Метод стрельбы решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного)

Теория для общего случая – см. Годунов, Рябенький, с. 166.
Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного):

$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0$, $x \in [a,b]$

$y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

Рассмотрим теперь две задачи Коши

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0,\ x \in [a,b] \qquad (1)$$

$y(a) = \alpha$, $y'(a) = \gamma_1$

и

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0,\ x \in [a,b] \qquad (2)$$

$y(a) = \alpha$, $y'(a) = \gamma_2$

Обозначим через $y^* = y^*(x)$ решение задачи Коши (1), $y^{**} = y^{**}(x)$ - решение задачи Коши (2). В силу линейности дифференциального уравнения функция $\tilde{y}(x) = \mu y^*(x) + (1-\mu)y^{**}(x)$ является его решением, причем $\tilde{y}(a) = \alpha$. Из условия $\tilde{y}(b) = \beta$ выразим μ (вывести формулу самостоятельно). Таким образом, решение краевой задачи с линейным дифференциальным уравнением свелось к решению двух задач Коши. В случае нелинейного дифференциального уравнения организуется итерационный процесс.

Для численного решения задач Коши методом конечных разностей область изменения переменной $x \in [0,1]$ разобьем на N отрезков с шагом h = 1/N , полагая $x_n = x_0 + nh$, n =1,2,…N, $x0$ = a, значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0, y_1, … y_N.

Составим разностную схему для уравнения в узлах сетки x_2, …x_N , используя центральные разности второго порядка аппроксимации. Для аппроксимации производной во втором начальном условии используем правую разность. Обозначим через y_i^* численное решение задачи Коши (1), y_i^{**} - численное решение задачи Коши (2). В силу линейности разностного уравнения функция $\tilde{y}_i = \mu y_i^* + (1-\mu)y_i^{**}$ является его решением, причем $\tilde{y}_0 = \alpha$. Из условия $\tilde{y}_N = \mu y_N^* + (1-\mu)y_N^{**} = \beta$ выразим μ (вывести формулу самостоятельно).

Упражнение 1. Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного):

$y'' - y' + 1 = 0$, $y(0) = 3$, $y(1) = 6$, $x \in [0,1]$.

Вместо этой краевой задачи будем решать две задачи Коши с начальными условиями: $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$ и $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Для численного решения задач Коши методом конечных разностей область изменения переменной $x \in [0,1]$ разобьем на N=10 отрезков с шагом h = 1/N , полагая $x_n = x_0 + nh$, n =1,2,…N, $x0$ = 0, значения искомой функции в узлах сетки обозначим y_0, y_1, … y_N.

Составим разностную схему для уравнения в узлах сетки x_1, x_N , используя центральные разности второго порядка аппроксимации.

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + 1 = 0.$$

Приведем подобные слагаемые:

$$y_{n+1}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)+y_n\left(-\frac{2}{h^2}\right)+y_{n-1}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)=-1,\ n=\overline{1,N}$$

Для второго начального условия:

$\frac{y_1-y_0}{h}=0$ или $\frac{y_1-y_0}{h}=1$

Разностная схема первой задачи Коши:

$$y_{n+1}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)+y_n\left(-\frac{2}{h^2}\right)+y_{n-1}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)=-1,\ n=\overline{1,N}$$

$y_0=3$

$y_1-y_0=0$

Разностная схема второй задачи Коши:

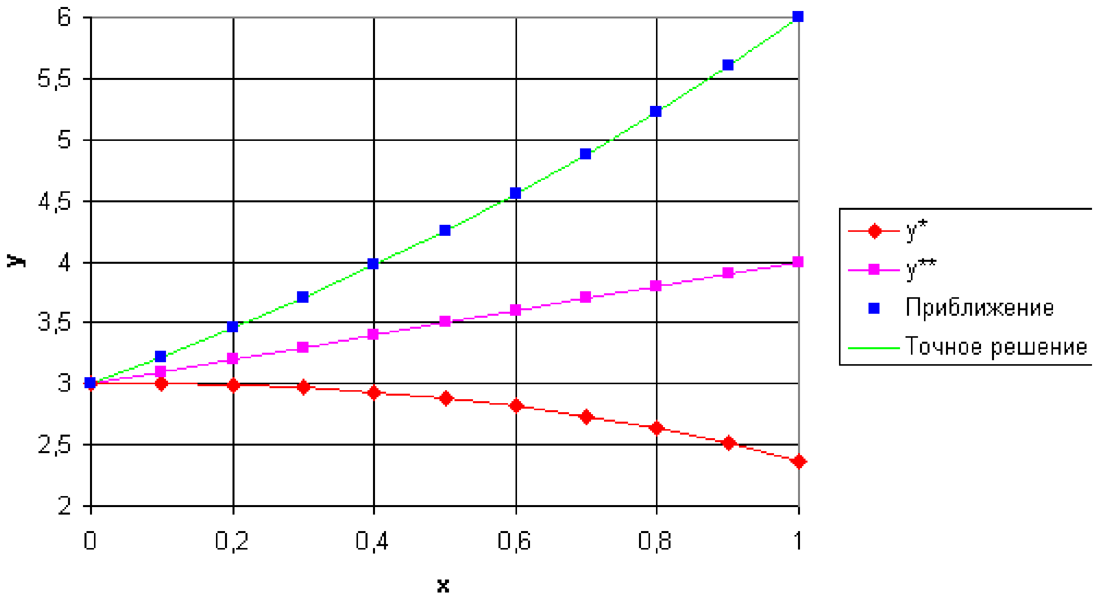
$$y_{n+1}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right)+y_n\left(-\frac{2}{h^2}\right)+y_{n-1}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right)=-1,\ n=\overline{1,N}$$

$y_0=3$

$\frac{y_1-y_0}{h}=1$

Решаем обе задачи Коши по полученным рекуррентным соотношениям. $\mu\approx-1.2236$. Точное решение краевой задачи $y=\frac{2}{e-1}e^x+x+\frac{3e-5}{e-1}$. В таблице приведены результаты расчетов с пятью знаками после запятой и абсолютная погрешность. На рисунке приведены графики полученных решений.

i	x	y*	y**	y	Точное решение	Абсолютная погрешность
0	0	3	3	3	3	4,44E-16
1	0,1	3	3,1	3,22236	3,22241	5,43E-05
2	0,2	2,98947	3,2	3,45760	3,45770	1,03E-04
3	0,3	2,96731	3,3	3,70708	3,70722	1,44E-04
4	0,4	2,93229	3,4	3,97228	3,97246	1,76E-04
5	0,5	2,88306	3,5	4,25489	4,25508	1,96E-04
6	0,6	2,81812	3,6	4,55671	4,55691	2,01E-04
7	0,7	2,73582	3,7	4,87977	4,87996	1,89E-04
8	0,8	2,63432	3,8	5,22632	5,22647	1,54E-04
9	0,9	2,51162	3,9	5,59882	5,59891	9,27E-05
10	1	2,36548	4	6	6	0



Ответ: получено приближенное решение краевой задачи методом стрельбы.

Задание для самостоятельной работы.

1. Повторить решение рассмотренной задачи в Excel.

2. Решить краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (линейного) методом стрельбы. Для расчетов использовать Excel. Привести таблицу значений и построить графики. Проверить правильность приведенного аналитического решения.

3*. Провести вычисления при различном числе шагов и оценить порядок сходимости по величине погрешности.

1	Агаев Артём Низамиевич	$y''+2xy'+2y=4x$ $y(0)=1, \quad y(0{,}5)=e^{-0{,}25}+0{,}5$	*Аналитическое решение:* y= x+exp(-x^2)
2	Аристов Сергей Антонович	$x^2y''+xy'=1$ $y(1)=0, \quad y(1{,}4)=\frac{1}{2}\ln^2(1{,}4)=0{,}($	*Аналитическое решение:* $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$
3	Бакулин Александр Сергеевич	$y''+\frac{5}{x}y'+\frac{3}{x^2}y=0,$ $y'(1)=3, \quad y(2)=-\frac{1}{8}$	*Аналитическое решение:* $y=-x^{-3}$
4	Белин Михаил Алексеевич	$y''-y=2x, \quad y(0)=0, \quad y(1)=-1$	*Аналитическое решение:* $y=\frac{shx}{sh1}-2x$
5	Борисов Владислав Романович	$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0, \quad y(1)=3, \quad y(2)=12$	*Аналитическое решение:* $y=3x^2$
6	ГребЕнникова Софья Максимовна	$y''-y'=1,$ $y(0)=0, \quad y(1)=1$	*Аналитическое решение:* $y=x+e^{-x}-e^{-1}$

7	ДОлгих Данил Алексеевич	$y'' + \frac{1}{x+2}\,y' - \frac{1}{x}\,y = -x^2 + 9x + 6$, $y(1) = -11, \quad y(3) = -9$	*Аналитическое решение:* $y = x^3 - 12x$
8	Зиновьев Дмитрий Эдуардович	$y'' - y' = 1$, $y(-1) = e - 1, \quad y(0) = 0$	*Аналитическое решение:* $y = e^{-x} - 1$
9	Иванова Вероника Максимовна	$y'' + y = 1$, $y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$	*Аналитическое решение:* $y = 1 - \sin x - \cos x$
10	Иващенко Родион Александрович	$y'' + (x+1)y' - 2x^2 y = -2x^5 + 3x^3 + 6x + x^2$, $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$	*Аналитическое решение:* $y = x^3 + 1$
11	Калинина Варвара Юрьевна	$x^2 y'' + x y' = 1$ $y(1) = 0, \quad y(1{,}4) = \frac{1}{2}\ln^2(1{,}4) = 0{,}($	*Аналитическое решение:* $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$
12	Королева Мария Алексеевна	$y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1$	*Аналитическое решение:* $y = \frac{shx}{sh1} - 2x$
13	Лебедев Леонид Владиславович	$y'' - 2xy' - 2y = -4x$ y(0)=e $y(1) = 1 + e$	*Аналитическое решение:* $y = x + e^{x^2}$.
14	Минеев Иван Николаевич	$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 12$	*Аналитическое решение:* $y = 3x^2$
15	Моржукова Ксения Васильевна	$y'' + \frac{5}{x}\,y' + \frac{3}{x^2}\,y = 0$, $y'(1) = 3, \quad y(2) = -\frac{1}{8}$	*Аналитическое решение:* $y = -x^{-3}$
16	Никитин Илья Иванович	$y'' - y' = 1$, $y(-1) = e - 1, \quad y(0) = 0$	*Аналитическое решение:* $y = e^{-x} - 1$
17	Савельева Марина Викторовна	$y'' + \frac{1}{x+2}\,y' - \frac{1}{x}\,y = -x^2 + 9x + 6$, $y(1) = -11, \quad y(3) = -9$	*Аналитическое решение:* $y = x^3 - 12x$
18	Сорокин Иван Александрович	$y'' - y' = 1$, $y(0) = 0, \quad y(1) = 1$	*Аналитическое решение:* $y = x + e^{-x} - e^{-1}$
19	Хавкина Дарья Викторовна	$y'' + 2xy' + 2y = 4x$ $y(0) = 1, \quad y(0{,}5) = e^{-0{,}25} + 0{,}5$	*Аналитическое решение:* y= x+exp(-x^2)

20	Миронов Иван	$y'' + y = 1$, $y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$	*Аналитическое решение:* $y = 1 - \sin x - \cos x$
21	Половецкий	$y'' + (x+1)y' - 2x^2 y = -2x^5 + 3x^3 + 6x + x^2$, $y(0) = 1, \quad y(1) = 2$	*Аналитическое решение:* $y = x^3 + 1$
22	Смирнов	$y'' - 2xy' - 2y = -4x$ y(0)=e $y(1) = 1 + e$	*Аналитическое решение:* $y = x + e^{x^2}$.