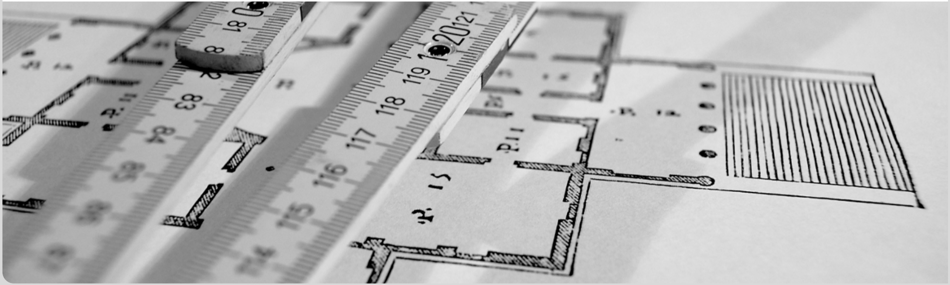
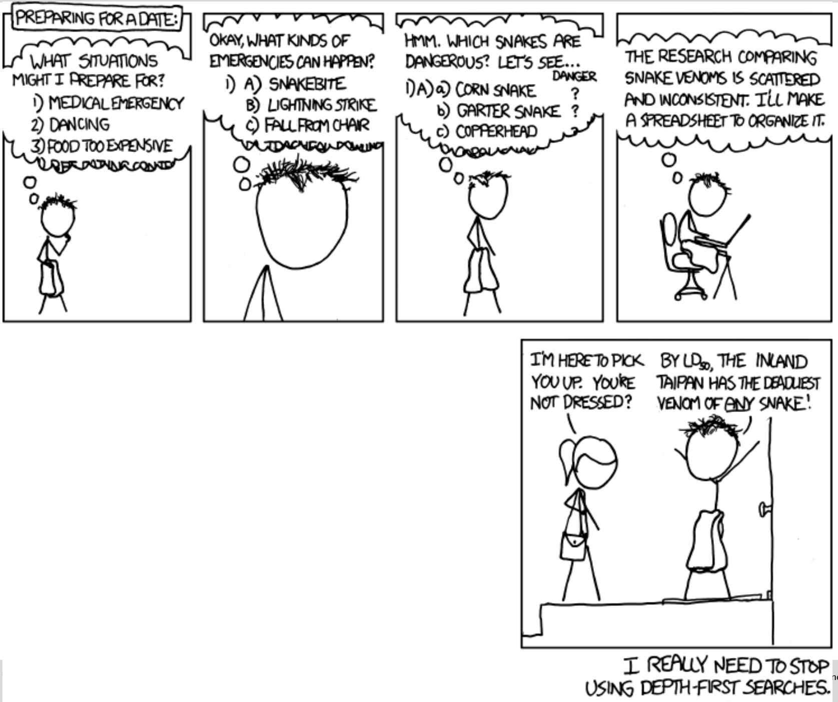
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 10 | 13.01.2017
Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt


PREPARING FOR A DATE:
WHAT SITUATIONS MIGHT I PREPARE FOR?
1) MEDICAL EMERGENCY
2) DANCING
3) FOOD TOO EXPENSIVE
OKAY, WHAT KINDS OF EMERGENCIES CAN HAPPEN?
1) A) SNAKEBITE
B) LIGHTNING STRIKE
C) FALL FROM CHAIR
HMM. WHICH SNAKES ARE DANGEROUS? LET'S SEE...
DANGER
1) A) a) CORN SNAKE ?
b) GARTER SNAKE ?
c) COPPERHEAD
THE RESEARCH COMPARING SNAKE VENOMS IS SCATTERED AND INCONSISTENT. I'LL MAKE A SPREADSHEET TO ORGANIZE IT.
I'M HERE TO PICK YOU UP. YOU'RE NOT DRESSED?
BY LD_{50}, THE INLAND TAIPAN HAS THE DEADLIEST VENOM OF ANY SNAKE!
I REALLY NEED TO STOP USING DEPTH-FIRST SEARCHES.

In the previous episode of GBI...

Rückblick: Algorithmen

- Siehe letztes Tutorium

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen
  Nein, nein, nein! Testen kann nur vorhandene Fehler aufzeigen, aber niemals die Fehlerfreiheit garantieren.

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen
  Nein, nein, nein! Testen kann nur vorhandene Fehler aufzeigen, aber niemals die Fehlerfreiheit garantieren.
- Sinnvolle Schleifeninvarianten kann man „nach Kochrezept“ aufstellen.

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen
  Nein, nein, nein! Testen kann nur vorhandene Fehler aufzeigen, aber niemals die Fehlerfreiheit garantieren.
- Sinnvolle Schleifeninvarianten kann man „nach Kochrezept“ aufstellen.
  Nein, das Aufstellen sinnvoller Schleifeninvarianten erfordert viel Übung und kann insbesondere noch nicht von einem Rechner durchgeführt werden.

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen
  Nein, nein, nein! Testen kann nur vorhandene Fehler aufzeigen, aber niemals die Fehlerfreiheit garantieren.
- Sinnvolle Schleifeninvarianten kann man „nach Kochrezept“ aufstellen.
  Nein, das Aufstellen sinnvoller Schleifeninvarianten erfordert viel Übung und kann insbesondere noch nicht von einem Rechner durchgeführt werden.
- Ein Algorithmus ist ein (compilierbares/ausführbares) Programm

Wahr oder Falsch?

- Die Korrektheit eines Algorithmus kann man durch Testen beweisen
  Nein, nein, nein! Testen kann nur vorhandene Fehler aufzeigen, aber niemals die Fehlerfreiheit garantieren.
- Sinnvolle Schleifeninvarianten kann man „nach Kochrezept“ aufstellen.
  Nein, das Aufstellen sinnvoller Schleifeninvarianten erfordert viel Übung und kann insbesondere noch nicht von einem Rechner durchgeführt werden.
- Ein Algorithmus ist ein (compilierbares/ausführbares) Programm
  Nein, der Algorithmus selbst ist nur die Beschreibung der (Rechen-)Vorschriften, nicht die tatsächliche Umsetzung.

Graphen

Aufgaben

Repräsentation von Graphen

Graphen - Wofür?

- Straßennetze und andere Verkehrsnetze (Kürzeste Wege)
- Kabelnetze (Minimale Spannbäume)
- Rohrnetze (Maximaler Fluss)

Zitat

„Egal für wie wichtig du Graphen in der Informatik hältst, sie sind mindestens doppelt so wichtig!“

Ein Google-Manager über Einstellungsgespräche bei Google

Graphen

Definition

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer *endlichen*, nicht leeren Menge an **Knoten** V und einer Menge an **Kanten** $E \subseteq V \times V$.

E enthält also Paare (geordnet) von Elementen aus V.

Definition

Ein **ungerichteter Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer *endlichen*, nicht leeren Menge an **Knoten** V und einer Menge an **Kanten** $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in V \wedge y \in V\}$.

E enthält also Mengen (ungeordnet) mit je ein oder zwei Elementen aus V!

Graphen

Hinweis

Häufig wählt man $V = \mathbb{Z}_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$
Da V immer endlich ist, muss auch E endlich sein.
$E = \emptyset$ ist aber erlaubt!

Definition

Zwei Knoten x und y in einem Graphen G heißen **adjazent**, wenn sie durch eine Kante verbunden sind.

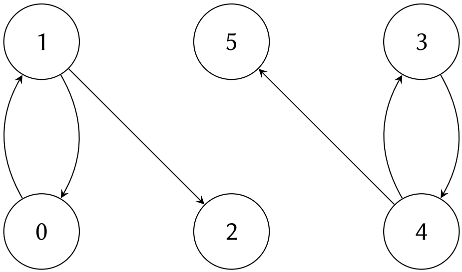
Achtung: Im gerichteten Fall ist diese Aussage nicht symmetrisch!

Definition

Eine Kante mit identischem Start- und Endpunkt nennt man **Schlinge**.
Also $(x, x) \in E$ bzw. $\{x\} \in E$

Beispiel

Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E = \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5)\}$



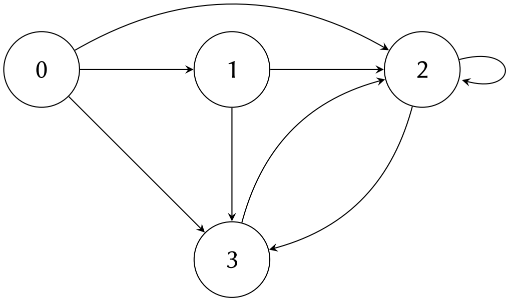
Aufgabe: Graphen Zeichnen

Zeichnet die Graphen $G_i = (V, E_i)$ mit $V = \mathbb{Z}_4$ und
$E_1 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$
$E_2 = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}\}$
$E_3 = \emptyset$
$E_4 = V \times V$
$E_5 = \{(0, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

Lösung: Graphen Zeichnen

Zeichnet den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \mathbb{Z}_4 \qquad E = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2)\}$$



Teilgraphen

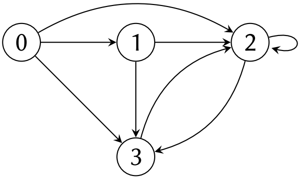
Definition

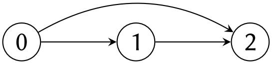
Ein **Teilgraph** $T = (V', E')$ von G ist ein Graph bei dem Knoten- und Kantenmenge Teilmengen des Graphens G sind und deren Kanten nicht aus dem Teilgraph hinausführen. Also (für gerichtete Graphen):

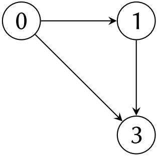
$$V' \subseteq V \qquad E' \subseteq E \cap (V' \times V')$$

Hinweis: Natürlich dürfen wir auch Kanten aus E' „weglassen"!

Teilgraphen: Beispiel







Knotengrade

Im gerichteten Graphen:

Definition

Der **Eingangsgrad** eines Knoten k ist die Anzahl der Knoten x, die mit einer Kante zum Knoten k verbunden sind. Also

$$d^-(k) = |\{x \mid (x,k) \in E\}|$$

Der **Ausgangsgrad** d^+ wird analog definiert.
Der Grad eines Knotens ist $d = d^+ + d^-$

Im ungerichteten Graphen (bei uns!):
Knotengrad d ist Anzahl der adjazenten Knoten (ohne den Knoten selbst). Für Schlingen zählen wir 2 hinzu.
Also tatsächlich „Anzahl der Berührungen von Linien mit dem Kreis“.

Pfade und Wege

Definition

Sei G ein *gerichteter / ungerichteter* Graph.
Ein **Pfad / Weg** ist eine Folge von Knoten, die jeweils über Kanten im Graphen erreichbar sind. Also eine nichtleere Liste

$$p = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \qquad (v_i, v_{i+1}) \in E$$

Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der Kanten ($|p| - 1$)

Beispiel

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \mathbb{Z}_9, \quad E = V \times V$
$p_1 = (7)$ ist ein Pfad der Länge 0.
$p_2 = (0, 1, 2, 3, 0)$ ist ein Pfad der Länge 4.

Pfade

Sei G ein gerichteter Graph. Ein Pfad $p = (v_0, \ldots, v_n)$ heißt

geschlossen wenn $v_0 = v_n$ gilt

Zyklus wenn er geschlossen ist und Länge $\geqslant 1$ gilt

wiederholungsfrei Wenn alle Knoten (mit Ausnahme des ersten und letzten) paarweise verschieden sind

einfacher Zyklus wenn er ein wiederholungsfreier Zyklus ist

Azyklischer Graph: Graph ohne Zyklen
Oftmals auch DAG (Directed Acyclic Graph)

Wege

Sei G ein ungerichteter Graph. Ein Weg $p = (v_0, \dots, v_n)$ heißt

geschlossen wenn $v_0 = v_n$ gilt

Kreis wenn er geschlossen ist und Länge $\geqslant 1$ gilt

wiederholungsfrei Wenn alle Knoten (mit Ausnahme des ersten und letzten) paarweise verschieden sind

einfacher Kreis wenn er ein wiederholungsfreier Kreis *mit mindestens 3 verschiedenen Knoten* ist

Teilpfade

Definition

Ein Teilpfad eines Pfades entsteht durch Streichen von Knoten am Anfang und Ende des Pfades.

Beachte

Mindestens ein Knoten muss übrig bleiben! (Sonst kein gültiger Pfad mehr)
Es darf nicht aus der Mitte gestrichen werden! (Sonst evtl. kein Pfad mehr, wenn die entsprechenden Kanten nicht im Graphen vorhanden sind)

Beispiel

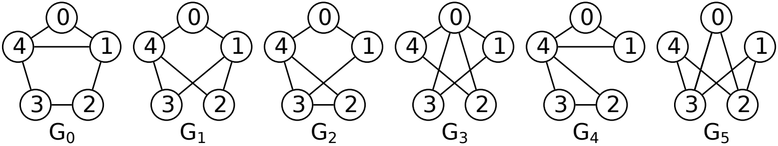
Sei $p = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$ und G passend gewählt.
$(2, 3)$, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(4, 5, 1)$ sind Teilpfade
$()$, $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 3, 4, 5, 1, 2)$ sind keine Teilpfade.

Isomorphie

Zwei Graphen heißen **isomorph**, wenn sie „bis auf eine Umbenennung der Knoten identisch sind“, also die gleiche Struktur besitzen.

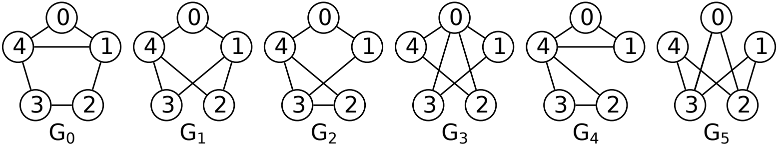
Aufgabe (WS 2010)

Jeweils zwei der sechs Graphen sind isomorph zueinander. Geben Sie die Paare von isomorphen Graphen sowie den zugehörigen Isomorphismus in Tabellenform an.



Tipp: Nach „markanten“ Knoten (Knoten mit hohem Grad) suchen.
Oftmals hierdurch bereits Ausschluss möglich.

Lösung



G_0 :	0	1	2	3	4
G_2 :	2	3	1	0	4
G_3 :	0	1	2	3	4
G_4 :	4	0	2	1	3
G_1 :	0	1	2	3	4
G_5 :	0	2	1	4	3

Graphen

Aufgaben

Repräsentation von Graphen

Maximale Kanten

Sei G ein **gerichteter** Graph mit n Knoten. Wie viele Kanten kann G maximal haben...

Wenn Schlingen erlaubt sind?
n^2

Wenn er schlingenfrei ist?
$n^2 - n = n * (n - 1)$

Maximale Kanten

Sei G ein **ungerichteter** Graph mit n Knoten. Wie viele Kanten kann G maximal haben...

Wenn Schlingen erlaubt sind?
$n(n+1)/2$

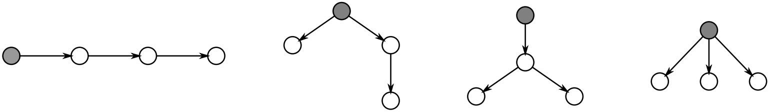
Wenn er schlingenfrei ist?
$n(n-1)/2$

Aufgabe (WS 2008)

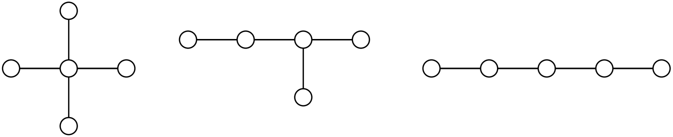
- Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.
- Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.

Lösung

Zeichnen Sie alle möglichen gerichteten Bäume mit genau vier Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



Zeichnen Sie alle möglichen ungerichteten Bäume mit genau fünf Knoten, von denen keine zwei isomorph sind.



Aufgabe: Bäume (WS 2010)

Sei $T_1 = (V_1, E_1)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_1, $T_2 = (V_2, E_2)$ ein gerichteter Baum mit Wurzel r_2, und es gelte $V_1 \cap V_2 = \{\}$. Sei $r \notin V_1 \cup V_2$. Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Lösung

Zeigen Sie:

$$T_1 \circ_r T_2 = (V_1 \cup V_2 \cup r, E_1 \cup E_2 \cup \{(r, r_1), (r, r_2)\})$$

ist ein gerichteter Baum mit Wurzel r.

Zwei Dinge sind zu zeigen:

- Zu jedem $v \in V_1 \cup V_2 \cup r$ gibt es einen Pfad von r aus
- Dieser Pfad ist eindeutig.

Lösung

Wir zeigen zuerst, dass es von r zu jedem Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad gibt.

- Es gibt offensichtlich einen Pfad (der Länge 0) von r nach r.
- Sei $v \in V_1$. Dann gibt es nach Definition einen Pfad von r_1 nach v über den Baum T_1 und dessen Kanten E_1. Da in $T_1 \circ_r T_2$ auch der Pfad r nach r_1 liegt, gibt es also einen Pfad von r nach v in $T_1 \circ_r T_2$.
- Analog zu $v \in V_2$.

Somit gibt es für alle Knoten $v \in V_1 \cup V_2 \cup \{r\}$ einen Pfad von r nach v.

Lösung

Wir zeigen nun noch, dass es für keinen Knoten zwei verschiedenen Pfade von r nach v gibt.

Für $v = r$ gibt es offensichtlich keine zwei verschiedenen Pfade.
Sei also exemplarisch $v \in V_1$. Da $V_1 \cap V_2 = \{\}$, sind von r_2 nur Elemente aus V_2 zu erreichen. Somit muss ein Pfad von r nach v über r_1 gehen (weil von r_2 kein Pfad zurück führt). Da T_1 aber ein Baum ist, ist der Pfad von r_1 nach v eindeutig. Der Pfad von r nach r_1 ebenso. Also ist der Pfad von r nach v auch eindeutig. Analog zu $v \in V_2$.

Aufgabe (WS 2009)

Eine Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn sie eine positive ganze Zahl ist und genau zwei Teiler hat, nämlich 1 und n. Insbesondere ist 1 keine Primzahl. Für $n \in \mathbb{N}^+$ sei der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ gegeben durch

$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\}$$

$$E_n = \{(k, m) \in V_n \times V_n \mid k \text{ teilt } m \text{ und } m/k \text{ ist eine Primzahl}\}$$

- Zeichnen Sie G_{12} , G_{16} und G_{30}.
- Zeigen Sie:

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}^+ : n \text{ teilt } m \implies G_n \text{ ist Teilgraph von } G_m$$

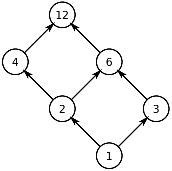
.

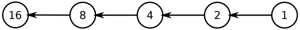
Lösung

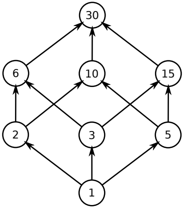
$$V_n = \{m \in \mathbb{N}^+ \mid m \text{ teilt } n\}$$

$$E_n = \{(k, m) \in V_n \times V_n \mid k \text{ teilt } m \text{ und } m/k \text{ ist eine Primzahl}\}$$

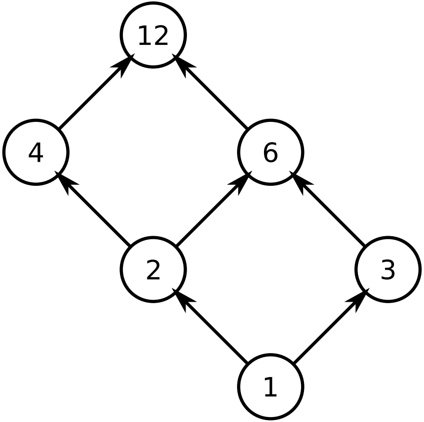
Zeichnen Sie G_{12} , G_{16} und G_{30}.





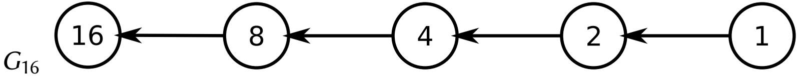


Lösung

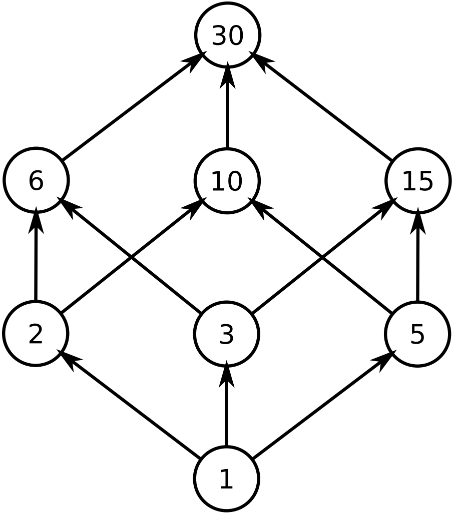


G_{12}

Lösung



Lösung



G_{30}

Lösung

Zeigen Sie:

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}^+ : n \text{ teilt } m \implies G_n \text{ ist Teilgraph von } G_m$$

Gelte also n teilt m. Zu zeigen sind zwei Dinge:

- $V_n \subseteq V_m$
- $E_n \subseteq E_m \cap V_n \times V_n$

Lösung

Zuerst $V_n \subseteq V_m$.

Sei $v \in V_n$ beliebig. Nach Definition gilt: v teilt n. Da n aber m teilt, muss v auch m teilen, liegt also in V_m. Also gilt

$$V_n \subseteq V_m$$

Jetzt $E_n \subseteq E_m \cap V_n \times V_n$.

Sei p eine Kante mit $p = (x, y) \in E_n$. Wir haben gezeigt, dass dann $x, y \in V_m$ gilt. Außerdem gilt nach der Definition von E_n:

$$x \text{ teilt } y \text{ und } y/x \text{ ist eine Primzahl}$$

Somit ist p auch in E_m und es gilt

$$E_n \subseteq E_m$$

.

Graphen

Aufgaben

Repräsentation von Graphen

Darstellung von Graphen

Auf Papier

- Graphische Darstellung
- Mengendarstellung
- Textuelle Beschreibung

Im Rechner

Systematisches abspeichern der Kanten notwendig.
Knoten werden oftmals implizit verwendet.

- (Kantenliste)
- Adjazenzlisten
- Adjazenzmatrix

Adjazenzlisten

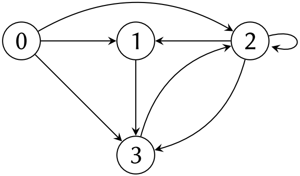
Definition

In einer *Adjazenzliste* werden zu einem Knoten x alle Knoten eingetragen, die von x aus direkt mit einer Kante verbunden sind.

Für jeden Knoten existiert eine Liste, alle Listen werden meist in einem Feld gespeichert.

Adjazenzlisten

Beispiel



Für die Adjazentenlisten gilt

0	1,2,3
1	3
2	1,2,3
3	2

Adjazenzmatrix

Definition

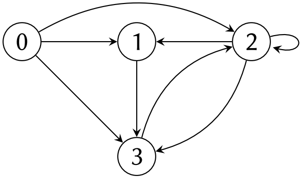
Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen (V, E) mit n Knoten ist die Matrix $A \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & (i, j) \notin E \\ 1 & (i, j) \in E \end{cases}$$

Achtung: Bei dieser Definition müssen Matrix- und Knotenindizes mit dem gleichen Wert starten (0 oder 1)

Adjazenzmatrix

Beispiel



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Besondere Eigenschaften der Adjazenzmatrix

- Schlingen lassen sich an einer 1 auf der Diagonalen erkennen (Wert von A_{ii})
- Bei ungerichteten Graphen ist A immer symmetrisch (also $A_{ij} = A_{ji}$).

Vergleich der Darstellungen

- Adjazenzliste: Speicherplatz abhängig von Kanten (m)
  Besser bei dünn besetzten Graphen.
- Adjazenzmatrix: Immer gleich viel Speicherplatz (n^2)
  Besser bei dicht besetzten Graphen (kein Overhead für Listen nötig).

Vergleich der Darstellungen

- Adjazenzliste: Nachbarn ermitteln in $O(1)$
  Ermitteln ob (i, j) adjazent sind in $O(n)$
- Adjazenzmatrix: Nachbarn ermitteln in $O(n)$
  Ermitteln ob (i, j) adjazent sind in $O(1)$

In der Praxis meistens (Varianten von) Adjazenzlisten verwendet.
Denn: Die meisten Graphalgorithmen traversieren den Graphen, dafür sind Adjazenzlisten deutlich besser.

Viel mehr dazu in Algorithmen I

Was ihr nun wissen solltet

- Grundbegriffe der Graphen
- Zentrale Eigenschaften von Graphen
- Verschiedene Darstellungen von Graphen und deren Vorteile

Was nächstes Mal kommt

- Graphen schön und gut - Aber jetzt wollen wir auch etwas damit machen!
- Warum dauert das so lange? - Laufzeitbetrachtungen

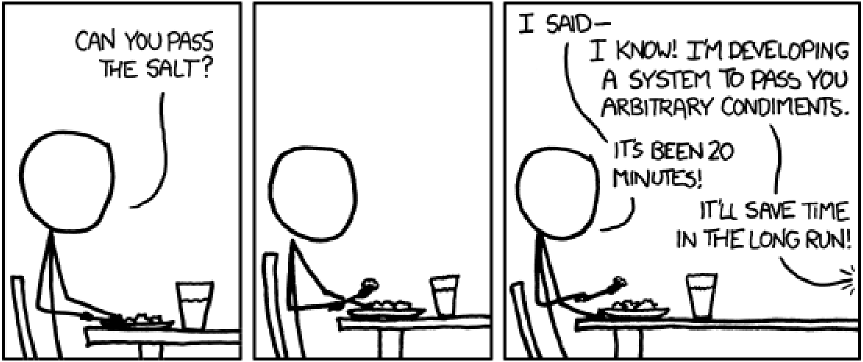


Abbildung: http://www.xkcd.com/974

Credits

Vorgänger dieses Foliensatzes wurden erstellt von:

Thassilo Helmold
Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue