знак после запятой), второй знак необходимо считать сомнительным: x_2=1.4$\underline{4}$. Точным значением решения уравнения на отрезке $[1,2]$ является $t=\sqrt{2}\approx 1.4142$, абсолютная погрешность приближенного решения на второй итерации равна $\Delta=|t-x_2|=|1.4142-1.4442|=0.028$. Таким образом, верными в узком смысле по-прежнему являются две значащие цифры.

Ответ: один из искомых корней уравнения находится на отрезке $[1,2]$, условия применимости метода Ньютона на этом отрезке выполнены, получена последовательность приближений: *x*= 2, 1.6, 1.44.

2. Метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений

Если известно достаточно хорошее начальное приближение к решению уравнения $f(x) = 0$, то эффективным методом повышения точности является *метод Ньютона*. Идея метода Ньютона заключается в том, что в окрестности имеющегося приближения x_n задача заменяется некоторой вспомогательной линейной задачей.

Последняя задача выбирается так, чтобы погрешность замены имела более высокий порядок малости, чем первый (в определяемом далее смысле), в окрестности имеющегося приближения. За следующее приближение принимается решение этой вспомогательной задачи.

Рассмотрим случай скалярного уравнения $f(x) = 0$. В качестве такой вспомогательной задачи естественно взять линейную задачу

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

Ее решение

$$x = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

принимается за следующее приближение x_{n+1} к решению исходного уравнения, т.е. итерации ведутся по формуле

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

с действительными левыми частями.

Запишем короче систему (1). Совокупность аргументов x_1, x_2,…,x_n можно рассматривать как n-мерный вектор

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Аналогично совокупность функций f_1, f_2,…,f_nпредставляет собой также n-мерный вектор (вектор-функцию)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Поэтому система (1) кратко записывается так:

$$f(x) = 0. \tag{2.1'}$$

Для решения системы (2.1’) будем пользоваться методом последовательных приближений.

Предположим, что найдено p-е приближение

$x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)}\right)$

Одного из изолированных корней $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ векторного уравнения (2.1’). Тогда точный корень уравнения (1’) можно представить в виде

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon^{(p)} = \left(\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, \varepsilon_n^{(p)}\right)$ - поправка (погрешность корня).

Подставляя выражение (2.2) в уравнение (2.1’), будем иметь

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = 0. \tag{2.3}$$

Предполагая, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей x и $x^{(p)}$, разложим левую часть уравнения (2.3) по степеням малого вектора $\varepsilon^{(p)}$, ограничиваясь линейными членами,

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = f\left(x^{p}\right) + f'\left(x^{p}\right)\varepsilon^{(p)} = 0 \tag{2.4}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{cases} f_1\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_1\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{1x_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{1x_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{1x_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\ f_2\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_2\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{2x_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{2x_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{2x_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0, \\ \qquad \vdots \\ f_n\left(x_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, x_2^{(p)} + \varepsilon_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}\right) = \\ \quad = f_n\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right) + f'_{nx_1}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_1^{(p)} + \\ \qquad + f'_{nx_2}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_2^{(p)} + \ldots + f'_{nx_n}\left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)\varepsilon_n^{(p)} = 0. \end{cases} \tag{2.4’}$$

Из формул (2.4) и (2.4’) вытекает, что под производной $f'(x)$ следует понимать *матрицу Якоби* системы функций $f_1, f_2,\ldots,f_n$ относительно переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$, т.е.

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$f'(x) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad (i\,,j{=}1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Система (2.4') представляет собой линейную систему относительно поправок $\varepsilon_i^{(p)}$ (i=1, 2, …, n) с матрицей $W(x)$, поэтому формула (2.4) может быть записана в следующем виде:

$$f\left(x^{(p)}\right) + W\left(x^{(p)}\right)\varepsilon^{(p)} = 0.$$

Отсюда, предполагая, что матрица $W(x^{(p)})$ – неособенная, получим:

$$\varepsilon^{(p)} = -W^{-1}\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right).$$

Следовательно,

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}\left(x^{(p)}\right)f\left(x^{(p)}\right) \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{2.5}$$

Соотношения (2.5) определяют итерационный процесс **метода Ньютона** решения системы нелинейных уравнений. За нулевое приближение $x^{(0)}$ можно взять грубое значение искомого корня.

Для формулировки теоремы о сходимости метода Ньютона для решения нелинейного функционального уравнения введем следующие определения.

Пусть *F(x)* – оператор, отображающий линейное нормированное пространство *H* на линейное нормированное пространство *Y*, может быть и совпадающее с Н. Нормы в этих пространствах соответственно обозначаем $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_Y$.

Определение. Линейный оператор *P*, действующий из пространства *H* в пространство *Y*, назовем *производной оператора F(x)* в точке *x*, если

$$\left\|F(x+\eta) - F(x) - P_\eta\right\|_Y = o\left(\|\eta\|_H\right) \tag{2.6}$$

при $\|\eta\|_H \to 0$.

В дальнейшем будем обозначать такой оператор *P* через $F'(x)$. Пусть, например,

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)^T,\ F = \left(f_1, f_2, \ldots, f_m\right)^T.$$

Если функции f_i непрерывно дифференцируемы в окрестности данной точки *x*, то

$$f_i\left(x_1+\eta_1, \ldots, x_m+\eta_m\right) = f_i\left(x_1, \ldots, x_m\right) + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i\left(x_1, \ldots, x_m\right)}{\partial x_j}\eta_j + o\left(\|\eta\|\right).$$

Совокупность этих соотношений можно переписать в виде (2.6), если за *P* принять оператор умножения слева на матрицу

$$F'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

В простейшем случае *m*= 1 оператор *P* превращается в оператор умножения на производную f'_x.

Пусть X – решение уравнения $F(x) = 0$, x^n – некоторое приближение к X. В предположении существования производной F', согласно (2.6), имеем

$$\left\| F(x) - F(x^n) - F'(x^n)(X - x^n) \right\|_Y = o\left(\left\| X - x^n \right\|_H \right). \tag{2.7}$$

Если величина $\left\| X - x^n \right\|_H$ мала, то можно написать приближенное равенство

$$F(x^n) + F'(x^n)(X - x^n) \approx F(X).$$

Поскольку $F(X) \equiv 0$, то

$$F(x^n) + F'(x^n)(X - x^n) \approx 0.$$

Возьмем в качестве следующего приближения x^{n+1} решение уравнения

$$F(x^n) + F'(x^n)(X - x^n) = 0,$$

если такое уравнение существует. В предположении, что оператор F' обратим, это решение можно записать в виде

$$x^{n+1} = x^n - \left(F'(x^n) \right)^{-1} F(x^n). \tag{2.8}$$

Итерационный процесс (2.8) называют *методом Ньютона* (см. также (2.5)).

Пусть $\Omega_a = \{ x : \left\| x - X \right\|_H < a \}$. Пусть при некоторых a, a_1, a_2, $0<a$, $0\le a_1$, $a_2<\infty$, выполнены условия:

$$\left\| \left(F'(X) \right)^{-1} \right\|_Y \le a_1 \quad \text{при } x \in \Omega_a; \tag{2.9}$$

$$\left\| F(u_1) - F(u_2) - F'(u_2)(u_1 - u_2) \right\|_Y =\le a_2 \left\| u_2 - u_1 \right\|_H^2 \tag{2.10}$$

при $u_1, u_2 \in \Omega_a$. Обозначим $c = a_1 a_2$, $b = \min\{a, c^{-1}\}$.

Теорема 2.1 (о сходимости метода Ньютона). При условиях (2.9), (2.10) и $x^0 \in \Omega_b$ итерационный процесс Ньютона (2.8) сходится с оценкой погрешности

$$\left\| x^n - X \right\|_H \le c^{-1} \left(\left\| x^0 - X \right\|_H \right)^{2^n}. \tag{2.11}$$

Примечание. Если в рассматриваемом выше примере в некоторой окрестности решения функции f_i имеются ограниченные вторые производные, то, согласно формуле Тейлора, имеем

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} (y_j - x_i) + O\left(\left\| y - x \right\|^2 \right),$$

И, таким образом, условие (2.6) выполнено.

Обращение оператора $F'(x^n)$ зачастую оказывается более трудоемкой операцией, чем вычисление значения $F(x^n)$. Поэтому метод Ньютона часто модифицируется следующим образом. По ходу вычислений выбирают или заранее задаются некоторой возрастающей последовательностью чисел $n_0 = 0$, $n_1, n_2, \ldots$ При $n_k \le n < n_{k+1}$ итерации производят по формуле

$$x^{n+1} = x^n - \left(F'\left(x^{n_k}\right)\right)^{-1} F\left(x^n\right).$$

Увеличение числа итераций, сопровождающее такую модификацию, компенсируется большей «дешевизной» одного шага итерации. Выбор последовательности $\{n_k\}$ нужно производить с обоюдным учетом этих факторов.

Сравним асимптотическую скорость сходимости метода Ньютона и простой итерации. Для последнего мы имели оценку погрешности

$$\left\|x^n - X\right\| \le q^n \left\|x^0 - X\right\|, \quad q<1.$$

Чтобы погрешность стала меньше ε, согласно этой оценке достаточно взять

$$n \ge \log_{q^{-1}} \frac{\left\|x^0 - X\right\|}{\varepsilon} \approx \log_{q^{-1}} \frac{1}{\varepsilon}.$$

В случае метода Ньютона правая часть (2.11) будет меньше ε, если

$$n \ge -\log_2 \frac{\log_2\left(c\left\|x^0 - X\right\|\right)}{\log_2(c\varepsilon)} \approx \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, асимптотически, при $\varepsilon \to 0$, метод Ньютона требует меньшего количества итераций.

Упражнения

Дана система уравнений и начальное приближение

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 = 1. \end{cases} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}4 \\ 2{,}2 \end{bmatrix}$$

Для приближенного решения системы методом Ньютона, приведем систему к виду (2.1) с нулевыми правыми частями, иначе говоря

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Вычислим вторые приближения корней, производя вычисления с точностью до четырех десятичных знаков. Полагая

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) \equiv x_1 + 3\lg x_1 - x^2, \\ f_2(x_1, x_2) \equiv 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = 0,$$

имеем:

$$f\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 3{,}4 + 3\lg 3{,}4 - 2{,}2^2 \\ 2 \cdot 3{,}4^2 - 3{,}4 \cdot 2{,}2 - 5 \cdot 3{,}4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1544 \\ -0{,}3600 \end{bmatrix}.$$

Составим теперь матрицу Якоби

$$W(x)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{3M}{x_1} & -2x_2\\ 4x_1-x_2-5 & -x_1\end{bmatrix},$$

где M = 0,43429. Отсюда

$$W(x^{(0)})=\begin{bmatrix}1+\dfrac{3\cdot 0{,}43429}{3{,}4} & -2\cdot 2{,}2\\ 4\cdot 3{,}4-2{,}2-5 & -3{,}4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}3832 & -4{,}4\\ 6{,}4 & -3{,}4\end{bmatrix},$$

причем

$$\Delta=\det W\left(x^{(0)}\right)=23{,}4571.$$

Следовательно, матрица $W(x^{(0)})$ – неособенная. Составим обратную ей матрицу

$$W^{-1}(x^{(0)})=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}3832\end{bmatrix}.$$

Используя формулу метода Ньютона (2.5), получим:

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}-\frac{1}{23{,}4571}\begin{bmatrix}-3{,}4 & 4{,}4\\ -6{,}4 & 1{,}3832\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}1544\\ -0{,}3600\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}-\frac{1}{23{,}4571}\begin{bmatrix}-2{,}10896\\ -1{,}48604\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}4\\ 2{,}2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}0899\\ 0{,}0633\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}4899\\ 2{,}2633\end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся дальнейшие приближения.

3. Методы Эйлера решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида $y'=f\left(x,y\right)$, где $f(x,y)$ – непрерывная функция двух переменных и дифференцируемая по y. Его *решением* называется функция $y=\varphi(x)$ – непрерывно дифференцируемая на некотором конечном или бесконечном множестве и обращающая на нем данное уравнение в тождество $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.

Общее решение записывается в виде функции $y=\varphi(x,C)$ с произвольной числовой постоянной C.

Частное решение $y=\varphi\left(x,C_0\right)$ получается из общего решения при конкретном значении числового параметра $C=C_0$. Для выделения частного решения обычно ставится условие, которому должно удовлетворять это решение: $y=y_0$ при $x=x_0$, которое называется *начальным условием*, а точка $\left(x_0,y_0\right)$ – *начальной точкой*. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

Теорема 3.1. (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть точка (x_0, y_0) является внутренней точкой замкнутой прямоугольной области $D = \{(x; y): a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2\} \subset D_f$, на которой выполняются условия:

1) функция f непрерывна как функция двух переменных;

2) частная производная f'_y существует и ограничена как функция двух переменных.

Тогда найдется такой отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a_1; b_1]$, $\delta > 0$, на котором уравнение имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию.

В качестве начальной точки в данной теореме можно взять любую внутреннюю точку области D. Следовательно, через каждую точку в достаточно малой ее окрестности проходит единственная интегральная кривая из семейства $y = \varphi(x, C)$.

Будем рассматривать простейший случай

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.1}$$

При численном решении задача сводится к поиску в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ приближенных значений y_k, $k = \overline{0, n}$. Точки x_k, $k = \overline{0, n}$ задают сетку, у которой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – шаг сетки. Если шаг сетки постоянный и обозначить его $\Delta x_k = h$, то

Метод Эйлера (классический) основан на записи (3.1) в следующей форме (через конечные разности)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad \Delta y = y(x+h) - y(x), \quad \Delta x = (x+h) - x = h. \tag{3.2}$$

Приближенное значение y_k из (3.2) в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, n}. \tag{3.3}$$

Для получения формулы (3.3) можно применить и иной прием. Запишем задачу (3.1) в виде

$$y' = f(x, y(x)), \qquad y(x_k) = y_k, \qquad k = \overline{0, n}. \tag{3.4}$$

Применим к (3.4) формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z))dz. \tag{3.5}$$

Таким образом (3.5) позволяет записать

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z))dz \tag{3.6}$$

Применим к вычислению интеграла из (3.6) формулу левых прямоугольников, тогда (3.6) запишется

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n} \tag{3.7}$$

Мы получим формулу *классического метода Эйлера*. Так как формулы левых прямоугольников имеют первый порядок точности, то и классический метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Описанная на примере (3.4)-(3.7) процедура позволяет построить *модификации метода Эйлера*.

Первая улучшенная формула **метода Эйлера (усовершенствованный метод Эйлера)** получается, если в (3.6) для вычисления интеграла применить формулу центральных прямоугольников. Вид формулы усовершенствованного метода Эйлера следующий

$$\begin{aligned} y_{k+1/2} &= y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Так как формула центральных прямоугольников имеет второй порядок точности, то и формула усовершенствованного метода Эйлера имеет второй порядок точности.

Вторая модификация метода Эйлера получается, если в (3.6) для вычисления интеграла применить формулу трапеций. Вид формулы второй модификации классического метода Эйлера следующий

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\big) \tag{3.9}$$

В формуле (3.9) значение y_{k+1} в правой части предсказывается по формуле (3.4) классического метода Эйлера, а затем по формуле (3.9) получается окончательное (скорректированное) значение y_{k+1}.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\big). \end{aligned} \tag{3.10}$$

По этой причине метод (3.10) называется метод типа предиктор-корректор. Иногда метод называют *методом Эйлера-Коши* или *методом Хьюна*.

Так как формула трапеций имеет второй порядок точности, то и вторая модификация метода Эйлера имеет второй порядок точности. Методы Эйлера являются одношаговыми методами.

Упражнения

1). Дано: $y' = f(x, y)$, $f \equiv y - x$, $y(0) = 1$.

Получить приближение к $y(0.1) = ?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n}$.

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(0.1)$, $f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$, $y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение y на половинном шаге $x_{1/2}$

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2}f_0,$$

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$, $y_{1/2} = 1 + \frac{0.1}{2} \cdot 1 = 1.05$.

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2})$, $x_{1/2} = x_0 + h/2$.

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0 + 0.1/2 = 0.05$, $f_{1/2} = y_{1/2} - x_{1/2} = 1.05 - 0.05 = 1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2} = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 1$, $f_0 = y_0 - x_0 = 1 - 0 = 1$,

$\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$.

Вычисления на этом этапе совпали с вычислениями по методу Эйлера в п. а). Это справедливо только для первого шага, в общем случае это не так.

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1)$, $x_1 = x_0 + h$.

Имеем: $x_1 = 0.1$, $\tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - x_1 = 1.1 - 0.1 = 1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right) = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 1) = 1.1.$$

Решения по всем трем методам совпали. Точное решение поставленной задачи Коши $y = x + 1$ при $x = 0.1$ также равно $y(0.1) = 1.1$.

Ответ: $y(0.1) \approx y_1 = 1.1$ по всем трем методам.

2). Дано: $y' = f(x, y)$, $f \equiv y - x$, $y(0) = 2$.

Получить приближение к $y(0.1) = ?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, n}$.

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(0.1)$, $f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$, $y_1 = y_0 + hf_0 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение *y* на половинном шаге $x_{1/2} = x_0 + h/2$

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f_0,$$

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$, $y_{1/2} = 2 + \frac{0.1}{2} \cdot 2$=2.1.

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2})$, $x_{1/2} = x_0 + h/2$.

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2$=0+0.1/2=0.05, $f_{1/2} = y_{1/2} - x_{1/2} = 2.1 - 0.05 = 2.05$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2}$=$2 + 0.1 \cdot 2.05$=2.205

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 2$, $f_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$, $\tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$.

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1)$, $x_1 = x_0 + h$.

Имеем: $x_1 = 0.1$, $\tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - x_1 = 2.2 - 0.1 = 2.1$.

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right) = 1 + \frac{0.1}{2}(2 + 2.1) = 2.205.$$

Решения по модификациям метода Эйлера совпали. Точное решение поставленной задачи Коши $y = x + 1 + e^x$ при $x = 0.1$ с точностью до пяти знаков после запятой равно $y(0.1) =$ 2.20517. Абсолютная погрешность полученных решений равна 0.0052, 0.0002.

Ответ: $y(0.1) \approx y_1 = 2.20$ по методу Эйлера, $y_1 = 2.205$ по модификациям метода.

3). Дано: $y' = f(x,y),\ f \equiv y - \dfrac{2x}{y},\ y(0)=1.$

Получить приближение к $y(0.1)=?$, применяя метод Эйлера и его модификации.

а) Запишем формулу метода Эйлера

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0,n}.$

Положим шаг интегрирования $h = 0.1$ и введем обозначения

$x_0 = 0,\ y_0 = y(0),\ y_1 = y(0.1),\ f_0 = f(x_0, y_0)$

Имеем: $y_0 = 2,\ f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1,\ y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

б) Запишем первую улучшенную формулу (3.8) метода Эйлера

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{1}{2}hf(x_k, y_k), \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение y на половинном шаге $x_{1/2} = x_0 + h/2$,

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2}f_0,$$

Имеем: $y_0 = 1,\ f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1,\ y_{1/2} = 1 + \dfrac{0.1}{2} \cdot 1 = 1.05.$

Введем обозначения: $f_{1/2} = f(x_{1/2}, y_{1/2}),\ x_{1/2} = x_0 + h/2.$

Имеем: $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.05,\ f_{1/2} = y_{1/2} - \dfrac{2x_{1/2}}{y_{1/2}} = 1.05 - \dfrac{2 \cdot 0.05}{1.05} = 0.954762.$

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$y_1 = y_0 + hf_{1/2} = 1 + 0.1 \cdot 0.954762 = 1.0954762$

в) Запишем вторую модифицированную формулу (3.10) метода Эйлера

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right).$$

Вычисления будем проводить в два этапа. На первом этапе вычислим промежуточное значение $\tilde{y}$ на следующем шаге x_1:

Имеем: $y_0 = 1,\ f_0 = y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0} = 1 - 0 = 1,\ \tilde{y}_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1.$

Введем обозначения: $\tilde{f}_1 = f(x_1, \tilde{y}_1),\ x_1 = x_0 + h.$

Имеем: $x_1 = 0.1,\ \tilde{f}_1 = \tilde{y}_1 - \dfrac{2x_1}{\tilde{y}_1} = 1.1 - \dfrac{2 \cdot 0.1}{1.1} = 0.9181818.$

На втором этапе получаем искомое значение y_1

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f_0 + \tilde{f}_1\right) = 1 + \frac{0.1}{2}(1 + 0.91818) = 1.095909.$$

Решения методу Эйлера и его модификациям отличаются. Точное решение поставленной задачи Коши $y=\sqrt{2x+1}$ при $x=0.1$ с точностью до пяти знаков после запятой равно $y(0.1)=1.09544$. Соответственно, абсолютная погрешность полученных решений равна 0.00456, 0.000036, 0.00047. Ответ запишем, применяя правило округления по дополнению.

Ответ: $y(0.1)\approx y_1=1.10$ по методу Эйлера, $y_1=1.0954$ по первой улучшенной формуле, $y_1=1.096$ по второй модифицированной формуле метода Эйлера.

4. Семейство явных двухэтапных методов Рунге-Кутты

Рассмотрим семейство явных двухэтапных методов Рунге-Кутты и покажем, что методы Эйлера, Эйлера-Коши являются частным случаем методов Рунге-Кутты.

Формула двухэтапных методов выглядит следующим образом

$$y_{k+1}=y_k+h\left[p_1 f(x_k,y_k)+p_2 f(x_k+\alpha_2 h, y_k+h\beta_{21} f(x_k,y_k))\right] \quad (4.1)$$

или

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=p_1 f(x_k,y_k)+p_2 f(x_k+\alpha_2 h, y_k+\beta_{21} h f(x_k,y_k)). \quad (4.2)$$

Параметрами в (4.1), (4.2) являются $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$.

Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(x)-p_1 hf(x,y)-p_2 hf\left(x+\alpha_2 h, y+h\beta_{21} f(x,y)\right), \quad (4.3)$$

где $x=x_k$, $y=y(x_k)$, $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$.

Если функция в правой части уравнения $f(x,y)$ – достаточно гладкая функция своих аргументов, то $\varphi(h)$ – гладкая функция параметра h и существуют производные $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ и $\varphi'''(h)$. Подбором параметров $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$ можно добиться, что производные $\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$.

Согласно формуле Тейлора выполняется равенство

$$\varphi(h)=\sum_{i=0}^{2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}h^i+\frac{\varphi'''(\theta h)}{3!}h^3=\frac{\varphi'''(\theta h)}{3!}h^3, \quad 0<\theta<1 \quad (4.4)$$

Функция $\varphi(h)$ представляет собой *погрешность метода на шаге*, *порядок погрешности метода* в данном случае второй.

Обозначим: $\bar{x}=x+\alpha_2 h$, $\bar{y}=\beta_{21} hf(x,y)$ и вычислим производные функции $\varphi(h)$, определяемой выражением (4.3):

$$\varphi'(h)=y'(x+h)-p_1 f(x,y)-p_2 f(\bar{x},\bar{y})-p_2 h\left(\alpha_2 f_x(\bar{x},\bar{y})+\beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)\right)$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h) - 2p_2\left(\alpha_2 f_x(\bar{x},\bar{y}) + \beta_{21} f_y(\bar{x},\bar{y}) f(x,y)\right) -$$
$$- p_2 h\left(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y) + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2\right)$$
$$\varphi'''(h) = y'''(x+h) - 3p_2\left(\alpha_2^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2\alpha_2\beta_{21} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) f(x,y) -\right.$$
$$\left. + \beta_{21}^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(f(x,y))^2\right) + O(h)$$

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f(x,y),\ y'' = f'_x + f'_y y',\ y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y y''$$

Подставим в выражения $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ и $\varphi'''(h)$ значение $h = 0$ и воспользуемся этими соотношениями; получим

$$\varphi(0) = y - y = 0,$$
$$\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f(x,y),$$
$$\varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2) f_x(x,y) + (1 - 2p_2\beta_{21}) f_y(x,y) f(x,y),$$
$$\varphi'''(0) = \left(1 - 3p_2\alpha_2^2\right) f_{xx}(x,y) + (2 - 6p_2\beta_{21}) f_{xy}(x,y) f(x,y) +$$
$$\left(1 - 3p_2\beta_{21}^2\right) f_{yy}(x,y)(f(x,y))^2 + f_y(x,y) y''(x),$$

Для выполнения условий аппроксимации второго порядка формулы (4.2), в выражении (4.4), представляющем собой ошибку аппроксимации, должны обращаться в ноль следующие коэффициенты

$$(1 - p_1 - p_2) = 0, \quad \left(\frac{1}{2} - p_2\,\alpha_2\right) = 0, \quad \left(\frac{1}{2} - p_2\,\beta_{21}\right) = 0$$

или

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Выражения (4.5) являются условиями аппроксимации второго порядка для двухэтапных методов Рунге-Кутты (4.2).

Замечание 1. Анализ погрешности аппроксимации (4.4) показывает, что выполнение только первого условия в (4.5), а именно $p_1 + p_2 = 1$, обеспечивает первый порядок аппроксимации, так как $\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) \neq 0$.

Замечание 2. Формула (4.2) второго порядка точности представляет собой однопараметрическое семейство, так как условия (4.5) можно преобразовать, выразив значения коэффициентов через один из параметров, например, $\alpha \equiv \alpha_2$:

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \qquad \beta_{21} = \alpha, \quad p_2 = \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \in (0,1).$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(x_k, y_k) + \frac{1}{2\alpha} f(x_k + \alpha h,\, y_k + \alpha h\, f(x_k, y_k))\right], \tag{4.6}$$

При $\alpha = 1/2$ формула (4.6) дает первую модификацию метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right) \tag{4.7}$$

При $\alpha = 1$ формула (4.6) дает метод Эйлера-Коши (метод Хьюна) – вторую модификацию метода Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_k + \alpha h, y_k + \alpha h f(x_k, y_k)\right)\right], \tag{4.8}$$

Замечание 3. У формул одинакового порядка точности по h главные члены погрешности на шаге часто оказываются непропорциональными. Например, главный член погрешности формулы (4.7) равен $\left(B + \frac{A}{2}\right)h^3$, а у формулы (4.8) равен $(B - A)h^3$, где

$$B = \frac{1}{6} f_y y'', \; A = \frac{1}{12}\left(f_{xx} + 2 f_{xy} y' + f_{yy} (y')^2\right),$$

Поэтому можно указать два уравнения таких, что для первого уравнения меньшую погрешность дает метод (4.7), а для второго уравнения – метод (4.8).

Замечание 4. В случае уравнения $y' = y$ имеем $\varphi'''(0) = y$ независимо от значений $p_1, p_2, \alpha_2, \beta_{21}$. Отсюда следует, что нельзя построить формулы двухэтапного метода Рунге-Кутты третьего порядка точности.

Упражнения

а) Дана формула: $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} hf(x_k, y_k) + \frac{1}{2} hf\left(x_k + h, y_k + h f(x_k, y_k)\right)$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf\left(x_k + \alpha_2 h, y_k + h\beta_{21} f(x_k, y_k)\right)$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_{21} = 1.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, формула являет собой метод Эйлера-Коши (метод Хьюна) – вторую модификацию метода Эйлера второго порядка точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

б) Дана формула: $y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}h\, f(x_k, y_k)\right)$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2\, h, y_k + h\beta_{21}\, f(x_k, y_k))$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_{21} = \frac{1}{2}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = 0 + 1 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, формула являет собой первую модификацию метода Эйлера второго порядка точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

в) Дана формула:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}hf(x_k, y_k) + \frac{2}{3}hf\left(x_k + \frac{3h}{4}, y_k + \frac{3h}{4} f(x_k, y_k)\right)$$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$y_{k+1} = y_k + p_1 hf(x_k, y_k) + p_2 hf(x_k + \alpha_2\, h, y_k + h\beta_{21}\, f(x_k, y_k))$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{2}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{3}{4}, \qquad \beta_{21} = \frac{3}{4}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации выполнены, метод имеет второй порядок точности.

Ответ: данная формула принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

г) Дана формула:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}hf(x_k, y_k) + \frac{2}{3}hf\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_k + \frac{2h}{3}f(x_k, y_k)\right)$$

Общий вид формулы двухэтапных методов следующий:

$$y_{k+1} = y_k + p_1hf(x_k, y_k) + p_2hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + h\beta_{21} f(x_k, y_k))$$

Условия второго порядка аппроксимации (и точности):

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

Установим значения коэффициентов

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \beta_{21} = \frac{2}{3}.$$

Имеем:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \qquad p_2\alpha_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}, \qquad p_2\beta_{21} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}$$

Условия второго порядка аппроксимации не выполнены. Выполнение только первого условия обеспечивает первый порядок точности.

Ответ: данная формула не принадлежит семейству двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности.

5. Метод дифференциальной прогонки решения краевых задач для ОДУ второго порядка

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трехчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название *метод прогонки*.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5.1}$$

С двухточечными линейными краевыми условиями

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \;\; \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \tag{5.2}$$

$$\left(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0\right)$$

в предположении, что функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

От дифференциального уравнения (5.1) обычным приемом перейдем к конечно-разностному уравнению. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$. Полагая, что $x_i = x_0 + ih$, $x_0 = a$, $x_n = b$ (i=0,1,2,…,n) и вводя обозначения

$$p(x_i) = p_i,\ q(x_i) = q_i,\ f(x_i) = f_i,\ y(x_i) = y_i,$$

для внутренних точек $x = x_i$ (i= 1,2,…,n-1) отрезка [a, b] вместо дифференциального уравнения получаем систему конечно-разностных уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \ (i = 1,2,\ldots,n-1).$$

Отсюда после соответствующих преобразований будем иметь

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2 \ (\mathrm{i}= 1,2,\ldots,\mathrm{n}-1) \tag{5.3}$$

где для краткости положено

$$m_i = -\frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2}h},\quad n_i = -\frac{1 - \frac{p_i}{2}h}{1 + \frac{p_i}{2}h},\quad \hat{f}_i = -\frac{f_i}{1 + \frac{p_i}{2}h}. \tag{5.4}$$

Для производных на концах $x_0 = a$ и $x_0 = b$ берем односторонние производные

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} \text{ и } y'_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h}.$$

Отсюда согласно условиям (5.2), получим

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A,\quad \beta_0 y_0 + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B. \tag{5.5}$$

Линейная система (5.3), (5.5) состоит из n +1 уравнений первой степени относительно неизвестных y_0, y_1, …, y_n. Эту систему можно решить обычным способом. Однако мы сейчас укажем другой, более короткий путь, получивший название *метода прогонки*.

Разрешая уравнение (5.3) относительно y_i, будем иметь

$$y_i = \frac{\hat{f}_i}{m_i}h^2 - \frac{1}{m_i}y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i}y_{i-1}. \tag{5.6}$$

Предположим, что с помощью полной системы (5.3), (5.5) из уравнения (5.6) исключена неизвестная y_{i-1}. Тогда это уравнение примет вид

$$y_i = c_i\left(d_i - y_{i+1}\right), \tag{5.7}$$

где c_i, d_i (i= 1,2,…,n-1) – некоторые коэффициенты. Отсюда

$$y_{i-1} = c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.3), получим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}\left(d_{i-1} - y_i\right)\hat{f}_i h^2,$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{\left(\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}\right) - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \qquad (5.8)$$

Сравнивая формулы (5.7) и (5.8), получим для определения c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \; d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} \; (i= 1,2,\dots,n-1). \qquad (5.9)$$

Определим теперь c_0и d_0. Из первого краевого условия (5.5) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (5.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0\left(d_0 - y_1\right). \qquad (5.10)$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \qquad (5.11)$$

На основании формул (5.9), (5.11) последовательно определяются коэффициенты c_i, d_i(i= 1,2,…,n-1) до c_{n-1}, d_{n-1}включительно (*прямой ход*).

Обратный ход начинается с определения y_i. Используя второе краевое условие (5.5) и формулу (5.7) при $i = n$ -1, получим систему двух уравнений

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \; y_{n-1} = c_{n-1}\left(d_{n-1} - y_n\right). \qquad (5.12)$$

Решая систему (5.12) относительно y_n, будем иметь

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1\left(c_{n-1} + 1\right)}. \qquad (5.13)$$

Теперь по формуле (5.7) последовательно находим y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3},…, y_0.

Для контроля можно проверить выполнение первого краевого условия. Вычисления удобно расположить в виде таблицы

Таблица 5.1

Схема метода прогонки

i	0	1	2	…	n -2	n - 1	n
c_i	c_0	c_1	c_2	…	c_{n-2}	c_{n-1}	
d_i	d_0	d_1	d_2	…	d_{n-2}	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2	…	x_{n-2}	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2	…	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n

Для простейших краевых условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются. А именно, полагая $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ и $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, из формул (5.11) будем иметь: $c_0 = 0$, $d_0 = \infty$,$c_0 d_0 = A$. Отсюда

$$c_1 = \frac{1}{m_1}, \; d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A; \qquad (5.14)$$

причем

$$y_n = B, \quad y_0 = A. \tag{5.15}$$

Заметим, что метод прогонки обладает устойчивым вычислительным алгоритмом [3], [4], т.е. ошибки округления не вызывают неограниченного возрастания погрешности решения.

Упражнения

а) Дана краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного)

$y'' - y' + 1 = 0$, $y(0) + y'(0) = 3$, $y'(1) = 6$, $x \in [0,1]$.

Для численного решения задачи методом конечных разностей, область изменения переменной $x \in [0,1]$ разобьем на три отрезка с шагом $h = \frac{1}{3}$, полагая $x_n = x_0 + n \cdot h$, $n = 1,2,3$, $x_0 = 0$, значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0, y_1, y_2, y_3.

Составим разностную схему для уравнения во внутренних узлах сетки x_1, x_2, используя центральные разности второго порядка аппроксимации

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O\left(h^2\right),$$

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O\left(h^2\right).$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + 1 = 0, \; n = 1, 2.$$

При аппроксимации производных, входящих в граничные условия, будем использовать односторонние разности первого порядка

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h), \qquad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h),$$

для левой и правой границ соответственно:

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} = 3, \; \frac{y_3 - y_2}{h} = 6$$

Таким образом, будем иметь систему уравнений, где неизвестными являются y_0, y_1, y_2, y_3

$$y_0 + \frac{y_1 - y_0}{1/3} = 3,$$

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1/9} - \frac{y_2 - y_0}{2/3} + 1 = 0, \; \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{1/9} - \frac{y_3 - y_1}{2/3} + 1 = 0,$$

$$\frac{y_3 - y_2}{1/3} = 6.$$

Или, в преобразованном виде

$$-\frac{2}{3}y_0 + y_1 = 1,$$
$$\frac{7}{6}y_0 - 2y_1 + \frac{5}{6}y_2 = -\frac{1}{9},$$
$$\frac{7}{6}y_1 - 2y_2 + \frac{5}{6}y_3 = -\frac{1}{9},$$
$$-y_2 + y_3 = 2.$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{6} & -2 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & \frac{7}{6} & -2 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ответ: матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет трехдиагональный вид, для решения которой применим метод прогонки.

б) Дана краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного)

$$y'' - 4y' - 2y = -4x, \; y(0) - y'(0) = 0, \; y(3) = 1, \; x \in [0,3].$$

Для численного решения задачи методом конечных разностей, область изменения переменной $x \in [0,3]$ разобьем на три отрезка с шагом $h = 1$, полагая $x_n = x_0 + n \cdot h$, $n = 1,2,3, x_0 = 0$. Значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0, y_1, y_2, y_3.

Составим разностную схему для уравнения во внутренних узлах сетки x_1, x_2, используя центральные разности второго порядка аппроксимации

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O\left(h^2\right), \quad y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + O\left(h^2\right).$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - 4\left(\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}\right) - 2y_n = -4x_n, \; n = 1, 2.$$

При аппроксимации производных, входящих в граничные условия, будем использовать односторонние разности первого порядка

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h), \qquad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h),$$

для левой и правой границ соответственно:

$$y_0 - \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \; y_3 = 1$$

Таким образом, будем иметь систему уравнений, где неизвестными являются y_0, y_1, y_2, y_3

$$y_0 - \frac{y_1 - y_0}{1} = 0,$$

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1} - 4\left(\frac{y_2 - y_0}{2}\right) - 2y_1 = -4 \cdot 1,$$
$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{1} - 4\left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right) - 2y_2 = -4 \cdot 2,$$
$$y_3 = 1.$$

Или, в преобразованном виде

$$2y_0 - y_1 = 0,$$
$$3y_0 - 4y_1 - y_2 = -4,$$
$$3y_1 - 4y_2 - y_3 = -8,$$
$$y_3 = 1.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ответ: матрица системы линейных алгебраических уравнений имеет трехдиагональный вид, для решения которой применим метод прогонки.

6. Метод конечных разностей для уравнений в частных производных

Пусть требуется приближенно вычислить решение *u* дифференциальной краевой задачи

$$Lu = f \tag{6.1}$$

поставленной в некоторой области *D* с границей *Г*. Для этого следует выбрать дискретное множество точек D_h – сетку, принадлежащее $D + Г$, ввести линейное нормированное пространство U_h функций, определенных на сетке D_h, установить соответствие между решением *u* и функцией $[u]_h \in U_h$,, которую будем считать искомой таблицей решения *u*. Для приближенного отыскания таблицы $[u]_h$, которую мы условились считать точным решением задачи (6.1), надо на основе задачи (6.1) составить систему уравнений

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \tag{6.2}$$

относительно функции $u^{(h)}$ из U_h,

Определение 6.1 (сходимость) Решение разностной краевой задачи сходится к решению дифференциальной краевой задачи, если

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{6.3}$$

Если для решения разностной краевой задачи (6.2) выполнено неравенство

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le Ch^k,$$

то говорят, что сходимость имеет порядок *k* относительно *h*.

Свойство сходимости является основным свойством разностной схемы, гарантирующим возможность получения решения с любой наперед заданной точностью (по крайней мере, теоретически).

Задачу построения сходящейся разностной схемы (6.2) разбивают на две – построение разностной схемы (6.2), *аппроксимирующей* задачу (6.1) на решении u последней, и на проверку *устойчивости* схемы (6.2).

Введем определение *аппроксимации*. Чтобы это понятие имело смысл, надо ввести норму в пространстве F_h, которому принадлежит правая часть $f^{(h)}$ уравнения (6.2). При этом норму $\|\cdot\|_{U_h}$ определим равенством

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} = \sup_{m,n}\left\|u_m^n\right\| = \max_n \sup_m \left|u_m^n\right|.$$

Норму $\|\cdot\|_{F_h}$ будем понимать следующим образом: если $g^{(h)} \in F_h$,

$$g^{(h)} = \begin{cases} \varphi_m^n, & m = 0, \pm 1, \ldots; \quad n = 0, 1, \ldots, [T/\tau], \\ \psi_m, & m = 0, \pm 1, \ldots, \end{cases}$$

то

$$\left\|g^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_{m,n}\left|\varphi_m^n\right| + \max_m\left|\psi_m\right| = \max_n\left[\max_m\left|\varphi_m^n\right| + \max_m\left|\psi_m\right|\right].$$

Определение 6.2 (аппроксимация). Разностная задача (6.2) аппроксимирует дифференциальную задачу (6.1) на решении u, если в равенстве

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

невязка $\delta f^{(h)}$, возникающая при подстановке $[u]_h$ в разностную краевую задачу (6.2), стремится к нулю при $h \to 0$:

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \left\|L_h[u]_h - f^{(h)}\right\|_{F_h} \to 0.$$

Если при этом

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \le Ch^k,$$

где C не зависит от h, то аппроксимация имеет порядок k относительно h.

Простейший прием построения разностных краевых задач, аппроксимирующих дифференциальные, состоит в замене производных соответствующими разностными отношениями.

Приведем несколько примеров разностных схем, полученных таким способом. В этих примерах будут использованы приближенные формулы

$$\begin{cases} \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \\ \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z}, \\ \dfrac{df(z)}{dz} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z}, \\ \dfrac{d^2 f(z)}{dz^2} \approx \dfrac{f(z+\Delta z) - 2f(z) + f(z-\Delta z)}{\Delta z^2}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Предполагая функцию *f(z)* имеющей достаточное число ограниченных производных, можно выписать выражения для остаточных членов этих формул.

По формуле Тейлора

$$\begin{cases} f(z+\Delta z) = f(z) + \Delta z f'(z) + \dfrac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^3}{3!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^4}{4!} f^{(4)}(z) + o\left[(\Delta z)^4\right], \\ f(z-\Delta z) = f(z) - \Delta z f'(z) + \dfrac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) \dfrac{(\Delta z)^3}{3!} f''(z) + \dfrac{(\Delta z)^4}{4!} f^{(4)}(z) + o\left[(\Delta z)^4\right] \end{cases} \quad (6.7)$$

Используя разложение (6.7), можно получить выражения для остаточных членов приближенных формул (6.6).

Именно, справедливы равенства

$$\begin{cases} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \left[\dfrac{\Delta z}{2} f''(z) + o(\Delta z)\right], \\ \dfrac{f(z) - f(z-\Delta z)}{\Delta z} = f'(z) + \left[-\dfrac{\Delta z}{2} f''(z) + o(\Delta z)\right], \\ \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z-\Delta z)}{2\Delta z} = f'(z) + \left[\dfrac{(\Delta z)^2}{3} f'''(z) + o\left((\Delta z)^2\right)\right], \\ \dfrac{f(z+\Delta z) - 2f(z) + f(z-\Delta z)}{\Delta z^2} = f''(z) + \left[\dfrac{(\Delta z)^2}{12} f^{(4)}(z) + o\left((\Delta z)^2\right)\right]. \end{cases} \quad (6.8)$$

Остаточные члены приближенных формул (6.6) входят в соответствующие равенства (6.8) в виде выражений в квадратных скобках.

Очевидно, что формулы (6.6) и выражения остаточных членов, выписанные в формулах (6.8), можно использовать и при замене частных производных разностными отношениями.

Например, разности *первого порядка* аппроксимации

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t},$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau}$$

причем

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + o(\Delta t)\right]$$

$$\frac{u(x,t) - u(x-\Delta t,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + o(\Delta t)\right].$$

Точно так же справедливы формулы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$$

и при этом

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\left[\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+o(\Delta x)\right]$$

$$\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\left[\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+o(\Delta x)\right]$$

Центральные разности *второго порядка* аппроксимации

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t},\ \frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n-1}}{2\tau}$$

причем

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t\Delta t)}{\Delta t}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\left[\frac{(\Delta t)^2}{3}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3}+o((\Delta t)^2)\right].$$

Точно так же справедливы формулы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\approx\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x},\ \frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m-1}^{n}}{2h}$$

и при этом

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\left[\frac{(\Delta x)^2}{3}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+o((\Delta x)^2)\right]$$

и т.д.

Упражнения

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases}\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-\dfrac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=\varphi(x_m,t_p) & p=0,1,\ldots,[T/\tau]-1,\\ u_m^0=\psi(x_m), \quad m=0,\pm1,\ldots\end{cases}$$

и дифференциальную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x,t),$$

$$u(x,0)=\psi(x)$$

Ошибка аппроксимации разностной схемы для задачи Коши складывается из ошибки аппроксимации для дифференциального уравнения и начальных условий. Для аппроксимации частных производных по времени и пространству в данном случае применяются конечные разности первого порядка, начальные условия и правая часть задаются точно.

Таким образом, ошибка аппроксимации схемы является величиной $O(\tau+h)$.

Ответ: схема имеет первый порядок аппроксимации.

7. Спектральный признак устойчивости Неймана

Простейшим примером разностной задачи Коши может служить задача

$$L_h u(h) \equiv \begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = \varphi_m^p, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau]-1, \\ u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0,\pm 1,\ldots \end{cases} \qquad (7.1)$$

Положив

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \varphi_m^p, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau]-1, \\ \psi_m, \quad m = 0,\pm 1,\ldots \end{cases}$$

запишем задачу (7.1) в форме

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}. \qquad (7.2)$$

Определим нормы $\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h}$ и $\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h}$ равенствами

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} = \max_p \max_m \left|u_m^p\right|, \quad \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_m \left|\psi_m\right| + \max_{m,p} \left|\varphi_m^p\right|.$$

Определение 7.1 (устойчивость). Разностная краевая задача (7.2), по определению, устойчива, если существуют числа $\delta > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\delta f^{(h)}$ из F_h, удовлетворяющем неравенству $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} \le \delta$, разностная краевая задача

$$L_h Z^{(h)} = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

имеет одно и только одно решение, причем выполняется условие

$$\left\|z^{(h)} - u^{(h)}\right\|_{U_h} \le C \left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h.

В случае линейного оператора L_h сформулированное определение равносильно следующему.

Определение 7.2. (устойчивость) Разностная краевая задача (7.2) устойчива, если существует $h_0 > 0$ такое, что при $h < h_0$ и любом $f^{(h)} \in F_h$ она однозначно разрешима, причем

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \le C \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h},$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от h и от $f^{(h)}$.

Замечание 1. Свойство устойчивости можно трактовать как равномерную относительно h чувствительность решения разностной краевой задачи (7.2) к возмущениям $\delta f^{(h)}$ правой части.

Замечание 2. Подчеркнем, что в силу приведенного определения *устойчивость* есть некоторое *внутреннее* свойство разностной краевой задачи. Оно формулируется независимо от какой-либо связи с дифференциальной краевой задачей, в частности независимо от аппроксимации и сходимости.

Изложим широко применяемый способ Неймана исследования разностных задач с начальными данными, ограничившись случаем разностной задачи Коши с постоянными коэффициентами. Тогда условие устойчивости задачи (7.2)

$$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h} \le C\left\|f^{(h)}\right\|_{F_h} \tag{7.3}$$

примет вид

$$\max_p\left|u_m^p\right| \le C\left[\max_m\left|\psi_m\right| + \max_{m,k}\left|\varphi_m^k\right|\right], \quad p = 0,1,\ldots,\left[T/\tau\right] \tag{7.4}$$

где C не зависит от h (и от $\tau = rh$, r = const). Условие (7.4) должно выполняться при произвольных $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m^p\}$.

В частности, для устойчивости необходимо, чтобы оно выполнялось при произвольных $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m^p\} \equiv 0$, т.е. чтобы решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, \quad p = 0,1,\ldots,\left[T/\tau\right]-1, \\ u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0,\pm 1,\ldots \end{cases} \tag{7.5}$$

удовлетворяло условию

$$\max_p\left|u_m^p\right| \le C\max_m\left|u_m^0\right|, \quad p = 0,1,\ldots,\left[T/\tau\right] \tag{7.6}$$

при произвольной ограниченной функции $u_m^0 = \varphi_m$.

Свойство (7.6), необходимое для устойчивости (7.4) задачи (7.1), называют *устойчивостью задачи* (7.1) *относительно возмущения начальных данных*. Оно означает, что возмущение $\{u_m^0\}$, внесенное в начальные данные задачи (7.1), вызовет возмущение $\{u_m^p\}$ решения задачи (7.1), которое в силу (7.6) не более чем в C раз превосходит возмущение начальных данных, причем C не зависит от h.

Для устойчивости задачи Коши (7.1) по начальным данным необходимо, чтобы условие (7.6) выполнялось, в частности, если $\{u_m^0\}$ есть какая-нибудь гармоника

$$u_m^0 = e^{i\alpha m}, \quad m = 0,\pm 1,\ldots, \tag{7.7}$$

где α – вещественный параметр. Но решение задачи (5) при начальном условии (7.7) имеет вид

$$u_m^p = \lambda^p e^{i\alpha m}, \tag{7.8}$$

где $\lambda = \lambda(\alpha)$ определяется путем подстановки выражения (7.8) в однородное разностное уравнение задачи (7.5):

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r = \frac{\tau}{h} = \text{const}. \tag{7.9}$$

Для решения (7.8) справедливо равенство

$$\max_p \left|u_m^p\right| = \left|\lambda(\alpha)\right| \max_m{}^p \left|u_m^0\right|.$$

Поэтому для выполнения условия (7.6) необходимо, чтобы при всех вещественных α выполнялось неравенство

$$\left|\lambda(\alpha)\right|^p \le C, \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau],$$

или

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1 + C_1\tau, \tag{7.10}$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от α и τ.

Это и есть **необходимое спектральное условие Неймана** применительно к рассматриваемому примеру.

Существование решения вида (7.8) показывает, что гармоника $\{e^{i\alpha m}\}$ является собственной функцией оператора перехода

$$u_m^{p+1} = (1-r)u_m^p + ru_{m+1}^p, \quad m = 0, \pm 1, \ldots,$$

который в силу разностного уравнения (7.5) ставит в соответствие сеточной функции $\{u_m^p\}$, m = 0, ±1,…, определенной на слое $t_p = p\tau$ сетки, сеточную функцию $\{u_m^{p+1}\}$, m = 0, ±1,…, определенную на слое $t_{p+1} = (p+1)\tau$. Число $\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}$ является соответствующим этой гармонике $\{e^{i\alpha m}\}$ собственным числом оператора перехода. Линия, которую пробегает точка $\lambda(\alpha)$ на комплексной плоскости, когда α пробегает вещественную ось, вся состоит из собственных значений и является *спектром оператора перехода*.

Таким образом, *необходимое условие устойчивости* (7.10) можно сформулировать так: спектр оператора перехода, соответствующего разностному уравнению задачи (7.5), должен лежать в круге радиуса $1+C_1\tau$ на комплексной плоскости. в нашем примере спектр (7.9) не зависит от τ. Поэтому условие устойчивости (7.10) равносильно требованию, чтобы спектр $\lambda(\alpha)$ лежал в единичном круге

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1. \tag{7.11}$$

Для примера воспользуемся сформулированным признаком для анализа устойчивости задачи (7.1). Спектр (7.9) представляет собою окружность с центром в точке $1-r$ и радиусом r на комплексной плоскости. В случае $r< 1$ эта окружность лежит внутри единичного круга (касаясь его в точке $\lambda = 1$), при $r= 1$ совпадает с единичной окружностью, а при $r> 1$ лежит вне единичного круга (рис. 7.1). Соответственно необходимое условие устойчивости (7.11) выполнено при $r\le 1$ и не выполнено при $r> 1$. Такая схема называется условно-устойчивой.

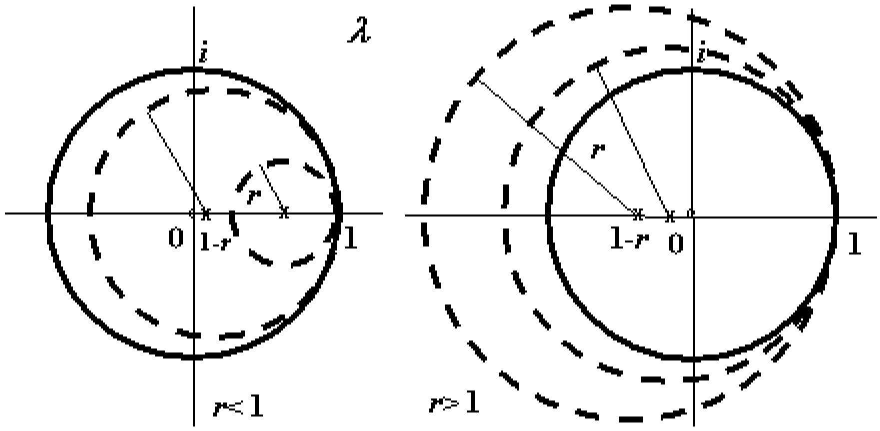

Рис. 7.1. Схема применения признака устойчивости Неймана на комплексной плоскости в случае условной устойчивости (слева) и неустойчивости (справа) разностной схемы

В общем случае задачи Коши для разностных уравнений и систем разностных уравнений необходимый спектральный признак устойчивости Неймана состоит в том, что спектр $\lambda = \lambda(\lambda,\ h)$ разностной задачи при всех достаточно малых h должен лежать в круге

$$|\lambda| \leq 1+\varepsilon \qquad (7.12)$$

на комплексной плоскости, как бы мало ни было заранее выбранное положительное число ε.

Если необходимое условие Неймана (7.12) не выполнено, то ни при каком разумном выборе норм нельзя ожидать устойчивости, а в случае его выполнения можно надеяться, что при некотором разумном выборе норм устойчивость имеет место (для одного уравнения необходимый признак является и достаточным).

Докажем теперь, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Теорема 7.1. (Основная теорема теории разностных схем) о зависимости между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью. Пусть разностная схема $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ на решении u с порядком h^k и устойчива.

Тогда решение $u^{(h)}$ разностной задачи $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ сходится к $[u]_h$, причем имеет место оценка

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \leq CC_1 h^k\ , \qquad (7.13)$$

где C и C_1 – числа, входящие в оценки определений аппроксимации и устойчивости.

Доказательство. Положим в определении устойчивости

$$\varepsilon^{(h)} \equiv \delta f^{(h)},\ [u]_h \equiv z^{(h)},$$

где $\delta f^{(h)}$ – погрешность аппроксимации.

Тогда оценка разности решений примет вид

$$\left\| [u]_h - u^{(h)} \right\|_{U_h} \le C \left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} .$$

Учитывая определение аппроксимации (6.2), сразу получаем доказываемое неравенство (7.12).

Таким образом, для рассмотренного примера в силу аппроксимации первого порядка и доказанной устойчивости при r≤ 1 имеет место и линейная (первого порядка) относительно h сходимость решений разностной задачи к решению дифференциальной задачи при выполнении ограничения на шаги по времени и пространству t≤h.

Упражнения

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \dfrac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = \varphi(x_m, t_p) \quad p = 0,1,\ldots,[T/\tau]-1, \\ u_m^0 = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \ldots \end{cases}$$

Подставляя выражение вида (7.8) в соответствующее однородное разностное уравнение, после простых преобразований получим

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha} .$$

В силу этой формулы спектр представляет собой окружность с центром в точке 1+*r* и радиусом *r* (рис. 7.2). Ни при каком *r* спектр не лежит в единичном круге. Условие устойчивости (7.12) всегда не выполнено. Такая схема называется абсолютно неустойчивой.

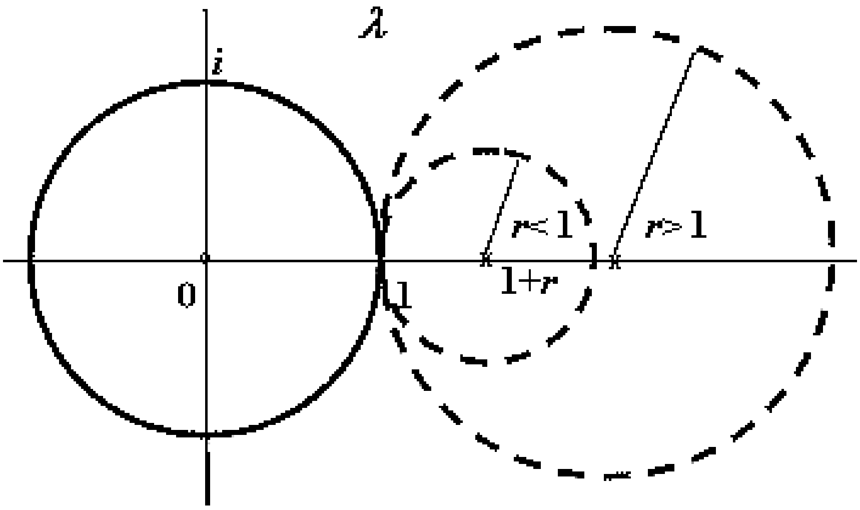

Рис.7.2. Схема применения признака устойчивости Неймана на комплексной плоскости (случай абсолютной неустойчивости разностной схемы)

Ответ: Схема обладает аппроксимацией первого порядка, но является неустойчивой. По основной теореме теории разностных схем сходимости решений не будет.

8. Задания для самостоятельной работы

Формулировка заданий

1. Отделить корни аналитически. Проверить условия применимости метода Ньютона к решению уравнения на отрезке. Выполнить две итерации для уточнения корня, взяв в качестве начального приближения левую или правую границу отрезка, оценить погрешность.

2. Выполнить две итерации метода Ньютона для системы двух уравнений при заданном векторе начального приближения.

3. Вычислить методом Эйлера и его модификациями приближение к $y(0.1)$, найти абсолютную погрешность решения для каждого метода. Сравнить и объяснить полученный результат.

4. Определить, принадлежит ли формула семейству методов Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

5. Составить разностную схему для краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка. Получить систему уравнений с трехдиагональной матрицей.

6. Определить порядок аппроксимации разностной схемы решения задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

7. Исследовать предыдущую разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Варианты заданий

Вариант 0

$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	$x_2 = x_1^3 - 1,\quad x_2 = -5 \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.	$y' = y \quad , \; y(0) = 3,\; h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot hf(x_n, y_n) + 1 \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n))$.		
$y'' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2,\; y(1) = 2,$ $0 \underline{\qquad\qquad} \frac{1}{3} \underline{\qquad\qquad} \frac{2}{3} \underline{\qquad\qquad} 1, \qquad h = 1/3.$		
$\dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\; u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\; u(x,0) = f(x)$	

Вариант 1

<table>
<tr><td>$x^3 - 6x - 8 = 0$</td><td>$x_1 = x_2^2 + 2,\quad x_2 = 3,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$</td><td>$y' = y = 1,\ y(0) = 2,\ h = 0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h,\quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n)).$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y'' - 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y(1) = 4,$
0 ______ $1/3$ ______ $2/3$ ______ $1,\qquad h = 1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \dfrac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 2

<table>
<tr><td>$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$</td><td>$x_1 = x_2^3 - 3,\quad x_1 = 4,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y' = 2,\ y(0) = -1,$
$h = 0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 2 \cdot h,\quad y_n + 2 \cdot hf(x_n, y_n)).$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y'' + 2y' = 0,\qquad y(0) = 1,\ y(1) = 4,$
0 ______ $1/3$ ______ $2/3$ ______ $1,\qquad h = \dfrac{1}{3}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 4 \cdot \dfrac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 3

<table>
<tr><td>$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$</td><td>$x_2 = x_1^2,\quad x_2 = -6,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y' = x - 1,\ y(0) = 3,\ h = 0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{3}{4} \cdot h,\quad y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n)\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y'' - 5y = 0,\qquad y(0) = 5,\ y(1) = -2,$
0 ______ $1/3$ ______ $2/3$ ______ $1,\qquad h = 1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 4

$x^3-3x^2+9x+2=0$	$x_1=x_2^4-1,\quad x_1=x_1^2-x_2,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y'=x+y,\ y(0)=1,\ h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+\frac{3}{4}\cdot hf(x_n,y_n)+\frac{1}{4}\cdot hf(x_n+1\cdot h,\quad y_n+1\cdot hf(x_n,y_n))$		
$y''-6y'=0,\qquad y(0)=-2,\ y(1)=8,$ 0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}+2\cdot\frac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}+2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 5

$x^3+x-5=0$	$x_1=\frac{1}{x_2^2}-1,\quad x_1=4,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y'=x-y,\ y(0)=-2,$ $h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{3}\cdot hf(x_n,y_n)+\frac{2}{3}\cdot hf(x_n+0.5\cdot h,\quad y_n+0.5\cdot hf(x_n,y_n))$		
$4y''+y=0,\qquad y(0)=3,\ y(1)=-1,$ 0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}+5\cdot\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}+5\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 6

$x^3+0.2x^2+0.5x-1.2=0$	$x_2=2x_1^2-2,\quad x_2=4,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$	$y'=1+2y,\ y(0)=0,$ $h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+\frac{2}{3}\cdot hf(x_n,y_n)+\frac{1}{3}\cdot hf(x_n+1.5\cdot h,\quad y_n+1.5\cdot hf(x_n,y_n))$		
$y''+7y=0,\qquad y(0)=1,\ y(1)=3,$ 0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}+3\cdot\frac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}+3\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 7

$x^3+3x+1=0$	$\begin{aligned} x_1 &= -x_2^3+2, \\ x_2 &= -5, \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$	$y' = x+y+2$, $y(0)=-1$, $h=0.1$.
$y_{n+1} = y_n + 0.6\cdot hf(x_n, y_n) + 0.4\cdot hf(x_n + 1.25\cdot h, \quad y_n + 1.25\cdot hf(x_n, y_n))$		
$y'' + 8y' = 0$, $y(0)=4$, $y(1)=3$, 0 __________ 1/3 __________ 2/3 __________ 1, $h=1/3$.		
$\dfrac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} + \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0$, $u_m^0 = f(m\cdot h)$.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = f(x)$	

Вариант 8

$x^3+0.2x^2+0.5x-2=0$	$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2-1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = 2x+y$, $y(0)=3$, $h=0.1$.
$y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{3}\cdot hf(x_n, y_n) + \dfrac{2}{3}\cdot hf\left(x_n + \dfrac{1}{3}\cdot h, \quad y_n + \dfrac{1}{3}\cdot hf(x_n, y_n)\right)$		
$y'' - 3y = 0$, $y(0)=2$, $y(1)=2$, 0 __________ 1/3 __________ 2/3 __________ 1, $h=1/3$.		
$\dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3\cdot\dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{2h} = 0$, $u_m^0 = f(m\cdot h)$.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - 3\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = f(x)$	

Вариант 9

$x^3-3x^2+12x-9=0$	$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1^4-1, \\ x_2 &= -5x_1, \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = \dfrac{y}{x+1}$, $y(0)=3$, $h=0.1$.
$y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{4}\cdot hf(x_n, y_n) + \dfrac{3}{4}\cdot hf\left(x_n + \dfrac{2}{3}\cdot h, \quad y_n + \dfrac{2}{3}\cdot hf(x_n, y_n)\right)$		
$y'' - 4y' + 4 = 0$, $y(0)=2$, $y(1)=2$, 0 __________ 1/3 __________ 2/3 __________ 1, $h=1/3$.		
$\dfrac{u_m^{p+1} - u_m^{p-1}}{2\tau} - 4\cdot\dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0$, $u_m^0 = f(m\cdot h)$.	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u(x,0) = f(x)$	

Вариант 10

<table>
<tr><td>$x^3-0.2x^2+0.3x-1.2=0$</td><td>$x_1=\dfrac{1}{x_2}-1,$
$x_2=4x_1,$ $\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$</td><td>$y'=-y$, $y(0)=2$,
$h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+0.2\cdot hf(x_n,y_n)+0.8\cdot hf(x_n+0.625\cdot h,\quad y_n+0.625\cdot hf(x_n,y_n)).$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''+y'-6y=0,\quad y(0)=1,\ y(1)=3,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}-2\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}-2\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 11

<table>
<tr><td>$x^3-3x^2+6x-2=0$</td><td>$x_1=\dfrac{1}{x_2^2}-1,$
$x_2=3x_1-5,$ $\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$</td><td>$y'=3y+1$, $y(0)=-1$,
$h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+0.6\cdot hf(x_n,y_n)+0.4\cdot hf(x_n+1.25\cdot h,\quad y_n+1.25\cdot hf(x_n,y_n)).$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''-2y=0,\qquad y(0)=-2,\ y(1)=4,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-2.5\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}-5\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 12

<table>
<tr><td>$x^3-0.1x^2+0.4x-1.5=0$</td><td>$x_2=x_2^3-x_1,$
$x_1=-\dfrac{5}{x_2},$ $\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\ x_2^{(0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$</td><td>$y'=x-y$, $y(0)=-2$,
$h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+0.6\cdot hf(x_n,y_n)+0.4\cdot hf(x_n+0.8\cdot h,\quad y_n+0.8\cdot hf(x_n,y_n)).$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''-2y=0,\qquad y(0)=1,\ y(1)=3,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}-6\cdot\dfrac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}-6\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 13

$x^3+3x^2+6x-1=0$	$x_1=2x_2^3+1,\quad x_2=-3,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$	$y'=x+2y-2,\ y(0)=1,\ h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+0.1\cdot hf(x_n,y_n)+0.9\cdot hf\left(x_n+\frac{5}{9}\cdot h,\quad y_n+\frac{5}{9}\cdot hf(x_n,y_n)\right)$		
$y''+y'+7y=0,\quad y(0)=5,\ y(1)=7,$ 0 _____ 1/3 _____ 2/3 _____ 1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1}-u_m^{p-1}}{\tau}-2\cdot\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}-4\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 14

$x^3+0.1x^2+0.4x-1.2=0$	$x_2=2x_1^3-1,\quad x_2=-x_1,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$	$y'=2y,\ y(0)=-1,\ h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+0.5\cdot hf(x_n,y_n)+0.5\cdot hf(x_n+1\cdot h,\quad y_n+1\cdot hf(x_n,y_n)).$		
$y''+10y=0,\quad y(0)=1,\ y(1)=3,$ 0 _____ 1/3 _____ 2/3 _____ 1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1}-u_m^{p}}{\tau}-2\cdot\frac{u_{m}^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}-2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 15

$x^3+4x-6=0$	$x_2=2x_1^4-1,\quad x_2=-5x_1,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$	$y'=\frac{y}{x+1},\ y(0)=3,\ h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{4}\cdot hf(x_n,y_n)+\frac{3}{4}\cdot hf\left(x_n+\frac{2}{3}\cdot h,\quad y_n+\frac{2}{3}\cdot hf(x_n,y_n)\right)$		
$y''+3y'=0,\quad y(0)=2,\ y(1)=2,$ 0 _____ 1/3 _____ 2/3 _____ 1, $h=1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1}-u_m^{p}}{2\tau}-4\cdot\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t}-4\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 16

<table>
<tr><td>$x^3+0.2x^2+0.5x+0.8=0$</td><td colspan="2">$\begin{cases} x_2=2x_1^2-2, \\ x_2=4, \end{cases} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=1+2y$, $y(0)=0$, $h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{n+1}=y_n+\frac{2}{3}\cdot hf(x_n,y_n)+\frac{1}{3}\cdot hf(x_n+1.5\cdot h,\quad y_n+1.5\cdot hf(x_n,y_n))$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y''+7y=0,\qquad y(0)=1,\ y(1)=3,$
0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}+3\cdot\frac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td colspan="2">$\frac{\partial u}{\partial t}+3\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 17

<table>
<tr><td>$x^3-3x^2+12x-12=0$</td><td colspan="2">$\begin{cases} x_1=-x_2^3+2, \\ x_1=-5, \end{cases} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=x+y+2$, $y(0)=-1$, $h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{n+1}=y_n+0.6\cdot hf(x_n,y_n)+0.4\cdot hf(x_n+1.25\cdot h,\quad y_n+1.25\cdot hf(x_n,y_n)).$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y''+8y'=0,\qquad y(0)=4,\ y(1)=3,$
0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}+\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td colspan="2">$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 18

<table>
<tr><td>$x^3-0.2x^2+0.3x+1.2=0$</td><td colspan="2">$\begin{cases} x_1=2x_2^3+1, \\ x_2=-3, \end{cases} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=x+2y-2$, $y(0)=1$, $h=0.1$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{n+1}=y_n+0.1\cdot hf(x_n,y_n)+0.9\cdot hf\left(x_n+\frac{5}{9}\cdot h,\quad y_n+\frac{5}{9}\cdot hf(x_n,y_n)\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y''+y'+7y=0,\quad y(0)=5,\ y(1)=7,$
0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{u_m^{p+1}-u_m^{p-1}}{\tau}-2\cdot\frac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td colspan="2">$\frac{\partial u}{\partial t}-4\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 19

$x^3-2x+4=0$	$x_2=2x_1^3-x_2-1,\quad x_2=-x_1,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y'=2y,\ y(0)=-1,\quad h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+0.5\cdot hf(x_n,y_n)+0.5\cdot hf(x_n+1\cdot h,\quad y_n+1\cdot hf(x_n,y_n)).$		
$y''+10y=0,\qquad y(0)=1,\ y(1)=3,$ 0______1/3______2/3______1, $\quad h=1/3.$		
$\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-2\cdot\dfrac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\dfrac{\partial u}{\partial t}-2\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 20

$x^3-0.2x^2+0.5x-1.4=0$	$x_2=x_2^3-x_1,\quad x_1=-\dfrac{5}{x_2},\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y'=x-y,\ y(0)=-2,\quad h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+0.6\cdot hf(x_n,y_n)+0.4\cdot hf(x_n+0.8\cdot h,\quad y_n+0.8\cdot hf(x_n,y_n)).$		
$y''-2y=-x,\qquad y(0)=1,\ y(1)=3,$ 0______1/3______2/3______1, $\quad h=1/3.$		
$\dfrac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}-6\cdot\dfrac{u_m^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\dfrac{\partial u}{\partial t}-6\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 21

$x^3-3x^2+6x-5=0$	$x_1=\dfrac{1}{x_2^2}-1,\quad x_2=3x_1-5,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y'=3y+1,\ y(0)=-1,\quad h=0.1.$
$y_{n+1}=y_n+0.6\cdot hf(x_n,y_n)+0.4\cdot hf(x_n+1.25\cdot h,\quad y_n+1.25\cdot hf(x_n,y_n)).$		
$y''-2y=1,\qquad y(0)=-2,\ y(1)=4,$ 0______1/3______2/3______1, $\quad h=1/3.$		
$\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-2.5\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_{m-1}^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$	$\dfrac{\partial u}{\partial t}-5\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$	

Вариант 22

<table>
<tr><td>$x^3-0.1x^2+0.4x-1.2=0$</td><td>$x_1=\dfrac{1}{x_2}-1,\quad x_2=4x_1,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=-y,\ y(0)=2,\quad h=0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+0.2\cdot hf(x_n,y_n)+0.8\cdot hf(x_n+0.625\cdot h,\quad y_n+0.625\cdot hf(x_n,y_n)).$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''+y'-6y=0,\quad y(0)=1,\ y(1)=3,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^p-u_m^{p-1}}{\tau}-2\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}-2\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 23

<table>
<tr><td>$x^3-0.2x^2+0.5x-1=0$</td><td>$x_2=x_1^2-1,\quad x_2=-5x_1,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=2x+y,\ y(0)=3,\quad h=0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{3}\cdot hf(x_n,y_n)+\dfrac{2}{3}\cdot hf\left(x_n+\dfrac{1}{3}\cdot h, y_n+\dfrac{1}{3}\cdot hf(x_n,y_n)\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y''-3y=x,\qquad y(0)=2,\ y(1)=2,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}-3\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_{m-1}^p}{2h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}-3\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 24

<table>
<tr><td>$x^3+3x^2+12x+3=0$</td><td>$x_1=\dfrac{1}{x_2^2}-1,\quad x_1=4,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$</td><td>$y'=x-y,\ y(0)=-2,\quad h=0.1.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{3}\cdot hf(x_n,y_n)+\dfrac{2}{3}\cdot hf(x_n+0.5\cdot h,\quad y_n+0.5\cdot hf(x_n,y_n))$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$4y''+y=0,\qquad y(0)=3,\ y(1)=-1,$
0__________1/3__________2/3__________1, $h=1/3.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u_m^{p+1}-u_m^p}{\tau}+5\cdot\dfrac{u_{m+1}^p-u_m^p}{h}=0,\ u_m^0=f(m\cdot h).$</td><td>$\dfrac{\partial u}{\partial t}+5\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ u(x,0)=f(x)$</td></tr>
</table>

Вариант 25

$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$	$x_1 = x_2^4 - 1,$ $x_1 = x_1^2 - x_2,$ $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = x + y,\ y(0) = 1,$ $h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h, \quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n))$		
$y'' - 6y' = 0,\quad y(0) = -2,\ y(1) = 8,$ 0_____1/3_____2/3_____1, $h = 1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} + 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

Вариант 26

$x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$	$x_2 = x_1^2,$ $x_2 = -6,$ $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$	$y' = x - 1,\ y(0) = 3,$ $h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{2}{3} \cdot hf\left(x_n + \frac{3}{4} \cdot h, \quad y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n)\right)$		
$y'' - 5y = 0,\quad y(0) = 5,\ y(1) = -2,$ 0_____1/3_____2/3_____1, $h = 1/3.$		
$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

Вариант 27

$x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$	$x_1 = x_2^3 - 3,$ $x_1 = 4,$ $\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = 2,\ y(0) = -1,$ $h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{4} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{4} \cdot hf(x_n + 2 \cdot h, \quad y_n + 2 \cdot hf(x_n, y_n))$		
$y'' + 2y' = 0,\quad y(0) = 1,\ y(1) = 4,$ 0_____1/3_____2/3_____1, $h = 1/3.$		
$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 4 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

Вариант 28

$x^3 + x - 3 = 0$	$x_1 = x_2^2 + 2,\quad x_2 = 3,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = y + 1,\ y(0) = 2,\quad h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} \cdot hf(x_n + 1 \cdot h,\quad y_n + 1 \cdot hf(x_n, y_n))$		
$y'' - 2y = 0,\qquad y(0) = 3,\ y(1) = 4,$ 0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h = 1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 2 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

Вариант 29

$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.4 = 0$	$x_2 = x_1^3 - 1,\quad x_2 = -5,\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = y,\ y(0) = 3,\quad h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot hf(x_n, y_n) + 1 \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h,\quad y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n))$		
$y'' + 3y = 0,\qquad y(0) = 2,\ y(1) = 2,$ 0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h = 1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 3 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} - 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

Вариант 30

$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	$x_2 = x_1^3 - 1,\quad x_2 = -5x_1\quad \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$	$y' = y - 1,\ y(0) = 3,\quad h = 0.1.$
$y_{n+1} = y_n + 0 \cdot hf(x_n, y_n) + 1 \cdot hf(x_n + 0.5 \cdot h, y_n + 0.5 \cdot hf(x_n, y_n)).$		
$y'' + 3y' = 0,\qquad y(0) = 2,\ y'(1) = 2,$ 0 ___________ $1/3$ ___________ $2/3$ ___________ $1,\qquad h = 1/3.$		
$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0,\ u_m^0 = f(m \cdot h).$	$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ u(x,0) = f(x)$	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
3. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд., исп. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
5. Игумнов Л.А., Котов В.Л., Кротова В.С., Чекмарев Д.Т. Теория интерполирования: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2004. – 44 с.
6. Игумнов Л.А., Чекмарев Д.Т. Численное интегрирование: Учебно-методическая разработка. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 1999. – 33 с.
7. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 31 с.
8. Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу «Численные методы». Часть 1: Учебно-методическое пособие / Авторы.: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 77 с.
9. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Численные методы решения нелинейных уравнений: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. – 61 с.
10. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем: Учебно-методическая разработка / Сост.: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2000. – 38 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
12. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
13. Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу «Численные методы». Часть 2: Учебно-методическое пособие / Авторы.: Игумнов Л.А., Котов В.Л., Литвинчук С.Ю., Чекмарев Д.Т. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 69 с.

Василий Леонидович **Котов**

ЗАДАНИЯ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Учебное пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.
Заказ № . Тираж экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01