12 KONTEXTFREIE GRAMMATIKEN

12.1 REKURSIVE DEFINITION SYNTAKTISCHER STRUKTUREN

12.2 KONTEXTFREIE GRAMMATIKEN

Beispielgrammatiken

- Bitte auf den Unterschied zwischen dem einfachen Pfeil → bei Produktionen und dem Doppelpfeil ⇒ bei Ableitungsschritten achten (kann doch nicht so schwer sein, die Vorlesung ist doch so leicht ;=))

  Beachte: Wenn $w_1 \to w_2$ gilt, dann auch $w_1 \Rightarrow w_2$, aber nicht unbedingt umgekehrt, wie man an der Grammatik $(\{X, Y\}, \{\mathtt{a}\}, X\{X \to Y, Y \to \mathtt{a}\})$ sieht:
  - Es gilt z.B. $XY \Rightarrow X\mathtt{a}$, aber es gibt keine Produktion $XY \to X\mathtt{a}$
- arbeiten Sie ein bisschen mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \to \varepsilon \mid \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}X\})$
  - Was kann man alles ableiten? ε, $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{aa}$, ...
  - aha: alle Wörter überhaupt: $L(G) = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$
- Gibt es auch eine Grammatik G mit $L(G) = \{\}$?
  - suchen lassen ...
  - z. B. $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{X \to X\})$.
  - wir haben sogar leere Produktionenmenge zugelassen: $(\{X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, X, \{\})$ tuts auch.
  - allerdings: leere Alphabete haben wir verboten, also $(\{X\}, \{\}, X, P)$ geht *nicht*.
- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, X, \{X \to XX \mid \mathtt{(}X\mathtt{)} \mid \varepsilon\}$
  - man mache Beispielableitungen
    - erste einfache wie $X \Rightarrow \mathtt{(}X\mathtt{)} \Rightarrow \mathtt{((}X\mathtt{))} \Rightarrow \mathtt{(((}X\mathtt{)))} \Rightarrow \mathtt{((((}X\mathtt{))))} \Rightarrow \mathtt{(((())))}$ oder
    - $X \Rightarrow XX \Rightarrow XXX \Rightarrow XXXX \Rightarrow XXXXX$ und dann irgendwie weiter
  - Welche Wörter w sind ableitbar?
    - anschaulich: ableitbar sind genau die *„wohlgeformten Klammerausdrücke"*
    - jedenfalls gleich viele $\mathtt{(}$ und $\mathtt{)}$: $N_{\mathtt{(}}(w) = N_{\mathtt{)}}(w)$
    - Das ist aber nur notwendig aber nicht hinreichend für Ableitbarkeit, denn $\mathtt{)(}$ ist z. B. nicht ableitbar.
    - Man diskutiere die Adjektive *„notwendig"* und *„hinreichend"*.
    - zusätzliche Eigenschaften? erst mal raten/ nachdenken/ rumprobieren lassen
    - aha: für jedes Präfix (es heißt *das* Präfix) v eines $w \in L(G)$ gilt: $N_{\mathtt{(}}(v) \geq N_{\mathtt{)}}(v)$

      Das kann man sich gerade noch klar machen; aber der Beweis, dass man damit eine notwendige und hinreichende Bedingung für Ableitbarkeit hat, also eine Charakterisierung der Klammerausdrücke, ist wohl zu schwierig; ich sehe jedenfalls auf Anhieb keine vernünftige Erklärung.
- Man arbeite mit $G = (\{X\}, \{\mathtt{(}, \mathtt{)}\}, X, \{X \to \mathtt{(}X\mathtt{)}X \mid \varepsilon\})$.
  - siehe da: auch damit sind genau die wohlgeformten Klammerausdrücke ableitbar

- Man mache sich klar, warum ...
- Und dann auch Grammatiken konstruieren *lassen*, z. B. für die folgenden formalen Sprachen über dem Alphabet $T = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.
  - die Menge aller Wörter über T, in denen irgendwo das Teilwort `baa` vorkommt, z. B. so: $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \to Y\mathtt{baa}Y, Y \to \mathtt{a}Y|\mathtt{b}Y|\varepsilon\}$
  - die Menge aller Wörter $w \in T^*$ mit der Eigenschaft, dass für alle Präfixe v von w gilt: $|N_\mathtt{a}(v) - N_\mathtt{b}(v)| \le 1$.
    - Man überlege sich erst mal, welche Struktur Wörter der Länge 2, 4, ... haben: wenn ich das richtig sehe: $\{\mathtt{ab}, \mathtt{ba}\}^*$
    - Also leistet die Grammatik $(\{X, Y\}, T, X, P)$ mit $P = \{X \to \mathtt{ab}X|\mathtt{ba}X|\mathtt{a}|\mathtt{b}|\varepsilon\}$ das Gewünschte.
- **Achtung**: bitte nicht aus Versehen mit Grammatiken bzw. formalen Sprachen vom Aufgabenblatt 5 rumspielen

Infixschreibweise von Relationen

- das kennt jeder von $x \le y$ etc.
- sicherstellen, dass das klar ist: xRy ist nichts anderes als $(x, y) \in R$

Unterschied $\Rightarrow$ **versus** $\Rightarrow^*$

- bitte sicherstellen, dass der Unterschied zwischen $\Rightarrow$, also *„genau ein Schritt“*, und $\Rightarrow^*$, also *„eine beliebige Anzahl Schritte“* klar ist.

12.3 RELATIONEN (TEIL 2)

- Standard-Definitionen aus der Vorlesung
  - für $R \subseteq M_1 \times M_2$ und $S \subseteq M_2 \times M_3$:
    $S \circ R = \{(x, z) \in M_1 \times M_3 \mid \exists y \in M_2 : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
  - $\mathrm{I}_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$
  - $R^0 = \mathrm{I}_M$ und $\forall i \in \mathbb{N}_0 : R^{i+1} = R \circ R^i$
  - $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$
- reflexive und transitive Relationen:
  - Definitionen klar machen:
    - Beispiel: Gleichheit von Zahlen
    - Beispiel: $\le$
    - Beispiel: Reihenfolge der Wörter im Duden (o.ä.)
      - **Achtung:** Wir haben Asiaten in der Vorlesung; *langsam* anfangen (oder wissen Sie, wie in Japan Wörter sortiert werden?)
  - Wenn man eine Relation hin malt: Elemente $x, y \in M$ als Punkte und einen Pfeil von x nach y, falls xRy:
    - Wie sieht das Bild aus, wenn die Relation reflexiv ist? Schlingen.
    - Wie, wenn sie transitiv ist? (schwieriger zu beschreiben; nur Beispiele ansehen; Wenn man man einen Zyklus dabei hat: jeder mit jedem verbunden)
- z. B. in der Vorlesung offen gelassen:
  - Es sei R eine beliebige Relation und S eine Relation, die reflexiv und transitiv ist. Wenn $R \subseteq S$, dann ist sogar $R^* \subseteq S$.
  - Man beweise das, indem man durch vollständige Induktion zeigt: Für alle $i \in \mathbb{N}_0$: Wenn $R \subseteq S$, dann $R^i \subseteq S$.

12.4 Ein Nachtrag zu Wörtern

Schreibweise $N_x(w)$

- aus der Vorlesung: für alle Alphabete A und alle $x \in A$ Funktionen $N_x : A^* \to \mathbb{N}_0$, die wie folgt festgelegt sind:

$$N_x(\varepsilon) = 0$$

$$\forall y \in A : \forall w \in A^* : N_x(yw) = \begin{cases} 1 + N_x(w) & \text{falls } y = x \\ N_x(w) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

$N_x(w)$ gibt an, wie oft x in w vorkommt. Fragen, ob das klar ist.