МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра численного моделирования
физико-механических процессов

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ИХ СИСТЕМ

(Учебно-методическая разработка для студентов
механико-математического факультета)

НИЖНИЙ НОВГОРОД, 2000

УДК 517.518.14+534.291.1

Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем. Учебно-методическая разработка для студентов механико-математического факультета / Сост. Л.А.Игумнов, В.Л.Котов., С.Ю.Литвинчук, Д.Т.Чекмарев. - Н.Новгород: ННГУ, 2000.-38 с.

Учебно-методическая разработка является руководством к численному решению задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их систем. Обучение студента в рамках курса “Методы вычислений” идет по пути привития навыков построения формул соответствующих классических методов. Даны пояснения применимости и точности получаемых формул. Намечены пути усовершенствования выводимых формул. Имеются задания для самостоятельной работы.

Составители: к.т..н., доц. Л.А.Игумнов,

к.ф.-м.н., ст. преп. В.Л.Котов,

инж.- программист С.Ю.Литвинчук,

к.ф.-м.н., ,доц. Д.Т.Чекмарев.

Рецензент: к.ф.-м.н, доц. А.И.Гавриков.

Численное решение задачи коши для
обыкновенных дифференциальных уравнений
первого порядка и их систем

Составители: Игумнов Леонид Александрович
Котов Василий Леонидович
Литвинчук Светлана Юрьевна
Чекмарев Дмитрий Тимофеевич

Подписано к печати Формат 60х84 1/16.
Бумага оберточная. Печать офсетная. Усл.печ.
Заказ Тираж 500 экз. Бесплатно.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.
603600 ГСП-20, Н. Новгород, просп. Гагарина, 23.

Типография ННГУ. 603000, Н. Новгород, ул. Большая Покровская, 37.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение *n*-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)}), \qquad (1)$$

где через $y', y^{(i)}$, $i = \overline{2,n}$ обозначены первая и *i*-ая производные от искомой функции-решения *y=y(x)*, *x* - независимая переменная (координата).

Из всех решений уравнения (1) ищется такая функция *y=y(x)*, что

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2)$$

где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

Так формируется задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка.

Приведем формулировку задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть дана следующая система

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Надо найти $y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad ..., \quad y_n = y_n(x)$, причем

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{4}$$

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Первоначально будем рассматривать простейший случай (1), (2):

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{5}$$

При численном решении задача сводится к поиску в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ приближенных значений y_κ, $\kappa = \overline{0,n}$. Точки x_κ, $\kappa = \overline{0,n}$ задают сетку, у которой $\Delta x_\kappa = x_\kappa - x_{\kappa-1}$ - шаг сетки. Если шаг сетки постоянный и обозначить его $\Delta x_\kappa = h$, то

$$x_\kappa = x_0 + \kappa h, \qquad \kappa = \overline{0,n}.$$

2.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера (классический) основан на записи (5) в следующей форме (через конечные разности)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad \Delta y = y(x+h) - y(x), \quad \Delta x = (x+h) - x = h. \tag{6}$$

Приближенное значение y_κ из (6) в точке $x_\kappa = x_0 + \kappa h$ вычисляется по формуле

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + hf(x_\kappa, y_\kappa), \quad \kappa = \overline{0,n}. \tag{7}$$

Для получения формулы (7) можно применить и иной прием. Запишем простейший случай задачи (1), (2) в аналогичном (5) виде

$$y' = f(x, y(x)), \qquad y(x_\kappa) = y_\kappa, \qquad \kappa = \overline{0,n}. \tag{8}$$

Применим к (8) формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} y'(x)dx = y(x_{\kappa+1}) - y(x_\kappa) = \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(z, y(z))dz. \tag{9}$$

Таким образом (9) позволяет записать

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(z, y(z))dz \tag{10}$$

Применим к вычислению интеграла из (10) формулу левых прямоугольников, тогда (10) запишется

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + hf(x_\kappa, y_\kappa), \quad \kappa = \overline{0,n} \tag{11}$$

Мы получим формулу классического метода Эйлера. Так как формулы левых прямоугольников [4] имеют первый порядок точности, то и классический метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Описанная на примере (8)-(11) процедура позволяет построить модификации метода Эйлера.

Первая улучшенная формула метода Эйлера (усовершенствованный метод Эйлера) получается если в (10) для вычисления интеграла применить формулу центральных прямоугольников. Вид формулы усовершенствованного метода Эйлера следующий:

$$\begin{aligned} y_{\kappa+1/2} &= y_\kappa + \frac{1}{2}hf(x_\kappa, y_\kappa), \\ y_{\kappa+1} &= y_\kappa + hf(x_{\kappa+1/2}, y_{\kappa+1/2}). \end{aligned} \tag{12}$$

Так как формула центральных прямоугольников [4] имеет второй порядок точности, то и формула усовершенствованного метода Эйлера имеет второй порядок точности.

Вторая модификация метода Эйлера получается, если в (10) для вычисления интеграла применить формулу трапеций. Вид формулы второй модификации классического метода Эйлера следующий

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{2}\left(f(x_\kappa, y_\kappa) + f(x_{\kappa+1}, y_\kappa + hf(x_\kappa, y_\kappa))\right) \qquad (13)$$

В формуле (13) значение $y_{\kappa+1}$ в правой части предсказывается по формуле (7) классического метода Эйлера, а затем по формуле (13) получается окончательное (скорректированное) значение $y_{\kappa+1}$. По этой причине метод называется метод типа предиктор-корректор. Иногда метод называют методом Эйлера-Коши или методом Хьюна.

Так как формула трапеций имеет второй порядок точности, то и вторая модификация метода Эйлера имеет второй порядок точности.
Методы Эйлера являются одношаговыми методами.

2.2 Методы Рунге-Кутты

Наиболее популярными среди классических явных одношаговых методов являются методы Рунге-Кутты. Методы Эйлера, Эйлера-Коши и т. п. можно рассматривать как простейшие представители этого класса методов.

Итак, по- прежнему имеем следующую задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_\kappa) = y_\kappa, \quad \kappa = \overline{0, n},$$

а значит по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} y'(x)dx = y(x_{\kappa+1}) - y(x_\kappa) = \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x, y(x))dx,$$
$$y(x_{\kappa+1}) = y(x_\kappa) + \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x, y(x))dx. \tag{14}$$

Эта процедура нами уже использовалась при построении формул (9) - (11). Пойдем далее. Введем на отрезке $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ m вспомогательных узлов

$$x_\kappa^{(1)} = x_\kappa + \alpha_1 h = x_\kappa,$$
$$x_\kappa^{(2)} = x_\kappa + \alpha_2 h,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_\kappa^{(m)} = x_\kappa + \alpha_m h, \qquad 0 = \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_m \le 1.$$

Естественно, что всегда $x_\kappa^{(m)} \le x_{\kappa+1}$. Теперь интеграл в (10), (14) представим в виде квадратурной суммы, тогда можем записать

$$y(x_{\kappa+1}) = y(x_\kappa) + h\sum_{i=1}^{m} c_i \ f\left(x_\kappa^{(i)}, y(x_\kappa^{(i)})\right). \tag{15}$$

В формуле (15) $y(x_\kappa^{(i)})$ неизвестны. Чтобы найти эти значения, представим $y(x_\kappa^{(i)})$ в следующем виде

$$y(x_\kappa^{(i)}) = y(x_\kappa) + \int_{x_\kappa}^{x_\kappa^{(i)}} f(x, y(x))\,dx, \qquad i = \overline{2,m}. \tag{16}$$

В выражении (16) заменим для каждого i интеграл квадратурной формулы с узлами $x_\kappa^{(1)}, x_\kappa^{(2)}, \dots, x_\kappa^{(i-1)}$. Таким образом можем записать

$$
\begin{aligned}
&y(x_\kappa^{(2)}) = y(x_\kappa) + h\beta_{21}\, f(x_\kappa^{(1)}, y(x_\kappa^{(1)})),\\
&y(x_\kappa^{(3)}) = y(x_\kappa) + h\left(\beta_{31}\, f(x_\kappa^{(1)}, y(x_\kappa^{(1)})) + \beta_{32}\, f(x_\kappa^{(2)}, y(x_\kappa^{(2)}))\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y(x_\kappa^{(i)}) = y(x_\kappa) + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\, f(x_\kappa^{(j)}, y(x_\kappa^{(j)})),\\
&\qquad\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y(x_\kappa^{(m)}) = y(x_\kappa) + h\sum_{j=1}^{m-1}\beta_{mj}\, f(x_\kappa^{(j)}, y(x_\kappa^{(j)})).
\end{aligned}
$$

Таким образом, последовательно находим $y(x_\kappa^{(2)}), \dots, y(x_\kappa^{(m)})$. Окончательно можем записать

$$
\begin{aligned}
&y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\ell_\kappa, \quad \ell_\kappa = \sum_{i=1}^{m} c_i\, \ell_\kappa^{(i)},\\
&\ell_\kappa^{(i)} = f\left(x_\kappa + \alpha_m h, \quad y_\kappa + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}\, \ell_\kappa^{(j)}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Формула (17) представляет явный одношаговый метод. Это явный m-этапный метод Рунге-Кутты. Выбор $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ осуществляется из различных соображений.

2.2.1. Явные двухэтапные методы

Рассмотрим семейство явных двухэтапных методов Рунге-Кутты и покажем, что методы Эйлера, Эйлера-Коши являются частным случаем методов Рунге-Кутты.

Формула двухэтапных методов из (17) выглядит следующим образом

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\left[c_1\, f(x_\kappa, y_\kappa) + c_2\, f(x_\kappa + \alpha h, y_\kappa + h\beta\, f(x_\kappa, y_\kappa))\right] \quad (18)$$

или

$$\frac{y_{\kappa+1} - y_\kappa}{h} = c_1\, f(x_\kappa, y_\kappa) + c_2\, f(x_\kappa + \alpha h, y_\kappa + \beta h\, f(x_\kappa, y_\kappa)). \quad (19)$$

Параметрами в (18) являются c_1, c_2, α, β.

Рассмотрим следующую функцию

$$\psi = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - c_1\, f(x,y) - c_2\, f(x + \alpha h, y + h\beta\, f(x,y), \quad (20)$$

где $x = x_\kappa$, $y = y(x_\kappa)$, $y(x)$ - решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$.

Формула Тейлора

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)\, h + \frac{y''(x)}{2} h^2 + O(h^3),$$

уравнение $y' = f(x,y)$, а также формула дифференцирования по x функции $f(x(y(x))$

$$y'' = f_x' + f_y' y' = f_x' + f_y' f$$

позволяют записать

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=f+\frac{1}{2}(f'_x+f'_y\,f)h+O(h^2).$$

Формула Тейлора для функции $f(x+\alpha h, y+h\beta f)$ запишется следующим образом

$$f(x+\alpha h, y+\beta h f)=f(x,y)+f'_x\,\alpha h+f'_y\,h\beta f+O(h^2).$$

Следовательно, (20) можно записать в таком виде

$$\psi=f+\frac{1}{2}(f'_x+f'_y\,f)h+O(h^2)-c_1 f(x,y)-c_2 f(x,y)-$$
$$-c_2(f'_x\,\alpha h+f'_y h\beta f)+O(h^2),$$

или

$$\psi=(1-c_1-c_2)f(x,y)+\left[\left(\frac{1}{2}-c_2\,\alpha\right)f'_x+\left(\frac{1}{2}-c_2\,\beta\right)f'_y\,f\right]h+O(h^2).$$

Второй порядок аппроксимации (19) будет, если

$$c_1+c_2=1, \qquad c_2\alpha=\frac{1}{2}, \qquad c_2\beta=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$c_1=1-\frac{1}{2\alpha}, \qquad \beta=\alpha, \qquad c_2=\frac{1}{2\alpha}.$$

Формула двухэтапных методов Рунге-Кутты второго порядка точности выглядит следующим образом

$$y_{\kappa+1}=y_\kappa+h\left[\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)f(x_\kappa,y_\kappa)+\frac{1}{2\alpha}f(x_\kappa+\alpha h, y_\kappa+\alpha h f(x_\kappa,y_\kappa))\right],$$
$$\alpha\in(0,1). \qquad (21)$$

При $\alpha = 1$ формула (21) дает метод Эйлера-Коши (метод Хьюна).

При $\alpha = 1/2$ формула (21) дает первую модификацию метода Эйлера.

2.2.2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

Наиболее известным и широко используемым методом Рунге-Кутты является метод, который представляется следующей формулой

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\ell_\kappa, \qquad \ell_\kappa = \frac{1}{6}(\ell_\kappa^{(1)} + 2\ell_\kappa^{(2)} + 2\ell_\kappa^{(3)} + \ell_\kappa^{(4)}),$$

$$\ell_\kappa^{(1)} = f(x_\kappa, y_\kappa), \qquad \ell_\kappa^{(2)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(1)}\right),$$

$$\ell_\kappa^{(3)} = f\left(x_\kappa + \frac{h}{2}, y_\kappa + \frac{h}{2}\ell_\kappa^{(2)}\right), \qquad \ell_\kappa^{(4)} = f(x_\kappa + h, y_\kappa + h\ell_\kappa^{(3)}).$$

Этот метод, в соотнесении с задачами о вычислении интеграла

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx, \qquad x_0 \le x \le X,$$

порожден формулой Симпсона

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{6}(f(x_\kappa) + 4f(x_\kappa + 1/2) + f(x_{\kappa+1})).$$

Этот метод, как и формула Симпсона, имеет четвертый порядок точности.

2.3. Методы Адамса

Для решения задачи Коши

$$y' = f(x, y(x)), \qquad x_0 \le x \le x_1, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{22}$$

до сих пор строились одношаговые методы, чьи формулы имеют такой вид

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + h\Phi(x_\kappa, y_\kappa).$$

Можно добиваться большей точности путем использования информации с нескольких предыдущих точек $x_\kappa, x_{\kappa-1}, \dots$.

Так возникают многошаговые методы.

Пусть *y(x)* - точное решение. Подставим его в (22) и проинтегрируем на отрезке $[x_\kappa, x_{\kappa+1}]$ исходную задачу Коши (как это мы делали в (8)-(10)), тогда получаем

$$y(x_{\kappa+1}) - y(x_\kappa) = \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} y'(x)dx = \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} f(x, y(x))dx. \tag{23}$$

Пусть *p(x)* -полином аппроксимирующий *f(x, y(x)),* тогда (23) можно записать

$$y(x_{\kappa+1}) = y(x_\kappa) + \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} p(x)dx. \tag{24}$$

Чтобы построить *p(x)*, предположим, что $y_\kappa, y_{\kappa-1}, ..., y_{\kappa-N}$ - приближенные значения исходного решения соответственно в точках $x_\kappa, x_{\kappa-1}, \dots, x_{\kappa-N}$.

2.3.1. Методы Адамса - Бошфорта

Пусть узлы расположены равномерно с шагом h, тогда $f_i \equiv f(x_i, y_i)$, $i = \kappa, \kappa - 1, \ldots, \kappa - N$ - приближенные значения $f(x, y(x))$ в точках (узлах) $x_\kappa, x_{\kappa-1}, \ldots, x_{\kappa-N}$. За $p(x)$ возьмем интерполяционный полином для набора данных $(x_i, f_i), i = \kappa, \kappa-1, \ldots, \kappa - N$, то есть $p(x)$ - полином степени h, удовлетворяющий условию

$$p(x_i) = f_i, \qquad i = \kappa, \kappa - 1, \ldots, \kappa - N.$$

Полином в (24) можно проинтегрировать явно. Рассмотрим случаи.

Случай $N \equiv 0$.

В этом случае $p(x)$ - это константа, равная f_κ и получаем метод Эйлера.

Случай $N = 1$.

В этом случае $p(x)$ - линейная функция, проходящая через точки $(x_{\kappa-1}, f_{\kappa-1})$, (x_κ, f_κ), то есть

$$p(x) = -\frac{(x - x_\kappa)}{h} f_{\kappa-1} + \frac{(x - x_{\kappa-1})}{h} f_\kappa,$$

а значит

$$\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} p(x)dx = -f_{\kappa-1}\frac{1}{h}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}}(x - x_\kappa)dx + f_\kappa\frac{1}{h}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}}(x - x_{\kappa-1})dx =$$

$$= -f_{\kappa-1}\frac{1}{h}\left\{\frac{x^2}{2}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} - x_\kappa h\right\} + f_\kappa\frac{1}{h}\left\{\frac{x^2}{2}\int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} - x_{\kappa-1}h\right\} =$$

$$= -f_{\kappa-1}\frac{1}{h}\left\{\frac{(\kappa+1)^2h^2}{2} - \frac{\kappa^2h^2}{2} - \kappa h^2\right\} + f_\kappa\frac{1}{h}\left\{\frac{(\kappa+1)^2h^2}{2} - \frac{\kappa^2h^2}{2} - (\kappa-1)h^2\right\} =$$

$$= -f_{\kappa-1}\frac{1}{h} + f_\kappa\frac{h}{2}(\kappa+2) = \frac{h}{2}(3f_\kappa - f_{\kappa-1}).$$

Получаем шаговую формулу

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{2}(3f_\kappa - f_{\kappa-1}).$$

Это двухшаговый метод, т.к. он использует информацию в двух точках x_κ и $x_{\kappa-1}$.

Случай *N* = 2.

В этом случае *p(x)* - квадратичный полином, интерполирующий данные $(x_{\kappa-2}, f_{\kappa-2})$, $(x_{\kappa-1}, f_{\kappa-1})$, (x_κ, f_κ).

Итоговая формула имеет вид

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{12}(23f_\kappa - 16f_{\kappa-1} + 5f_{\kappa-2}).$$

Это трехшаговый метод.

Случай N = 3.

В этом случае $p(x)$ - кубический полином, интерполирующий данные $(x_{\kappa-3}, f_{\kappa-3})$, $(x_{\kappa-2}, f_{\kappa-2})$, $(x_{\kappa-1}, f_{\kappa-1})$, (x_κ, f_κ).

Итоговая формула имеет вид

$$y_{\kappa+1} = y_\kappa + \frac{h}{24}(55 f_\kappa - 59 f_{\kappa-1} + 37 f_{\kappa-2} - 9 f_{\kappa-3}).$$

Это формула четырехшагового метода.

Построенные формулы для случаев $N = 1,2,3$ называют формулами методов Адамса-Бошфорта. Метод при $N = 1$ имеет второй порядок точности и его называют методом Адамса-Бошфорта второго порядка. Методы при $N = 2$ и при $N = 3$ - методы Адамса-Бошфорта третьего и четвертого порядка точности.

Многошаговые методы порождают проблему, которая не возникает при использовании одношаговых методов. Чтобы ее понять, рассмотрим метод Адамса-Бошфорта 4-го порядка точности. Нам задано начальное условие

$$y_0 = y(x_0).$$

Для счета по формуле случая $N = 3$ необходима информация в точках x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}. Такой информации у нас нет. Сложность заключается в том, что многошаговые методы в начале работы нуждаются в помощи. Для выбранного нами примера получается, что при $\kappa < 3$ формулой метода Адамса-Бошфорта воспользоваться мы не можем.

Для проведения вычислений по формулам многошаговых методов предварительно используют либо одношаговые методы того же порядка точности (например, формулы метода Рунге-Кутты), причем до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода; либо на первом шаге используют одношаговый метод, на втором шаге используют двухшаговый метод и т.д.

Методы, используемые на этапе подготовки информации для вычислений по выбранным формулам многошаговых методов, часто называют стартовыми методами. Так как стартовые методы обычно имеют более низкий порядок точности, то вначале приходится считать с меньшим шагом и использовать больше промежуточных точек.

2.3.2. Методы Адамса-Моултона

Методы Адамса-Бошфорта используют уже известные значения в точке x_κ и в предыдущих точках. Однако можно использовать точки $x_{\kappa+1}, x_{\kappa+2},\dots$. Простейший случай при этом будет в использовании точек

$$x_{\kappa+1}, x_\kappa, \dots, x_{\kappa-N}$$

и построении интерполяционного полинома степени $N + 1$, удовлетворяющих условиям

$$p(x_i) = f_i, \quad i = \kappa+1, \kappa, \dots, \kappa-N. \qquad (26)$$

Возникающий таким образом класс методов называется методом Адамса-Моултона.

Случай *N*=0.

В этом случае *p(x)* из (26) будет линейной функцией, использующей данные $(x_к, f_к)$, $(x_{к+1}, f_{к+1})$.

Итоговая формула имеет вид

$$y_{к+1} = y_к + \frac{h}{2}(f_{к+1} + f_к).$$

Это формула метода Адамса-Моултона второго порядка.

Случай *N* = 1.

В этом случае *p(x)* из (26) будет квадратичным полиномом, использующим данные $(x_{к+1}, f_{к+1})$, $(x_к, f_к)$, $(x_{к-1}, f_{к-1})$.

Итоговая формула имеет вид

$$y_{к+1} = y_к + \frac{h}{12}(5f_{к+1} + 8f_к - f_{к-1}).$$

Это формула метода Адамса-Моултона третьего порядка.

Случай. *N* = 2.

В этом случае *p(x)* из (26) является кубическим полиномом, построенным по данным $(x_{к+1}, f_{к+1})$, $(x_к, f_к)$, $(x_{к-1}, f_{к-1})$, $((x_{к-2}, f_{к-2})$.

Итоговая формула имеет вид

$$y_{к+1} = y_к + \frac{h}{24}(9f_{к+1} + 19f_к - 5f_{к-1} + f_{к+2}).$$

Это формула метода Адамса-Моултона четвертого порядка.

Значение $f_{\kappa+1}$ неизвестно. Для $f_{\kappa+1}$ надо знать $y_{\kappa+1}$:

$$f(x_{\kappa+1}, y_{\kappa+1}) = f_{\kappa+1}.$$

Методы Адамса-Моултона определяют $y_{\kappa+1}$ только неявно.

Методы Адамса-Моултона — неявные методы.

Методы Адамса-Бошфорта — явные методы.

2.3.3. Прогноз и коррекция по методу Адамса

На практике часто используют явную и неявную формулы, что приводит к методам типа предиктор-корректор. Одним из широко используемых методов типа предиктор-корректор является метод Адамса, представляемый следующими формулами

$$\begin{aligned}
y_{\kappa+1}^{(прог)} &= y_\kappa + \frac{h}{24}(55 f_\kappa - 59 f_{\kappa-1} + 37 f_{\kappa-2} - 9 f_{\kappa-3}),\\
y_{\kappa+1}^{(прог)} &= f(x_{\kappa+1}, y_{\kappa+1}^{(прог)}),\\
y_{\kappa+1} &= y_\kappa + \frac{h}{24}(9 f_{\kappa+1}^{(прог)} + 19 f_\kappa - 5 f_{\kappa-1} + f_{\kappa-2}).
\end{aligned}$$

В целом этот метод является явным.

Построенные нами формулы в пунктах 2.1.3.-2.3.2. обычно применяются при реализации метода Адамса на ЭВМ. Формулы из п 2.3.1 называют экстраполяционными формулами Адамса, а формулы из п. 2.3.2 называются интерполяционными формулами Адамса.

2.3.4. Формулы Адамса в конечных разностях

Пусть x_κ $(\kappa = 0,1,2,...)$ - система равноотстоящих значений с шагом h и $y_\kappa = y(x_\kappa)$. Запишем следующее тождество

$$\Delta y_\kappa = \int\limits_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} y' dx. \qquad (27)$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона с точностью до разностей четвертого порядка может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned} y' &= y'_\kappa + q\Delta y'_{\kappa-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y'_{\kappa-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3}\Delta^3 y'_{\kappa-3} = \\ &= y'_\kappa + q\Delta y'_{\kappa-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{\kappa-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^3 y'_{\kappa-3}, \end{aligned} \qquad (28)$$

где $qh = x - x_\kappa$.

Учитывая, что $dx = hdq$, можем получить из (27), (28)

$$\Delta y_\kappa = h\int\limits_0^1 \left(y'_\kappa + q\Delta y'_{\kappa-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{\kappa-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}\Delta^2 y'_{\kappa-2} \right) dq$$

или

$$\Delta y_\kappa = hy'_\kappa + \frac{1}{2}\Delta(hy'_{\kappa-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(hy'_{\kappa-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(hy'_{\kappa-3}). \qquad (29)$$

Формула (29) называется экстраполяционной формулой Адамса.

Учтем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \Delta(h\,y'_{\kappa-1}) &= \Delta(h\,y'_\kappa) - \Delta^2(h\,y'_{\kappa-2}), \\ \Delta^2(h\,y'_{\kappa-2}) &= \Delta^2(h\,y'_{\kappa-1}) - \Delta^3(h\,y'_{\kappa-2}) \end{aligned}$$

и будем считать, что конечные разности третьего порядка постоянные, то есть справедливо соотношение

$$\Delta^3(h\,y'_{\kappa-3}) \approx \Delta^3(h\,y'_{\kappa-2}),$$

тогда формула (29) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_{\kappa} = h y'_{\kappa} + \frac{1}{2}\left[\Delta(h y'_{\kappa}) - \Delta^{3}(h y'_{\kappa-1})\right] + \\
&+ \frac{5}{12}\left[\Delta(h y'_{\kappa-1}) - \Delta^{3}(h y'_{\kappa-2})\right] + \frac{1}{8}\Delta^{3}(h y'_{\kappa-2}).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Из (30) получаем

$$
\Delta y_{\kappa} = h y'_{\kappa} + \frac{1}{2}\Delta(h y'_{\kappa}) - \frac{1}{12}\Delta^{2}(h y'_{\kappa-1}) - \frac{1}{24}\Delta^{3}(h y'_{\kappa-2}). \tag{31}
$$

Формула (31) называется интерполяционной формулой Адамса.

Решая методом Адамса с использованием формул (30)и (31) по схеме предиктор-корректор значение $y_{\kappa+1} = y_{\kappa} + \Delta y_{\kappa}$ предсказывается по формуле (30) и затем корректируется по формуле (31). Формулы (30) и (31) дают погрешность порядка $O(h^{4})$.

Формулы (30) и (31) дадут формулы из п.2.3.3, если учесть следующие соотношения

$$
\begin{aligned}
&\Delta y'_{\kappa-1} = y'_{\kappa} - y'_{\kappa-1}, \\
&\Delta^{2} y'_{\kappa-2} = y'_{\kappa} - 2y'_{\kappa-1} + y'_{\kappa-2}, \\
&\Delta^{3} y'_{\kappa-3} = y'_{\kappa} - 3y'_{\kappa-1} + 3y'_{\kappa-2} - y'_{\kappa-3}.
\end{aligned}
$$

Приведение подобных членов с учетом уравнения $y'_{\kappa} = f(x_{\kappa}, y_{\kappa})$ позволяют получить окончательные формулы, совпадающие с формулами из п. 2.3.3.

2.4 Метод Милна

Для численного решения задачи Коши

$$
y' = f(x, y), \quad y(x_{0}) = y_{0}
$$

выберем шаг h. По- прежнему будем придерживаться следующих обозначений

$$x_\kappa = x_0 + \kappa h, \quad y_\kappa = y(x_\kappa), \quad y'_\kappa = f(x_\kappa, y_\kappa), \quad \kappa = 1,2,...$$

Будем считать, что нам известны y'_κ, $\kappa = 0,1,2,3$, а значит известны $y_{\kappa-1}$, $y_{\kappa-2}$, $y_{\kappa-3}$, $y_{\kappa-4}$ $(\kappa = 4,5,...)$.

Запишем первую интерполяционную формулу Ньютона в точке x_i с точностью до третьего порядка включительно

$$y' = y'_i + q\Delta y'_i + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y'_i + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y'_i$$

или

$$y' = y'_i + q\Delta y'_i + \frac{1}{2}(q^2 - q)\Delta^2 y'_i + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q)\Delta^3 y'_i, \qquad (32)$$

где $qh = x - x_\kappa$.

Полагая в (32) $i = \kappa - 4$ и почленно интегрируя полученную формулу по x в пределах от $x_{\kappa-4}$ до x_κ, получим

$$\int_{x_{\kappa-4}}^{x_\kappa} y'dx = \int_{x_{\kappa-4}}^{x_\kappa} \left[y'_{\kappa-4} + q\, y'_{\kappa-4} + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y'_{\kappa-4} + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y'_{\kappa-4} \right] dx.$$

Учитывая, что $qh = x - x_{\kappa-4}$, $dx = h\,d\,q$, получаем

$$y_\kappa - y_{\kappa-4} = h\left\{ y'_{\kappa-4}\int_0^4 dq + \Delta y'_{\kappa-4}\int_0^4 q dq + \Delta^2 y'_{\kappa-4}\int_0^4 \frac{q^2-q}{2}dq + \right.$$

$$\left. \Delta^3 y'_{\kappa-4}\int_0^4 \frac{q^3-3q^2+2q}{6}dq \right\} = h\left(4y'_{\kappa-4} + 8\Delta y'_{\kappa-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{\kappa-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{\kappa-4}\right).$$

Так как

$$\Delta y'_{\kappa-4} = y'_{\kappa-3} - y'_{\kappa-4},$$
$$\Delta^2 y'_{\kappa-4} = y'_{\kappa-2} - 2y'_{\kappa-3} + y'_{\kappa-4},$$
$$\Delta^3 y'_{\kappa-4} = y'_{\kappa-1} - 3y'_{\kappa-2} + 3y'_{\kappa-3} - y'_{\kappa-4},$$

то подстановка их в последнюю формулу даст

$$y_\kappa = y_{\kappa-4} + \frac{4h}{3}(2f_{\kappa-3} - f_{\kappa-2} + 2f_{\kappa-1}).$$

Это первая формула Милна.

Полагая в (32) $i = \kappa - 2$ и интегрируем по x в пределах от $x_{\kappa-2}$ до x_κ с учетом того, что $qh = x - x_{\kappa-2}$, $hdq = dx.$ Получаем из (32)

$$\int_{x_{\kappa-2}}^{x_\kappa} y'dx = h\int_0^2 \left[y'_{\kappa-2} + q\Delta y'_{\kappa-2} + \frac{1}{2}(q^2-q)\Delta^2 y'_{\kappa-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q)\Delta^3 y'_{\kappa-2} \right] dq,$$

или

$$y_\kappa - y_{\kappa-2} = h\left(2y'_{\kappa-2} + 2\Delta y'_{\kappa-2} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{\kappa-2}\right).$$

Если учесть, что

$$\Delta y'_{\kappa-2} = y'_{\kappa-1} - y'_{\kappa-2},$$
$$\Delta^2 y'_{\kappa-2} = y'_{\kappa} - 2y'_{\kappa-1} + y'_{\kappa-2},$$

получим формулу

$$y_\kappa = y_{\kappa-2} + \frac{h}{3}(f_{\kappa-2} + 4f_{\kappa-1} + f_\kappa).$$

Это вторая формула Милна.

Замечание:

Для дифференциального уравнения

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

вторая формула Милна совпадает с формулой Симпсона для интеграла

$$y_\kappa - y_{\kappa-2} = \int_{x_{\kappa-2}}^{x_\kappa} f(x)dx.$$

Вычисления по методу Милна осуществляются следующим образом

- вычисляем первое приближение $y_\kappa^{(1)}$ для ближайшего следующего значения y_κ по формуле

$$y_\kappa^{(1)} = y_{\kappa-4} + \frac{4h}{3}(2f_{\kappa-3} - f_{\kappa-2} + 2f_{\kappa-1}), \quad \kappa = 4,5,...;$$

- значение $y_\kappa^{(1)}$ подставляем в дифференциальное уравнение и определяем соответствующее значение $y_\kappa'^{(1)} = f(x_\kappa, y_\kappa^{(1)})$;

- находим второе приближение $y_\kappa^{(2)}$ по формуле

$$y_\kappa^{(2)} = y_{\kappa-2} + \frac{h}{3}(f_{\kappa-2} + 4f_{\kappa-1} + f_\kappa^{(1)}), \quad \kappa = 4,5,\ldots .$$

Так как абсолютная погрешность значения $y_\kappa^{(2)}$ приближенно равна

$$\varepsilon_\kappa = \frac{1}{29}\left|y_\kappa^{(2)} - y_\kappa^{(1)}\right|,$$

и если $\varepsilon_\kappa \le \varepsilon$, где ε - заданная предельная погрешность решения, то можно положить

$$y_\kappa \approx y_\kappa^{(2)},$$

а значит

$$y'_\kappa \approx f(x_\kappa, y_\kappa^{(2)}).$$

Вычисление ближайшего следующего значения $y_{\kappa+1}$ повторяет описанный процесс. Если точность не обеспечивается, то уменьшается шаг *h*.

Метод Милна является методом типа предиктор-корректор.

Опишем вывод формулы абсолютной погрешности метода Милна. Учитывая отброшенные в интерполяционной формуле Ньютона разности четвертого порядка, можем, с точностью до разностей пятого порядка, записать

$$\varepsilon_\kappa^{(1)} \approx h\int_0^4 \frac{1}{24}(q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q)\Delta^4 y'_{\kappa-4}dq = \frac{28}{90}h\Delta^4 y'_{\kappa-4},$$

$$\varepsilon_\kappa^{(2)} \approx h\int_0^2 \frac{1}{24}(q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q)\Delta^4 y'_{\kappa-2}dq = -\frac{h}{90}h\Delta^4 y'_{\kappa-2}.$$

Таким образом, считая, что четвертая разность $\Delta^4 y'_\kappa$ постоянная на интервале длины 4*h*, получаем

$$\varepsilon_\kappa^{(1)} = -28\varepsilon_\kappa^{(2)}.$$

Это и дает формулу для оценки абсолютной погрешности метода Милна

$$\varepsilon_\kappa = \left|\varepsilon_\kappa^{(2)}\right| = \frac{1}{29}\left|y_\kappa^{(1)} - y_\kappa^{(2)}\right|.$$

Если шаг *h* достаточно мал, то приближенно можно записать

$$\frac{\Delta^4 y'_\kappa}{h^4} \approx y^v(x_\kappa).$$

Пусть $x \in [a,b]$, т.е. решение задачи Коши ищется на отрезке $[a,b]$ и $h = \dfrac{b-a}{n}$. Из исходных формул для $\varepsilon_\kappa^{(1)}, \varepsilon_\kappa^{(2)}$ следует, что предельная абсолютная погрешность на $[a,b]$ приближенного решения $y_\kappa = y(x_\kappa)$ выражается следующей формулой

$$\varepsilon = \frac{h^5}{90} M_5 n = \frac{b-a}{90} M_5 h^4,$$

где $M_5 = \max\limits_{[a,b]}\left|y^v(x)\right|$.

Суммарная ошибка метода Милна есть величина порядка h^4.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Напомним формулировку задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть дана следующая система

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}$$

Надо найти $y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad ..., \quad y_n = y_n(x)$, причем

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотренные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка можно применять и к решению задач Коши для систем. Форма записи претерпевает минимальные изменения:

- числа y_κ заменяем на векторы $\vec{y}_\kappa = (y_{1\kappa}, y_{2\kappa}, \ldots, y_{n\kappa})^T$;

- функции f заменяем на вектор-функции $\vec{f}$ и т.д.

Запишем еще раз постановку задачи. Так как в координатной форме записи она представлена в (3), (4), то приведем векторную форму записи

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 .$$

Если мы имеем дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}),$$

то оно может быть сведено к системе

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = y_1, \\
&\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots . \\
&\frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\
&\frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).
\end{aligned}$$

3.1. Метод Эйлера

Формула метода Эйлера имеет следующий вид (см. п.2.1., формулу (11)):

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_\kappa + h\vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa).$$

3.2. Усовершенствованный метод Эйлера второго порядка

Это первая модификация метода Эйлера. Основные формулы имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&\vec{y}_{\kappa+1/2} = \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa), \quad x_{\kappa+1/2} = x_\kappa + \frac{1}{2}h, \\
&\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_\kappa + h\vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_{\kappa+1/2}).
\end{aligned}$$

3.3. Модифицированный метод Эйлера второго порядка

Это вторая модификация метода Эйлера. Метод иногда называют методом Эйлера-Коши или методом Хьюна. Основная формула выглядит следующим образом

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\left[\vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa) + \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_\kappa + h\vec{f}(x_\kappa, y_\kappa))\right].$$

Существует метод Эйлера-Коши (метод Хьюна) с итерациями. В этом случае используются следующие формулы

$$\vec{y}_{\kappa+1}^{(0)} = \vec{y}_\kappa + h\,\vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa),$$
$$\vec{y}_{\kappa+1}^{(m)} = \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\left[\vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa) + \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_{\kappa+1}^{(m-1)})\right].$$

Число итераций берется не более трех-четырех, в противном случае уменьшают шаг h.

3.4. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

Основные формулы выглядят следующим образом

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_\kappa + h\vec{\ell}_\kappa,$$
$$\vec{\ell}_\kappa = \frac{1}{6}(\vec{\ell}_\kappa^{(1)} + 2\vec{\ell}_\kappa^{(2)} + 2\vec{\ell}_\kappa^{(3)} + \vec{\ell}_\kappa^{(4)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(1)} = \vec{f}(x_\kappa, \vec{y}_\kappa),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(2)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(1)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(3)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_\kappa + \frac{h}{2}\vec{\ell}_\kappa^{(2)}),$$
$$\vec{\ell}_\kappa^{(4)} = \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_\kappa + h\vec{\ell}_\kappa^{(3)}).$$

3.5. Метод Адамса четвертого порядка точности

Основная формула метода Адамса-Бошфорта выглядит следующим образом

$$y_{i\kappa+1} = y_{i\kappa} + \frac{h}{24}(55 f_{i\kappa} - 59 f_{i\kappa-1} + 37 f_{i\kappa-2} - 9 f_{i\kappa-3}).$$

Основная формула метода Адамса-Моултона выглядит следующим образом

$$y_{i\kappa+1} = y_{i\kappa} + \frac{h}{24}(9 f_{i\kappa+1} + 19 f_{i\kappa} - 5 f_{i\kappa-1} + f_{i\kappa-2}).$$

Формулы прогноза-коррекции по методу Адамса в векторной форме записи выглядят следующим образом

$$\vec{y}_{\kappa+1}^{(прог)} = \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{24}(55 \vec{f}_{\kappa} - 59 \vec{f}_{\kappa-1} + 37 \vec{f}_{\kappa-2} - 9 \vec{f}_{\kappa-3}),$$

$$\vec{y}_{\kappa+1}^{(прог)} = \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_{\kappa+1}^{(прог)}),$$

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{24}(9 \vec{f}_{\kappa+1}^{(прог)} + 19 \vec{f}_{\kappa} - 5 \vec{f}_{\kappa-1} + \vec{f}_{\kappa-2}).$$

Формулы метода Адамса в конечных разностях используются в следующем виде

$$\Delta y_{i\kappa} = h y'_{i\kappa} + \frac{1}{2}\Delta(h y'_{i\kappa-1}) + \frac{5}{12}\Delta^2(h y'_{i\kappa-2}) + \frac{3}{8}\Delta^3(h y'_{i\kappa-3})$$

(экстраполяционная формула Адамса)

$$\Delta y_{i\kappa} = h y'_{i\kappa} + \frac{1}{2}\Delta(h y'_{i\kappa}) - \frac{1}{12}\Delta^2(h y'_{i\kappa-1}) - \frac{1}{24}\Delta^3(h y'_{i\kappa-2})$$

(интерполяционная формула Адамса),

где $y'_{i\kappa} = f_i(x_\kappa, y_{1\kappa}, y_{2\kappa}, ..., y_{n\kappa})$.

3.6. Автоматическое изменение шага в ходе решения

Если решение надо получить с заданной точностью, то изменение шага необходимо.

3.6.1. Метод Рунге-Кутты с автоматическим изменением шага

После вычисления $\vec{y}_{\kappa+1}$ с шагом *h* все вычисления производятся повторно с шагом *h*/2. Полученный результат $\vec{y}_{\kappa+1}^{h/2}$ сравнивают с $\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_{\kappa+1}^{h}$. Если $\left|\vec{y}_{\kappa+1}^{h} - \vec{y}_{\kappa+1}^{h/2}\right| < \varepsilon$, то вычисления продолжаются с шагом *h*, в противном случае шаг уменьшается. Если неравенство $\left|\vec{y}_{\kappa+1}^{h} - \vec{y}_{\kappa+1}^{h/2}\right| < \varepsilon$ слишком сильное, то шаг увеличивается.

При заданной погрешности метод Рунге-Кутты уступает следующему методу по точности.

3.6.2. Метод Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим изменением шага

Алгоритм метода можно описать в следующих положениях

a) Задается число уравнений *n*, погрешность $\varepsilon = \varepsilon^*$, начальный шаг интегрирования h=H и начальные значения $x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

b) С помощью пяти циклов с управляющей переменной I =1,2,...,*n* вычисляются коэффициенты.

$$\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} = \vec{f}(x_{\kappa}, \vec{y}_{\kappa}),$$

$$\vec{\ell}_{\kappa}^{(2)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/3}, \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{3}\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)}),$$

$$\vec{\ell}_{\kappa}^{(3)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/3}, \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{6}\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} + \frac{h}{6}\vec{\ell}_{\kappa}^{(2)}),$$

$$\vec{\ell}_{\kappa}^{(4)} = \vec{f}(x_{\kappa+1/2}, \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{8}\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} + \frac{3h}{8}\vec{\ell}_{\kappa}^{(3)}),$$

$$\vec{\ell}_{\kappa}^{(5)} = \vec{f}(x_{\kappa+1}, \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{2}\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} - \frac{3h}{2}\vec{\ell}_{\kappa}^{(3)} + 2h\vec{\ell}_{\kappa}^{(4)}).$$

c) Находим в последнем цикле

$$\vec{y}_{\kappa+1} = \vec{y}_{\kappa} + \frac{h}{6}(\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} + 4\vec{\ell}_{\kappa}^{(4)} + \vec{\ell}_{\kappa}^{(5)}).$$

Погрешность вычисления определяется по формуле

$$\vec{R}_{\kappa+1} = h(-2\vec{\ell}_{\kappa}^{(1)} + 9\vec{\ell}_{\kappa}^{(3)} - 8\vec{\ell}_{\kappa}^{(4)} + \vec{\ell}_{\kappa}^{(5)})/30.$$

d) Проверяется выполнение условий

$$\left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \le \varepsilon^*, \left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \ge \frac{\varepsilon^*}{30}.$$

Если условие $\left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \le \varepsilon^*$ не выполняется, то $h = \frac{H}{2}$ и с пункта b) начинается пересчет.

Если выполняется условие $\left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \le \varepsilon^*$ и выполняется условие $\left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \ge \frac{\varepsilon^*}{30}$, то

$$x_{\kappa+1} = x_{\kappa} + h$$

то искомые $\vec{y}_{\kappa+1}$ найдены.

Если условие $\left|\vec{R}_{\kappa+1}\right| \geq \frac{\varepsilon^*}{30}$ не выполняется, то h = 2H и с пункта b) начинается пересчет.

Погрешность $\vec{R}_{\kappa+1}$ на каждом шаге оценивается приближенно и возможны такие дифференциальные уравнения (нелинейные), когда истинная погрешность сильно (в несколько раз) может от нее отличаться.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по теме "Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений"

I. Решить задачу Коши одним из следующих методов: Эйлера и его модификациями, Рунге-Кутты, Адамса (явным и неявным), Милна. Сравнить решение с аналитическим. Провести вычисления при разной величине шага интегрирования и оценить порядок сходимости по величине погрешности. Сравнить результат с теоретической оценкой. Сравнить с другими численными методами.

1. $y' = \frac{2y}{x} + 2x^3$, $x \in [1, 2]$, *Аналитическое решение*: $y = Cx^2 + x^4$

   $y(1) = 2$, $C = 1$

2. $y' = \frac{4x+2y}{2x+1} + 2x^3$, $x \in [0, 1]$, *Аналитическое решение:* $y = (2x+1)(C + ln(2x+1) + 1)$

   $y(0) = 1$, $C = 0$

3. $y' = \dfrac{1}{\cos x} - ytgx,$ $\quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],$ *Аналитическое решение:* $y = \sin x + C\cos x$

$y(0) = 1, \quad C = 1$

4. $y' = y + \dfrac{e^x}{x},$ $\quad x \in [1, 2],$ *Аналитическое решение:* $y = e^x\left(ln(x) + C\right)$

$y(1) = 0, \quad C = 0$

5. $y' = -\dfrac{1 + xy}{x^2},$ $\quad x \in [1, 2],$ *Аналитическое решение:* $y = \dfrac{C - ln(x)}{x}$

$y(1) = 0, \quad C = 0$

6. $y' = \dfrac{y}{x} + x\cos x,\ x \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right],$ *Аналитическое решение:* $y = x(C + \sin x)$

$y(\pi) = 0, \quad C = 0$

7. $y' = 2x\left(x^2 + y\right),$ $\quad x \in [0, 1],$ *Аналитическое решение:* $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$

$y(0) = 0, \quad C = 1$

8. $y' = \dfrac{2y}{x\,ln\,x} + \dfrac{1}{x},$ $\quad x \in [2, 3],$ *Аналитическое решение:* $y = C\,ln^2 x - ln\,x$

$y(2) = -ln\,2, \quad C = 0$

9. $x' = \dfrac{x + y^2}{y},$ $\quad y \in [1, 2],$ *Аналитическое решение:* $x = y^2 + Cy$

$x(1) = 1, \quad C = 0$

$x(1) = 2, \quad C = 1$

10. $x' = \dfrac{3x - y^2}{y},$ $\quad y \in [1, 2],$ *Аналитическое решение:* $x = Cy^3 + y^2$

$x(2) = 4, \quad C = 0$

$x(2) = -4, \quad C = -1$

11. $x' = 2ye^y + x,$ $\quad y \in [0, 1],$ *Аналитическое решение:* $x = \left(C + y^2\right)e^y$

$x(0) = C$

12. $x' = -\frac{x}{y}\left(y^3 + \ln x\right), \quad y \in [1, 2],$
$x(1) = 1, \quad C = 1$

Аналитическое решение:
$x = \exp\left(\frac{C - y^4}{4y}\right)$

13. $y' = \frac{1 + y^2 \sin 2x}{2y \cos^2 x}, \ x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$
$y(\pi) = \pm\sqrt{\pi}, \quad C = 0$

Аналитическое решение:
$y = \pm\frac{\sqrt{x - C}}{\cos x}$

14. $x' = \frac{xy + x^3}{y^2}, \quad y \in [1, 2],$
$x(1) = 1, \quad C = 3$

Аналитическое решение:
$x = \pm\frac{y}{\sqrt{C - 2y}}$

15. $y' = \frac{y}{x} - y^2, \quad x \in [1, 2],$
$y(1) = 2, \quad C = 0$

Аналитическое решение:
$y = \frac{2x}{x^2 - C}$

16. $y'' - 2y' + y = 0, \quad x \in [2, 3],$
$y(2) = 1, \quad y'(2) = -2$

Аналитическое решение:
$y = (7 - 3x)e^{x-2}$

17. $y'' + y = 4e^x, \quad x \in [0, 1],$
$y(0) = 4, \quad y'(0) = -3$

Аналитическое решение:
$y = 2\cos x - \sin x + 2e^x$

18. $y'' - 2y' = 2e^x, \quad x \in [1, 2],$
$y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$

Аналитическое решение:
$y = 2e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$

19. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \ x \in [0, 1],$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Аналитическое решение:
$y = e^{-x}(x - \sin x)$

20. $y'' - y = -2, \quad x \in [0, 1],$
$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$

Аналитическое решение:
$y = 2 + e^{-x}$

. Краевые задачи

II. Решить следующие краевые задачи методом стрельбы и методом прогонки [5]. Сравнить решения с аналитическим. Провести вычисления при различном числе шагов и оценить порядок сходимости по величине погрешности. Сопоставить результат с теоретическими оценками.

1. $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = -1$

   Аналитическое решение: $y = \dfrac{shx}{sh1} - 2x$

2. $y'' - y' = 1$,
   $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

   Аналитическое решение: $y = x + e^{-x} - e^{-1}$

3. $y'' - y' = 0$,
   $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$

   Аналитическое решение: $y = e^{x} - 2$

4. $y'' + y = 1$,
   $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

   Аналитическое решение: $y = 1 - \sin x - \cos x$

5. $y'' + y = 2x - \pi$,
   $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

   Аналитическое решение: $y = 2x - \pi + \pi\cos x + \sin x$

6. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(-1) = -2e$, $y'(0) = 2$

   Аналитическое решение: $y = -2e^{-x}$

7. $y'' - y' = 1$,
   $y(-1) = e - 1$, $y(0) = 0$

   Аналитическое решение: $y = e^{-x} - 1$

8. $y'' - \frac{6}{x^2} y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(2) = 24$ — *Аналитическое решение:* $y = 2x^3$

9. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$, $y(1) = 3$, $y(2) = 12$ — *Аналитическое решение:* $y = 3x^2$

10. $y'' + \frac{5}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 0$,
$y'(1) = 3$, $y(2) = -\frac{1}{8}$ — *Аналитическое решение:* $y = -x^{-3}$

11. $y'' + (x+1)y' - 2x^2 y = -2x^5 + 3x^3 + 6x + x^2$,
$y(0) = 1$, $y(1) = 2$ — *Аналитическое решение:* $y = x^3 + 1$

12. $y'' + \frac{1}{x+2} y' - \frac{1}{x} y = -x^2 + 9x + 6$,
$y(1) = -11$, $y(3) = -9$ — *Аналитическое решение:* $y = x^3 - 12x$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров// М.: Высш.шк., 1994 г., 544 с.
2. Демидович Г.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа// М.:Наука, 1967 г., 362 с.
3. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений//М.:Наука, 1986 г., 288 с.
4. Игумнов Л.А., Чекмарев Д.Т. Численное интегрирование //Учебно-методическая разработка для студентов механико-математического факультета/ Н.Новгород. Изд-во ННГУ, 1999 г., 33 с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., кобельков Г.М. Численные методы // М.: Наука, 1987, 600 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ