Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
19. März 2019

Klausur-ID

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

nur falls 2. Versuch:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	5	7	7	5	6	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44	Note:	

/ 8

Aufgabe 1 (2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8 Punkte)

/ 2

a) Ist $\sqrt{2^n 3^n} \in \Omega(2^n)$? Begründen Sie Ihre Antwort:

/ 1

b) Ist die folgende Aussage richtig? Für jede Turing-Maschine T ist die Sprache $L(T)$ genau dann entscheidbar, wenn T für jede Eingabe hält.

ja: ☐ nein: ☐

/ 2

c) Es sei $A = \{a, b\}$. Geben Sie eine Sprache $L \subseteq A^*$ an, sodass $L^* = A^*$ aber $(L^2)^* \neq (A^2)^*$ ist.

$L =$

/ 1

d) Es sei M eine Menge und R eine binäre Relation auf M (also $R \subseteq M \times M$), die transitiv ist. Ist $R \circ R$ dann auch immer transitiv?

ja: ☐ nein: ☐

/ 1

e) Beschreiben Sie mit einem regulären Ausdruck R die formale Sprache aller Wörter über dem Alphabet $A = \{a, b\}$, die die Eigenschaft haben, dass an keiner Stelle ein a vorkommt, wenn sowohl irgendwo weiter links als auch irgendwo weiter rechts ein b steht.

$R =$

/ 1

f) Gibt es einen Graphen $G = (V, E)$, der zwar azyklisch aber kein Baum ist? Falls ja, geben Sie einen solchen Graphen an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht sein kann.

Antwort:

/ 5

Aufgabe 2 (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ein Alphabet und eine Abbildung $\mathsf{f}\colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\forall w \in A^* : \mathsf{f}(w, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* : \mathsf{f}(\varepsilon, w) = \varepsilon$$
$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ \forall w_1, w_2 \in A^* : \mathsf{f}(x_1 w_1, x_2 w_2) = \begin{cases} x_1 \mathsf{f}(w_1, w_2) & \text{falls } x_1 = x_2 \\ \varepsilon & \text{falls } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{f}(\mathtt{abb}, \mathtt{abaa})$.

/ 1

b) Beschreiben Sie anschaulich präzise $\mathsf{f}(w_1, w_2)$.

/ 3

c) Beweisen Sie induktiv, dass für jedes $w_1 \in A^*$ gilt: Für jedes $w_2 \in A^*$ ist $\mathsf{f}(w_1, w_2)$ ein Präfix von w_1.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 7

Aufgabe 3 (4 + 1 + 2 = 7 Punkte)

a) Gegeben sei das Alphabet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}, \texttt{f}, \texttt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	6	11	27	9	2	34

/ 4

(i) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

/ 1

(ii) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes `bad` an, die sich aus Ihrem Huffman-Baum ergibt.

/ 2

b) Für $k \geq 2$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ mit k Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i < k$.

Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 7

Aufgabe 4 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{0, 1\}$ ein Alphabet. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $V_n = A^n$ sowie E_n die Menge

$$\left\{\, \{w_1, w_2\} \;\middle|\; \exists i, j \in \mathbb{Z}_n : (i \neq j \wedge \forall k \in \mathbb{Z}_n : (k \notin \{i, j\} \leftrightarrow w_1(k) = w_2(k))) \,\right\}$$

und es sei G_n der ungerichtete Graph (V_n, E_n).

/ 2

a) Zeichnen Sie G_n für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Beschriften Sie alle Knoten.

/ 1

b) Geben Sie die Adjazenzmatrix A_2 und die Wegematrix W_2 von G_2 an.

Geben Sie bei A_2 für jede Zeile und Spalte an, welchem Knoten sie entspricht.

/ 2

c) *(In der Originalklausur war an dieser Stelle die Formulierung einer unlösbaren Aufgabe. Für das Archiv der alten Klausuren zum Lernen wurde diese Teilaufgabe entfernt.)*

/ 2

d) Zeigen oder widerlegen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (E_n)_g = (E_n)_g^*$.

Hinweis. R^* bezeichnet die reflexiv-transitive Hülle einer binären Relation R.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 5

Aufgabe 5 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)

Es sei das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben. Betrachten Sie die Grammatiken $G_1 = (\{S_1, A_1\}, X, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\{S_2, A_2, B_2\}, X, S_2, P_2)$ mit

$$P_1 = \{\ S_1 \to \mathtt{aa}S_1 \mid \mathtt{b}A_1 \mid \varepsilon,\quad A_1 \to \mathtt{a}S_1 \mid \mathtt{b}\ \}$$

und

$$P_2 = \{\ S_2 \to S_2S_2 \mid A_2B_2,\quad A_2 \to \mathtt{ab},\quad B_2 \to \mathtt{ba}S_2 \mid \varepsilon\ \}$$

/ 2

a) Geben Sie zu G_i jeweils einen regulären Ausdruck R_i an (wobei $i \in \{1, 2\}$), sodass $\langle R_i \rangle = L(G_i)$ ist.

$R_1 =$

$R_2 =$

Hinweis. Sie dürfen die üblichen Klammereinsparungsregeln ausnutzen. Aber beschränken Sie sich ansonsten auf die Notationsmöglichkeiten aus der Definition regulärer Ausdrücke und benutzen Sie keine Abkürzungen wie $\mathtt{a}^+$.

/ 1

b) Die Grammatik G_1 ist rechtslinear, die Grammatik G_2 nicht.

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G_3 = (N_3, X, S_3, P_3)$ mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (also $|N_3| \leq 3$) an, sodass $L(G_3) = L(G_2)$ ist.

/ 2

c) Geben Sie eine Grammatik $G_4 = (N_4, X, S_4, P_4)$ an, die die Sprache $L(G_4) = L(G_1) \cup L(G_2)$ erzeugt. Ihre Grammatik darf höchstens 4 Nichtterminalsymbole haben (also $|N_4| \leq 4$).

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6 **Aufgabe 6 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)**

Es sei das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und die formale Sprache

$$L = \{w \in X^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : N_{\mathtt{b}}(w) = 3k + 1\}$$

gegeben.

$N_{\mathtt{b}}(w)$ bezeichne dabei die Anzahl der Vorkommen des Zeichens `b` in w.

/ 2

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.

Es sei jetzt A ein beliebiger endlicher Akzeptor mit Zustandsmenge Z und dessen Eingabealphabet gleich X ist, und für den $L(A) = L$ gilt.

/ 1

b) Zeigen Sie, dass $|Z| \neq 1$ ist.

/ 3

c) Zeigen Sie, dass $|Z| \neq 2$ ist.

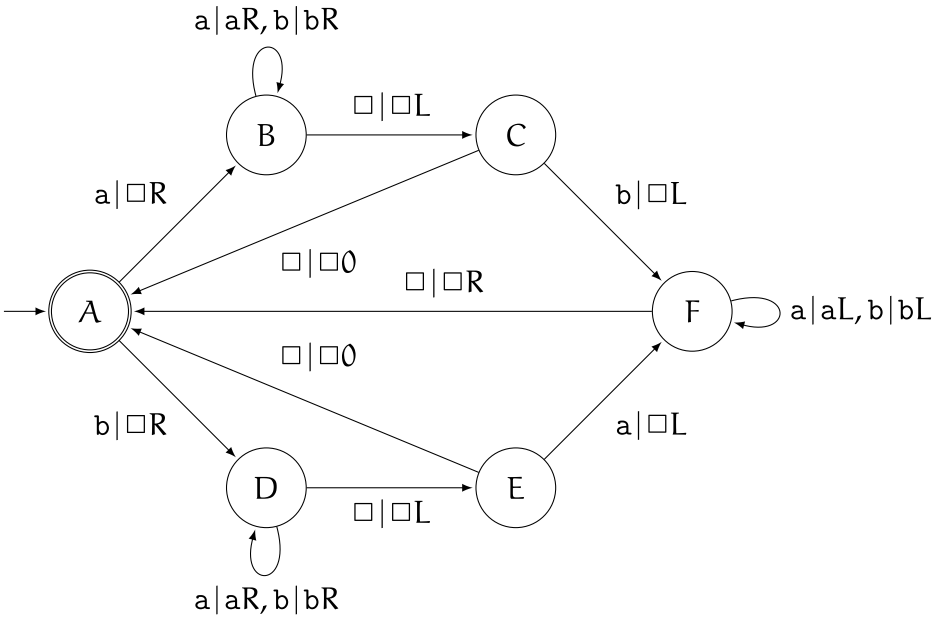
Hinweis. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis durch. Sie dürfen dabei annehmen, dass Teilaufgabe b) schon bewiesen worden ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

/ 6

Aufgabe 7 (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Turing-Maschine T mit Eingabealphabet {a, b}:



/ 3

a) Simulieren Sie die ersten 14 Schritte von T für das Eingabewort $w =$ abab. Vervollständigen Sie dazu folgende Tabelle:

Schritt	Konfiguration	Schritt	Konfiguration
0	A □ a b a b □	7	
1	B □ □ b a b □	8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	
6		13	
		14	

/ 1

b) Geben Sie Funktionen $f, g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ an, sodass für die Zeitkomplexität $\mathrm{Time}_T\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ und Platzkomplexität $\mathrm{Space}_T\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ von T gilt: $\mathrm{Time}_T \in \Theta(f)$ und $\mathrm{Space}_T \in \Theta(g)$.

Hinweis. Für die Definition von f und g dürfen Sie nur die Grundrechenarten, Logarithmen und Exponentialfunktionen und Kompositionen davon verwenden.

$f(n) =$ ☐

$g(n) =$ ☐

/ 2

c) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass ein Wort $w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^+$ in $L(T)$ liegt, d.h. von T akzeptiert wird.

Hinweis. Sie dürfen dabei keinen Bezug auf T nehmen.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: