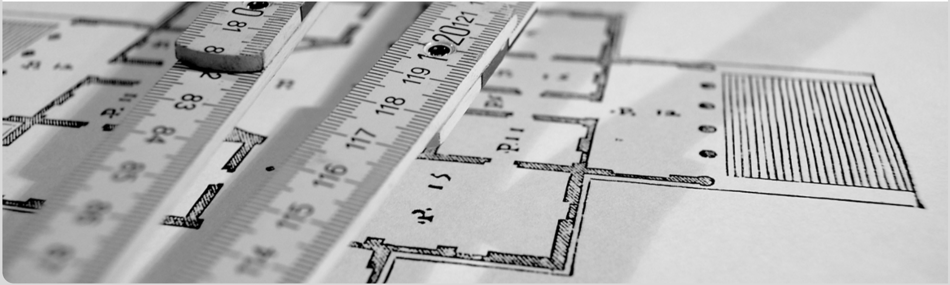
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 11 | 20.01.2017

Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

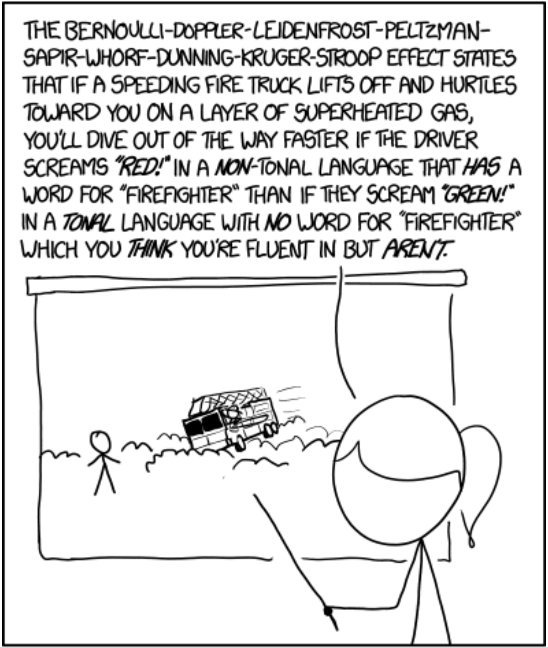


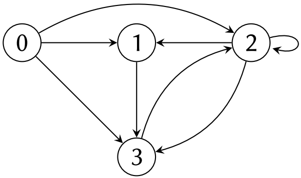
Abbildung: https://www.xkcd.com/1531

In the previous episode of GBI…

Rückblick: Graphen

- Gerichtete und ungerichtete Graphen
- Knoten, Kanten, Schleifen, Isomorphie
- Pfade, Wege, Zyklen, Kreise
- Bäume
- Adjazenzlisten und Adjazenzmatrizen

Wahr oder Falsch?



- Dieser Graph ist gerichtet W
- (1,3,2) ist ein gültiger Weg in diesem Graph
  Nein, aber ein gültiger Pfad!
- (1) ist ein gültiger Pfad in diesem Graph W
- () ist ein gültiger Pfad in diesem Graph F
  Ein Pfad darf nicht leer sein!

Wiederholung: Adjazenzmatrix

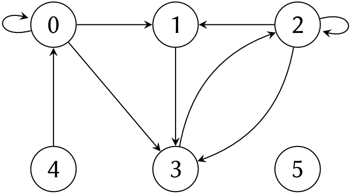
Definition

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen (V, E) mit n Knoten ist die Matrix $A \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ mit

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & (i, j) \notin E \\ 1 & (i, j) \in E \end{cases}$$

Übung: Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Was kann man an der Adjazenzmatrix ablesen?

- Gerichtet oder ungerichtet?
- Schlingen?
- Zusammenhängend?

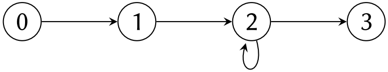
Wegematrix

Berechnungsmethoden

Quantitative Aspekte

Potenzen einer Adjazenzmatrix

Bestimmen Sie die Matrix A^2 des folgenden Graphen, wobei A die Adjazenzmatrix bezeichne.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A^2)_{ij}$ gibt also Auskunft, ob es einen Weg der Länge 2 von i nach j gibt.
$(A^n)_{ij}$ allgemein gibt Auskunft, ob es einen Weg der Länge n von i nach j gibt.

Wegematrix

Definition

Die Wegematrix W ist definiert als

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \notin E^* \\ 1 & (i,j) \in E^* \end{cases}$$

Dabei ist $E^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k$ die **Erreichbarkeitsrelation**, das ist die reflexiv-transitive Hülle der Kantenrelation E.

Die Wegematrix lässt sich daher folgendermaßen berechnen:

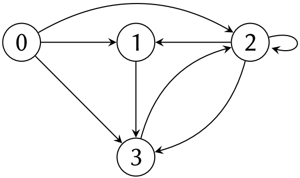
$$W = \operatorname{sgn}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right)$$

Warum reicht es hier, in der Summe bis n zu gehen?

Pfade mit einer Länge $> n$ enthalten einen Zyklus!

Wegematrix

Beispiel



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiterführendes Material

Mehr dazu: GBI Übung 10, WS 15/16

Wegematrix

Berechnungsmethoden

Quantitative Aspekte

Laufzeit der Berechnung

- Jede Matrix hat n^2 Einträge, also ergibt sich für die Summe von n Matrizen $n \cdot n^2 = n^3$ Summenoperationen
- Es gibt $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ Matrixmultiplikationen. (Im Algorithmus wird *kein* Speicherplatz für A^i reserviert. Würde bei großen n sehr schnell die Speicherkapazitäten übersteigen.)
- $(B \cdot C)_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{ik} C_{kj}$, also pro Eintrag einer Matrixmultiplikation, die n^2 Einträge hat, n Multiplikationen und $n - 1$ Additionen.
- n^2 Berechnungen der Signum-Funktion

Insgesamt also

$$n^2 + n^3 + n^2(n + n - 1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^5 - \frac{3}{2}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + n^2$$

Wir betrachten im Allgemeinen nur die führende Ordnung, also n^5

Optimierungen

Can we do better?

Betrachten wir nun $F = (Id \cup E)$ für eine Kantenmenge E.
So folgt

$$F^2 = (Id \cup E) \circ (Id \cup E) = Id \cup E \cup E^2$$

Analog :

$$F^4 = (F^2)^2 = (Id \cup E \cup E^2) \circ (Id \cup E \cup E^2) = Id \cup E \cup E^2 \cup E^3 \cup E^4$$

Also folgt

$$F^m = \bigcup_{i=0}^{m} E^i$$

Setze $m = \lceil \log_2 n \rceil$

Der Algorithmus sieht nun also folgendermaßen aus

$$
\begin{aligned}
&W \leftarrow A + I && //n^2 \\
&m \leftarrow \lceil \log_2 n \rceil && \\
&\textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } m \textbf{ do} && //\lceil \log_2 n \rceil \\
&\quad W \leftarrow W \cdot W && //(n+n-1) \cdot n \\
&\textbf{od} && \\
&W \leftarrow \operatorname{sgn}(W) && //n^2
\end{aligned}
$$

Wir brauchen also nur noch
$n^2 + \lceil \log_2 n \rceil \left((2n-1) \cdot n^2 \right) + n^2 = \lceil \log_2 n \rceil \cdot 2n^3 + \ldots$ Rechenoperationen

Der Warshall-Algorithmus

(Noch) schnellere Berechnung der Wegematrix. Laufzeit $O(n^3)$
Mehr dazu in der Vorlesung und im Skript.

Weitere Graphenprobleme

- Kürzeste Wege
- Minimale Spannbäume
- (Starke) Zusammenhangskomponenten
- Minimale Tour (TSP = Travelling Salesman Problem)

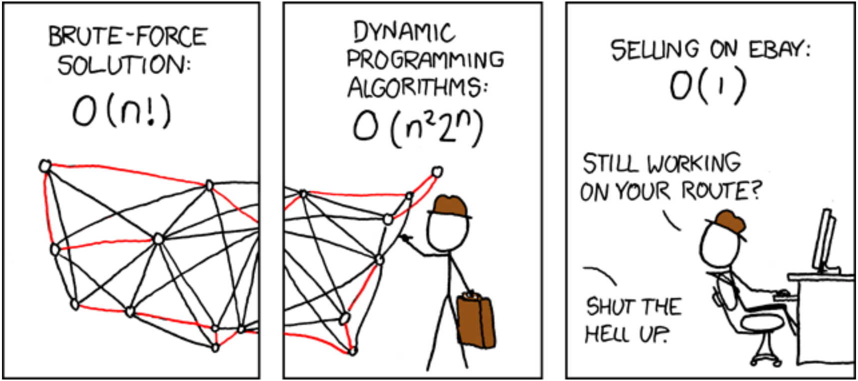
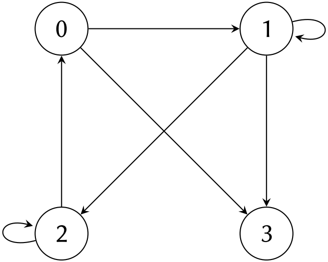


Abbildung: http://www.xkcd.com/399

Aufgabe 1

Gegeben sei folgender Graph G



Geben Sie die Adjazenzliste, die Adjazenzmatrix und die Wegematrix zu diesem Graphen an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegematrix

Berechnungsmethoden

Quantitative Aspekte

Laufzeiten

Wir interessieren uns für Laufzeiten von Algorithmen.
Aber wie sollen wir die messen?
Problem: Rechenzeit auf einem Supercomputing-Cluster nicht mit Rechenzeit auf einem IoT-Chip in der Waschmaschine vergleichbar.

Daher: Zählen der „ausgeführten Operationen“ in Abhängigkeit von der Problemgröße n.
Meistens interessiert vor allem der Worst-Case.

Abschätzung

Genaue Abschätzungen sind oftmals *sehr schwierig.*
Aber oftmals auch *sehr uninteressant.*
Konstante Faktoren z.B. sind durch die ständigen Verbesserungen bei Prozessoren oftmals für die Praxis irrelevant.

Uns interessiert vor allem das Verhalten für *sehr große* Instanzen.

Asymptotisches Wachstum

Definition

Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ wachsen asymptotisch genauso schnell, wenn es zwei Konstanten $c, c' \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n > n_0 : \; cf(n) \leqslant g(n) \leqslant c'f(n)$$

Man schreibt dafür

$$f \asymp g$$

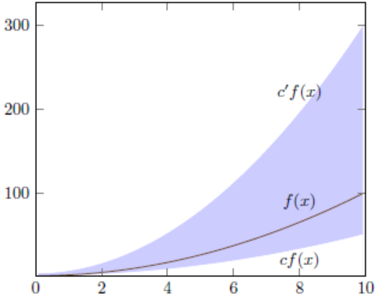
Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation!

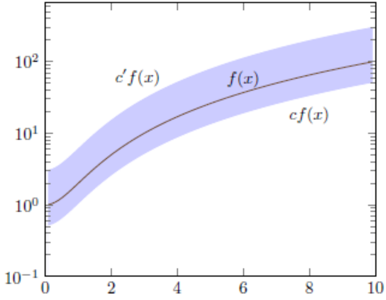
Landau-Notation I

Definition

$\Theta(f)$ ist die Menge aller Funktionen g, die asymptotisch genauso schnell wachsen wie f, also

$$\Theta(f) = \{g \mid f \asymp g\}$$



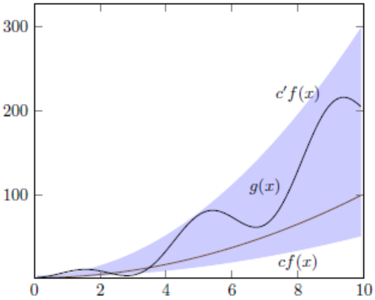


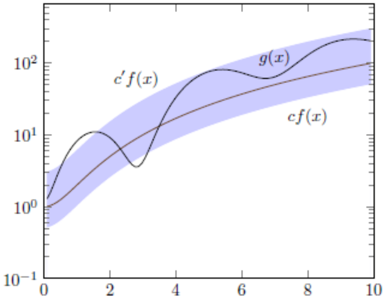
Landau-Notation I

Definition

$\Theta(f)$ ist die Menge aller Funktionen g, die asymptotisch genauso schnell wachsen wie f, also

$$\Theta(f) = \{g \mid f \asymp g\}$$





Asymptotisches Wachstum

Definition

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ definiert man:

$$g \preceq f \qquad \exists c \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \, \forall n > n_0 : \; g(n) \leqslant cf(n)$$

$$g \succeq f \qquad \exists c \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \, \forall n > n_0 : \; g(n) \geqslant cf(n)$$

Diese Relationen sind keine Äquivalenzrelation!

Landau-Notation II

Definition

$O(f)$ ist die Menge aller Funktionen g, die asymptotisch höchstens so schnell wachsen wie f, also

$$O(f) = \{g \mid g \preceq f\}$$

$\Omega(f)$ ist die Menge aller Funktionen g, die asymptotisch mindestens so schnell wachsen wie f, also

$$\Omega(f) = \{g \mid g \succeq f\}$$

O ist eine Abschätzung nach oben. Ω ist eine Abschätzung nach unten.

Schreibweise

Manchmal (häufig) sieht man auch das, **bitte NICHT VERWENDEN**:

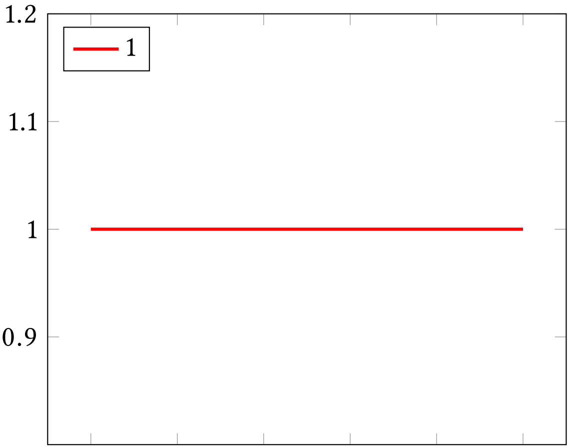
$$f = \Theta(g) \qquad h = O(n^3) \qquad k = \Omega(f + g)$$

Dabei ist das $=$ immer als $\in$ zu verstehen!

Auzug aus: Übung 11 GBI, WS 15/16

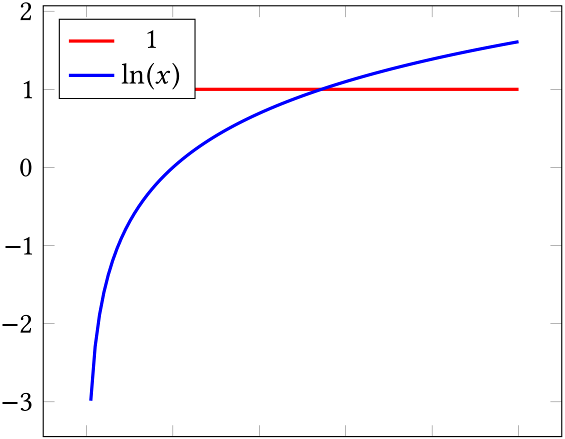
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



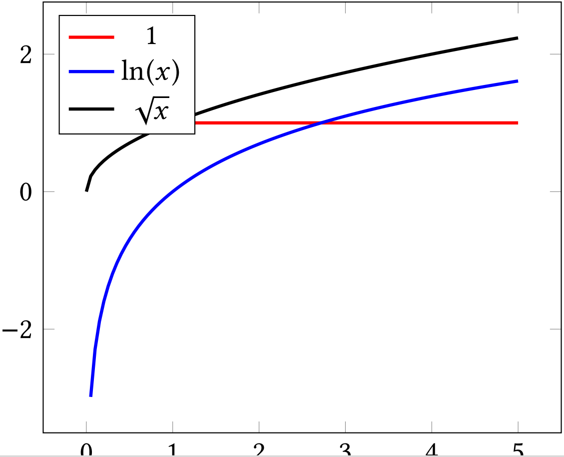
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



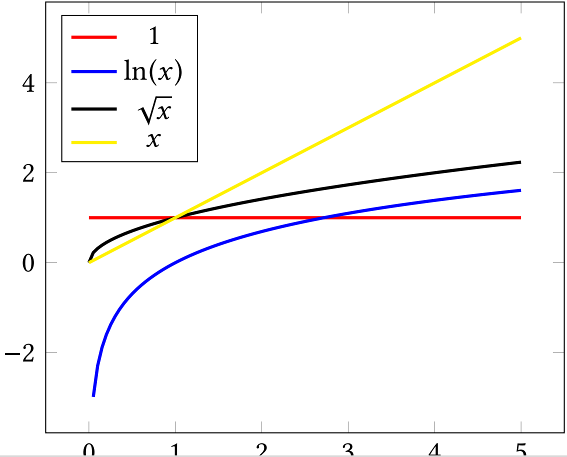
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



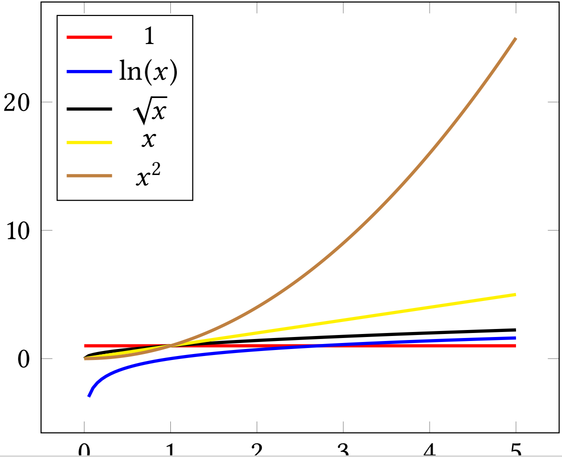
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneqq O(\ln) \subsetneqq O(\sqrt{\_}) \subsetneqq O(\mathrm{id}_X) \subsetneqq O(\_^2) \subsetneqq O(\exp)$$



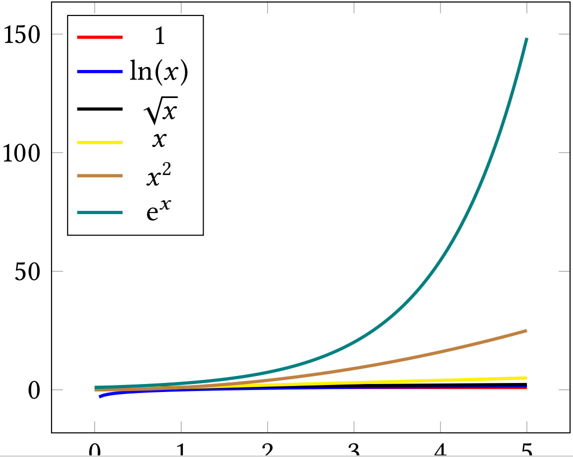
Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



Inklusionen

$$O(\mathbb{1}) \subsetneq O(\ln) \subsetneq O(\sqrt{\_}) \subsetneq O(\mathrm{id}_X) \subsetneq O(\_^2) \subsetneq O(\exp)$$



Beispiel

Behauptung $[n \mapsto \frac{n^3+2n}{2n+1}] \in O(n \mapsto n^2)$

Beweis Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{n^3 + 2n}{2n + 1} &\leq \frac{n^3 + 2n}{2n} \\ &= \frac{1}{2}n^2 + 1 \\ &\leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 \\ &= \frac{3}{2}n^2. \end{aligned}$$

Wähle beispielsweise $c = \frac{3}{2}$ und $n_0 = 42$.

Logarithmen

Einige Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
a^{\log_a n} &= n \\
\log_b n^a &= a \cdot \log_b n \\
\log_b(n \cdot m) &= \log_b n + \log_b m \\
a^{\log_b n} &= n^{\log_b a}
\end{aligned}
$$

Logarithmen

Lemma

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

Herleitung

$$\begin{aligned} a^{\log_b n} &= \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b n} \\ &= b^{\log_b a \cdot \log_b n} \\ &= \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a} \\ &= n^{\log_b a} \end{aligned}$$

Logarithmen

Es gilt

$$n = a^{\log_a n}$$

Daraus ergibt sich:

$$\log_b n = \log_b a^{\log_a n} = \log_a n \cdot \log_b a$$

Setze $c = c' = \log_b a$, dann ist

$$c \log_a n \leqslant \log_b n \leqslant c' \log_a n$$

Rechenregeln

Einige Rechenregeln im O-Kalkül

- Für $a > 0$ ist $a \cdot f \in \Theta(f)$
- Für $0 < a < b$ ist $n^a \preceq n^b$
- Für $a, b > 1$ ist $n^a \preceq b^n$
- Für Polynome f, g gilt:

$$grad\ f = grad\ g \iff f \asymp g$$

- Für $a, b > 0$ gilt $\log_a(n) \in \Theta(\log_b n)$

Rechenregeln

Weitere Rechenregeln im O-Kalkül:

- $f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$
- $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$ und $f \asymp g \iff f \preceq g \wedge f \succeq g$
- $O(f_1) + O(f_2) = O(f_1 + f_2)$
- Wenn $g \in O(f)$, dann ist auch $O(g) \subseteq O(f)$ und $O(f + g) = O(f)$

Was ihr nun wissen solltet

- Wegematrizen
- Methoden zur Berechnung
- Laufzeitbetrachtungen
- O-Kalkül

Was nächstes Mal kommt

- One to rule them all – Das Master-Theorem
- Alles nur von Hand? – Hier kommen die Automaten!

Abbildung: http://www.xkcd.com/612

Danksagung

Dieser Foliensatz basiert in Teilen auf Folien von:

Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue