Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 4

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:

Ausgabe:	18. November 2015
Abgabe:	27. November 2015, 12:30 Uhr im GBI-Briefkasten im Untergeschoss von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 4:	/ 18	(Physik: 18)
Blätter 1 – 4:	/ 66	(Physik: 63)

Aufgabe 4.1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Das Additionswerk der arithmetisch-logischen Einheit eines 8-Bit Prozessors realisiert eine Abbildung $\mathrm{add}_8 \colon Z_2^8 \times Z_2^8 \to Z_2^8$ mit der Eigenschaft, dass für jedes Wort $u \in Z_2^8$ und jedes Wort $v \in Z_2^8$ gilt:

$$\mathrm{add}_8(u, v) = \mathrm{bin}_8((\mathrm{Num}_2(u) + \mathrm{Num}_2(v)) \ \mathbf{mod}\ 2^8).$$

a) Geben Sie $\mathrm{Zkpl}_8(23)$ und $\mathrm{Zkpl}_8(-57)$ an.
b) Geben Sie $\mathrm{Zkpl}_8(23 + (-57))$ und $\mathrm{add}_8(\mathrm{Zkpl}_8(23), \mathrm{Zkpl}_8(-57))$ an.
c) Geben Sie ein Wort $w \in Z_2^*$ so an, dass $\mathrm{Num}_2(w) = \mathrm{Num}_{16}(\mathtt{B3C8})$.

Lösung 4.1

a) $\mathrm{Zkpl}_8(23) = \mathrm{bin}_8(23) = \mathtt{00010111}$
$\mathrm{Zkpl}_8(-57) = \mathrm{bin}_8(-57 + 2^8) = \mathrm{bin}_8(-57 + 256) = \mathrm{bin}_8(199) = \mathtt{11000111}$

b) $\mathrm{Zkpl}_8(23 + (-57)) = \mathrm{Zkpl}_8(-34) = \mathrm{bin}_8(-34 + 256) = \mathrm{bin}_8(222) = \mathtt{11011110}$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{add}_8(\mathrm{Zkpl}_8(23), \mathrm{Zkpl}_8(-57)) \\
&= \mathrm{bin}_8(\mathrm{Num}_2(\mathrm{Zkpl}_8(23)) + \mathrm{Num}_2(\mathrm{Zkpl}_8(-57)) \ \mathbf{mod}\ 2^8) \\
&= \mathrm{bin}_8(\mathrm{Num}_2(\mathtt{00010111}) + \mathrm{Num}_2(\mathtt{11000111}) \ \mathbf{mod}\ 256) \\
&= \mathrm{bin}_8(23 + 199 \ \mathbf{mod}\ 256) \\
&= \mathrm{bin}_8(222 \ \mathbf{mod}\ 256) \\
&= \mathrm{bin}_8(222) \\
&= \mathtt{11011110}
\end{aligned}$$

Tatsächlich gilt für alle ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{K}_\ell$ mit $x + y \in \mathbb{K}_\ell$:

$$\mathrm{Zkpl}_\ell(x + y) = \mathrm{add}_\ell(\mathrm{Zkpl}_\ell(x), \mathrm{Zkpl}_\ell(y)).$$

Etwas ähnliches gilt auch ohne die Voraussetzung $x + y \in \mathbb{K}_\ell$. Das Additionswerk kann also unverändert zum Addieren von Zahlen in Zweierkomplementdarstellung verwendet werden.

c) Das Wort $w = \mathrm{Trans}_{2,16}(\mathtt{B3C8})$ hat die gewünschte Eigenschaft. Mit den Hinweisen aus der vierten Übung und der Einsicht das $\mathrm{Repr}_2(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{B}))$ gerade $\mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{B}))$ ohne führende Nullen ist, können wir $\mathrm{Trans}_{2,16}(\mathtt{B3C8})$ wie folgt berechnen: $\mathrm{Trans}_{2,16}(\mathtt{B3C8}) = \mathrm{Repr}_2(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{B})) \cdot \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{3})) \cdot \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{C})) \cdot \mathrm{bin}_4(\mathrm{num}_{16}(\mathtt{8})) = \mathtt{1011} \cdot \mathtt{0011} \cdot \mathtt{1100} \cdot \mathtt{1000} = \mathtt{1011001111001000}$.

Aufgabe 4.2 (3 + 3 = 6 Punkte)
Es sei w das Wort $\mathtt{strrprrrstprprtt}$ über dem Alphabet $\{\mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{t}, \mathtt{p}\}$.

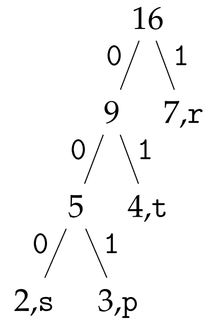
a) Bestimmen Sie eine Huffman-Codierung des Wortes w anhand des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus.
b) Bestimmen Sie eine Block-Codierung des Wortes w für Blöcke der Länge 2 anhand des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus.

Lösung 4.2

a) Schritt 1: Vorkommen zählen.

r	s	t	p
7	2	4	3

Schritt 2: Baum erstellen und beschriften.



Schritt 3: Codierung einzelner Buchstaben ablesen.

r	s	t	p
1	000	01	001

Schritt 4: Wort codieren. `000011100111100001001100110101`

Korrektur: Leider sind Huffman-Codierungen nicht eindeutig

Punkte: je $0,5$ für Schritte 1, 2 und 4, und $1,5$ für Schritt 2

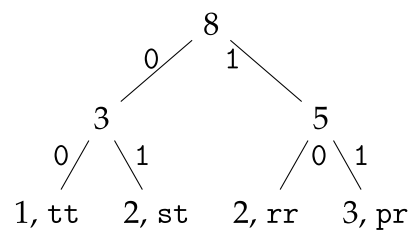
Achtung bei Folgefehlern: Wer aus einem falschen Baum richtig die Codierungen abgelesen hat, bekommt für letzteres noch die $0,5$ Punkte, (sofern nicht irgendwas trivial wird)

b) Schritt 1: Wort in Blöcke der Länge 2 unterteilen. `st rr pr rr st pr pr tt`

Schritt 2: Vorkommen zählen.

st	rr	pr	tt
2	2	3	1

Schritt 3: Baum erstellen und beschriften.



Schritt 4: Codierung einzelner Buchstaben ablesen.

st	rr	pr	tt
01	10	11	00

Schritt 5: Wort codieren. `0110111001111100`

Aufgabe 4.3 (3 + 3 = 6 Punkte)

Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ sei a_i ein Symbol so, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}_i$ gilt $a_k \neq a_i$. Weiter sei M die Menge $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

a) Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein Alphabet $A_k \subseteq M$ und ein Wort $u_k \in A_k^*$ so an, dass jedes Symbol $x \in A_k$ mindestens einmal in u_k vorkommt und für jede Huffman-Codierung $h\colon A_k^* \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ von u_k gilt:

$$\text{Für jedes } x \in A_k \text{ gilt } |h(x)| = k.$$

b) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ein Alphabet $B_n \subseteq M$ und ein Wort $w_n \in B_n^*$ so an, dass jedes Symbol $x \in B_n$ mindestens einmal in w_n vorkommt und für jede Huffman-Codierung $h\colon B_n^* \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ von w_n gelten:

- Es gibt ein Symbol $x \in B_n$ mit $|h(x)| = 1$;

- Es gibt ein Symbol $x \in B_n$ mit $|h(x)| = n$;
- Für jedes Symbol $x \in B_n$ gilt $|h(x)| \in \{1, n\}$.

Lösung 4.3

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_+$. Weiter sei A_k die Menge $\{a_i \in M \mid i \in \mathbb{Z}_{2^k}\}$ und es sei u_k das Wort

$$\begin{aligned} u_k \colon \mathbb{Z}_{2^k} &\to A_k, \\ i &\mapsto a_i. \end{aligned}$$

Ferner sei h eine Huffman-Codierung von u_k. Dann gilt für jedes $x \in A_k$, dass $|h(x)| = k$.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Weiter sei B_n die Menge $\{a_i \in M \mid i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}+1}\}$ und es sei w_n das Wort

$$\begin{aligned} w_n \colon \mathbb{Z}_{2^n} &\to B_n, \\ i &\mapsto \begin{cases} a_i, & \text{falls } i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}, \\ a_{2^{n-1}}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ferner sei h eine Huffman-Codierung von w_n. Dann gelten $a_{2^{n-1}} \in B_n$, $|h(a_{2^{n-1}})| = 1$, $a_0 \in B_n$, $|h(a_0)| = n$ und für jedes $x \in B_n$ gilt $|h(x)| \in \{1, n\}$ (weil nämlich für sogar für jedes $i \in \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ gilt: $a_i \in B_n$ und $|h(a_i)| = n$; vergleiche Teilaufgabe a)).

Korrektur: Bei beiden Teilaufgaben jeweils: 1 Punkt für ordentliche Definition des Wortes und 2 Punkte für ein „inhaltlich richtiges“ Wort.