UNIVERSIDAD DE CARTAGENA
Facultad de Ingeniería
Ingeniería de sistemas

Péndulo simple

[1] EDWIN ALBERTO RICO FERNÁNDEZ
[1] FELIX MANUEL MARRUGO PATERNINA
[1] JAVIER EDUARDO PÉREZ DÍAZ

[1] Estudiante, Ingeniería de Sistemas, Universidad de Cartagena, Colombia, Laboratorio de Fisica III-A1

Resumen
Se determinó la aceleración gravitacional de diversos péndulos, a partir de esto se determinó el periodo y contrastando los resultados obtenidos, haciendo uso de un sistema de péndulo simple, dicho sistema modelado como una partícula que se mueve en el vacío, provisto de una masa atada a cuerdas de distintas longitudes y siendo consideradas estas como inextensibles y libres de fricción alguna. Dichos periodos se obtuvieron al analizar la diferencia de tiempo entre los picos de oscilación, la incertidumbre presentada en la aceleración gravitacional proviene de los instrumentos de medida y de grabación utilizados.

Palabras claves: Péndulo, longitud, periodo, aceleración gravitacional.

Abstract
The gravitational acceleration of several pendulums was determined, from this the period was determined and the results obtained were contrasted, making use of a simple pendulum system, such system modeled as a particle moving in a vacuum, provided with a mass tied to ropes of different lengths and these being considered as inextensible and free of any friction. These periods were obtained by analyzing the time difference between the oscillation peaks, the uncertainty presented in the gravitational acceleration comes from the measuring and recording instruments used.

Keywords: Pendulum, length, Period, Gravitational acceleration.

1. Introducción

Partiendo de un péndulo con una masa atada a un hilo y encontrándose en el vacío, como lo muestra la figura 1. Para este sistema no consideraremos efectos como la fricción y el hilo inextensible. Si se desplaza la masa atada en el extremo del péndulo hasta alcanzar un ángulo menor a 20° respecto a la vertical y luego lo dejamos caer, el péndulo oscila de izquierda a derecha en un plano, ya que se encuentra bajo una aceleración constante (aceleración gravitacional). Estas oscilaciones serán dos posiciones angulares máximas que las denotaremos con las variables θ_0 y $-\theta_0$, además serán simétricas respecto a la vertical y pasará por la posición de equilibrio.

Para los puntos máximos la velocidad será cero, cuando la masa pase por el punto de equilibrio la velocidad alcanzará su valor más alto. Ahora bien, el desplazamiento descrito por este sistema corresponde al arco de una circunferencia cuyo radio será la longitud de la cuerda L, del hijo. Para determinar la como son las oscilaciones del sistema debemos escribir la ecuación del movimiento para la masa.

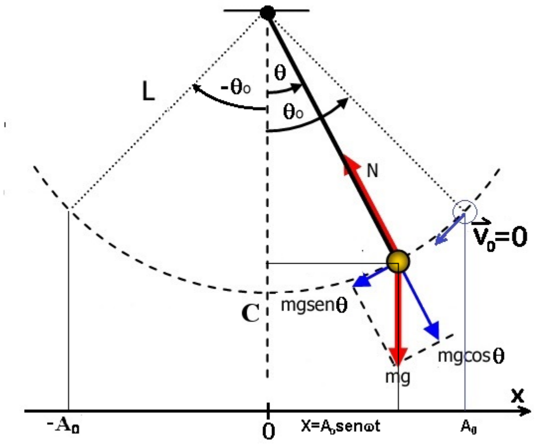


Figura 1. Péndulo simple.

La dinámica de este sistema se generaliza a la acción de dos fuerzas, el peso de la esfera (también conocida como fuerza restauradora) y la tensión de su hilo, siguiendo de esa manera una trayectoria sobre un arco de circunferencia.

Partiendo de la segunda ley de newton y teniendo en cuenta que el sistema está descrito por un movimiento circular, la ecuación diferencial de segundo orden que representa este movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\theta = 0 \qquad \textbf{ec. 1}$$

Al estar la ecuación provista de una función seno, no se cuenta con un movimiento armónico simple, sin embargo se puede recurrir a la aproximación *sen*$\theta \cong \theta$ que solo se cumple para los ángulos menores a 20°, cumpliendo con esta condición la ecuación que describe al movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \textbf{ec. 2}$$

Siguiendo con este razonamiento, la solución para esta ecuación diferencial es:

$$\theta(t) = \theta_0 sen(\omega_0 t + \varphi) \qquad \textbf{ec. 3}$$

Cuyo periodo viene descrito por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{ec. 4}$$

De esta igualdad se puede despejar el valor de la gravedad, para así tener una ecuación de la gravedad en función de la longitud y el periodo de un péndulo:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \qquad \textbf{ec. 5}$$

Como se ha dicho antes, la gravedad está en función del periodo y la longitud de un péndulo variables que a su vez cuentan con su incertidumbre, por ello se hace necesario buscar una ecuación que permita describir la propagación del error en el cálculo de la gravedad, por esta razón, se halla la derivada de la ***Ec. 5*** de la cual se extrae que:

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{1}{L}\right|\Delta L + 2\left|\frac{1}{T}\right|\Delta T \qquad \textbf{ec. 6}$$

De esta anterior ecuación se obtiene que la incertidumbre de la gravedad es:

$$\Delta g = g(\left|\frac{1}{L}\right|\Delta L + 2\left|\frac{1}{T}\right|\Delta T) \qquad \textbf{ec. 7}$$

Una vez reconocido el modelo matemático que describe un M.A.S, miremos el movimiento de nuestro péndulo en el plano xy, tomando los siguientes parámetros rectangulares: ver figura 2.

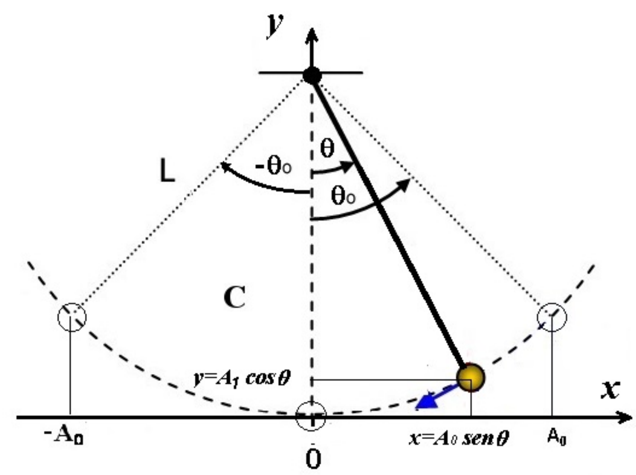


Figura 1.1

Con $\theta=\omega_0 t$

$$X(t) = A_0 sen(\omega_0 t + \varphi) \qquad \text{Ec. 8.}$$

$$Y(t) = A_1 cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Con $A_0=Lcos(\theta_0)$ y $A_1= Lsen(\theta_0)$

Por lo mencionado las componentes rectangulares sugieren dos M.A.S

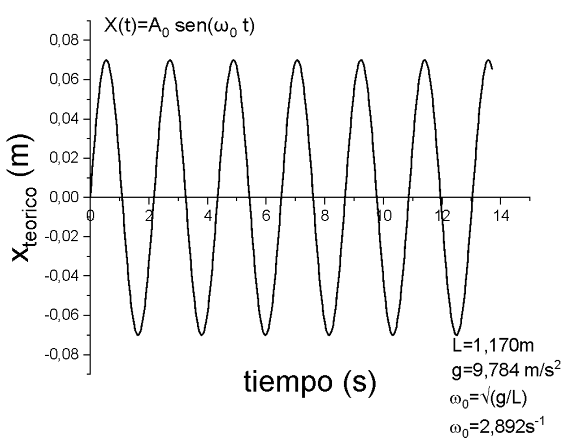


Figura 2. Gráfica esperada de posición contra tiempo para el modelo teórico.

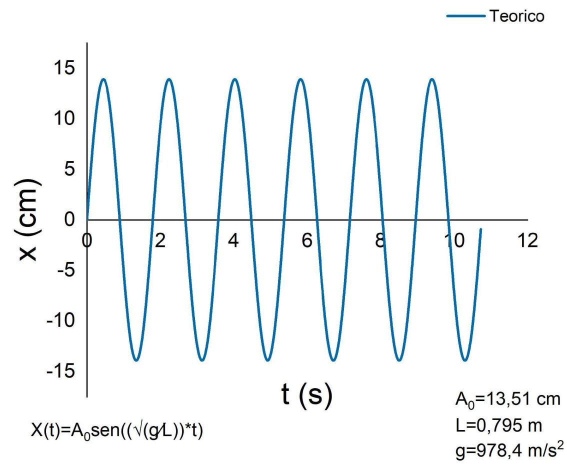
2. Simulación

En esta parte se mostrarán las curvas, realizadas en el programa de edición gráfica OriginPro, esto teniendo en cuenta las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema. El propósito de estas gráficas es conocer la evolución de las variables que se desean medir en el sistema. Haciendo además, un contraste entre lo experimental y lo esperado de forma teórica.

Con el ánimo de esta simulación, se puede determinar de la aceleración gravitacional para un péndulo simple, despejando g, de la ec.4 tenemos que:

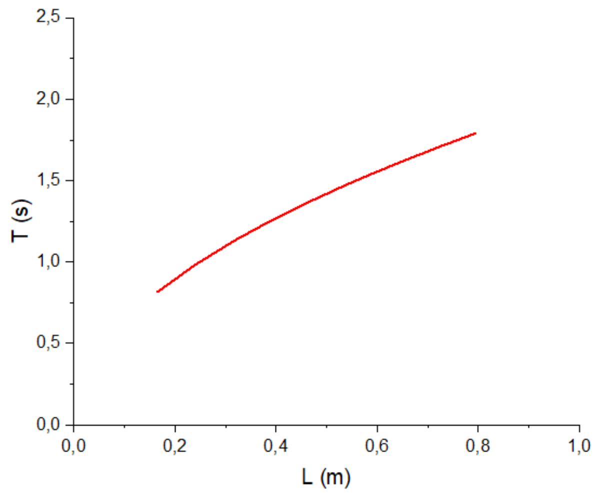
$$g = \left(4\pi^2 \frac{L}{T^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ec5.}$$

Con L = 0.795 m, T=1,791s.



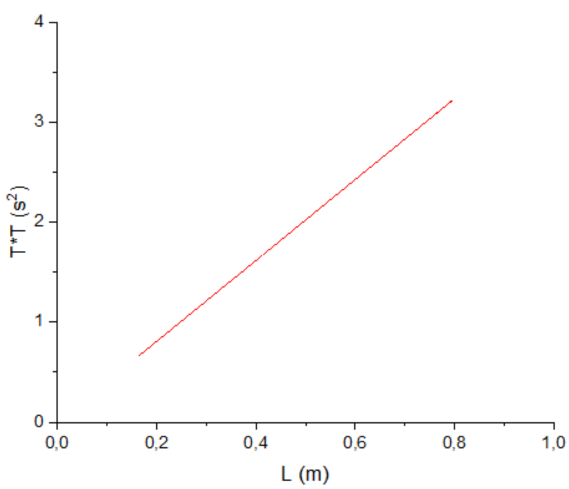
Gráfica 1. Posición en función del tiempo para el movimiento oscilatorio del péndulo simple.

La gráfica 1, muestra una función sinusoidal (ec.3) que se espera de la posición contra el tiempo de un péndulo simple, con una amplitud $A_0 = 13.51\ cm$, una longitud $L = 0.795m$,para el parámetro $g$se utilizó el valor de 978.4 m.



Gráfica 2. Periodo respecto a la longitud

La gráfica 3 muestra una curva que se espera del periodo respecto a longitud de los diferentes péndulos analizados, está proviniendo de la Ec 4



Gráfica 3. Periodo al cuadrado en función a la longitud

La gráfica 3 representa el valor esperado de la gravedad a partir de la pendiente de T^2 contra L

3. Procedimiento

Este estudio de un modelo pendular se llevó a cabo a partir de videos realizados con un dispositivo celular a péndulos de distintas longitudes, haciendo uso de la herramienta *Tracker* se logró la obtención de los datos de la posición horizontal del péndulo en función del tiempo.

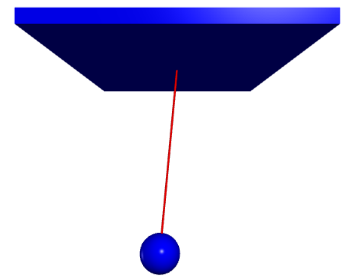


Figura 3. *Diagrama de un sistema péndulo simple*

Posteriormente con el programa *OriginPro* se procesaron y analizaron los datos, a partir de los cuales se creó una gráfica donde se representase dicha relación y que al mismo tiempo sirviera para hallar el valor del periodo de un péndulo, proceso que se reiteró para cada uno de los péndulos.

Una vez contando con el periodo de cada uno de los péndulos se inició con el análisis de los datos en el programa *OriginPro,* luego se procedió a la creación de una gráfica del periodo (T) en función de la longitud (L), seguido de esto para confirmar los resultados graficados, se creó una nueva columna que sirviera como el periodo teórico de cada uno de los péndulos, para ello se hizo uso de la ***Ec.4*** donde L representa la longitud de un péndulo y g la gravedad, llegados a este punto se procedió a graficar el periodo teórico en función de la longitud.

Seguidamente, se procedió a la linealización de la gráfica con el objetivo de calcular el valor de la gravedad haciendo uso de la regresión lineal, por esta razón se agregó una nueva columna cuyos valores fueron los cuadrados de los periodos de cada uno péndulos para posteriormente graficar su periodo al cuadrado en función de su longitud, siguiendo el razonamiento planteado anteriormente, se hizo uso de la función generadora de una regresión lineal provista por *OriginPro* el cual al mismo tiempo genera un análisis estadístico, que permite concluir el valor de la gravedad sin embargo se hace necesario el manejo del error (Δg).

Consecutivamente al cálculo de la gravedad, se utilizó la ***Ec.7*** (donde L representa la longitud, T el periodo de cada uno de los péndulos mientras que ΔL *y* ΔT son los valores de la incertidumbre de la longitud y el periodo respectivamente) de esta ecuación se obtuvieron los valores de error de la gravedad y se agregaron a una nueva columna llamada Δg de la que posteriormente se utilizó la función de estadística que tiene *OriginPro* para así saber con certeza cuál es la media aritmética de los valores y poder concluir el valor de incertidumbre de la gravedad.

4. Resultados y Discusión

Los valores de la longitud y el periodo de cada péndulo se encuentran en la tabla 1.

Tabla 1. Periodos de oscilación al cuadrado e incertidumbre de la gravedad presente en cada uno de los péndulos de distinta longitud y periodo.

L(m)	T(s)	$T^2(s^2)$	$\Delta g(m/s^2)$
0,165	0,825	0,681	0,154
0,238	0,979	0,958	0,121
0,317	1,129	1,275	0,100
0,38	1,221	1,491	0,090
0,475	1,387	1,924	0,077
0,535	1,475	2,176	0,071
0,585	1,546	2,390	0,067
0,638	1,604	2,573	0,064
0,725	1,717	2,948	0,059
0,795	1,791	3,208	0,056

La incertidumbre en la medida directa de longitud corresponde a la escala mínima de un metro convencional que es de *0,001m* mientras que la incertidumbre presente en el periodo de cada péndulo viene dada por el número de fotogramas por segundo (fps) del instrumento de video, en este caso se usan 240fps, por lo tanto se tiene un $\Delta T=1/240s$ lo que se traduce en un error de *0,004s*.

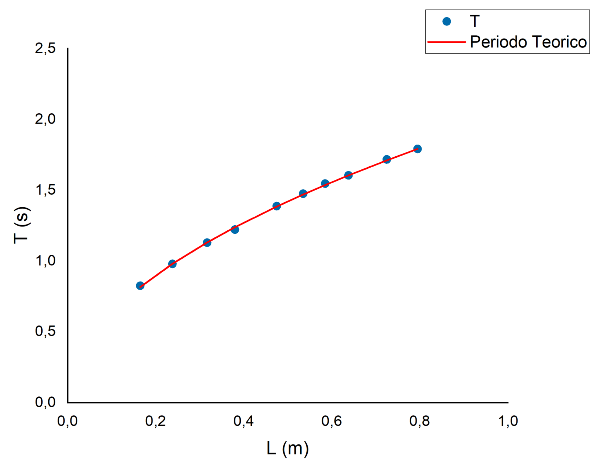


Figura 4. *Gráfica del periodo en función de la longitud, experimental(color azul) y teórica(color rojo)*

En la figura 4. se muestra la relación de dependencia que hay entre el periodo y la longitud de un péndulo representada por medio de puntos azules, al mismo tiempo se hace uso de la ***Ec. 5*** la cual describe la relación teórica que hay entre estas dos magnitudes (periodo y longitud), dicha relación se ve descrita en la gráfica como una linea de color rojo.

Hechas las gráficas se procede a su comparación, de la que se extrae que ambas gráficas presentan una tendencia similar, a pesar de ello y para realmente comprobar que los datos obtenidos satisfacen la relación teórica entre periodo y longitud, se procede a la superposición entre ambas gráficas, que da como resultado la figura 4.

y de la cual se extrae que la gráfica experimental corresponde con lo teóricamente esperado.

Linealización del periodo T.

Una vez realizada la figura 4, procederemos a linealizar dicha gráfica, esto para hacer de la curva una recta que ayude a encontrar con una mayor facilidad el valor de la aceleración gravitacional. Esto lo haremos al multiplicar el periodo por sí mismo, es decir, T^2. Los valores para el cuadrado del periodo se encuentran en la tercera columna de la **Tabla 1**. He aquí el resultado.

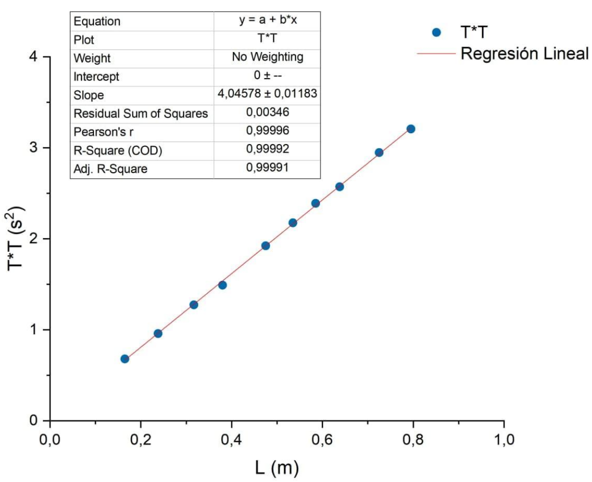


Figura 5. *Linealización y regresión lineal del periodo.*

En la figura 5, se puede observar una línea recta que corresponde a la linealización del periodo contra la longitud, cuya pendiente es: 4,045 m. Esta regresión lineal sugiere que el T^2 tiende a una linea recta que pasa por el origen dentro de los limites del error.

Ahora bien, ya conociendo los valores de T^2 para el conjunto de datos de la tabla 1, utilizando la ec 5, podemos determinar el valor aproximado para la aceleración gravitacional correspondiente a cada par de datos (L, T^2), para posteriormente obtener la media de los datos y determinar este valor aproximado.

Con el apoyo de la herramienta OriginPro se realizó el cálculo para cada par de datos, de los cuales la media es: $g = 9,766\ m/s^2$.

***Cálculo de* Δg.**

Partiendo de la ec 5, donde g depende de la longitud y el periodo del péndulo se hizo obtención del valor g relativo a cada uno de los péndulos estudiados haciendo uso de dicha fórmula, estas dos variables tienen una medida de incertidumbre vinculada por ende esta incertidumbre debe tenerse en cuenta en la ecuación, para esto se deriva la ec. 5, dando como resultado la ec. 6 y posteriormente se despeja para tener la incertidumbre de la gravedad ec.7, los valores absolutos presentes en la ec.7 son necesarios dado que en muchas ocasiones se obtienen resultados negativos en estas derivadas, pero las medidas de error siempre contribuyen de manera positiva..

.

Se obtuvo como resultado de **Δg** el valor de 0,07 esto a partir de la media en las medidas obtenidas para **Δg** en cada péndulo ,en esta medida solo se tuvo en cuenta su primera cifra significativa.

Como resultado de la gravedad teniendo en cuenta el error relacionado con esta medición se obtuvo:

$$g = (9,766 \pm 0,07)\ m/s^2$$

5. Conclusiones

Siguiendo con el modelo teórico que se expresa en la ***Ec. 5*** se puede exteriorizar que la relación entre periodo y longitud de un péndulo es una curva, concretamente una raíz cuadrada. Al contar este experimento con datos referentes al péndulo, se llevó a cabo un cotejo entre las representaciones gráficas de los datos experimentales y el modelo teórico (ver figura 4.) en donde se apreció la congruencia entre la tendencia de ambas gráficas,

De manera sencilla se puede afirmar que la relación entre los datos experimentales T y L se puede describir a través de una función raíz cuadrada, de lo cual se extrae que lo obtenido experimentalmente es consistente con la teoría.

Ahora bien, al momento de linealizar la figura 4, podemos concluir que, la figura 5 que muestra dicha linealización corresponde a una línea recta que dichos puntos se mueven dentro de los valores del error, además, dichos valores proporcionan el parámetro T^2 que alimenta la ec 5, para obtener el valor aproximado de la aceleración gravitacional.

Teniendo en cuenta el valor de la gravedad obtenido (g= (9,766 ± 0,07) m/s^2) y comparando con el valor de referencia obtenido por la Universidad Nacional de Colombia.-Facultad de Matemáticas e Ingeniería.-Observatorio de Geofísica. Bogotá, 24 de febrero de 1945 (g=9,784 m/s^2) se llega a afirmación de que los valores obtenidos coinciden con valores considerados como normales y no hubo ninguna anomalía relacionada con la gravedad.

Referencias.

ÁLVARO GARCÍA MURIEL, Péndulo simple guía del estudiante, abril 26 de 2021 https://drive.google.com/file/d/1ttGlNvn3kxpcXVOgL6JQ7Hh6Kd9HNrWQ/view

Diagrama Sistema péndulo: *https://www.glowscript.org/#/user/Baltor/folder/MyPrograms/program/Pendulosimple*