Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 7

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 9. Dezember 2015

Abgabe: 18. Dezember 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 7:	/ 20	(Physik: 0)
Blätter 1 – 7:	/ 124	(Physik: 101)

Mit **[nicht Physik]** gekennzeichnete Aufgaben müssen von Studenten der Physik nicht bearbeitet werden.

Aufgabe 7.1 **(1 + 1 + 2 + 2 = 6 Punkte)** **[nicht Physik]**

Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$, $Fun_{PL} = \{\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{E}, \doteq\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{E}) = 2$, und es sei F die prädikatenlogische Formel

$$\neg\exists \mathtt{x}(\mathtt{E}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \vee \neg\forall \mathtt{z}\forall \mathtt{x}\forall \mathtt{y}(\mathtt{E}(\mathtt{x},\mathtt{z}) \wedge \mathtt{E}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{x} \doteq \mathtt{y}))$$

a) Geben Sie all jene Variablen an die frei und all jene die gebunden in F vorkommen.
b) Geben sie eine Substitution σ an, die *nicht* kollisionsfrei für F ist.
c) Geben Sie eine Interpretation (D_1, I_1) und eine Variablenbelegung β_1 so an, dass $val_{D_1,I_1,\beta_1}(F) = \mathbf{w}$ gilt.
d) Geben Sie eine Interpretation (D_2, I_2) und eine Variablenbelegung β_2 so an, dass $val_{D_2,I_2,\beta_2}(F) = \mathbf{f}$ gilt.

Lösung 7.1

a) Nur die Variable $\mathtt{y}$ kommt frei in F vor. Genau die Variablen $\mathtt{x}$, $\mathtt{y}$ und $\mathtt{z}$ kommen gebunden in F vor.
b) Die Substitution $\sigma_{\{(\mathtt{y}/\mathtt{x})\}}$ leistet das Gewünschte.
c) Die Interpretation $(D_1, I_1) = (\{0,1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_1 \colon Var_{PL} \rightarrow D, v \mapsto 0$, leisten das Gewünschte.
d) Die Interpretation $(D_2, I_2) = (\{0,1\}, <)$ und die Variablenbelegung $\beta_2 \colon Var_{PL} \rightarrow D, v \mapsto 1$, leisten das Gewünschte.

Aufgabe 7.2 **(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)** **[nicht Physik]**

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik:

a) Nicht alle Vögel können fliegen.
b) Wenn es irgendjemand kann, dann kann es Donald Ervin Knuth.
c) John liebt jeden, der sich nicht selbst liebt.

Anmerkung: Die Alphabete der Konstantensymbole, Variablensymbole, Funktionssymbole und Relationssymbole müssen Sie nicht explizit angeben, da diese implizit aus den Formeln hervorgehen.

Lösung 7.2

a)

$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{Vogel}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{flugfaehig}(\mathtt{x}))$$

b)

$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{kann\_es}(\mathtt{x})) \rightarrow \mathtt{kann\_es}(\mathtt{knuth})$$

c)

$$\forall \mathtt{x}(\neg\mathtt{liebt}(\mathtt{x},\mathtt{x}) \rightarrow \mathtt{liebt}(\mathtt{John},\mathtt{x}))$$

Korrektur: Z. B. bei a) soll Prädikat Vogel vorkommen. Verbale Einschränkungen auf z. B. Universen, die sowieso nur Vögel enthalten, werden nicht akzeptiert.

Wir sind hier noch im Kapitel über Prädikatenlogik. Deshalb soll die Syntax auch (halbwegs) stimmen. Sowas wie $\forall \mathtt{Vogel(x)}$ wird nicht akzeptiert.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) [nicht Physik]

Es seien G und H zwei prädikatenlogische Formeln. Beweisen Sie, dass die prädikatenlogische Formel

$$(\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H)) \rightarrow (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$$

allgemeingültig ist.

Lösung 7.3

Nebenbei: Tatsächlich ist sogar die prädikatenlogische Formel

$$(\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H)) \leftrightarrow (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$$

allgemeingültig (siehe Übung).

Beweis: Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Weiter sei $U = (\exists \mathtt{x}(G \rightarrow H))$ und es sei $V = (\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H)$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt $val_{D,I,\beta}(U \rightarrow V) = b_{\vee}(b_{\neg}(val_{D,I,\beta}(U)), val_{D,I,\beta}(V))$.

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definitionen von $b_{\neg}$ und $b_{\vee}$ gilt dann $val_{D,I,\beta}(U \rightarrow V) = \mathbf{w}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(U) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ für existenzquantifizierte Formeln gibt es somit ein $d \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G \rightarrow H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}$ für Implikationen gilt damit $b_{\vee}(b_{\neg}(val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G)), val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(H)) = \mathbf{w}$.

Fall 2.1: $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G) = \mathbf{w}$. Dann gilt $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ für existenquantifizierte Formeln aus der Vorlesung gilt somit $val_{D,I,\beta}(\exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt also $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

Fall 2.2: $val_{D,I,\beta^d_{\mathtt{x}}}(G) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt somit $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für Implikationen gilt also $val_{D,I,\beta}(\forall \mathtt{x} G \rightarrow \exists \mathtt{x} H) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(V) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definitionen von $b_{\neg}$ und $b_{\vee}$ gilt folglich $val_{D,I,\beta}(U \rightarrow V) = \mathbf{w}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(U \rightarrow V) = \mathbf{w}$.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) [nicht Physik]

Es seien $Const_{PL} = \{\}$, $Var_{PL} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$, $Fun_{PL} = \{\}$ und $Rel_{PL} = \{\mathtt{B}, \mathtt{R}, \doteq\}$ mit $\mathrm{ar}(\mathtt{B}) = 1$ und $\mathrm{ar}(\mathtt{R}) = 2$. Weiter sei F die prädikatenlogische Formel

$$\exists \mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) \wedge \forall \mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall \mathtt{y}(\neg \mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$$

Beweisen Sie, dass F unerfüllbar ist, das heißt, dass für jede passende Interpretation (D, I) und jede passende Variablenbelegung β gilt: $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{f}$.

Hinweis: Für alle prädikatenlogischen Formeln G und H, jede passende Interpretation (D, I) und jede passende Variablenbelegung β gilt:

$$val_{D,I,\beta}(G \leftrightarrow H) = \mathbf{w} \text{ genau dann, wenn } val_{D,I,\beta}(G) = val_{D,I,\beta}(H).$$

Lösung 7.4

Nebenbei: Liest man das Relationssymbol $\mathtt{B}$ als „ist ein Barbier“ und das Relationssymbol $\mathtt{R}$ als „rasiert“ so lautet F umgangssprachlich: Es gibt einen Barbier und Barbier ist genau der, der genau all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Die Unerfüllbarkeit von F bedeutet also, dass es keinen Barbier geben kann, der all jene rasiert, die sich nicht selbst rasieren.

Beweis: Es sei (D, I) eine passende Interpretation und es sei β eine passende Variablenbelegung. Weiter sei $F_1 = \exists\mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}))$ und es sei $F_2 = \forall\mathtt{x}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})))$. Dann gilt $F = F_1 \wedge F_2$. Ferner gilt

$$val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = b_\wedge(val_{D,I,\beta}(F_1), val_{D,I,\beta}(F_2)).$$

Fall 1: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $b_\wedge$ gilt damit $val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{f}$.

Fall 2: $val_{D,I,\beta}(F_1) = \mathbf{w}$. Gemäß der Charakterisierung von $val_{D,I,\beta}$ existenquantifizierte Formeln aus der Vorlesung gibt es somit ein $b \in D$ so, dass $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) = \mathbf{w}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}$ für negierte Formeln und atomare Formeln gilt damit

$$\begin{aligned} val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y})) &= b_\neg(val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}))) \\ &= \begin{cases} b_\neg(\mathbf{w}), & \text{falls } ((\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}(\mathtt{y}), (\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}(\mathtt{y})) \in I(\mathtt{R}), \\ b_\neg(\mathbf{f}), & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{falls } (b,b) \in I(\mathtt{R}), \\ \mathbf{w}, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und analog gilt

$$val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{falls } (b,b) \in I(\mathtt{R}), \\ \mathbf{f}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gemäß der Hinweises gilt somit $val_{D,I,(\beta^b_\mathtt{x})^b_\mathtt{y}}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt also $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))) = \mathbf{f}$. Wegen $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x})) = \mathbf{w}$ und gemäß des Hinweises gilt folglich $val_{D,I,\beta^b_\mathtt{x}}(\mathtt{B}(\mathtt{x}) \leftrightarrow \forall\mathtt{y}(\neg\mathtt{R}(\mathtt{y},\mathtt{y}) \leftrightarrow \mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}))) = \mathbf{f}$. Gemäß der Definition von $val_{D,I,\beta}$ für allquantifizierte Formeln gilt damit $val_{D,I,\beta}(F_2) = \mathbf{f}$. Schließlich gilt $val_{D,I,\beta}(F_1 \wedge F_2) = \mathbf{f}$.

In beiden Fällen gilt $val_{D,I,\beta}(F) = \mathbf{f}$.