Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 21. Januar 2015

Abgabe: 29. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 19	(Physik: 19)
Blätter 1 – 11:	/ 194	(Physik: 171)

Im folgenden schreiben wir $[n \mapsto f(n)]$ für die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ : n \mapsto f(n)$. Statt $O([n \mapsto f(n)])$ schreiben wir kürzer $O(n \mapsto f(n))$ und analog bei $\Omega(\cdot)$ und $\Theta(\cdot)$.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass $\Omega(n \mapsto 2^n) \cap O(n \mapsto n^2)$ die leere Menge ist.

Hinweis: Gemäß der Vorlesung gilt $[n \mapsto 2^n] \not\preceq [n \mapsto n^2]$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)
Es sei $p\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung derart, dass eine nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ existiert und nicht-negative reelle Zahlen $a_i \in \mathbb{R}_0^+$, für $i \in \mathbb{Z}_{k+1}$, mit $a_k \neq 0$ existieren so, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i.$$

Die Abbildung p ist also eine Polynomfunktion des Grades k mit nicht-negativen reellwertigen Koeffizienten und Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass $p \in \Theta(n \mapsto n^k)$ gilt.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei G_n der Graph (V_n, E_n) mit

$$\begin{aligned} V_n &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \mid x + y \leq n\} \\ E_n &= \quad \{((x,y),(x+1,y)) \mid x+1+y \leq n\} \\ &\quad \cup \{((x,y),(x,y+1)) \mid x+y+1 \leq n\} \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie G_3.
b) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist G_n ein Baum?
c) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |V_n|] \in \Theta(f)$.
d) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |E_n|] \in \Theta(g)$.

Aufgabe 11.4 (7 Punkte)
Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der sogenannte *Kantengraph* (engl. *line graph*) $L(G) = (V', E')$ wie folgt definiert: Wenn E nicht leer ist, dann ist

$$\begin{aligned} V' &= E, \\ E' &= \{((x,y),(y,z)) \mid (x,y),(y,z) \in V'\}; \end{aligned}$$

wenn E leer ist, dann ist $V' = \{0\}$ und $E' = \{\}$.

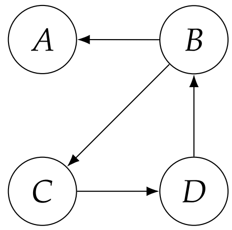
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei der n-te iterierte Kantengraph $L^n(G)$ so definiert:

$$\begin{aligned} L^0(G) &= G, \\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : L^{n+1}(G) &= L(L^n(G)). \end{aligned}$$

Es bezeichne im folgenden $L_V^n(G)$ die Knotenmenge von $L^n(G)$ und $L_E^n(G)$ die Kantenmenge von $L^n(G)$.

Hinweis: $|M|$ bezeichnet im folgenden stets die Kardinalität, also die Anzahl der Elemente, einer endlichen Menge M.

a) Zeichnen Sie zu dem Graphen H_1



den Kantengraphen $L(H_1)$ und benennen sie dessen Knoten sinnvoll.

b) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |L_V^n(H_1)|] \in \Theta\left(f\right)$.

c) Geben Sie einen Graphen H_2 mit 5 Knoten und 5 Kanten so an, dass für dessen iterierte Kantengraphen $L^n(H_2)$ gilt:

$$[n \mapsto |L_E^n(H_2)|] \in \Theta\left(n \mapsto 0\right).$$

d) Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei B_n der de Bruijn-Graph mit Knotenmenge $V_n = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^n$ und Kantenmenge $E_n = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\} \wedge w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{n-1}\}$ (siehe Kapitel 15).

- Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Bijektion $\varphi_n\colon E_n \to \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^{n+1}$ an.
- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ der Kantengraph $L(B_n)$ isomorph zu B_{n+1} ist.
- Für welche $k \in \mathbb{Z}_4$ gilt $[n \mapsto |L_V^n(B_2)|] \in O\left(n \mapsto k^n\right)$?