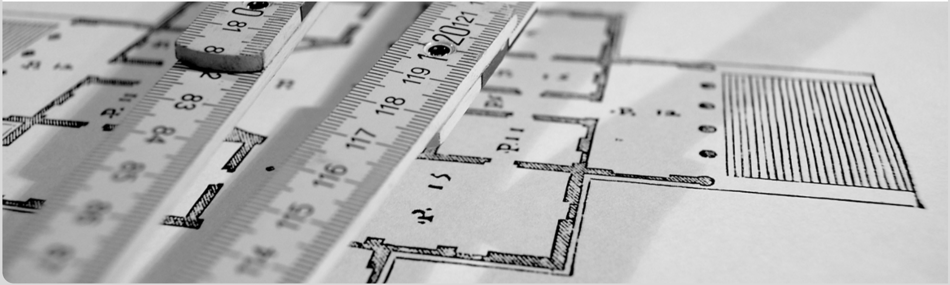
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 2 | 04.11.2016
Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

Induktive Definitionen

Relationen

Wörter

Organisatorisches

- Nächsten Donnerstag: Abgabe des ersten Übungsblattes! (Achtung: Bei nachfolgenden Blättern werde ich nicht mehr auf die Abgabe hinweisen!)
- Übungsblätter: Werde ich zwei Mal mitbringen, danach können sie beim Dozenten abgeholt werden (aber erst eine Woche später!)
- Noch einmal der Hinweis: Wir machen hier einiges weniger formal als in der Vorlesung. Das heißt nicht, dass das formale vorgehen nicht wichtig ist.
- Und noch ein Hinweis: Auch wenn ich versuche, Fehler zu vermeiden, sind diese Folien unter Garantie nicht fehlerfrei. Für die Klausur gelten ausschließlich die Vorlesungsfolien.

In the previous episode of GBI...

Zurück zu unserem Problem

Ordnen wir diese in eine Teilmenge M für Filme/Serien und jeweils eine Teilmenge A_m für die Schauspieler eines Films $m \in M$.

$M = \{$ The Imitation Game, Sherlock, Zurück in die Zunkunft $\}$

$A_{Sherlock} = \{$ Benedict Cumberbatch, Martin Freeman, Mark Gatiss $\}$
$A_{ImitationGame} = \{$ Benedict Cumberbatch, Keira Knightley $\}$
$A_{BTTF} = \{$ Michael Fox, Christopher Lloyd, Lea Thompson, Crispin Glover $\}$

Ordnung durch Mengen, Teilmengen, **Paare**

Zurück zu unserem Problem

Ordnen wir diese in eine Teilmenge M für Filme/Serien und jeweils eine Teilmenge A_m für die Schauspieler eines Films $m \in M$.

$M = \{$ The Imitation Game, Sherlock, Zurück in die Zunkunft $\}$

$A_{Sherlock} = \{$ Benedict Cumberbatch, Martin Freeman, Mark Gatiss $\}$
$A_{ImitationGame} = \{$ Benedict Cumberbatch, Keira Knightley $\}$
$A_{BTTF} = \{$ Michael Fox, Christopher Lloyd, Lea Thompson, Crispin Glover $\}$

Ordnung durch Mengen, Teilmengen, **Paare**
(The Imiatation Game, Benedict Cumberbatch), (BTTF, Michael Fox), ...

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W

Wahr oder Falsch?

- $|\,\emptyset\,| = 0$ W
- $|\,\{\{\,\}\}\,| = 0$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\}\}| = 0$ F: $|\{\{\}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\,\}\}| = 0$ F: $|\{\{\,\}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Wahr oder Falsch?

- $|\,\emptyset\,| = 0$ W
- $|\,\{\{\,\}\}\,| = 0$ F: $|\,\{\{\,\}\}\,| = |\,\{\emptyset\}\,| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\ \}\}| = 0$ F: $|\{\{\ \}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W
- $(1, 2) = (2, 1)$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\ \}\}| = 0$ F: $|\{\{\ \}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W
- $(1, 2) = (2, 1)$ F

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\ \}\}| = 0$ F: $|\{\{\ \}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W
- $(1, 2) = (2, 1)$ F
- $(M \cup A) \setminus M = A$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\ \}\}| = 0$ F: $|\{\{\ \}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W
- $(1, 2) = (2, 1)$ F
- $(M \cup A) \setminus M = A$ F: $M = A = \{1\}$

Wahr oder Falsch?

- $|\emptyset| = 0$ W
- $|\{\{\}\}| = 0$ F: $|\{\{\}\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ W
- $(1, 2) = (2, 1)$ F
- $(M \cup A) \setminus M = A$ F: $M = A = \{1\}$

Bemerkungen

Ob Menge oder Tupel: Auf die Klammern kommt es an!
Trivialbeispiele helfen oftmals wirklich!

Induktive Definitionen

Relationen

Wörter

Zum Aufwärmen: Domino

3 Dominosteine sind mit gleichem Abstand (kleiner halbe Größe) in einer Reihe aufgestellt. Wir stoßen den ersten Stein der Reihe in Richtung des zweiten Steins um.
Wird der dritte Stein umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Zum Aufwärmen: Domino

3 Dominosteine sind mit gleichem Abstand (kleiner halbe Größe) in einer Reihe aufgestellt. Wir stoßen den ersten Stein der Reihe in Richtung des zweiten Steins um.
Wird der dritte Stein umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Nun stehen (abzählbar) unendlich viele Dominosteine wie oben hintereinander. Wieder stoßen wir den ersten Stein um.
Wird jeder Stein irgendwann umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Zum Aufwärmen: Domino

3 Dominosteine sind mit gleichem Abstand (kleiner halbe Größe) in einer Reihe aufgestellt. Wir stoßen den ersten Stein der Reihe in Richtung des zweiten Steins um.
Wird der dritte Stein umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Nun stehen (abzählbar) unendlich viele Dominosteine wie oben hintereinander. Wieder stoßen wir den ersten Stein um.
Wird jeder Stein irgendwann umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Werden irgendwann alle Steine umgefallen sein?

Zum Aufwärmen: Domino

3 Dominosteine sind mit gleichem Abstand (kleiner halbe Größe) in einer Reihe aufgestellt. Wir stoßen den ersten Stein der Reihe in Richtung des zweiten Steins um.
Wird der dritte Stein umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Nun stehen (abzählbar) unendlich viele Dominosteine wie oben hintereinander. Wieder stoßen wir den ersten Stein um.
Wird jeder Stein irgendwann umfallen? Kann man das (einfach) beweisen?

Werden irgendwann alle Steine umgefallen sein?
Nein, denn für jeden Zeitpunkt können wir (mindestens) einen Stein angeben, der noch nicht umgefallen ist.

Induktive Definition

Betrachten wir die *Fibonacci*-Reihe. Es gilt

$$\mathcal{F}_0 = 0$$
$$\mathcal{F}_1 = 1$$
$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

Induktive Definition

Betrachten wir die *Fibonacci*-Reihe. Es gilt

$$\mathcal{F}_0 = 0$$
$$\mathcal{F}_1 = 1$$
$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{F}_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Induktive Definition

Betrachten wir die *Fibonacci*-Reihe. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= 0 \\ \mathcal{F}_1 &= 1 \\ \mathcal{F}_{n+2} &= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{F}_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Wohldefiniertheit:

- Für alle Fälle etwas definieren
- Nicht für einen Fall widersprüchliches definieren

Induktive Definitionen

Relationen

Wörter

Kartesisches Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zwischen zwei Mengen M und N ist definiert als

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

Induktiv definiert man das kartesische Produkt beliebig vieler Mengen (VL).
Es enthält n-Tupel der Form $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Kartesisches Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zwischen zwei Mengen M und N ist definiert als

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

Induktiv definiert man das kartesische Produkt beliebig vieler Mengen (VL).
Es enthält n-Tupel der Form $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Beispiel

$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Für jede Menge M gilt: $M \times \emptyset =$

Kartesisches Produkt

Definition

Das **kartesische Produkt** zwischen zwei Mengen M und N ist definiert als

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

Induktiv definiert man das kartesische Produkt beliebig vieler Mengen (VL).
Es enthält n-Tupel der Form $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

Beispiel

$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$
$\{0, 1\}^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Für jede Menge M gilt: $M \times \emptyset = \emptyset$

Relationen

Definition

Sind A und B zwei Mengen, so beschreibt eine Relation R eine Teilmenge der Paare (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$.

$$R \subseteq A \times B$$

Meist ist diese Relationszugehörigkeit implizit durch eine Vorschrift gegeben. Zwei Elemente $a \in A$, $b \in B$ stehen in der Relation R zueinander, wenn $(a, b) \in R$.

Relationen

Definition

Sind A und B zwei Mengen, so beschreibt eine Relation R eine Teilmenge der Paare (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$.

$$R \subseteq A \times B$$

Meist ist diese Relationszugehörigkeit implizit durch eine Vorschrift gegeben. Zwei Elemente $a \in A$, $b \in B$ stehen in der Relation R zueinander, wenn $(a, b) \in R$.

Beispiel

Betrachten wir die Relation $\leqslant$ auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.
Dann gilt $\leqslant = \{(m, n) \mid m \leqslant n\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), ...\}$

Relationen

Beispiel

$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_0$

$\cdot\ = \{(n, m, r) \in P \mid n * m = r\} \subseteq P$

Relationen

Beispiel

$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_0$

$\cdot\ = \{(n, m, r) \in P \mid n * m = r\} \subseteq P$

$\cdot\ = \{(0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 2), (6, 7, 42)...\}$

$(-1, 1, -1), (42, 0, 0) \notin \cdot$

Relationen

Beispiel

$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_0$

$\cdot\ = \{(n, m, r) \in P \mid n * m = r\} \subseteq P$

$\cdot\ = \{(0, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 2), (6, 7, 42) \ldots\}$

$(-1, 1, -1), (42, 0, 0) \notin \cdot$

Immer auf die Grundmenge achten!

Eigenschaften von Relationen

Totalität

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn es für jedes Element $a \in A$ ein zugehöriges Element $b \in B$ gibt, mit

$$(a, b) \in R$$

Für rechtstotal gilt die analoge Aussage.

Eigenschaften von Relationen

Totalität

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkstotal, wenn es für jedes Element $a \in A$ ein zugehöriges Element $b \in B$ gibt, mit

$$(a, b) \in R$$

Für rechtstotal gilt die analoge Aussage.

Eindeutigkeit

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt linkseindeutig, wenn für jedes Element $b \in B$ und $a_1, a_2 \in A$ mit

$$(a_1, b) \in R \text{ und } (a_2, b) \in R$$

gilt $a_1 = a_2$.
Für rechtseindeutig gilt die analoge Aussage.

Aufgabe (WS 2010) Teil 1

Es sei A die Menge aller Kinobesucher in einer Vorstellung und B die Menge aller Sitzplätze. Die Relation R ordnet den Kinobesuchern die Sitzplätze zu:

$$R \subseteq A \times B$$

- Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

Lösung

Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

Lösung

Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

linkstotal: jedem Kinobesucher wird mindestens ein Sitzplatz zugeteilt

Lösung

Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

linkstotal: jedem Kinobesucher wird mindestens ein Sitzplatz zugeteilt
linkseindeutig: jeder Sitzplatz ist von höchstens einem Kinobesucher belegt

Lösung

Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

linkstotal: jedem Kinobesucher wird mindestens ein Sitzplatz zugeteilt
linkseindeutig: jeder Sitzplatz ist von höchstens einem Kinobesucher belegt
rechtstotal: jeder Sitzplatz ist von mindestens einem Kinobesucher belegt

Lösung

Was bedeutet es im Kino, wenn R linkstotal, linkseindeutig, rechtstotal, rechtseindeutig ist?

linkstotal: jedem Kinobesucher wird mindestens ein Sitzplatz zugeteilt
linkseindeutig: jeder Sitzplatz ist von höchstens einem Kinobesucher belegt
rechtstotal: jeder Sitzplatz ist von mindestens einem Kinobesucher belegt
rechtseindeutig: kein Kinobesucher belegt mehr als einen Sitzplatz

Funktionen

Definition

Ist eine Relation $f \subseteq A \times B$ rechtseindeutig und linkstotal, so nennt man sie **Funktion** oder **Abbildung** mit **Wertebereich** A und **Zielbereich** B.

Man schreibt

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b \text{ oder } f(a) = b \end{aligned}$$

Funktionen

Definition

Ist eine Relation $f \subseteq A \times B$ rechtseindeutig und linkstotal, so nennt man sie **Funktion** oder **Abbildung** mit **Wertebereich** A und **Zielbereich** B.

Man schreibt

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b \text{ oder } f(a) = b \end{aligned}$$

Wichtig

Funktionen immer **vollständig** angeben, also Definitionsbereich, Zielbereich sowie Abbildungsvorschrift.
Auf die unterschiedlichen Pfeile achten (zwischen Definitions- und Zielbereich kein Strich am Ende des Pfeils)!

Funktionen

Definition

Eine linkseindeutige Funktion nennt man **injektiv**.
Eine rechtstotale Funktion nennt man **surjektiv**.
Erfüllt eine Funktion beide Eigenschaften, so nennt man sie **bijektiv**.

Beispiel

$$g : \{1, 2\} \to \{3, 4\}$$
$$1 \mapsto 3$$
$$2 \mapsto 4$$

Wir haben explizit eine vollständige Abbildungsvorschrift angegeben.
Als Relation geschrieben gilt $g = \{(1, 3), (2, 4)\}$, und g ist bijektiv.

Aufgabe (WS 2010) Teil 2

Es sei A die Menge aller Kinobesucher in einer Vorstellung und B die Menge aller Sitzplätze. Die Abbildung f ordnet den Kinobesuchern die Sitzplätze zu:

$$f : A \to B$$

- Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?
- In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, 6 Kinobesucher besuchten ein Kino mit 8 Plätzen. Zeichnen Sie eine injektive Abbildung f.

Lösung

Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?

Lösung

Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?

Da f eine Abbildung sein soll, muss sie linkstotal (jeder Besucher bekommt einen Platz) und rechtseindeutig (kein Besucher bekommt mehr als einen Platz) sein.

Lösung

Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?

Da f eine Abbildung sein soll, muss sie linkstotal (jeder Besucher bekommt einen Platz) und rechtseindeutig (kein Besucher bekommt mehr als einen Platz) sein.
Ein Kinobesucher möchte alleine auf seinen Platz sein. Also wünscht er sich eine injektive (linkseindeutige) Funktion.

Lösung

Was wünschen sich die Kinobesucher: Eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung auf die Sitzplätze? Was wünscht sich der Kinobesitzer?

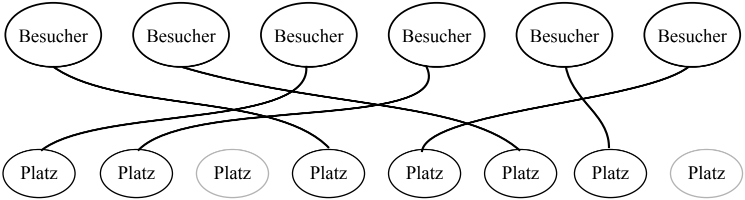
Da f eine Abbildung sein soll, muss sie linkstotal (jeder Besucher bekommt einen Platz) und rechtseindeutig (kein Besucher bekommt mehr als einen Platz) sein.
Ein Kinobesucher möchte alleine auf seinen Platz sein. Also wünscht er sich eine injektive (linkseindeutige) Funktion.
Der Kinobesitzer möchte, dass das Kino voll ist und jeder Sitzplatz belegt. Er wünscht sich also eine surjektive (rechtstotale) Funktion.

Lösung

In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, 6 Kinobesucher besuchten ein Kino mit 8 Plätzen. Zeichnen Sie eine injektive Abbildung f.

Lösung

In dieser Teilaufgabe nehmen wir an, 6 Kinobesucher besuchten ein Kino mit 8 Plätzen. Zeichnen Sie eine injektive Abbildung f.



Aufgabe 2

Was kann man über die Surjektivität, Injektivität, Bijektivität folgender Abbildungen sagen? Begründen Sie jeweils kurz.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$

(c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto \begin{cases} 42 & \text{wenn } x = 0 \\ x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Lösung

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
Diese Funktion ist weder injektiv ($f(-2) = f(2) = 4$) noch surjektiv (Es gibt kein x welches z.B. auf $-1 \in \mathbb{R}$ abgebildet wird). Somit auch nicht bijektiv.

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$

Lösung

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
Diese Funktion ist weder injektiv ($f(-2) = f(2) = 4$) noch surjektiv (Es gibt kein x welches z.B. auf $-1 \in \mathbb{R}$ abgebildet wird). Somit auch nicht bijektiv.

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$
Wir können zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ ein $x \in \mathbb{R}_+$ angeben, so dass $f(x) = y$: $x = \sqrt{y}$.
Die Funktion ist also surjektiv, und da dieses x eindeutig ist auch injektiv. Also ist die Funktion bijektiv.

(c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto \begin{cases} 42 & \text{wenn } x = 0 \\ x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$
Diese Funktion ist weder injektiv ($f(-2) = f(2) = 4$) noch surjektiv (Es gibt kein x welches z.B. auf $-1 \in \mathbb{R}$ abgebildet wird). Somit auch nicht bijektiv.

(b) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto x^2$
Wir können zu jedem $y \in \mathbb{R}_+$ ein $x \in \mathbb{R}_+$ angeben, so dass $f(x) = y$: $x = \sqrt{y}$.
Die Funktion ist also surjektiv, und da dieses x eindeutig ist auch injektiv. Also ist die Funktion bijektiv.

(c) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : x \mapsto \begin{cases} 42 & \text{wenn } x = 0 \\ x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$
Diese Funktion ist nicht injektiv ($f(0) = f(43) = 42$), aber surjektiv (Für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ gilt: $x + 1 \in \mathbb{N}_0$ und $f(x + 1) = x$). Somit nicht bijektiv.

Wahr oder Falsch?

Sei M eine beliebige endliche Menge und f eine Abbildung $f : M \to M$.

- Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv.
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv

Wahr oder Falsch?

Sei M eine beliebige endliche Menge und f eine Abbildung $f : M \to M$.

- Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv. W
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv

Wahr oder Falsch?

Sei M eine beliebige endliche Menge und f eine Abbildung $f : M \to M$.

- Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv. W
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv W

Wahr oder Falsch?

Sei M eine beliebige endliche Menge und f eine Abbildung $f : M \to M$.

- Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv. W
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv W
- Die beiden Aussagen gelten auch, wenn M nicht endlich ist.

Wahr oder Falsch?

Sei M eine beliebige endliche Menge und f eine Abbildung $f : M \to M$.

- Wenn f injektiv ist, dann ist f auch surjektiv. W
- Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv W
- Die beiden Aussagen gelten auch, wenn M nicht endlich ist. F

Gegenbeispiel im Unendlichen

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto 2 * n$
$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$

Induktive Definitionen

Relationen

Wörter

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.
- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist ein **endliche Folge von Zeichen** aus A

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.
- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist ein **endliche Folge von Zeichen** aus A
  Formal: Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Z}_n \to A$

  Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leqslant i < n\}$

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.
- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist ein **endliche Folge von Zeichen** aus A
  Formal: Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow A$

  Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leqslant i < n\}$

Definition

Ist A ein Alphabet, dann ist A^* die **Menge aller Wörter**, die nur Zeichen aus A enthalten, also:

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.
- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist ein **endliche Folge von Zeichen** aus A
  Formal: Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Z}_n \to A$

  Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leqslant i < n\}$

Definition

Ist A ein Alphabet, dann ist A^* die **Menge aller Wörter**, die nur Zeichen aus A enthalten, also:
A^* ist die Menge aller Abbildungen $w : \mathbb{Z}_n \to B$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $B \subseteq A$.

Wörter

Definition

- Ein **Alphabet** ist eine endliche Menge von Zeichen.
- Ein **Wort** w über einem Alphabet A ist ein **endliche Folge von Zeichen** aus A
  Formal: Eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Z}_n \to A$

  Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}_n = \{i \in \mathbb{N}_0 \mid 0 \leqslant i < n\}$

Definition

Ist A ein Alphabet, dann ist A^* die **Menge aller Wörter**, die nur Zeichen aus A enthalten, also:
A^* ist die Menge aller Abbildungen $w : \mathbb{Z}_n \to B$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $B \subseteq A$.

Beispiel

Sei $A = \{a, b\}$ ein Alphabet. Dann sind $w_1 = aabbabab$ und $w_2 = ab$ zwei mögliche Wörter. Es gilt also $w_1 \in A^*$, $w_2 \in A^*$

Das Leere Wort

Definition

Wir definieren das **leere Wort** als

$$\varepsilon := \mathbb{Z}_0 \to A \qquad \varepsilon := \{\} \to \{\}$$

Das Leere Wort

Definition

Wir definieren das **leere Wort** als

$$\varepsilon := \mathbb{Z}_0 \to A \qquad \varepsilon := \{\} \to \{\}$$

Es gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$ (Beweis: VL)

Das Leere Wort

Definition

Wir definieren das **leere Wort** als

$$\varepsilon := \mathbb{Z}_0 \to A \qquad \varepsilon := \{\} \to \{\}$$

Es gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$ (Beweis: VL)

Wichtig: Das leere Wort ist auch ein „echtes, gleichberechtigtes“ Wort. Die Null ist bei den natürlichen Zahlen ja auch nicht einfach „nichts“.

Das Leere Wort

Definition

Wir definieren das **leere Wort** als

$$\varepsilon := \mathbb{Z}_0 \to A \qquad \varepsilon := \{\} \to \{\}$$

Es gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$ (Beweis: VL)

Wichtig: Das leere Wort ist auch ein „echtes, gleichberechtigtes“ Wort. Die Null ist bei den natürlichen Zahlen ja auch nicht einfach „nichts“.

Ist $\varepsilon := \{\} \to \{\}$ eine Relation? Und eine Funktion? Ist es surjektiv?

Das Leere Wort

Definition

Wir definieren das **leere Wort** als

$$\varepsilon := \mathbb{Z}_0 \to A \qquad \varepsilon := \{\} \to \{\}$$

Es gilt $\varepsilon \circ w \circ \varepsilon = w$ (Beweis: VL)

Wichtig: Das leere Wort ist auch ein „echtes, gleichberechtigtes“ Wort. Die Null ist bei den natürlichen Zahlen ja auch nicht einfach „nichts“.

Ist $\varepsilon := \{\} \to \{\}$ eine Relation? Und eine Funktion? Ist es surjektiv?
Bemerkung: In der formalen Definition fordern wir die Surjektivität der Funktion, damit das leere Wort eindeutig ist!

Konkatenation

Sei $w_1 = \text{Schrank}$, $w_2 = \text{Schlüssel}$
Dann gilt $w_1 \circ w_2 = \text{SchrankSchlüssel} \neq w_2 \circ w_1 = \text{SchlüsselSchrank}$

Konkatenation

Sei $w_1 = \text{Schrank}$, $w_2 = \text{Schlüssel}$
Dann gilt $w_1 \circ w_2 = \text{SchrankSchlüssel} \neq w_2 \circ w_1 = \text{SchlüsselSchrank}$
Konkatenation ist also **nicht kommutativ!**
Ist sie **assoziativ**?

Konkatenation

Sei $w_1 = \text{Schrank}$, $w_2 = \text{Schlüssel}$
Dann gilt $w_1 \circ w_2 = \text{SchrankSchlüssel} \neq w_2 \circ w_1 = \text{SchlüsselSchrank}$
Konkatenation ist also **nicht kommutativ!**
Ist sie **assoziativ**? Ja!

Beobachtung

Falls $w = w_1 \circ w_2$ und $w_1 \in A^*$, $w_2 \in B^*$, dann gilt $w \in (A \cup B)^*$

Mehrfachkonkatenation

$$w^0 = \varepsilon$$
$$w^k = \underbrace{w \circ w \circ \cdots \circ w}_{k-mal}$$

Länge von Wörtern

Definition

Unter der **Länge** eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, aus der das Wort besteht.

Beispiel

$|\text{hallo}| =$

Länge von Wörtern

Definition

Unter der **Länge** eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, aus der das Wort besteht.

Beispiel

$|\text{hallo}| = 5$
$|\varepsilon| =$

Länge von Wörtern

Definition

Unter der **Länge** eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, aus der das Wort besteht.

Beispiel

$|\text{hallo}| = 5$
$|\varepsilon| = 0$

Länge von Wörtern

Definition

Unter der **Länge** eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, aus der das Wort besteht.

Beispiel

$|\mathrm{hallo}| = 5$
$|\varepsilon| = 0$

Lemma

$$|a \circ b| = |a| + |b|$$

Länge von Wörtern

Definition

Unter der **Länge** eines Wortes versteht man die Anzahl der Zeichen, aus der das Wort besteht.

Beispiel

$|\text{hallo}| = 5$
$|\varepsilon| = 0$

Lemma

$$|a \circ b| = |a| + |b|$$

Lemma

$$|w^k| = k|w|$$

Wörter

A^n: *Menge aller Wörter der Länge n* über dem Alphabet A.
Wie kann man damit A^* ausdrücken?

Wörter

A^n: *Menge aller Wörter der Länge n* über dem Alphabet A.
Wie kann man damit A^* ausdrücken?

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$$

Wörter

A^n: *Menge aller Wörter der Länge n* über dem Alphabet A.
Wie kann man damit A^* ausdrücken?

$$A^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} A^i$$

Rückblick

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ so, dass } x \in M_i\}$$

Aufgabe

- Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?
- Ist das Wort $w = \mathbf{aabb} \cdot \mathbf{ba}$ ein Element der Menge A^5?
- Was ist $A^2 \times A^2$?
  Wir definieren die Abbildung $f : A^* \times A^* \to A^*, \ (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$
  Was ist $f(A^2 \times A^2)$?

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?

Aus A lassen sich z.B. die Wörter

$$\text{a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, } \ldots$$

bilden. Die Menge A^* enthält gerade diese Wörter.

Lösung

Welche Wörter lassen sich aus dem Alphabet $A = \{a, b\}$ bilden? Was enthält die Menge A^*?

Aus A lassen sich z.B. die Wörter

$$\text{a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, } \ldots$$

bilden. Die Menge A^* enthält gerade diese Wörter.
Beachte: Auch ε ist in A^*!

Lösung

Ist das Wort $w = \mathbf{aabb} \cdot \mathbf{ba}$ *ein Element der Menge* A^5*?*

Lösung

Ist das Wort $w = \mathbf{aabb} \cdot \mathbf{ba}$ *ein Element der Menge* A^5*?*

Nein. Es gilt $w = \mathbf{aabbba}$. Das Wort besteht zwar aus Symbolen, die alle in A liegen, ist aber 6 Zeichen lang.

Lösung

Was ist $A^2 \times A^2$*?*
Wir definieren die Abbildung $f : A^* \times A^* \to A^*,\ (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$
Was ist $f(A^2 \times A^2)$*?*

Lösung

Was ist $A^2 \times A^2$*?*
Wir definieren die Abbildung $f : A^* \times A^* \to A^*, \ (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$
Was ist $f(A^2 \times A^2)$*?*

$$A^2 \times A^2 = \{(\mathbf{aa}, \mathbf{aa}), (\mathbf{aa}, \mathbf{bb}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ab}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ba}), (\mathbf{bb}, \mathbf{aa}), \ldots\}$$

Lösung

Was ist $A^2 \times A^2$*?*
Wir definieren die Abbildung $f : A^* \times A^* \to A^*,\ (w_1, w_2) \mapsto w_1 \cdot w_2$
Was ist $f(A^2 \times A^2)$*?*

$$A^2 \times A^2 = \{(\mathbf{aa}, \mathbf{aa}), (\mathbf{aa}, \mathbf{bb}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ab}), (\mathbf{aa}, \mathbf{ba}), (\mathbf{bb}, \mathbf{aa}), \ldots\}$$

$$f(A^2 \times A^2) = \{\mathbf{aaaa}, \mathbf{aabb}, \mathbf{aaab}, \mathbf{aaba}, \mathbf{bbaa}, \ldots\} = A^4$$

Was ihr nun wissen solltet

- Wie man mit Relationen arbeitet
- Welche Eigenschaften Relationen haben können
- Was Abbildungen sind und welche Eigenschaften sie haben können
- Wie man mit Wörtern „rechnet“

Was nächstes Mal kommt

- „egnarts si efiL“ ist als Wort wenig sinnvoll: Formale Sprachen
- Endlich wird alles logisch: Aussagenlogik

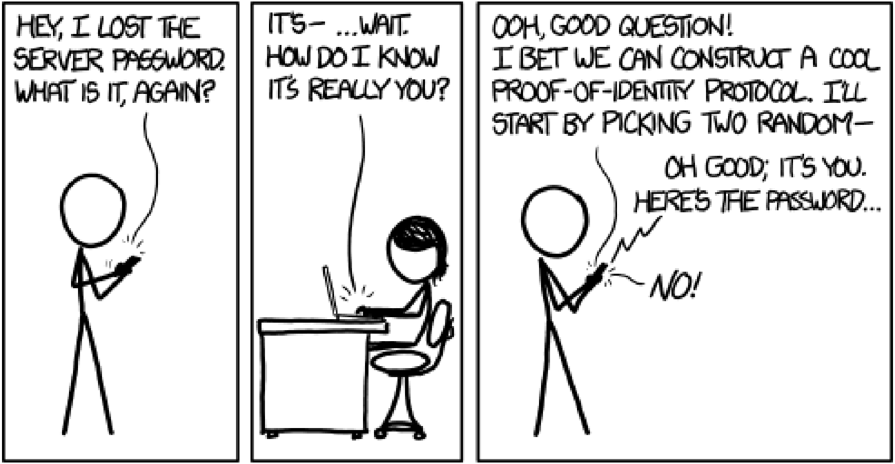


Abbildung: `http://www.xkcd.com/1121/`

Danksagung

Dieser Foliensatz basiert in Teilen auf Folien von:

Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue