

# Grundbegriffe der Informatik

## Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:

--	--	--	--	--	--	--

Nachname:

--

Vorname:

--

Tutorium: Nr.

--

Name des Tutors:

--

Ausgabe: 13. Januar 2015

Abgabe: 22. Januar 2015, 12:30 Uhr  
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss  
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

---

*Vom Tutor auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 10:

	/ 16
--	------

(Physik: 16)

Blätter 1 – 10:

	/ 175
--	-------

(Physik: 152)

---

**Aufgabe 10.1 (4 Punkte)**

Es sei  $T = (V, E)$  ein gerichteter Baum und es sei  $r$  die Wurzel von  $T$ . Beweisen Sie, dass es keine Zyklen in  $T$  gibt.

**Aufgabe 10.2 (4 Punkte)**

Es sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und es sei  $G' = (V, E^*)$ , wobei  $E^*$  die reflexiv-transitive Hülle von  $E$  ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$ , jeden Knoten  $v \in V$  und jeden Knoten  $w \in V$  genau dann  $(v, w) \in E^n$  gilt, wenn es in  $G$  einen Pfad der Länge  $n$  von  $v$  nach  $w$  gibt.

**Aufgabe 10.3 (4 Punkte)**

Es sei  $G = (V, E)$  ein kantenmarkierter, zusammenhängender und ungerichteter Graph mit Markierungsabbildung  $m_E: E \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Ein Teilgraph  $G' = (V', E')$  von  $G$  heißt genau dann *Spannbaum* von  $G$ , wenn  $G'$  ein ungerichteter Baum ist und  $V' = V$  gilt. Ein Spannbaum  $G' = (V', E')$  von  $G$  heißt genau dann *minimal*, wenn für jeden anderen Spannbaum  $G'' = (V'', E'')$  von  $G$  gilt:

$$\sum_{e'' \in E''} m_E(e'') \geq \sum_{e' \in E'} m_E(e').$$

Der folgende „Algorithmus“ berechnet einen minimalen Spannbaum  $G' = (V', E')$  von  $G$ :

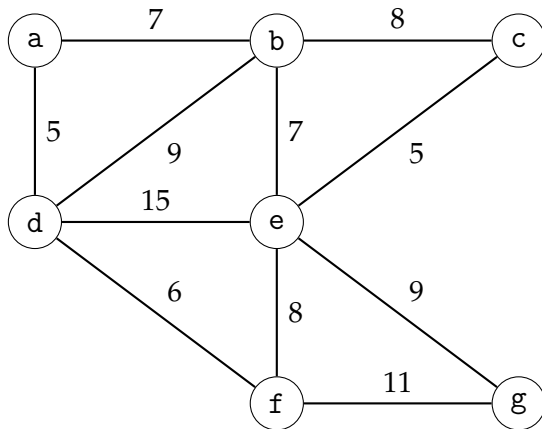
```

wähle  $x_0 \in V$ 
 $V' \leftarrow \{x_0\}$ 
 $E' \leftarrow \{\}$ 
 $i \leftarrow 1$ 
while  $V \setminus V' \neq \{\}$  do
    wähle  $x_i \in V'$  und  $y_i \in V \setminus V'$  derart, dass  $\{x_i, y_i\} \in E$  und
         $\forall x \in V' \forall y \in V \setminus V': (\{x, y\} \in E \rightarrow m_E(\{x, y\}) \geq m_E(\{x_i, y_i\}))$ 
     $V' \leftarrow V' \cup \{y_i\}$ 
     $E' \leftarrow E' \cup \{\{x_i, y_i\}\}$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
od

```

*Hinweis:* An den beiden Stellen, an denen „wähle“ steht, ist es für die Korrektheit des Verfahrens nicht wichtig, welche Wahl man trifft, sofern sie den angegebenen Bedingungen entspricht.

Geben Sie die Werte der Variablen  $x_k$  und  $y_k$ , für  $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ , nach der Berechnung des minimalen Spannbaums des Graphen



mit dem obigen Algorithmus an, wobei im allerersten Schritt als  $x_0$  der Knoten a gewählt werde.

#### Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Es sei  $G = (\mathbb{Z}_n, E)$  ein gerichteter Graph und es sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$ . Wir nummerieren die Zeilen und Spalten von  $A$  mit 0 beginnend durch und bezeichnen für jedes  $i \in \mathbb{Z}_n$  und jedes  $j \in \mathbb{Z}_n$  mit  $A_{i,j}$  den Eintrag von  $A$  in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Die Matrix  $A$  heißt genau dann

- *hohl*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n: A_{i,i} = 0;$$

- *symmetrisch*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \forall j \in \mathbb{Z}_n: A_{i,j} = A_{j,i};$$

- *strikte obere Dreiecksmatrix*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \forall j \in \mathbb{Z}_{i+1}: A_{i,j} = 0;$$

- *hohle  $(2 \times 2)$ -Blockmatrix*, wenn

$$\exists k \in \mathbb{Z}_n: (\forall (i,j) \in \mathbb{Z}_k^2: A_{i,j} = 0) \wedge (\forall (i,j) \in (\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_k)^2: A_{i,j} = 0).$$

Der Graph  $G$  heißt genau dann

- *bipartit*, wenn es zwei Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $V$  gibt so, dass  $A \cap B = \{\}$  und  $E \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$ ;
- *zyklenfrei* oder *DAG*, wenn es keine Zyklen in  $G$  gibt;
- *schlingenfrei*, wenn es keine Schlingen in  $G$  gibt;
- *richtungslos*, wenn für jedes  $(v,w) \in E$  gilt  $(w,v) \in E$ .

Beantworten Sie mit jeweils einem Wort die folgenden Fragen:

- Falls  $A$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat  $G$ ?
- Falls  $A$  eine hohle  $(2 \times 2)$ -Blockmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat  $G$ ?
- Falls  $G$  schlingenfrei ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat  $A$ ?
- Falls  $G$  richtungslos ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat  $A$ ?