Метод конечных разностей для уравнений в частных производных - 1

Даны задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка и разностная схема. Записать дифференциальный и разностный операторы и правые части задачи. Нарисовать шаблон для разностной схемы. Определить, аппроксимирует ли разностная задача исходную дифференциальную задачу на основе стандартных конечных разностей для частных производных. Если разностная схема не аппроксимирует дифференциальную задачу, то исправить числовые коэффициенты разностной схемы так, чтобы была аппроксимация. Определить порядок аппроксимации.

Исследовать разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Является ли схема сходящейся?

Упражнение 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 7 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \;\; u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 7 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, u_m^0 = f(m \cdot h)$$

Решение. Дифференциальный оператор и правая часть задачи:

$$Lu = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 7 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}, & -\infty \le x \le +\infty, \, 0 \le t \le T \\ u(x,0), & -\infty \le x \le +\infty \end{cases}$$

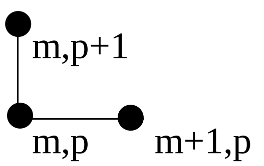
$$f = \begin{cases} 0, & -\infty \le x \le +\infty, \, 0 \le t \le T \\ f(x), & -\infty \le x \le +\infty, t = 0 \end{cases}$$

Разностный оператор и правая часть задачи:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 7 \cdot \dfrac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h}, \, m = 0, \pm 1, \dots, p = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1 \\ u_m^0, \, m = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} 0, \, m = 0, \pm 1, \dots, p = 0, 1, \dots, [T/\tau] - 1 \\ f(m \cdot h), \, m = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

Шаблон разностной схемы:



Для аппроксимации частной производной по пространству применяется правая конечная разность, она имеет первый порядок аппроксимации. Для аппроксимации частной производной по времени применяется правая конечная разность, она имеет первый порядок аппроксимации.

Начальные условия и правая часть задаются точно. Таким образом, ошибка аппроксимации схемы является величиной $O(h)+O(\tau)$.

Погрешность аппроксимации по определению:

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

где

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} O(\tau + h) \\ 0 \end{cases}$$

Исследуем разностную схему на устойчивость, применяя необходимый спектральный признак устойчивости Неймана. Подставим выражение $u_m^p = \lambda^p e^{i\alpha m}$ в однородное разностное уравнение:

$$\frac{\lambda^{p+1} e^{i\alpha m} - \lambda^p e^{i\alpha m}}{\tau} - 7 \cdot \frac{\lambda^p e^{i\alpha(m+1)} - \lambda^p e^{i\alpha m}}{h} = 0$$

Вынесем общий множитель $\lambda^p e^{i\alpha m}$ за скобки и умножим на τ:

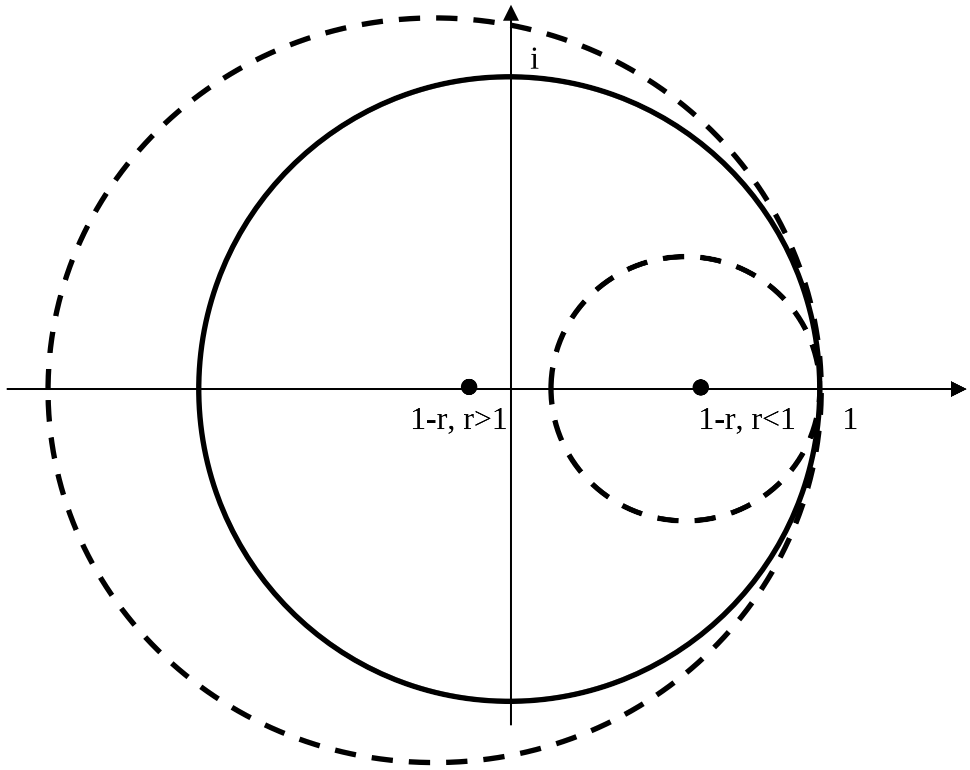
$$\lambda - 1 - \frac{7\tau}{h} \cdot \left(e^{i\alpha} - 1\right) = 0$$

Обозначим $r = \dfrac{7\tau}{h} = const$ и выразим λ:

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}.$$

В данной задаче спектр не зависит от τ. В этом случае необходимое спектральное условие Неймана равносильно требованию, чтобы спектр $\lambda(\alpha)$ лежал в единичном круге: $|\lambda(\alpha)| \le 1$.

Спектр представляет собой окружность с центром в точке $1-r$ и радиусом r. На рисунке штриховыми линиями приведены варианты такой окружности при r<1 и r>1. При $r \le 1$ спектр лежит в единичном круге. То есть необходимое условие устойчивости выполнено при $r \le 1$, разностная схема будет условно устойчива. Применяя основную теорему теории разностных схем о зависимости между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью, можно сделать вывод, что разностная схема будет сходиться при условии $\tau \le h/7$, причем порядок сходимости равен порядку аппроксимации.



Ответ: Схема обладает аппроксимацией первого порядка по времени и пространству, является условно устойчивой при $\tau \leq h/7$, является сходящейся с первым порядком при условии $\tau \leq h/7$.

Задачи для самостоятельного решения

Упражнение 2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 7 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \ u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 7 \cdot \frac{u_{m+1}^p - u_m^p}{h} = 0, u_m^0 = f(m \cdot h)$$

Упражнение 3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 7 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \ u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{u_m^p - u_m^{p-1}}{\tau} - 7 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, u_m^0 = f(m \cdot h)$$

Упражнение 4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 7 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \ u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - 7 \cdot \frac{u_m^p - u_{m-1}^p}{h} = 0, u_m^0 = f(m \cdot h)$$