

Grundbegriffe der Informatik

Aufgabenblatt 10

Matr.nr.:

--	--	--	--	--	--	--

Nachname:

--

Vorname:

--

Tutorium: Nr.

--

Name des Tutors:

--

Ausgabe: 13. Januar 2015

Abgabe: 22. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 10:

	/ 16
--	------

(Physik: 16)

Blätter 1 – 10:

	/ 175
--	-------

(Physik: 152)

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Es sei $T = (V, E)$ ein gerichteter Baum und es sei r die Wurzel von T . Beweisen Sie, dass es keine Zyklen in T gibt.

Lösung 10.1

Angenommen es gibt einen Zyklus z in T . Bezeichne den Start- und Zielknoten von z mit v . Da T ein Baum ist, gibt es einen Pfad p von r nach v . Der Pfad p' , der zunächst entlang p von r nach v läuft und dann entlang z von v nach v , ist ein Pfad von r nach v . Da Zyklen mindestens die Länge 1 haben, ist p' länger als p , also insbesondere verschieden von p . Somit gibt es zwei Pfade von r nach v , im Widerspruch zur Definition von Bäumen.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und es sei $G' = (V, E^*)$, wobei E^* die reflexiv-transitive Hülle von E ist. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, jeden Knoten $v \in V$ und jeden Knoten $w \in V$ genau dann $(v, w) \in E^n$ gilt, wenn es in G einen Pfad der Länge n von v nach w gibt.

Lösung 10.2

Induktionsanfang. Es seien $v, w \in V$. Es gilt $(v, w) \in E^0$ genau dann, wenn $v = w$ gilt. Und es gilt $v = w$ genau dann, wenn es in G einen Pfad der Länge 0 von v nach w gibt.

Induktionsschritt. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass für jedes $v \in V$ und jedes $w' \in V$ genau dann $(v, w') \in E^n$ gilt, wenn es in G einen Pfad der Länge n von v nach w' gibt (Induktionsvoraussetzung).

Weiter seien $v, w \in V$. Es gilt $(v, w) \in E^{n+1} = E^n \circ E$ genau dann, wenn es ein $w' \in V$ gibt so, dass $(v, w') \in E^n$ und $(w', w) \in E$.

Die rechte Seite gilt nach Induktionsvoraussetzung genau dann, wenn es ein $w' \in V$ gibt so, dass es in G einen Pfad der Länge n von v nach w' gibt und $(w', w) \in E$ gilt. Die rechte Seite gilt genau dann, wenn es in G einen Pfad der Länge $n + 1$ von v nach w gibt.

Korrektur: Ind.anfang und Ind.vorauss. jeweils 1 Punkt, restliche Argumentation 2 Punkte.

Man beachte, dass man „genau dann, wenn“ beweisen muss! Wer nur eine Richtung macht, bekommt jeweils nur die halbe Punktzahl.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein kantenmarkierter, zusammenhängender und ungerichteter Graph mit Markierungsabbildung $m_E: E \rightarrow \mathbb{N}_0$. Ein Teilgraph $G' = (V', E')$ von G heißt genau dann *Spannbaum* von G , wenn G' ein ungerichteter Baum ist und $V' = V$ gilt. Ein Spannbaum $G' = (V', E')$ von G heißt genau dann *minimal*,

wenn für jeden anderen Spannbaum $G'' = (V'', E'')$ von G gilt:

$$\sum_{e'' \in E''} m_E(e'') \geq \sum_{e' \in E'} m_E(e').$$

Der folgende „Algorithmus“ berechnet einen minimalen Spannbaum $G' = (V', E')$ von G :

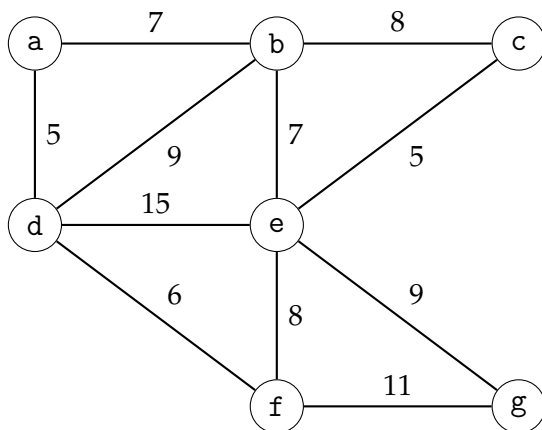
```

wähle  $x_0 \in V$ 
 $V' \leftarrow \{x_0\}$ 
 $E' \leftarrow \{\}$ 
 $i \leftarrow 1$ 
while  $V \setminus V' \neq \{\}$  do
    wähle  $x_i \in V'$  und  $y_i \in V \setminus V'$  derart, dass  $\{x_i, y_i\} \in E$  und
         $\forall x \in V' \forall y \in V \setminus V': (\{x, y\} \in E \rightarrow m_E(\{x, y\}) \geq m_E(\{x_i, y_i\}))$ 
     $V' \leftarrow V' \cup \{y_i\}$ 
     $E' \leftarrow E' \cup \{\{x_i, y_i\}\}$ 
     $i \leftarrow i + 1$ 
od

```

Hinweis: An den beiden Stellen, an denen „wähle“ steht, ist es für die Korrektheit des Verfahrens nicht wichtig, welche Wahl man trifft, sofern sie den angegebenen Bedingungen entspricht.

Geben Sie die Werte der Variablen x_k und y_k , für $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, nach der Berechnung des minimalen Spannbaums des Graphen



mit dem obigen Algorithmus an, wobei im allerersten Schritt als x_0 der Knoten a gewählt werde.

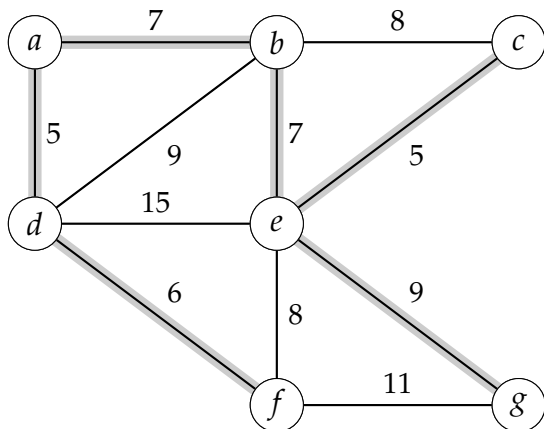
Lösung 10.3

$x_1 = a, y_1 = d,$
 $x_2 = d, y_2 = f,$
 $x_3 = a, y_3 = b,$
 $x_4 = b, y_4 = e,$

$x_5 = e, y_5 = c,$

$x_6 = e, y_6 = g$

In der folgenden Darstellung bilden alle Knoten zusammen mit den hellgrau hinterlegten Kanten den minimalen Spannbaum, den der Algorithmus mit der Wahl $x_0 = a$ berechnet:



Korrektur: Die Zahlen wurden so gewählt, dass der minimale Spannbaum eindeutig ist. Da nur die Angabe der (x_k, y_k) verlangt war (und kein Bild) ist die Korrektur hoffentlich schnell möglich.

Problematisch wird es, wenn jemand schon bei der ersten oder zweiten Kante einen Fehler gemacht hat. Dann sollten Sie bitte gucken, ob der Rest „nur“ Folgefehler sind. Für letztere nichts abziehen (sofern die Aufgabe nicht signifikant leichter wurde).

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Es sei $G = (\mathbb{Z}_n, E)$ ein gerichteter Graph und es sei A die Adjazenzmatrix von G . Wir nummerieren die Zeilen und Spalten von A mit 0 beginnend durch und bezeichnen für jedes $i \in \mathbb{Z}_n$ und jedes $j \in \mathbb{Z}_n$ mit $A_{i,j}$ den Eintrag von A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte. Die Matrix A heißt genau dann

- *hohl*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n: A_{i,i} = 0;$$

- *symmetrisch*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \forall j \in \mathbb{Z}_n: A_{i,j} = A_{j,i};$$

- *strikte obere Dreiecksmatrix*, wenn

$$\forall i \in \mathbb{Z}_n \forall j \in \mathbb{Z}_{i+1}: A_{i,j} = 0;$$

- *hohle (2×2) -Blockmatrix*, wenn

$$\exists k \in \mathbb{Z}_n: (\forall (i,j) \in \mathbb{Z}_k^2: A_{i,j} = 0) \wedge (\forall (i,j) \in (\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_k)^2: A_{i,j} = 0).$$

Der Graph G heißt genau dann

- *bipartit*, wenn es zwei Teilmengen A und B von V gibt so, dass $A \cap B = \{\}$ und $E \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$;
- *zyklenfrei* oder *DAG*, wenn es keine Zyklen in G gibt;

- *schlingenfrei*, wenn es keine Schlingen in G gibt;
- *richtungslos*, wenn für jedes $(v, w) \in E$ gilt $(w, v) \in E$.

Beantworten Sie mit jeweils einem Wort die folgenden Fragen:

- Falls A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat G ?
- Falls A eine hohle (2×2) -Blockmatrix ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat G ?
- Falls G schlingenfrei ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat A ?
- Falls G richtungslos ist, welche der oben genannten Eigenschaften hat A ?

Lösung 10.4

- a) zyklensfrei b) bipartit c) hohl d) symmetrisch