Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 8

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 16. Dezember 2015

Abgabe: 8. Januar 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 8:	/ 142	(Physik: 119)

Vorbemerkung. Für alle Aufgaben auf diesem Blatt gelten die folgenden Annahmen, ohne dass sie jedes Mal erneut aufgeführt werden:

- Die Menge der möglichen Werte für eine Variable ist $\mathbb{Z}$, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist.
- Alle Variablen sind initialisiert. Der Anfangswert ist aber nicht immer explizit angegeben.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Nachbedingung Q heißt P eine *schwächste Vorbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P'\}\ S\ \{Q\}$ gilt: P' impliziert P.
- Zu einer Anweisungsfolge S und einer Vorbedingung P heißt Q eine *stärkste Nachbedingung*, wenn $\{P\}\ S\ \{Q\}$ ein gültiges Hoare-Tripel ist und für jedes gültige Hoare-Tripel $\{P\}\ S\ \{Q'\}$ gilt: Q impliziert Q'.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Es seien x und y zwei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Bestimmen Sie anhand des Hoare-Kalküls eine schwächste Vorbedingung von

$$\begin{aligned}
&x \leftarrow x + y\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = a \land y = b\}
\end{aligned}$$

indem Sie wiederholt das Zuweisungsaxiom verwenden.

Lösung 8.1

Eine schwächste Vorbedingung ist $((x + y) \cdot (x + y)) - y = a \land y = b$.

Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{aligned}
&\{x - y = a \land y = b\}\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = a \land y = b\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\{(x \cdot x) - y = a \land y = b\}\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&\{x - y = a \land y = b\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\{((x + y) \cdot (x + y)) - y = a \land y = b\}\\
&x \leftarrow x + y\\
&\{x \cdot x - y = a \land y = b\}
\end{aligned}$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x + y\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = c \wedge y = d\}
\end{aligned}
$$

Somit ist $((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b$ eine Vorbedingung. Und diese ist tatäschlich eine schwächste.

Alternativ alles hintereinander weg:

$$
\begin{aligned}
&\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x + y\\
&\{x \cdot x - y = a \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&\{x - y = a \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = a \wedge y = b\}
\end{aligned}
$$

Statt $\{((x+y)\cdot(x+y)) - y = a \wedge y = b\}$ kann natürlich auch etwas Äquivalentes stehen.

Korrektur: Was man *nicht* möchte ist Einsetzen von oben nach unten:

$$
\begin{aligned}
&\{x = -b \pm \sqrt{a+b} \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x + y\\
&\{x = \pm\sqrt{a+b} \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x \cdot x\\
&\{x = a + b \wedge y = b\}\\
&x \leftarrow x - y\\
&\{x = a \wedge y = b\}
\end{aligned}
$$

Erlaubt ist, beim Einsetzen von unten nach oben die arithmetischen Ausdrücke ab und zu *explizit* „vereinfachen“, d. h. zwei Zusicherungen hintereinander und die untere folgt aus der darüber.

Vorschlag: je 1 Punkt für jede Zusicherung

Aufgabe 8.2 (6 Punkte)

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen und es seien a und b zwei ganze Zahlen. Weiter sei

$$
\begin{aligned}
\min\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z},\\
(u, v) &\mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u < v,\\ v, & \text{falls } u \geq v,\end{cases}
\end{aligned}
$$

und es sei

$$\begin{aligned}\max\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z},\\ (u, v) &\mapsto u + v - \min(u, v).\end{aligned}$$

Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls, dass das Hoare-Tripel

$$\begin{aligned}
&\{x = a \wedge y = b\}\\
&\textbf{if } x > y \textbf{ then}\\
&\qquad z \leftarrow x\\
&\qquad x \leftarrow y\\
&\qquad y \leftarrow z\\
&\textbf{else}\\
&\qquad x \leftarrow x\\
&\textbf{fi}\\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}$$

gültig ist.

Lösung 8.2
Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{aligned}
&\{x = \min(a, b) \wedge z = \max(a, b)\}\\
&y \leftarrow z\\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \wedge z = \max(a, b)\}\\
&x \leftarrow y\\
&\{x = \min(a, b) \wedge z = \max(a, b)\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \wedge x = \max(a, b)\}\\
&z \leftarrow x\\
&\{y = \min(a, b) \wedge z = \max(a, b)\}
\end{aligned}$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{aligned}
&\{y = \min(a, b) \wedge x = \max(a, b)\}\\
&z \leftarrow x\\
&x \leftarrow y\\
&y \leftarrow z\\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x = a \wedge y = b \wedge x > y$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{x = a \wedge y = b \wedge x > y\} \\
&z \leftarrow x \\
&x \leftarrow y \\
&y \leftarrow z \\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Gemäß des Zuweisungsaxioms ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\} \\
&x \leftarrow x \\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x = a \wedge y = b \wedge \neg(x > y)$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{x = a \wedge y = b \wedge \neg(x > y)\} \\
&x \leftarrow x \\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Gemäß der Verzweigungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{aligned}
&\{x = a \wedge y = b\} \\
&\textbf{if } x > y \textbf{ then} \\
&\qquad z \leftarrow x \\
&\qquad x \leftarrow y \\
&\qquad y \leftarrow z \\
&\textbf{else} \\
&\qquad x \leftarrow x \\
&\textbf{fi} \\
&\{x = \min(a, b) \wedge y = \max(a, b)\}
\end{aligned}
$$

Da ausschließlich gültige Hoare-Tripel ableitbar sind, ist obiges Hoare-Tripel gültig.
Korrektur: Vorschlag: 4 Punkte für den **then**-Teil und 2 für den **else**-Teil.

Aufgabe 8.3 (8 Punkte)
Für jede positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_+$ ist der ganzzahlige binäre Logarithmus von n, geschrieben $\lfloor \log_2 n \rfloor$, jene nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die $2^k \leq n < 2^{k+1}$ gilt.

Es seien x, y und z drei verschiedene Variablen. Beweisen Sie anhand des Hoare-Kalküls und mithilfe einer Schleifeninvariante, dass das Hoare-Tripel

$$\begin{array}{l} \{x \geq 1\} \\ z \leftarrow 0 \\ y \leftarrow 1 \\ \textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\ \quad z \leftarrow z + 1 \\ \quad y \leftarrow 2 \cdot y \\ \textbf{od} \\ \{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\} \end{array}$$

gültig ist.

Hinweis: Die Nachbedingung $z = \lfloor \log_2 x \rfloor$ ist äquivalent zu $2^z \leq x < 2^{z+1}$.

Lösung 8.3

Gemäß des Zuweisungsaxioms sind die folgenden Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{array}{l} \{x \geq 1 \wedge 1 = 1 \wedge z = 0\} \\ y \leftarrow 1 \\ \{x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0\} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{l} \{x \geq 1 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0\} \\ z \leftarrow 0 \\ \{x \geq 1 \wedge 1 = 1 \wedge z = 0\} \end{array}$$

Gemäß der Sequenzenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{array}{l} \{x \geq 1 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0\} \\ z \leftarrow 0 \\ y \leftarrow 1 \\ \{x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0\} \end{array}$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x \geq 1$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{array}{l} \{x \geq 1\} \\ z \leftarrow 0 \\ y \leftarrow 1 \\ \{x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0\} \end{array}$$

Um zu beweisen, dass das Hoare-Tripel aus der Aufgabenstellung ableitbar, insbesondere gültig, ist, genügt es, gemäß der Sequenzenregel, zu beweisen, dass das folgende Hoare-Tripel ableitbar ist:

$$\begin{array}{l}\{x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0\} \\ \textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\ \qquad z \leftarrow z + 1 \\ \qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\ \textbf{od} \\ \{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}\end{array}$$

Dazu raten wir die Schleifeninvariante $y = 2^z \wedge y \leq x$. Diese Formel ist tatsächlich eine Schleifeninvariante, da durch zweifache Anwendung des Zuweisungsaxioms und einfache Anwendung der Sequenzenregel folgt, dass

$$\begin{array}{l}\{2 \cdot y = 2^{z+1} \wedge 2 \cdot y \leq x\} \\ z \leftarrow z + 1 \\ y \leftarrow 2 \cdot y \\ \{y = 2^z \wedge y \leq x\}\end{array}$$

ableitbar ist, und durch einfach Anwendung der Verstärkungs- und Abschwächungsregel folgt, dass

$$\begin{array}{l}\{y = 2^z \wedge y \leq x \wedge 2 \cdot y \leq x\} \\ z \leftarrow z + 1 \\ y \leftarrow 2 \cdot y \\ \{y = 2^z \wedge y \leq x\}\end{array}$$

ableitbar ist. Gemäß der Schleifeninvariantenregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$\begin{array}{l}\{y = 2^z \wedge y \leq x\} \\ \textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\ \qquad z \leftarrow z + 1 \\ \qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\ \textbf{od} \\ \{y = 2^z \wedge y \leq x \wedge \neg(2 \cdot y \leq x)\}\end{array}$$

Die Vorbedingung dieses Hoare-Tripels wird impliziert von $x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0$ und die Nachbedingung impliziert $2^z \leq x < 2^{z+1}$, also gemäß der Hinweises $z = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Gemäß der Verstärkungs- und Abschwächungsregel ist das folgende Hoare-Tripel ableitbar:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\qquad z \leftarrow z + 1 \\
\qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\textbf{od} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$

Alternativ notiert alles hintereinander weg:

$$
\begin{array}{l}
\{x \geq 1\} \\
\{1 = 2^0 \wedge 1 \leq x\} \\
z \leftarrow 0 \\
\{1 = 2^z \wedge 1 \leq x\} \\
y \leftarrow 1 \\
\{y = 2^z \wedge y \leq x\} \\
\textbf{while } 2 \cdot y \leq x \textbf{ do} \\
\qquad \{y = 2^z \wedge y \leq x \wedge 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad \{2 \cdot y = 2^{z+1} \wedge 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad z \leftarrow z + 1 \\
\qquad \{2 \cdot y = 2^z \wedge 2 \cdot y \leq x\} \\
\qquad y \leftarrow 2 \cdot y \\
\qquad \{y = 2^z \wedge y \leq x\} \\
\textbf{od} \\
\{y = 2^z \wedge y \leq x \wedge \neg(2 \cdot y \leq x)\} \\
\{y = 2^z \wedge y \leq x \wedge x < 2 \cdot y\} \\
\{2^z \leq x < 2^{z+1}\} \\
\{z = \lfloor \log_2 x \rfloor\}
\end{array}
$$

Korrektur: Vorschlag:

- 1 Punkt für den Teil vor dem **while**
- 3 Punkte für vernünftige Schleifeninvariante,
- 1 Punkt für richtige Benutzung der Schleifeninvariante,
- 2 Punkte für den Rest des Schleifenrumpfes
- 1 Punkte für richtige Argumentation nach dem Schleifenrumpf