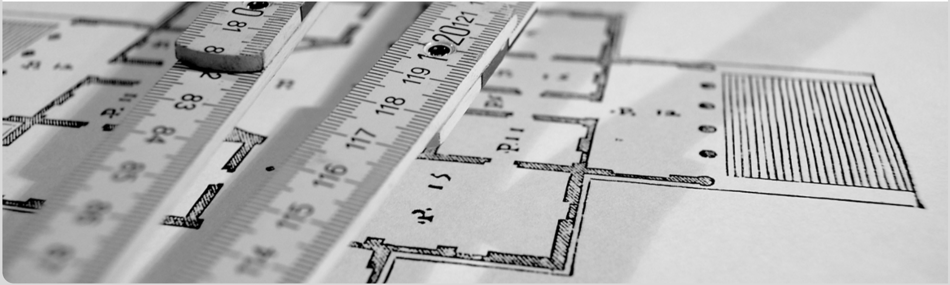
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 14 | 05.02.2013

Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

- Jedes Problem kann von einer Turingmaschine entschieden werden.
- Es gilt $\mathbf{P} \subset \mathbf{PSPACE}$
- Es gibt einen endlichen Akzeptor, der weniger Zustände hat als die entsprechende Anzahl von Nerode-Äquivalenzklassen.

Wiederholung

Definition

Sei $R \subset A \times A$ eine (binäre) Relation auf der Menge A. Wir nennen R

- **reflexiv** falls gilt
$$\forall x \in A : (x, x) \in R$$
- **transitiv** falls gilt
$$\forall x, y, z \in A : (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$$
- **symmetrisch** falls gilt
$$\forall x, y \in A : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$$

Äquivalenz...

Definition

Eine Relation R nennt man **Äquivalenzrelation** wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- symmetrisch
- reflexiv
- transitiv

Definition

Sind zwei Elemente $(x, y) \in R$, so schreibt man auch xRy. Alle Elemente, die miteinander in Relation stehen, befinden sich in der selben **Äquivalenzklasse**:

$$[x]_R = \{y \mid yRx\}$$

Faktormenge

Definition

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Menge M zur Relation R bzeichnet man als **Faktormenge** und schreibt $M_{/R}$.

Zeichnung an der Tafel!

Beweisen Sie...

- Aus xRy folgt $[x]_R = [y]_R$
- Existiert ein $z \in [x]_R$ und $z \in [y]_R$, so ist $[x]_R = [y]_R$
- Zu $R = \textbf{mod}\ 6$ gibt es 6 Äquivalenzklassen.

Nerode-Äquivalenzrelation

Definition

Sei $L \subseteq A^*$ eine formale Sprache. Definiere für zwei Wörter $w_1, w_2 \in A^*$:

$$w_1 \equiv_L w_2 \iff (\forall w \in A^* : w_1 w \in L \iff w_2 w \in L)$$

Die Relation $\equiv_L$ nennt man **Äquivalenzrelation von Nerode**

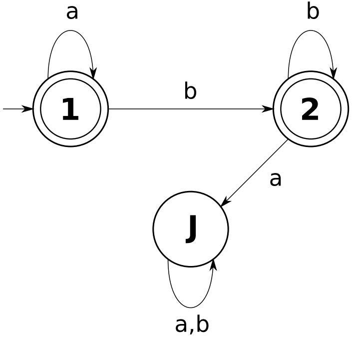
Äh, hä?

Ein Beispiel

Sei $L \subset A^*$ die Sprache der Wörter, die das Teilwort ba nicht enthalten.

$$L = \langle \mathrm{a} * \mathrm{b} * \rangle$$

Wie sieht ein endlicher Automat dazu aus?



Was sind die Nerode Äquivalenzklassen? Wie komme ich in Zustand 1, 2, J?

$$\mathrm{a}^*, \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*, \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$$

Wähle Vertreter!

$$[\varepsilon], [\mathrm{b}], [\mathrm{ba}]$$

Noch ein Beispiel

Sei $L \subset A^*$ die Sprache

$$L = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}\mathrm{a}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Wie sieht ein endlicher Automat dazu aus?

Argh! Es gibt keinen!

Was sind die Nerode Äquivalenzklassen? Was passiert bei

- $\mathrm{a}^i, i \in \mathbb{N}$
- $\mathrm{a}^i\mathrm{b}, i \in \mathbb{N}$
- dem Rest

$$\{[\mathrm{a}^i] \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{[\mathrm{a}^i\mathrm{b}] \mid i \in \mathbb{N}\} \cup [\mathrm{ba}]$$

Definition

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt

$$xRy \wedge yRx \implies x = y$$

Definition

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt *Halbordnung*, wenn sie

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv

ist.

Beispiel: Sei $\sqsubseteq_p$ derart, dass für $v, w \in A^*$ gilt:

$$v \sqsubseteq_p w \iff \exists u \in A^* : vu = w$$

Was sagt diese Halbordnung aus? $v \sqsubseteq_p w$ heißt , dass v ein Präfix von w ist.

Beweis

- *Reflexivität*

  $$v \sqsubseteq_p v \iff \exists u \in A^* : vu = v \implies u = \varepsilon$$

  Dies ist möglich, da $\varepsilon \in A^*$

- *Antisymmetrie*

  $$\begin{aligned} v \sqsubseteq_p w \wedge w \sqsubseteq_p v &\iff \exists u \in A^* : vu = w \wedge \exists \kappa \in A^* : w\kappa = v \\ &\implies w\kappa u = w \\ &\implies \kappa = u = \varepsilon \\ &\implies v = w \end{aligned}$$

- *Transitivität*

  $$\begin{aligned} v \sqsubseteq_p w \wedge w \sqsubseteq_p x &\iff \exists u \in A^* : vu = w \wedge \exists \kappa \in A^* : w\kappa = x \\ &\implies vu\kappa = x \\ &\overset{\alpha = u\kappa}{\implies} \exists \ \in A^* \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\leqslant$ und $\subseteq$ Halbordnungen sind.

Betrachte die Relation $\leqslant$. Dann gilt mit

$$a \leqslant b \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b$$

- *Reflexivität*

$$\begin{aligned} a \leqslant a &\iff \exists \alpha \geqslant 0 : a + \alpha = a \\ &\implies \alpha = 0 \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned} a \leqslant b \wedge b \leqslant a &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b \wedge b + \beta = a \\ &\implies a + \alpha + \beta = a \\ &\overset{\alpha, \beta \geqslant 0}{\implies} \alpha = \beta = 0 \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- *Transitivität*

$$\begin{aligned} a \leqslant b \wedge b \leqslant c &\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ : a + \alpha = b \wedge b + \beta = c \\ &\implies a + \alpha + \beta = c \end{aligned}$$

Betrachte die Relation $\subseteq$. Dann gilt

- *Reflexivität*

$$A \subseteq A \iff (A \subset A) \vee (A = A)\ A \subseteq A \qquad \iff (A \subset A) \vee (A = A)$$

Dies ist eine wahre Aussage.

- *Antisymmetrie*

$$\begin{aligned} A \subseteq B \wedge B \subseteq A &\Leftrightarrow (A \subset B \vee A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A) \\ &\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\ &\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A \vee B = A)) \\ &\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A \subset B) \wedge (B = A)) \\ &\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A = B) \wedge (B = A)) \Leftrightarrow \quad ((A \subset B \\ &\quad \vee ((A = B) \wedge (B \subset A)) \vee ((A = B) \wedge (B = A)) \end{aligned}$$

Also folgt

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$

Dies benutzen wir um Mengengleichheit zu zeigen.

- *Transitivität*

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \iff \forall a \in A : a \in B \wedge \forall b \in B : b \in C$$

Definition

Als *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X ist definiert.

$$\mathcal{P}(X) = \{U | U \subseteq X\}$$

Weitere Notation : $\mathcal{P}(X) = 2^X$

Für die Mächtigkeit finden wir

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Betrachten wir nun die Halbordnung $\subseteq$ auf der Menge $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

Halbordnung.pdf

Wird doch recht bald unübersichtlich!

Lassen wir nun einfach die Kanten weg, die sich durch Transitivität und Reflexivität ergeben

Hasse1.pdf

Dies nennen wir das *Hasse-Diagramm*.

Definition

Eine Diagramm einer Halbordnung $\sqsubseteq$ auf einer Menge M heißt *Hasse-Diagramm*, wenn es im Diagramm eine Kante gibt von a nach b, $a, b \in M$, sofern gilt

$$\nexists c \in M : a \sqsubseteq c \sqsubseteq b$$

Definition

Es sei $(M, \sqsubseteq)$ eine halbgeordnete Menge und $T \subseteq M$. Ein Element $x \in T$ heißt

- *minimales Element* von T, wenn es kein $y \in T$, $y \neq x$ gibt, mit $y \sqsubseteq x$.
- *maximales Element* von T, wenn es kein $y \in T$, $y \neq x$ gibt, mit $x \sqsubseteq y$.
- *größtes Element* von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $y \sqsubseteq x$
- *kleinstes Element* von T, wenn für alle $y \in T$ gilt $x \sqsubseteq y$

WS 10/11

Geben Sie das Hasse-Diagramm einer Halbordnung auf einer dreielementigen Menge an, die genau zwei maximale und zwei minimale Elemente besitzt.

Loesung.pdf

Was ihr nun wissen solltet

- Was ein Hasse-Diagramm ist
- Das man manchmal Triviales wirklich beweisen muss
- Das es nun zu Ende ist.

xkcd/turing$_t est.pngpt$