Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
19. März 2019

Klausur-ID

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

nur falls 2. Versuch:

Email-Adr.:
Postanschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
max. Punkte	8	5	7	7	5	6	6
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	/ 44	Note:	

/ 8 **Aufgabe 1 (2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8 Punkte)**

/ 2 a) Ist $\sqrt{2^n 3^n} \in \Omega(2^n)$? Begründen Sie Ihre Antwort:

Ja, denn $\sqrt{2^n 3^n} \geq \sqrt{2^n 2^n} = 2^n \in \Omega(2^n)$.

/ 1 b) Ist die folgende Aussage richtig? Für jede Turing-Maschine T ist die Sprache L(T) genau dann entscheidbar, wenn T für jede Eingabe hält.

ja: ☐ nein: ☒

/ 2 c) Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Geben Sie eine Sprache $L \subseteq A^*$ an, sodass $L^* = A^*$ aber $(L^2)^* \neq (A^2)^*$ ist.

$L =$ $\{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}$

/ 1 d) Es sei M eine Menge und R eine binäre Relation auf M (also $R \subseteq M \times M$), die transitiv ist. Ist $R \circ R$ dann auch immer transitiv?

ja: ☒ nein: ☐

/ 1 e) Beschreiben Sie mit einem regulären Ausdruck R die formale Sprache aller Wörter über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, die die Eigenschaft haben, dass an keiner Stelle ein a vorkommt, wenn sowohl irgendwo weiter links als auch irgendwo weiter rechts ein b steht.

$R =$ `a*b*a*`

/ 1 f) Gibt es einen Graphen $G = (V, E)$, der zwar azyklisch aber kein Baum ist? Falls ja, geben Sie einen solchen Graphen an; andernfalls begründen Sie, warum das nicht sein kann.

Antwort:

Es gibt viele Möglichkeiten; z.B.: 

/ 5

Aufgabe 2 (1 + 1 + 3 = 5 Punkte)

Es sei $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ ein Alphabet und eine Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ wie folgt definiert:

$$\forall w \in A^* : f(w, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\forall w \in A^* : f(\varepsilon, w) = \varepsilon$$
$$\forall x_1, x_2 \in A \;\; \forall w_1, w_2 \in A^* : f(x_1w_1, x_2w_2) = \begin{cases} x_1 f(w_1, w_2) & \text{falls } x_1 = x_2 \\ \varepsilon & \text{falls } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

/ 1

a) Berechnen Sie schrittweise $f(\mathtt{abb}, \mathtt{abaa})$.

$f(\mathtt{abb}, \mathtt{abaa}) = \mathtt{a}f(\mathtt{bb}, \mathtt{baa}) = \mathtt{ab}f(\mathtt{b}, \mathtt{aa}) = \mathtt{ab}\varepsilon = \mathtt{ab}$

/ 1

b) Beschreiben Sie anschaulich präzise $f(w_1, w_2)$.

das längste gemeinsame Präfix von w_1 und w_2

/ 3

c) Beweisen Sie induktiv, dass für jedes $w_1 \in A^*$ gilt: Für jedes $w_2 \in A^*$ ist $f(w_1, w_2)$ ein Präfix von w_1.

Lösung 2

Durch vollständige Induktion über $n = |w_1| \in \mathbb{N}_0$:

- **IA.** $n = 0$. Dann ist $|w_1| = 0$, also $w_1 = \varepsilon$. Für jedes $w_2 \in A^*$ gilt $f(w_1, w_2) = f(\varepsilon, w_2) = \varepsilon$, was Präfix von $w_1 = \varepsilon$ ist.
- **IS.** Es gelte die Behauptung für alle Wörter der Länge kleiner gleich n, wobei n fest ist. (IV)

  Es sei dann ein Wort $w_1 \in A^*$ der Länge $|w_1| = n + 1$ gegeben sowie $w_2 \in A^*$ beliebig. Zudem seien $x_1, x_2 \in A$ sowie $w_1', w_2' \in A^*$ mit $w_i = x_i w_i'$ für $i \in \{1, 2\}$ gegeben; es folgt insbesondere $|w_1'| = n$. Wenn $x_1 \neq x_2$, so ist $f(w_1, w_2) = \varepsilon$ und damit (trivialerweise) Präfix von w_1. Wenn $x_1 = x_2$ ist, dann gilt

  $$f(w_1, w_2) = f(x_1w_1', x_2w_2') = x_1 f(w_1', w_2')$$

  und nach IV (da $|w_1'| = n$) ist $f(w_1', w_2')$ Präfix von w_1'. Damit ist $f(w_1, w_2) = x_1 f(w_1', w_2')$ Präfix von $x_1 w_1' = w_1$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 7

Aufgabe 3 (4 + 1 + 2 = 7 Punkte)

a) Gegeben sei das Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}, \mathtt{f}, \mathtt{g}\}$ und ein Wort $w \in A^*$ in dem die Symbole mit folgenden Häufigkeiten vorkommen:

a	b	c	d	e	f	g
11	6	11	27	9	2	34

/ 4

(i) Zeichnen Sie den Huffman-Baum.

/ 1

(ii) Geben Sie die Huffman-Codierung des Wortes `bad` an, die sich aus Ihrem Huffman-Baum ergibt.

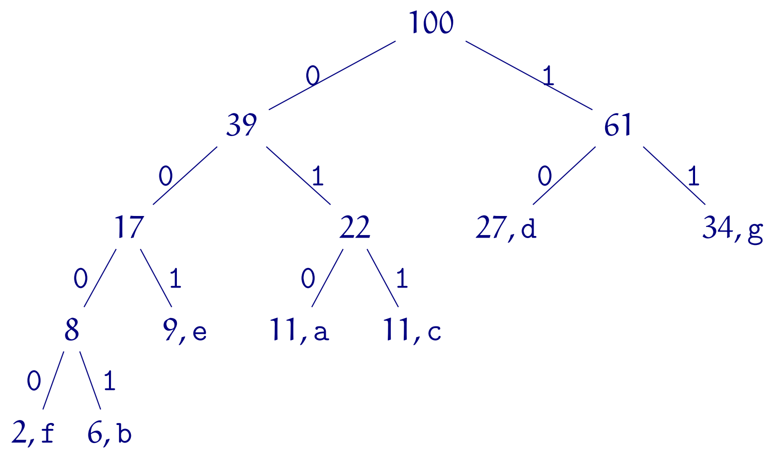
/ 2

b) Für $k \geq 2$ sei ein Alphabet $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ mit k Symbolen gegeben und ein Text, in dem jedes Symbol a_i mit Häufigkeit 2^i vorkommt für $0 \leq i < k$.

Geben Sie die Huffman-Codierungen aller Symbole a_i an.

Lösung 3

a) (i)



(ii) 0001 010 10

b) $a_0 = 0^{k-1}$ und $a_i = 0^{k-i-1}1$ für $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 7

Aufgabe 4 (2 + 1 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Es sei $A = \{0, 1\}$ ein Alphabet. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $V_n = A^n$ sowie E_n die Menge

$$\left\{ \{w_1, w_2\} \,\middle|\, \exists i, j \in \mathbb{Z}_n : (i \neq j \land \forall k \in \mathbb{Z}_n : (k \notin \{i, j\} \leftrightarrow w_1(k) = w_2(k))) \right\}$$

und es sei G_n der ungerichtete Graph (V_n, E_n).

/ 2

a) Zeichnen Sie G_n für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. Beschriften Sie alle Knoten.

/ 1

b) Geben Sie die Adjazenzmatrix A_2 und die Wegematrix W_2 von G_2 an.

Geben Sie bei A_2 für jede Zeile und Spalte an, welchem Knoten sie entspricht.

/ 2

c) *(In der Originalklausur war an dieser Stelle die Formulierung einer unlösbaren Aufgabe. Für das Archiv der alten Klausuren zum Lernen wurde diese Teilaufgabe entfernt.)*

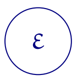
/ 2

d) Zeigen oder widerlegen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (E_n)_g = (E_n)_g^*$.

Hinweis. R^* bezeichnet die reflexiv-transitive Hülle einer binären Relation R.

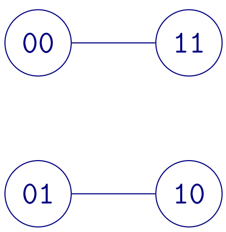
Lösung 4

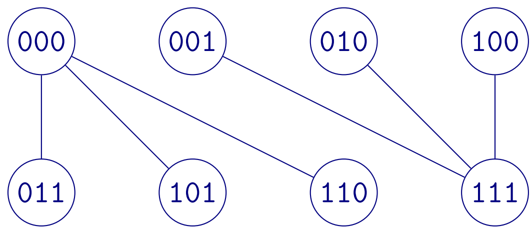
a) G_0:



G_1:

G_2:



G_3: 

b) Adjazenzmatrix: $\begin{array}{c} \\ \texttt{00} \\ \texttt{01} \\ \texttt{10} \\ \texttt{11} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \texttt{00} & \texttt{01} & \texttt{10} & \texttt{11} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Wegematrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) —

d) Die Aussage ist **falsch**.

Es gibt mehrere Begründungen, u.a.:

- $(E_n)_g$ ist nicht reflexiv (und zwar für jedes $n \in \mathbb{N}_0$).
- Für $n = 3$ ist $(E_n)_g$ nicht transitiv: $(\texttt{011}, \texttt{000}) \in (E_n)_g$ und $(\texttt{000}, \texttt{101}) \in (E_n)_g$, aber $(\texttt{011}, \texttt{101}(\notin (E_n)_g$.
- analog z. B. für $n = 4$.

$(E_n)_g^*$ ist damit im Allgemeinen weder reflexiv noch transitiv, also es kann nicht gleich der reflexiv-transitiven Hülle $(E_n)_g^*$ gleich sein.

/ 5 **Aufgabe 5 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)**

Es sei das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ gegeben. Betrachten Sie die Grammatiken $G_1 = (\{S_1, A_1\}, X, S_1, P_1)$ und $G_2 = (\{S_2, A_2, B_2\}, X, S_2, P_2)$ mit

$$P_1 = \{\ S_1 \to \mathtt{aa}S_1 \mid \mathtt{b}A_1 \mid \varepsilon,\quad A_1 \to \mathtt{a}S_1 \mid \mathtt{b}\ \}$$

und

$$P_2 = \{\ S_2 \to S_2S_2 \mid A_2B_2,\quad A_2 \to \mathtt{ab},\quad B_2 \to \mathtt{ba}S_2 \mid \varepsilon\ \}$$

/ 2 a) Geben Sie zu G_i jeweils einen regulären Ausdruck R_i an (wobei $i \in \{1, 2\}$), sodass $\langle R_i \rangle = L(G_i)$ ist.

$R_1 =$ `(aa|ba)*(∅*|bb)`

$R_2 =$ `(abba)*ab((abba)*ab)*`

Hinweis. Sie dürfen die üblichen Klammereinsparungsregeln ausnutzen. Aber beschränken Sie sich ansonsten auf die Notationsmöglichkeiten aus der Definition regulärer Ausdrücke und benutzen Sie keine Abkürzungen wie $\mathtt{a}^+$.

/ 1 b) Die Grammatik G_1 ist rechtslinear, die Grammatik G_2 nicht.

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik $G_3 = (N_3, X, S_3, P_3)$ mit höchstens 3 Nichtterminalsymbolen (also $|N_3| \leq 3$) an, sodass $L(G_3) = L(G_2)$ ist.

/ 2 c) Geben Sie eine Grammatik $G_4 = (N_4, X, S_4, P_4)$ an, die die Sprache $L(G_4) = L(G_1) \cup L(G_2)$ erzeugt. Ihre Grammatik darf höchstens 4 Nichtterminalsymbole haben (also $|N_4| \leq 4$).

Lösung 5

b) $N_3 = \{S_3, A_3\}$ und

$$P_3 = \{\ S_3 \to \mathtt{abba}S_3 \mid \mathtt{ab}A_3,\quad A_3 \to S_3 \mid \varepsilon\ \}$$

c) $N_4 = \{S_1, S_3, S_4\}$ und

$$P_4 = \{\ S_1 \to \mathtt{aa}S_1 \mid \mathtt{ba}S_1 \mid \mathtt{bb} \mid \varepsilon,\quad S_3 \to \mathtt{abba}S_3 \mid \mathtt{ab}S_3 \mid \mathtt{ab},\quad S_4 \to S_1 \mid S_3\ \}$$

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 6

Aufgabe 6 (2 + 1 + 3 = 6 Punkte)

Es sei das Alphabet $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und die formale Sprache

$$L = \{w \in X^* \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : N_{\mathtt{b}}(w) = 3k + 1\}$$

gegeben.

$N_{\mathtt{b}}(w)$ bezeichne dabei die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $\mathtt{b}$ in w.

/ 2

a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor an, der L erkennt.

Es sei jetzt A ein beliebiger endlicher Akzeptor mit Zustandsmenge Z und dessen Eingabealphabet gleich X ist, und für den $L(A) = L$ gilt.

/ 1

b) Zeigen Sie, dass $|Z| \neq 1$ ist.

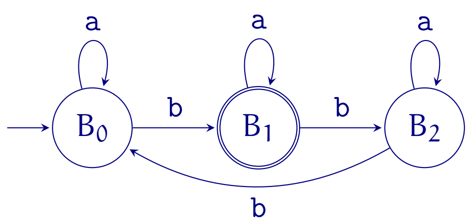
/ 3

c) Zeigen Sie, dass $|Z| \neq 2$ ist.

Hinweis. Führen Sie einen Widerspruchsbeweis durch. Sie dürfen dabei annehmen, dass Teilaufgabe b) schon bewiesen worden ist.

Lösung 6

a)



b) Sei $|Z| = 1$. Also ist $Z = \{s\}$ und s ist der Startzustand von A.

Für die Zustandsüberführungsfunktion $f\colon Z \times X \to Z$ muss $f(s, \mathtt{a}) = f(s, \mathtt{b}) = s$ gelten. Folglich, wenn s akzeptierend ist, dann ist $L(A) = X^*$; wenn s nicht akzeptierend ist, so gilt $L(A) = \varnothing$.

Es gilt aber $L \neq \varnothing$ (da bspw. $\mathtt{b} \in L$) und $L \neq X^*$ (da bspw. $\varepsilon \notin L$).

c) Sei $|Z| = 2$. Wir nehmen an, dass $L = L(A)$ ist.

Es sei wie vorher $s \in Z$ der Startzustand von A sowie $Z = \{s, q\}$ und $f\colon Z \times X \to Z$ die Zustandsüberführungsfunktion von A. Ferner sei F die Menge akzeptierender Zustände von A.

Wenn $|F| = 0$, so ist $L(A) = \varnothing \neq L$. Wenn $|F| = 2$, dann ist $L(A) = X^*$. Wie in Teilaufgabe b) ist weder das eine noch das andere möglich. Es folgt damit $|F| = 1$.

Da $\varepsilon \notin L$, so gilt $s \notin F$, d.h. q ist der (einzige) akzeptierende Zustand.

Da $\mathtt{b} \in L$ aber $s \notin F$, so ist $f(s, \mathtt{b}) = q$.

Ferner, da $\mathtt{bb} \notin L$, so gilt $f_{**}(s, \mathtt{bb}) = f(q, \mathtt{b}) = s$.

Es gilt aber dann:

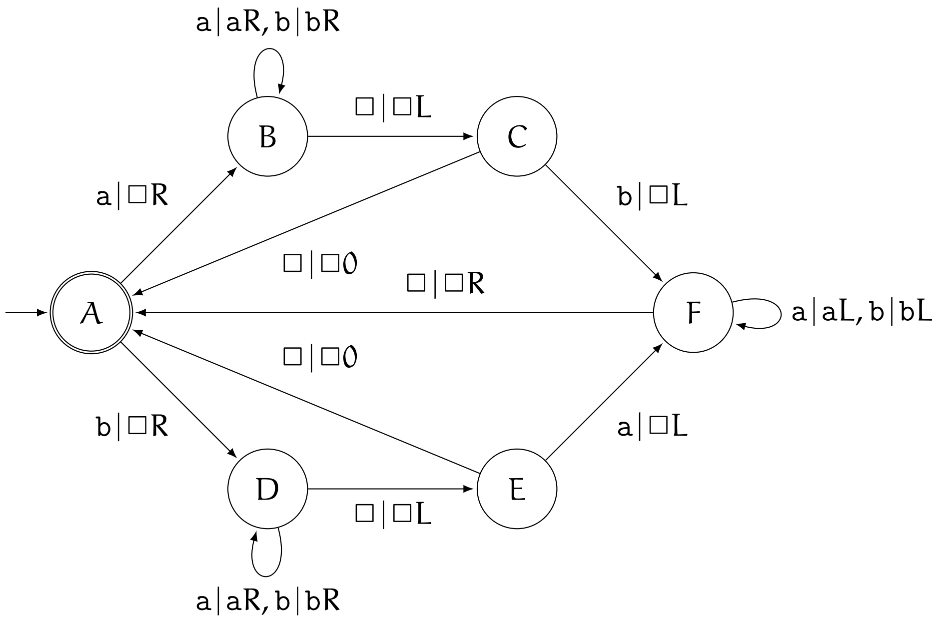
$$f_{**}(s, \mathtt{bbb}) = f_{**}(q, \mathtt{bb}) = f_{**}(s, \mathtt{b}) = q$$

Es folgt $\mathtt{bbb} \in L(A)$ aber $\mathtt{bbb} \notin L$. Widerspruch!

/ 6

Aufgabe 7 (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)

Betrachten Sie folgende Turing-Maschine T mit Eingabealphabet {a, b}:



/ 3

a) Simulieren Sie die ersten 14 Schritte von T für das Eingabewort w = abab. Vervollständigen Sie dazu folgende Tabelle:

Schritt	Konfiguration					
0		A				
	□	a	b	a	b	□
1			B			
	□	□	b	a	b	□
2				B		
	□	□	b	a	b	□
3					B	
	□	□	b	a	b	□
4						B
	□	□	b	a	b	□
5					C	
	□	□	b	a	b	□
6				F		
	□	□	b	a	□	□

Schritt	Konfiguration					
7			F			
	□	□	b	a	□	□
8		F				
	□	□	b	a	□	□
9			A			
	□	□	b	a	□	□
10				D		
	□	□	□	a	□	□
11					D	
	□	□	□	a	□	□
12				E		
	□	□	□	a	□	□
13			F			
	□	□	□	□	□	□
14				A		
	□	□	□	□	□	□

/ 1

b) Geben Sie Funktionen $f, g\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ an, sodass für die Zeitkomplexität $\mathrm{Time}_T\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ und Platzkomplexität $\mathrm{Space}_T\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ von T gilt: $\mathrm{Time}_T \in \Theta(f)$ und $\mathrm{Space}_T \in \Theta(g)$.

Hinweis. Für die Definition von f und g dürfen Sie nur die Grundrechenarten, Logarithmen und Exponentialfunktionen und Kompositionen davon verwenden.

$f(n) =$ n^2

$g(n) =$ n

/ 2

c) Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür an, dass ein Wort $w \in \{a, b\}^+$ in $L(T)$ liegt, d.h. von T akzeptiert wird.

Hinweis. Sie dürfen dabei keinen Bezug auf T nehmen.

Lösung 7

$f\colon \{a, b\} \to \{a, b\}$ bezeichne die Abbildung mit $f(a) = b$ und $f(b) = a$. Ferner sei $h_f\colon \{a, b\}^* \to \{a, b\}$ der von f induzierte Homomorphismus und $\mathrm{rev}\colon \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ die Abbildung, die ein Wort auf Ihr Spiegelbild abbildet (d.h. $\mathrm{rev}(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\mathrm{rev}(xw) = \mathrm{rev}(w)x$ für alle $x \in \{a, b\}$ und $w \in \{a, b\}^*$). Dann ist

$$L(T) = \{w \cdot x \cdot h_f(\mathrm{rev}(w)) \mid w \in \{a, b\}^*, x \in \{\varepsilon, a, b\}\}.$$

Alternativ ist $L(T) = L(G)$, wobei $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$ eine Grammatik mit

$$P = \{\ S \to aSb \mid bSa \mid a \mid b \mid \varepsilon\ \}$$

ist.

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 7: