Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 1

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.	Name des Tutors:

Ausgabe: 28. Oktober 2015

Abgabe: 6. Novber 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 1:	/ 13	(Physik: 13)
Blätter 1 – 1:	/ 13	(Physik: 13)

Aufgabe 1.1 (3 Punkte)
Es sei M eine Menge und es seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$. Beweisen Sie:

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

Lösung 1.1

$\subseteq$: Es sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann ist $x \in M$, und $x \notin A \cup B$. Also ist $x \in M$, und $x \notin A$ und $x \notin B$. Somit ist

- $x \in M$ und $x \notin A$ und
- $x \in M$ und $x \notin B$.

Damit ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Folglich ist $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

$\supseteq$: Es sei $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dann ist $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$. Also ist $x \in M$ und $x \notin A$, und $x \in M$ und $x \notin B$. Somit ist $x \in M$, und $x \notin A$ und $x \notin B$. Damit ist $x \in M$ und $x \notin A \cup B$. Folglich ist $x \in M \setminus (A \cup B)$.

Korrektur: falls zwei Inklusionen gezeigt: je 1.5 Punkte
falls mit lauter „gdw.“ argumentiert: geeignete Abzüge bei Fehlern

Aufgabe 1.2 (1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Es sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Zu f definieren wir die Abbildung

$$f^{-1}\colon 2^B \to 2^A, M \mapsto \{a \in A \mid f(a) \in M\}$$

Für jedes $M \subseteq B$ nennt man $f^{-1}(M)$ das *Urbild* von M (unter f).

a) Welche Bedingung muss f erfüllen, damit f^{-1} injektiv ist?
b) Welche Bedingung muss f erfüllen, damit f^{-1} surjektiv ist?
c) Es sei $M \subseteq B$. Welche Mengenbeziehung besteht zwischen M und $f(f^{-1}(M))$?
d) Es sei $M \subseteq A$. Welche Mengenbeziehung besteht zwischen M und $f^{-1}(f(M))$?
e) Beweisen Sie Ihre Behauptung in Teilaufgabe c).

Lösung 1.2

a) f muss surjektiv sein.
b) f muss injektiv sein.
c) $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$. Anders ausgedrückt: $M \supseteq f(f^{-1}(M))$
d) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$. Anders ausgedrückt: $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$
e) Es sei $b \in f(f^{-1}(M))$.
   - Dann gibt es ein $a \in f^{-1}(M)$ mit $f(a) = b$.
   - $a \in f^{-1}(M)$ bedeutet gerade $f(a) \in M$.
   - Wegen $b = f(a)$, folgt $b \in M$.

Korrektur:

- a) bis d) je 1 Punkt für richtige Antwort;
  kann man sich Fälle vorstellen für 0.5 Punkte?
- bei e):

Aufgabe 1.3 **(0.5 + 1.5 + 2 = 4 Punkte)**

a) Nichtnegative ganze Zahlen x_i, $i \in \mathbb{N}_0$, seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 4\,,$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon\ x_{n+1} = x_n + 2n + 5\,.$$

Geben Sie die Zahlenwerte von x_1, x_2, x_3 und x_4 an.

b) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen arithmetischen Ausdruck E_n, in dem kein x_i vorkommt, so an, dass gilt: $x_n = E_n$.

c) Geben Sie die induktive Definition für ganze Zahlen y_i, $i \in \mathbb{N}_0$, so an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$y_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ -n, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Hinweis: In der Definition von y_{n+1} müssen Sie y_n sinnvoll benutzen. „Scheinbenutzungen“ wie $\cdots y_n - y_n \cdots$ sind nicht ausreichend.

Lösung 1.3

a) $x_1 = 9$, $x_2 = 16$, $x_3 = 25$, $x_4 = 36$

b) $E_n = (n+2)^2$

c) zum Beispiel:

$$y_0 = 0$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon\ y_{n+1} = -y_n + (-1)^{n+1}$$

oder

$$y_0 = 0$$
$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0\colon\ y_{n+1} = y_n + (-1)^{n+1}(2n+1)$$

Korrektur:

a) bei einem Fehler noch 0.5 Punkte, sonst 0 Punkte

b) was machen wir mit $E_n = n^2 + 4n + 4$?

c) statt $(-1)^{n+1}$ kann man z. B. auch $(n \bmod 2) - ((n+1) \bmod 2)$ schreiben
bitte gründlich prüfen, ob studentische Lösungen korrekt sind und y_n nichttrivial verwendet wird
0.5 Punkte auf Anfang und 1.5 auf richtige Rekursion

Allgemeiner Hinweis: In dieser Vorlesung kommen an einigen Stellen griechische Buchstaben vor. In anderen Vorlesungen wird das auch passieren. Hier ist die Liste der Kleinbuchstaben (manchmal gibt es verschiedene Schreibweisen):

α, β, γ, δ, ε (oder ϵ), ζ, η, θ (oder ϑ), ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω

Machen Sie sich mit der Schreibweise und den Namen der Zeichen vertraut!