

Grundbegriffe der Informatik

Aufgabenblatt 6

Matr.nr.:

--	--	--	--	--	--	--

Nachname:

--

Vorname:

--

Tutorium: Nr.

--

Name des Tutors:

--

Ausgabe: 2. Dezember 2015

Abgabe: 11. Dezember 2015, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 6:

	/ 20
--	------

(Physik: 20)

Blätter 1 – 6:

	/ 104
--	-------

(Physik: 101)

Aufgabe 6.1 (2 + 2 + (2 + 1 + 1 + 2) + 2 + 2 = 14 Punkte)

Es sei A ein Alphabet; es sei \mathcal{L} die Menge aller formalen Sprachen über A , das heißt, $\mathcal{L} = \{L \mid L \subseteq A^*\}$; es sei $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ eine Abbildung derart, dass für jede formale Sprache $S \in \mathcal{L}$ und jede formale Sprache $T \in \mathcal{L}$ mit $S \subseteq T$ gilt: $f(S) \subseteq f(T)$; es seien die formalen Sprachen L_n , $n \in \mathbb{N}_0$, induktiv definiert durch

$$L_0 = \{\},$$

$$\text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: L_{n+1} = f(L_n);$$

und es sei L_∞ die formale Sprache $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L_n$.

- a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $L_n \subseteq L_{n+1}$.
- b) Beweisen Sie, dass $f(L_\infty) = L_\infty$ gilt. Eine formale Sprache mit dieser Eigenschaft nennt man *Fixpunkt von f* .
Hinweis: Für jede Menge I und alle formalen Sprachen $S_i \subseteq A^*$, $i \in I$, gilt $f(\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} f(S_i)$.
- c) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{0, 1\}$ und es sei

$$f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

$$L \mapsto \{0, 1\} \cup (\{0, 1\} \cdot L).$$

- (i) Geben Sie L_1 , $L_2 \setminus L_1$ und $L_3 \setminus L_2$ so explizit wie möglich in der Form $\{\dots\}$ an.
- (ii) Geben Sie einen arithmetischen Ausdruck E , in dem das Symbol n vorkommt und die Sprachen L_n , $n \in \mathbb{N}_0$, nicht vorkommen, so an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|L_{n+1} \setminus L_n| = E$.
- (iii) Geben Sie L_∞ ohne Bezug auf die formalen Sprachen L_n , $n \in \mathbb{N}_0$, an.
- (iv) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass die von ihr erzeugte formale Sprache $L(G)$ gleich L_∞ ist.
- d) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{0, 1, ;\}$ und es sei

$$f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

$$L \mapsto \{0, 1\}^+ \cup (\{0, 1\}^+ \cdot \{;\} \cdot L).$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G so an, dass $L(G) = L_\infty$ gilt.

- e) In dieser Teilaufgabe sei $A = \{(\,,\,)\}$ und es sei $G = (N, T, S, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{S\}$, den Terminalsymbolen $T = \{(\,,\,)\}$ und den Produktionen

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon \mid S(S)\}.$$

Geben Sie eine Abbildung $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ so an, dass $L_\infty = L(G)$ gilt.

Lösung 6.1

Nebenbei: Jede Abbildung $g: A^* \rightarrow A^*$ induziert eine Abbildung $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ vermöge $L \mapsto g(L)$ mit der gewünschten Eigenschaft. Und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $L_n = f^n(\{\})$. Und $L_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(\{\})$. Und $f(L_\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{n+1}(\{\})$.

a) *Induktionsanfang:* Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge. Insbesondere gilt $L_0 = \{\} \subseteq f(\{\}) = L_1$.

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $L_n \subseteq L_{n+1}$. Dann gilt $L_{n+1} = f(L_n) \subseteq f(L_{n+1}) = L_{(n+1)+1}$.

Schlussworte: Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung.

Korrektur: 0,5 Punkte für den Induktionsanfang; 1,5 Punkte für den Induktionsschritt und davon 0,5 Punkte für die Induktionsvoraussetzung.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(L_\infty) &= f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f(L_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} L_{n+1} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} L_k \\ &= \{\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} L_k = L_0 \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} L_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} L_k = L_\infty. \end{aligned}$$

c) (a) $L_1 \setminus L_0 = \{0, 1\}$, $L_2 \setminus L_1 = \{00, 01, 10, 11\}$, $L_3 \setminus L_2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Korrektur: Jeweils 0,5 Punkte für L_1 und L_2 ; 1 Punkt für L_3 .

(b) $E = 2^{n+1}$.

(c) $L_\infty = \{0, 1\}^+$ oder $L_\infty = \{0, 1\} \cdot \{0, 1\}^*$ oder $L_\infty = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \geq 1\}$ oder ...

(d) Die Grammatik $G = (N, T, B, P)$ mit den Nichtterminalsymbolen $\{B\}$, den Terminalsymbolen $\{0, 1\}$ und den Produktionen $\{B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B\}$ leistet das Gewünschte.

Nebenbei: Für jedes $L \in \mathcal{L}$ gilt $f(L) = \{0\} \cup \{1\} \cup \{0\} \cdot L \cup \{1\} \cdot L$. Entfernt man aus diesem Ausdruck die Symbole $\{, \}$ und \cdot , ersetzt \cup durch $|$, L durch B , $=$ durch \rightarrow und $f(L)$ durch B , so erhält man die Produktionen in P .

d) Die Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit den Nichtterminalsymbolen $\{S, B\}$, den Terminalsymbolen $\{0, 1, ;\}$ und den Produktionen

$$\begin{aligned} \{S &\rightarrow B \mid B; S, \\ B &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B\} \end{aligned}$$

leistet das Gewünschte.

e) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}, \\ L &\mapsto \{\varepsilon\} \cup L \cdot \{(\} \cdot L \cdot \{)\}, \end{aligned}$$

leistet das Gewünschte.

Aufgabe 6.2 (2 + 4 = 6 Punkte)

Es sei $G = (N, T, S, P)$ die Grammatik mit den Nichtterminalsymbolen $N = \{S, U, X, Q\}$, den Terminalsymbolen $T = \{a\}$ und den Produktionen

$$\begin{aligned}P = \{ & S \rightarrow aU \mid aXa \mid Qaa, \\ & U \rightarrow aaU \mid \varepsilon, \\ & X \rightarrow Qaaa \mid a, \\ & Q \rightarrow aXa \mid a\}\end{aligned}$$

- a) Leiten Sie aus dem Startsymbol das Wort a^7 ab. Geben Sie dabei jeden Ableitungsschritt an.
- b) Zeichnen Sie den Ableitungsbaum für das Wort a^{16} .

Lösung 6.2

Aus dem Nichtterminalsymbol U sind alle Wörter über T gerader Länge ableitbar. Somit sind aus aU alle Wörter über T ungerader Länge ableitbar. Aus den Nichtterminalsymbolen X und Q sind alle Wörter über T der Längen x_n beziehungsweise q_n , $n \in \mathbb{N}_0$, ableitbar, wobei die nicht-negativen ganzen Zahlen x_n und q_n , $n \in \mathbb{N}_0$, wechselseitig induktiv definiert sind durch

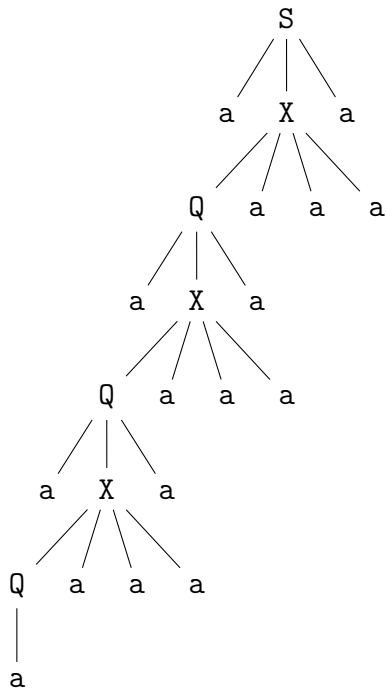
$$\begin{aligned}x_0 &= 1, \\ q_0 &= 1, \\ \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0: \quad & \begin{cases} x_{n+1} = q_n + 3, \\ q_{n+1} = 1 + x_n + 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Somit sind aus aXa und Qaa alle Wörter über T der Längen $1 + x_n + 1$ beziehungsweise $q_n + 2$, $n \in \mathbb{N}_0$, ableitbar. Es gelten $x_0 = 1$, $q_0 = 1$, $x_1 = q_0 + 3 = 4$, $q_1 = 1 + x_0 + 1 = 3$, $x_2 = 6$, $q_2 = 6$, $x_3 = 9$, $q_3 = 8$, $x_4 = 11$, $q_4 = 11$, $x_5 = 14$, $q_5 = 13$.

- a) Da das Wort ungerade Länge hat kann es über aU aus S wie folgt abgeleitet werden:

$$S \Rightarrow aU \Rightarrow aaaU \Rightarrow aaaaaU \Rightarrow aaaaaaaU \Rightarrow aaaaaaa.$$

- b) Da das Wort gerade Länge hat, ist es nicht über aU aus S ableitbar. Da $1 + x_5 + 1 = 16$ gilt, ist das Wort über aXa aus S ableitbar.

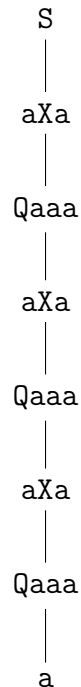


Korrektur: Es gibt viele Punkte (4) zu verteilen.

- Ziehen Sie für Fehler auch viel ab ;-).
- 2 Punkte dafür, dass irgendwie erkennbar ist, wie man zu dem Wort kommen kann
- 2 Punkte dafür, dass wirklich ein Ableitungsbaum da steht

Standardfehler bei Ableitungsbäumen (oder dem, was Studenten dafür halten):

- von einem Nichtterminal nach unten nicht drei oder vier oder ... Striche, sondern nur einer, also z. B.



oder noch kreativere Varianten davon;
dafür 0/2 Punkte mehr.

- Baum passt gar nicht zu dem Produktionen;
je nicht passendem Ableitungsschritt 0.5 Punkte abziehen

