

# Grundbegriffe der Informatik

## Tutorium 36

Termin 4 | 18.11.2016

Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



# Inhalt

Formale Sprachen

Von der Darstellung zur Zahl

Von der Zahl zur Darstellung

# Übungsblätter

Durchschnitt: 11,4 / 19 Punkten

- Bitte erwartet keine volle Punktzahl. Übungsblätter sind dazu da, Fehler zu machen und daraus zu lernen.
- Versucht möglichst alle Aufgaben zu bearbeiten.
- Wenn keine Begründung/Beweis gefordert ist, müsst ihr keinen angeben.
- Nicht mehrere Alternativen angeben, unter denen ich mir die richtige herausuchen soll.

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge$ ,  $\vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an W

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.  
Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge$ ,  $\vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an  $W$
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge$ ,  $\vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an W
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge F  
Das muss man explizit angeben

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge$ ,  $\vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an W
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge F  
Das muss man explizit angeben
- Ein Beispiel ersetzt einen Beweis.

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge$ ,  $\vee$  verknüpfen



# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an W
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge F  
Das muss man explizit angeben
- Ein Beispiel ersetzt einen Beweis. F  
Mit einem Beispiel kann man eine Behauptung widerlegen, es zeigt aber nicht die Allgemeingültigkeit

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge, \vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an      W
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge      F  
Das muss man explizit angeben
- Ein Beispiel ersetzt einen Beweis.      F  
Mit einem Beispiel kann man eine Behauptung widerlegen, es zeigt aber nicht die Allgemeingültigkeit
- $|M| = M$

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge, \vee$  verknüpfen

# Übungsblätter: Häufige Fehler

- Beweise fängt man mit der Behauptung an      W
- Wenn wir  $A$  schreiben, ist das immer eine Menge      F  
Das muss man explizit angeben
- Ein Beispiel ersetzt einen Beweis.      F  
Mit einem Beispiel kann man eine Behauptung widerlegen, es zeigt aber nicht die Allgemeingültigkeit
- $|M| = M$       F     $|M|$  ist die **Anzahl** der Elemente in  $M$

Wenn ihr eine Formel aufstellt, dann **prüft das Ergebnis für kleine Werte**.  
90% der falschen Antworten in 1.6.c) haben schon für  $n \in \{0, 1\}$  nicht gestimmt.

Passt auf, was eure Variablen sind und welche Operationen ihr darauf anwenden könnt. Mengen kann man nicht mit  $\wedge, \vee$  verknüpfen

**In the previous episode of GBI...**

# Rückblick

- Alphabet  $\Sigma$  mit Zeichen, aus denen wir Wörter zusammensetzen
- Wir können nicht immer allen Wörtern einen Sinn zuordnen
- Wir definieren selbst, welche Wörter wir als korrekt ansehen und akzeptieren wollen.
- Das ist eine formale Sprache: Eine Teilmenge aller möglichen Wörter

# Rückblick

Auf formale Sprachen können wir **ähnliche** Operationen anwenden wie auf Wörter:

- $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$

Ein Wort aus  $L_1$  konkateniert mit einem Wort aus  $L_2$ .

- $L^0 = \{\varepsilon\} \quad L^{i+1} = L^i \cdot L$

Alle Wörter die aus  $i$  Wörtern der Sprache zusammengesetzt wurden

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i \quad L^* = L^+ \cup L^0$

Alle Wörter, die sich aus den Wörtern der Sprache bilden lassen

Ein Alphabet kann man auch als formale Sprache mit Wörtern der Länge 1 auffassen.

- Jede Sprache enthält Wörter

- Jede Sprache enthält Wörter
- F  $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache



- Jede Sprache enthält Wörter
  - $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$
- F  $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache

- Jede Sprache enthält Wörter      F    $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F    $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$

- Jede Sprache enthält Wörter      F    $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F    $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen L, für die gilt  $\varepsilon \in L^+$

- Jede Sprache enthält Wörter      F     $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F     $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen  $L$ , für die gilt  $\varepsilon \in L^+$       W     $L = \{\varepsilon\}$

- Jede Sprache enthält Wörter      F     $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F     $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen  $L$ , für die gilt  $\varepsilon \in L^+$       W     $L = \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L^* \setminus L^0$

- Jede Sprache enthält Wörter      F     $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F     $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen  $L$ , für die gilt  $\varepsilon \in L^+$       W     $L = \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L^* \setminus L^0$       F    Das gilt nicht, wenn  $\varepsilon \in L$

- Jede Sprache enthält Wörter      F     $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F     $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen  $L$ , für die gilt  $\varepsilon \in L^+$       W     $L = \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L^* \setminus L^0$       F    Das gilt nicht, wenn  $\varepsilon \in L$
- $\{\}^* \neq \{\}$

- Jede Sprache enthält Wörter      F     $\emptyset$  ist auch eine gültige Sprache
- $01^* = \{\varepsilon, 01, 0101, \dots\}$       F     $01^*$  gibt es nicht, denn  $01 \neq \{01\}$
- Es gibt Sprachen  $L$ , für die gilt  $\varepsilon \in L^+$       W     $L = \{\varepsilon\}$
- $L^+ = L^* \setminus L^0$       F    Das gilt nicht, wenn  $\varepsilon \in L$
- $\{\}^* \neq \{\}$       W     $\{\}^* = \{\varepsilon\}$



# Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

$$\Sigma = \{\triangle, \square, \circ\}.$$

## Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

Die Sprache der Wörter, die mit einem Kreis beginnen und danach keinen Kreis mehr enthalten.

$$\{\circ\} \cdot \{\triangle, \square\}^*$$

$$\{w \in \Sigma^* \mid w = \circ \cdot v, v \in \{\triangle, \square\}^*\}$$

# Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

Die Sprache der Wörter, deren vorletztes Zeichen ein Dreieck ist.

$$\{\triangle, \square, \circ\}^* \cdot \triangle \cdot \{\triangle, \square, \circ\}$$

$$\{w \in \Sigma^* \mid w = v \cdot \triangle \cdot \mu, v \in \Sigma^*, \mu \in \Sigma\}$$

# Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

$$(\{\square, \circ\}^* \cdot \{\triangle\triangle\}^*)^*$$

Die Sprache der Wörter, in denen nirgends eine ungerade Anzahl an Dreiecken nebeneinander steht.

## Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

$$\{\triangle, \circ\}^* \cdot (\{\square\} \cdot \{\triangle, \circ\}^* \cdot \{\square\} \cdot \{\triangle, \circ\}^*)^*$$

Die Sprache der Wörter, in denen eine gerade Anzahl an Vierecken vorkommt.

## Zum Aufwärmen: Sprache gesucht!

$$\{\square, \triangle\}^* \cdot (\{\circ\} \cdot \{\square, \triangle\}^+)^* \cdot \{\circ, \varepsilon\}$$

Die Sprache der Wörter, in denen nirgends zwei Kreise aufeinander folgen.

# Formale Sprachen

Von der Darstellung zur Zahl

Von der Zahl zur Darstellung

# Beispiel

Sei  $A = \{a, b\}$  ein Alphabet. Mit  $L$  wollen wir alle Wörter beschreiben, die genau ein  $b$  enthalten.

$$L = \{w_1 b w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a\}^*\} \quad L = \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$$

Was ist  $L^3$ ? Was enthält  $L^i$ ? Zum Beispiel ist

$$aaababaaaabaa = aaaba \, baa \, aabaa \in L_3$$

$L^i$  enthält alle Wörter, die genau  $i$ -mal ein  $b$  enthalten!

Was enthält

$$L^i \setminus \{b\}^*$$

Alle Wörter, die aus  $i$   $b$ 's bestehen, aber auch noch mindestens ein  $a$  enthalten.



# Aufgabe

Welche Eigenschaft muss eine formale Sprache  $L$  über einem Alphabet  $A$  erfüllen, damit gilt:

$$L^0 \subseteq L^1 \subseteq L^2 \subseteq L^3 \subseteq \dots$$

Lösung

Das gilt, wenn

$$\varepsilon \in L$$

## Aufgabe (Klausur)

- Wiederlegen Sie: Für alle formalen Sprachen  $L_1, L_2$  gilt:

$$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

- Zeigen Sie: Für alle formalen Sprachen  $L$  gilt:

$$L^* \cdot L = L^+$$

Tipp zu 2) (nicht in der Klausur gegeben): Hier handelt es sich um eine Mengengleichheit, also argumentieren wir mit „ $\subseteq$ “ und „ $\supseteq$ “

# Lösung

*Für alle formalen Sprachen  $L_1, L_2$  gilt:*

$$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Diese Aussage ist falsch: Sei  $L_1 = \{a\}$  und  $L_2 = \{b\}$ . Dann liegt **ab** in  $(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$  aber nicht in  $L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$ .

# Lösung

*Für alle formalen Sprachen  $L$  gilt:*

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

1. Schritt:  $L^* \cdot L \subseteq L^+$ :

Wenn  $w \in L^* \cdot L$  liegt, dann lässt es sich in Teilwörter auftrennen

$$w = w_1 \cdot w_2$$

mit  $w_1 \in L^*$  und  $w_2 \in L$ . Für  $w_1$  existiert ein  $i \in \mathbb{N}_0$  mit  $w_1 \in L^i$ . Also

$$w = w_1 w_2 \in L^i \cdot L = L^{i+1} \subset L^+$$

# Lösung

*Für alle formalen Sprachen  $L$  gilt:*

$$L^* \cdot L = L^+$$

Diese Aussage ist wahr!

2. Schritt:  $L^* \cdot L \supseteq L^+$ :

Wähle nun  $w \in L^+$ . Dann existiert ein  $i \in \mathbb{N}_+$  mit  $w \in L^i$ . Da  $i > 0$  lässt es sich schreiben als  $i = j + 1$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ . Also ist

$$w \in L^{j+1} = L^j \cdot L \subset L^* \cdot L$$

## Aufgabe (WS 2008)

Es sei  $A = \{a, b\}$ . Die Sprache  $L \subset A^*$  sei definiert durch

$$L = (\{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*)^*$$

Zeigen Sie, dass jedes Wort  $w$  aus  $\{a, b\}^*$ , das mindestens einmal das Zeichen  $b$  enthält, in  $L$  liegt. (Hinweis: Führen Sie eine Induktion über die Anzahl der Vorkommen des Zeichens  $b$  in  $w$  durch.)

# Lösung

$$L = (\{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*)^*$$

Sei  $k$  die Anzahl der Vorkommen von  $b$  in einem Wort  $w \in \{a, b\}^*$ .

## Induktionsanfang

Für  $k = 1$ : In diesem Fall lässt sich das Wort  $w$  aufteilen in

$$w = w_1 \cdot b \cdot w_2$$

wobei  $w_1$  und  $w_2$  keine  $b$  enthalten und somit in  $\{a\}^*$  liegen. Damit gilt  $w \in \{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*$  und somit auch

$$w \in (\{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^*)^* = L$$

# Lösung

## Induktionsannahme

Für ein festes  $k \in \mathbb{N}$  gilt, dass alle Wörter über  $\{a, b\}^*$ , die genau  $k$ -mal das Zeichen  $b$  enthalten, in  $L$  liegen.

## Induktionsschritt

Wir betrachten ein Wort  $w$ , das genau  $k + 1$  mal das Zeichen  $b$  enthält. Dann kann man  $w$  zerlegen in  $w = w_1 \cdot w_2$ , wobei  $w_1$  genau einmal das Zeichen  $b$  enthält und  $w_2$  genau  $k$ -mal das Zeichen  $b$ . Nach Induktionsanfang liegt  $w_1$  in  $\{a\}^*\{b\}\{a\}^*$ . Nach Induktionsvoraussetzung liegt  $w_2$  in  $(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^*$ , was bedeutet, dass  $w = w_1 \cdot w_2$  in

$$(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)(\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* \subseteq (\{a\}^*\{b\}\{a\}^*)^* = L$$

liegt und die Behauptung ist gezeigt.




## Ausblick: Klammersausdrücke

Was ist mit der Sprache aller gültigen Klammersausdrücke? Können wir diese auch mit Mengen, Konkatenation und Kleenschem Abschluss angeben?

*Spoiler: Nein, das geht nicht!*

SOON



(AN UNMATCHED LEFT PARENTHESIS  
CREATES AN UNRESOLVED TENSION  
THAT WILL STAY WITH YOU ALL DAY.

Abbildung: <https://xkcd.com/859/>

Formale Sprachen

Von der Darstellung zur Zahl

Von der Zahl zur Darstellung

# Numerischer Wert

## Definition

Zu einer Zahlenbasis  $b$  definiere

$$\text{Num}_b(\varepsilon) = 0$$

$$\text{Num}_b(wx) = b \cdot \text{Num}_b(w) + \text{num}_b(x) \text{ für alle } w \in Z_b^*, x \in Z_b$$

Beachte:  $\text{Num}_b : Z_b^* \rightarrow \mathbb{Z}$  ist Abbildung, die einem Wort (Zahlendarstellung) eine Zahl (Wert) zuordnet. Wir müssen diesen Wert aber natürlich wieder in eine Darstellung umwandeln, um ihn aufschreiben zu können.

# Aufgabe

Berechnet die Zahlenwerte von  $11_2$ ,  $321_4$ ,  $B2_{16}$ .

$$\begin{aligned}\text{Num}_2(11) &= 2 \cdot \text{Num}_2(1) + \text{num}_2(1) \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_4(321) &= 4 \cdot \text{Num}_4(32) + \text{num}_4(1) \\ &= 4 \cdot (4 \cdot \text{Num}_4(3) + \text{num}_4(2)) + \text{num}_4(1) \\ &= 4^2 \cdot \text{num}_4(3) + 4 \cdot \text{num}_4(2) + \text{num}_4(1) \\ &= 57\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Num}_{16}(B2) &= 16 \cdot \text{Num}_{16}(B) + \text{num}_{16}(2) \\ &= 16 \cdot 11 + 2 \\ &= 178\end{aligned}$$

# Wohldefiniertheit

*Behauptung:* Die Definition

$$\text{Num}_b(\varepsilon) = 0$$

$$\text{Num}_b(wx) = b \cdot \text{Num}_b(w) + \text{num}_b(x) \text{ für alle } w \in Z_b^*, x \in Z_b$$

ist wohldefiniert und weist jedem Wort eine eindeutige Bedeutung zu, die dem Zahlenwert entspricht.

# Beweis

Beweis durch vollständige Induktion über  $n = |w|$

IA  $n = 0 = |w| \implies w = \varepsilon$ .

Für  $w = \varepsilon$  ist  $\text{Num}_b$  wohldefiniert und sinnvoll (nämlich  $\text{Num}_b(\varepsilon) = 0$ ).

IV Für ein beliebig aber festes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei

$\text{Num}_b(w)$  für alle  $w$  mit  $|w| = n$  wohldefiniert und entspricht dem Zahlenwert.

IS Wähle  $w'$  mit  $|w'| = n + 1$ , dann gibt es ein  $w \in Z_b^n$ ,  $x \in Z_b$ , so dass  $w' = wx$

Mit der Definition gilt nun

$$\text{Num}_b(w') = b \cdot \underbrace{\text{Num}_b(w)}_{IV} + \text{num}_b(x)$$

Die Summe ist laut IV wohldefiniert. Auch ist laut IV  $\text{Num}_b(w)$  der Zahlenwert von  $w$  und damit auch  $\text{Num}_b(w')$ .

Formale Sprachen

Von der Darstellung zur Zahl

Von der Zahl zur Darstellung

# Division und Modulo

## Definition

$x \mathbf{div} y$  ist die ganzzahlige Division von  $x$  durch  $y$ .  
 $x \mathbf{mod} y$  liefert den Rest dieser Division

## Beobachtung

$$x \mathbf{div} y \in \mathbb{N}_0 \quad x \mathbf{mod} y \in \{0, \dots, y - 1\}$$

## Lemma

$$x = y \cdot (x \mathbf{div} y) + (x \mathbf{mod} y)$$



## Beispiel

	$x \text{ div } y$	$x \text{ mod } y$
$x = 2, y = 3$	0	2
$x = 5, y = 2$	2	1
$x = 8, y = 2$	4	0

# Beispiel

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x \bmod 4$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
$4(x \bmod 4)$	0	4	8	12	0	4	8	12	0	4	8	12
$x \div 4$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2

# Repräsentation

## Definition

$\text{Repr}_k(n)$  ist das kürzeste Wort  $w \in Z_k^*$  mit  $\text{Num}_k(w) = n$ , also

$$\text{Num}_k(\text{Repr}_k(n)) = n$$

*Anmerkung:* Im Allgemeinen

$$\text{Repr}_k(\text{Num}_k(w)) \neq w$$

da überflüssige Nullen wegfallen.

# Repräsentation

Wir definieren

$$\begin{aligned} \text{Repr}_k : \mathbb{N}_0 &\rightarrow Z_k \\ n &\mapsto \begin{cases} \text{repr}_k(n) & n < k \\ \text{Repr}_k(n \text{ div } k) \cdot \text{repr}_k(n \bmod k) & n \geq k \end{cases} \end{aligned}$$

## Aufgabe

Berechne folgende Darstellungen:

$$\text{Repr}_2(42) = 101010$$

$$\text{Repr}_4(42) = 222$$

$$\text{Repr}_8(42) = 52$$

$$\text{Repr}_{16}(42) = 2A$$

## Beispiel: Lösung

$$\begin{aligned} \text{Repr}_8(42) &= \text{Repr}_8(42 \mathbf{div} 8) \cdot \text{repr}_8(42 \mathbf{mod} 8) \\ &= \text{Repr}_8(5) \cdot \text{repr}_8(2) \\ &= \text{repr}_8(5) \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 2 \\ &= 52_8 \end{aligned}$$

## Was ihr nun wissen solltet

- Wie man formale Sprachen angibt
- Wie man Beweise mit formalen Sprachen führt
- Wie man von Zahlendarstellungen zu Zahlen kommt...
- ... und wieder zurück

## Was nächstes Mal kommt

- Nicht immer so positiv: Negative Zahlen
- Komprimierung: Huffman-Codierungen

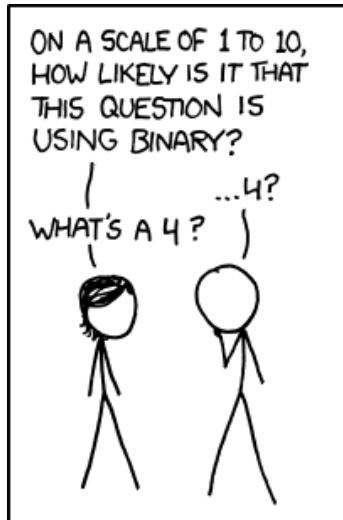


Abbildung: <https://xkcd.com/953/>

# Credits

Vorgänger dieses Foliensatzes wurden erstellt von:

Thassilo Helmold

Philipp Basler

Nils Braun

Dominik Doerner

Ou Yue