Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 2

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium:	Nr.
	Name des Tutors:

Ausgabe: 4. November 2015

Abgabe: 13. November 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 17	(Physik: 14)
Blätter 1 – 2:	/ 30	(Physik: 27)

Mit **[nicht Physik]** gekennzeichnete Aufgaben werden von Studenten der Physik bitte nicht bearbeitet.

Aufgabe 2.1 (3 Punkte) [nicht Physik]

Es sei Var_{AL} eine Menge von Aussagevariablen und es sei For_{AL} die Menge aller aussagenlogischen Formeln über Var_{AL}. Beweisen Sie, dass für alle $G, H \in For_{AL}$ die aussagenlogische Formel

$$(G \to H) \to (\neg H \to \neg G)$$

eine Tautologie ist.

Lösung 2.1

Es seien $G, H \in For_{AL}$. Es ist zu zeigen, dass für jede Interpretation $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ gilt:

$$val_I((G \to H) \to (\neg H \to \neg G)) = \mathbf{w}.$$

Dazu sei $I\colon Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition der Abbildung val_I gilt:

$$val_I((G \to H) \to (\neg H \to \neg G)) = \neg val_I(G \to H) \vee val_I(\neg H \to \neg G).$$

Nach Definition der Abbildungen val_I und $\vee$ gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to H) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Und nach Definition der Abbildungen val_I und $\neg$ gilt

$$\begin{aligned} val_I(\neg H \to \neg G) &= \neg val_I(\neg H) \vee val_I(\neg G) \\ &= \neg(\neg val_I(H)) \vee \neg(val_I(G)) \\ &= val_I(H) \vee \neg val_I(G). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$val_I((G \to H) \to (\neg H \to \neg G)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)).$$

Fall 1: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{w}$. Nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt dann

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \neg\mathbf{w} \vee \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Fall 2: $val_I(H) \vee \neg val_I(G) = \mathbf{f}$. Nach Definition der Abbildung $\neg$ gilt dann $\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}$. Und nach Definition der Abbildung $\vee$ gilt somit

$$\neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w} \vee \mathbf{f} = \mathbf{w}.$$

In beiden Fällen gilt

$$val_I((G \to H) \to (\neg H \to \neg G)) = \neg(val_I(H) \vee \neg val_I(G)) \vee (val_I(H) \vee \neg val_I(G)) = \mathbf{w}.$$

Korrektur: Wer wie in der Vorlesung eine große Tabelle macht und schrittweise für alle Teilformeln in allen Interpretationen die Wahrheitswerte ermittelt, wird nicht bestraft, auch wenn das Vorgehen unvollständig ist.

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)
Es sei A ein Alphabet, und für jede formale Sprache $L \subseteq A^*$ und jede formale Sprache $S \subseteq A^*$ sei

$$L \cdot S = \{u \cdot v \mid u \in L \text{ und } v \in S\}.$$

Es seien ferner L_1, L_2 und L_3 drei formale Sprachen über A. Beweisen Sie, dass gilt:

$$L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) \subseteq (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3.$$

Lösung 2.2
Es ist zu zeigen, dass für jedes $w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$ gilt: $w \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$. Dazu sei $w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$. Dann gibt es ein $u \in L_1$ und ein $v \in L_2 \cdot L_3$ so, dass $w = u \cdot v$. Außerdem gibt es ein $\mu \in L_2$ und ein $\kappa \in L_3$ so, dass $v = \mu \cdot \kappa$. Damit gilt $w = u \cdot (\mu \cdot \kappa)$. Da $\cdot$ assoziativ ist, folgt $w = u \cdot (\mu \cdot \kappa) = (u \cdot \mu) \cdot \kappa$. Es gilt $u \cdot \mu \in L_1 \cdot L_2$ und damit $(u \cdot \mu) \cdot \kappa \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$. Wegen $w = (u \cdot \mu) \cdot \kappa$ folgt $w \in (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$.
Korrektur: An der Stelle, an der die Assoziativität für die Konkatenation von Wörtern benutzt wird, sollte das nicht einfach stillschweigend passieren, sondern der/die Aufgabenlöser(in) soll zu erkennen geben, dass man an der Stelle nachdenken muss. Sonst -0.5 Punkte

Aufgabe 2.3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Es sei A ein Alphabet.

a) Geben Sie eine injektive Abbildung $f\colon A^* \to A^*$ an, die nicht surjektiv ist.
b) Geben Sie eine surjektive Abbildung $g\colon A^* \to A^*$ an, die nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine bijektive Abbildung $h\colon A^* \to A^*$ an, die nicht die identische Abbildung $A^* \to A^*, w \mapsto w$, ist.
d) Geben Sie eine Abbildung $\varphi\colon A^* \to A^*$ so an, dass für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$|\varphi(w)| = 2^{|w|} \cdot |w|^{|w|}.$$

e) Geben Sie eine Abbildung $\psi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ gilt:

$$\{|w| \mid w \in \psi(L)\} = \{3 \cdot |w| \mid w \in L\}.$$

f) Geben Sie eine Abbildung $\xi\colon 2^{A^*} \to 2^{A^*}$ so an, dass für jedes $L \in 2^{A^*}$ und für jedes $w \in A^*$ gilt:

$$w \in L \text{ genau dann, wenn } w \notin \xi(L).$$

Lösung 2.3

Mögliche Abbildungen sind

a)

$$\begin{aligned} f\colon A^* &\to A^*, \\ w &\mapsto w \cdot w, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g\colon A^* &\to A^*, \\ \epsilon &\mapsto \epsilon, \\ x \cdot w &\mapsto w, \text{ wobei } x \in A \text{ und } w \in A^* \end{aligned}$$

c) Diese Aufgabe war schwerer als gedacht. Falls $|A|$ mindestens zwei Symbole enthält, kann man z. B. „Wort spiegeln“ als Abbildung nehmen:

$$\begin{aligned} h\colon A^* &\to A^*, \\ \epsilon &\mapsto \epsilon, \\ w \cdot x &\mapsto x \cdot h(w), \text{ wobei } w \in A^* \text{ und } x \in A \end{aligned}$$

Falls $|A| = 1$ ist, ist diese Abbildung leider die Identität. Falls $A = \{a\}$ ist, leistet aber z. B. folgende Abbildung das gewünschte:

$$\begin{aligned} h\colon A^* &\to A^*, \\ \epsilon &\mapsto a, \\ a &\mapsto \epsilon, \\ w &\mapsto w, \text{ falls } |w| \geq 2 \end{aligned}$$

d) Die Aufgabenstellung ist für $w = \varepsilon$ sinnlos. Also

$$\begin{aligned} \varphi\colon A^+ &\to A^*, \\ w &\mapsto (w \cdot w)^{|w \cdot w|^{|w|-1}}, \end{aligned}$$

Korrektur: Das leere Wort bitte ignorieren.

e)

$$\begin{aligned} \psi\colon 2^{A^*} &\to 2^{A^*}, \\ L &\mapsto \{w \cdot (w \cdot w) \mid w \in L\}, \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \xi\colon 2^{A^*} &\to 2^{A^*}, \\ L &\mapsto A^* \setminus L. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 (1,5 + 1,5 + 3 = 6 Punkte)
Sind X und Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so ist die Relation

$$R_f = \{(f(x), x) \mid x \in X\}$$

eine bijektive Abbildung von Y nach X, die wir mit f^{-1} bezeichnen, *Umkehrabbildung von f* oder *Inverse von f* nennen, und für die für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ und } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Es sei A das Alphabet $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, es sei γ die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{Z}_3 &\to A, \\ 0 &\mapsto \mathtt{a}, \\ 1 &\mapsto \mathtt{b}, \\ 2 &\mapsto \mathtt{c}, \end{aligned}$$

und es sei $\odot$ die binäre Operation

$$\begin{aligned} \odot\colon A^* \times A^* &\to A^*, \\ (u, v) &\mapsto \begin{cases} u, & \text{falls } u = \epsilon \text{ oder } v = \epsilon, \\ \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(y)) \bmod 3) \cdot (\mu \odot \kappa), & \text{falls } u = x \cdot \mu \text{ und } v = y \cdot \kappa \\ & \text{für } x, y \in A \text{ und } \mu, \kappa \in A^*, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei für jede nicht-negative ganze Zahl z der Ausdruck $z \bmod 3$ den Rest der ganzzahligen Division von z mit 3 bezeichne und bei Bedarf Zeichen in A als Wörter der Länge 1 in A^1 aufzufassen sind.

a) Berechnen Sie die Wörter $\mathtt{baac} \odot \mathtt{aaaa}$, $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbbbb}$ und $\mathtt{baac} \odot \mathtt{cc}$.

b) Es sei

$$\begin{aligned} \delta\colon A &\to A, \\ \mathtt{a} &\mapsto \mathtt{a}, \\ \mathtt{b} &\mapsto \mathtt{c}, \\ \mathtt{c} &\mapsto \mathtt{b}. \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $u \in A^*$ ein $v \in A^*$ so an, dass $u \odot v = \mathtt{a}^{|u|}$ gilt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^n\colon w \odot \mathtt{a}^n = w.$$

Lösung 2.4

a) $\mathtt{baac} \odot \mathtt{aaaa} = \mathtt{baac}$, $\mathtt{baac} \odot \mathtt{bbbbbb} = \mathtt{cbba}$ und $\mathtt{baac} \odot \mathtt{cc} = \mathtt{acac}$.

b) Es sei $u \in A^*$ und es sei B der Zielbereich von u. Das Wort

$$\begin{aligned} v \colon \mathbb{Z}_{|u|} &\to \delta(B), \\ i &\mapsto \delta(u(i)), \end{aligned}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

c) *Induktionsanfang*: Es sei $w \in A^0$. Dann ist $w = \epsilon$. Nach Definition von $\odot$ gilt somit $w \odot \mathtt{a}^0 = w$. Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^0 \colon w \odot \mathtt{a}^0 = w.$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass gilt:

$$\text{Für jedes } u \in A^n \colon u \odot \mathtt{a}^n = u. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Weiter sei $w \in A^{n+1}$. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $u \in A^n$ so, dass $x \cdot u = w$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= (x \cdot u) \odot (\mathtt{a} \cdot \mathtt{a}^n) \\ &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n). \end{aligned}$$

Nach Definition von γ, γ^{-1} und mod gilt:

$$\begin{aligned} \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + 0) \bmod 3) \\ &= \gamma(\gamma^{-1}(x) \bmod 3) \\ &= \gamma(\gamma^{-1}(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u \odot \mathtt{a}^n = u$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} w \odot \mathtt{a}^{n+1} &= \gamma((\gamma^{-1}(x) + \gamma^{-1}(\mathtt{a})) \bmod 3) \cdot (u \odot \mathtt{a}^n) \\ &= x \cdot u \\ &= w. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$\text{Für jedes } w \in A^{n+1} \colon w \odot \mathtt{a}^{n+1} = w.$$

Schlussworte: Gemäß des Prinzips der vollständigen Induktion gilt die Behauptung.

Korrektur: Ind.anfang 1 Punkt, Ind.schritt 2 Punkte