Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik (4 ECTS)
8. März 2018

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:		nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	
max. Punkte	1	10	12	14	10	10	
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

/ 1

Aufgabe 1 (1 Punkt)

Beschriften Sie die Titelseite mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Geben Sie an, ob dies Ihr erster oder zweiter Versuch ist. Falls dieses Ihr zweiter Versuch ist, geben Sie bitte eine E-Mail Adresse an, unter der wir Sie erreichen können.

Beschriften Sie jedes weitere Blatt in der Kopfzeile der Vorderseite mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

/ 10 **Aufgabe 2** **(1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10 Punkte)**

a) Gegeben das Alphabet $A = \mathbb{Z}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Was ist $A^* \setminus A^+$? /1

Antwort: $\{\epsilon\}$

b) Nennen Sie die vier Bestandteile eines Kalküls. /2

- Alphabet A
- syntaktisch korrekte Formeln $\mathrm{For} \subseteq A^*$
- Axiome $Ax \subseteq \mathrm{For}$
- Schlussregeln $R \subseteq \mathrm{For}_{AL}^k$

c) Es sei $A = \{1\}$ und $B = \{2, 3\}$. Geben Sie alle binären Relationen von A in B an. /2

Antwort:

$\{\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(1, 2), (1, 3)\}$

d) Ist die Übersetzung $\mathrm{Trans}_{2,16} = \mathrm{Repr}_2 \circ \mathrm{Num}_{16}$ eine Codierung? Begründen Sie Ihre Antwort. /2

Nein, denn $\mathrm{Trans}_{2,16}$ ist nicht injektiv,

da führende Nullen ignoriert werden.

e) Ist die Isomorphie von Graphen eine Äquivalenzrelation? /1

Antwort: Ja

f) Sei das Alphabet der Relationssymbole $\mathrm{Rel}_{PL} = \{R, S\}$, das Alphabet der Funktionen $\mathrm{Fun}_{PL} = \{f, g\}$ und die Menge der Variabeln und Konstanten geeignet gewählt. Geben Sie für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an, welche Formeln atomare Formeln sind und welche nicht: /2

(a) $g(x, y) \doteq f(x, g(f(x, y), g(x, x)))$

(b) $\forall x R(x) \wedge S(x, y)$

(c) $S(f(x, x), y) \rightarrow R(x)$

(d) $S(f(x, x), g(y, y))$

atomare Formeln: a), d)

keine atomaren Formeln: b), c)

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:

/ 12 **Aufgabe 3** **(2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 4 = 12 Punkte)**

Es sei $A = \{1, 2, a, 2\}$, $B = \{a, b, c, g, 2, 8, 9\}$ und $C = \{x, y\}$.

a) Geben Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $|A \cup B|$ und $|A \cap B|$ an. /2

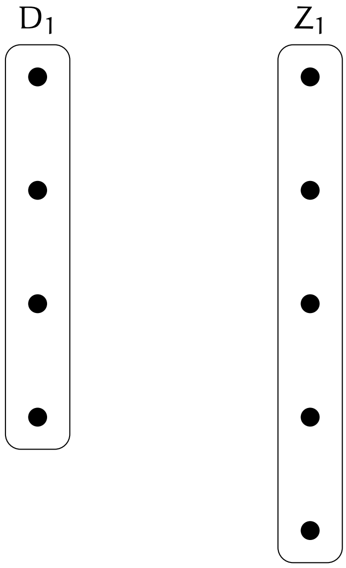
b) Geben Sie 2^C an. /1

c) Geben Sie $A \times C$ an. /1

d) Geben Sie eine linkstotale Äquivalenzrelation $R \subseteq A \times A$ an. /2

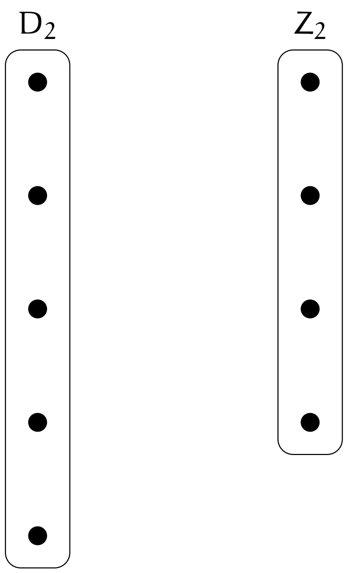
/1

e) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine injektive Abbildung $f : D_1 \to Z_1$ ein, die nicht rechtstotal ist.



/1

f) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine rechtstotale partielle Abbildung $g : D_2 \to Z_2$ ein.



g) Gegeben sei eine Menge M und die Relation $R_{rt} = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M$.
Beweisen oder widerlegen Sie:
R_{rt} ist eine rechtstotale Äquivalenzrelation und es gilt $|R_{rt}| \leq |R|$ für jede rechtstotale Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$.

/4

Lösung 3

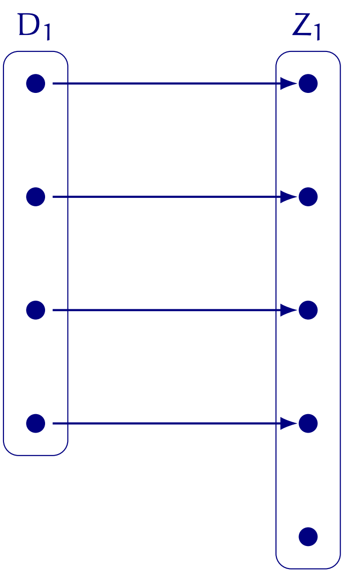
a) $A \cup B = \{1, 2, 8, 9, a, b, c, g\}$, $A \cap B = \{2, a\}$, $|A \cup B| = 8$, $|A \cap B| = 2$

b) $2^C = \{\{\}, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

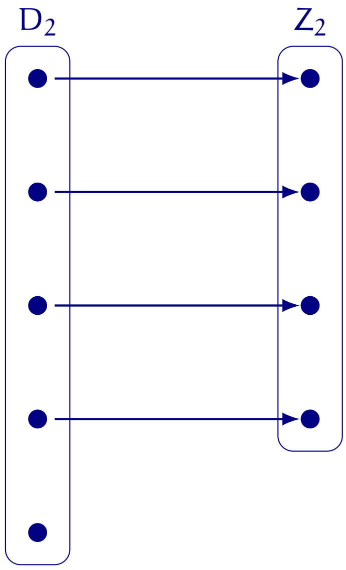
c) $A \times C = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (a, x), (a, y)\}$

d) $R = \{(1, 1), (2, 2), (a, a)\}$

e) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine injektive Abbildung $f : D_1 \to Z_1$ ein, die nicht rechtstotal ist.



f) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine rechtstotale partielle Abbildung $g : D_2 \to Z_2$ ein.



g)
1. Zu beweisen: R_{rt} ist eine rechtstotale Äquivalenzrelation
   - Rechtstotal: Für jedes $x \in M$ exisitert ein $y \in M$ mit $(y, x) \in R_{rt}$, nämlich $y = x$ gemäß Definition.
   - Reflexiv: $I_M \in R_{rt}$ gilt per Definition
   - Transitiv: Für jedes $x, y, z \in M$ gilt: Wenn $(x, y) \in R_{rt}$ und $(y, z) \in R_{rt}$, dann gilt gemäß Definition von R_{rt}: $x = y$ und $y = z$ und demnach $x = y = z$ und somit gilt $(x, z) = (x, x) \in R_{rt}$ gemäß Definition von R_{rt}.
   - Symmetrisch: Wenn $(x, y) \in R_{rt}$, dann gilt $x = y$ und somit gilt auch $(y, x) = (x, x) \in R_{rt}$
2. Zu beweisen: $|R_{rt}| \leq |R|$ für jede rechtstotale Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$.
   Reicht zu zeigen: $|R_{rt}| \leq |R|$ für jede rechtstotale Relation $R \subseteq M \times M$.
   $|R_{rt}| = |M|$ gemäß Definition von R_{rt}. Jede rechtstotale Realtion $R \subseteq M \times M$ muss mindestens $|M|$ Elemente enthalten, gemäß der Definition von rechtstotal. Also gilt für jede rechtstotale Relation $R \subseteq M \times M$: $|R_{rt}| = m \leq |R|$

Platz für Antworten zu Aufgabe 3:

/ 14

Aufgabe 4 **(1 + 2 + 2 + 5 + 4 = 14 Punkte)**

Ein vollständiger Binärbaum der Stufe n mit $n \in \mathbb{N}_0$ sei ein gerichteter Baum mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder innere Knoten hat den Ausgangsgrad 2.
- Die Länge des Pfades von der Wurzel zu jedem Blatt ist genau n.

/1

a) Zeichnen Sie einen vollständigen Binärbaum der Stufe 0.

/2

b) Zeichnen Sie einen vollständigen Binärbaum der Stufe 2.

c) Gegeben sei das Alphabet $A = \{l, r\}$ und die nachfolgenden gerichteten Graphen, für deren Knotenmenge V gilt: $V \subset A^*$

/2

- $G = (V, E)$ mit $V = \{\epsilon, l, r\}$ und $E = \{(\epsilon, l), (\epsilon, r)\}$
- $G_l = (V_l, E_l)$ mit $V_l = \{l, ll, lr\}$ und $E_l = \{(l, ll), (l, lr)\}$
- $G_r = (V_r, E_r)$ mit $V_r = \{r, rl, rr\}$ und $E_r = \{(r, rl), (r, rr)\}$

Geben Sie die Graphisomorphismen $f_l : V \to V_l$ und $f_r : V \to V_r$ an, die zeigen, dass G sowohl zu G_l als auch zu G_r isomorph ist.

/5

d) Definieren Sie induktiv einen vollständigen Binarbäum G_n der Stufe n. Verwenden Sie hierzu die Graphisomorphismen der vorherigen Aufgabe. Sie dürfen zudem die Funktion w verwenden, die für einen Baum G dessen Wurzel zurückgibt.

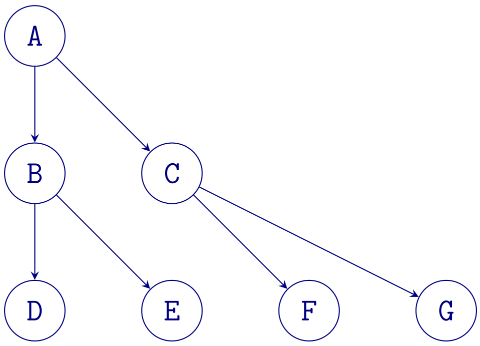
e) Beweisen Sie induktiv:
Ein vollständiger Binärbaum G_n der Stufe n hat genau $2^{n+1} - 1$ Knoten.
Sie dürfen davon ausgehen, dass ein vollständiger Binärbaum G_n der Stufe n zu jedem anderen vollständigen Binärbaum G'_n der Stufe n isomorph ist.

/4

Lösung 4

a)

b)



c)

$f_l : A^* \to A^*, w \mapsto l \cdot w$ $f_r : A^* \to A^*, w \mapsto r \cdot w$

d)

$G_0 = (V_0, E_0)$ mit $V = \{\epsilon\}$, $E_0 = \{\}$
$G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ mit
$V_{n+1} = V_0 \cup \{x | f_l^{-1}(x) \in V_n\} \cup \{x | f_r^{-1}(x) \in V_n\}$
$E_{n+1} = \{(x, y) | (f_l^{-1}(x), f_l^{-1}(y)) \in E_n\} \cup \{(x, y) | (f_r^{-1}(x), f_r^{-1}(y)) \in E_n\} \cup \{(r(G_0), f_l(r(G_n))), (r(G_0), f_r(r(G_n)))\}$

e)

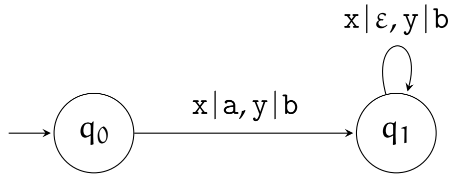
IA (n=0): $|V_0| = 1 = 2^{0+1} - 1$
IV: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage.
IS (mit Aufgabe d):
$|V_{n+1}| = |V_0| + 2 \cdot |V_n| = 1 + 2 \cdot (2^{n+1} - 1) = 1 + 2^{n+2} - 2 = 2^{n+2} - 1$

Platz für Antworten zu Aufgabe 4:

/ 10

Aufgabe 5 (1 + 1 + 4 + 4 = 10 Punkte)

Gegeben sei der folgende Mealy-Automat M mit dem Eingabealphabet $X = \{x, y\}$, dem Ausgabealphabet $Y = \{a, b\}$, dem Startzustand q_0, der Zustandsüberführungsfunktion f und der Ausgabefunktion g:



a) Gegeben sei das Wort $w = xxyy$. Geben Sie die Ausgabe des Mealy-Automaten, d.h., den Wert der verallgemeinerten Ausgabefunktion $g_{**}(q_0, w)$, für das Eingabewort w an. /1

b) Gegeben sei das Wort $w_2 = ab$. Geben Sie eine Eingabe $w_1 \in X^*$ an, so dass der Mealy-Automat bei der Eingabe des Wortes w_1 das Wort w_2 ausgibt. Folglich soll $g_{**}(q_0, w_1) = w_2$ gelten. /1

/4

c) Geben Sie graphisch einen Moore-Automaten an, der für jede Eingabesequenz $s_e \in X^*$ die gleiche Ausgabesequenz $s_a \in Y^*$ wie der angegebene Mealy-Automat erzeugt.

d) Sei $i \in \mathbb{N}^+$ beliebig, aber fest gewählt. Zudem sei das Alphabet $A = \{a, b\}$ gegeben. Geben Sie formal (also nicht graphisch) einen endlichen Akzeptor an, der genau die Wörter der Sprache $L = \{ab^i\} \subseteq A^*$ akzeptiert.

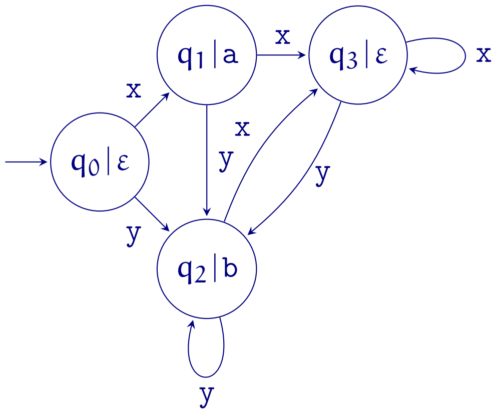
/4

Lösung 5

a) $g_{**}(q_0, w) = abb$

b) $w_1 = xy$

c)



d)

Endlicher Akzeptor $B = (Z, z_0, X, f, F)$ mit
$Z = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -2 \text{ und } x \leq i\}$
$z_0 = -1$
$X = \{a, b\}$

$$f : (Z \times X) \to Z, (z, x) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } z = -1 \text{ und } x = a \\ z + 1 & \text{, falls } z \geq 0 \text{ und } z < i \text{ und } x = b \\ -2 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{1}$$

$F = \{i\}$

Platz für Antworten zu Aufgabe 5:

/ 10 **Aufgabe 6** **(2 + 3 + 1 + 2 + 2 = 10 Punkte)**

a) Geben Sie für die folgenden Zahlen, die in Dezimaldarstellung gegeben sind, jeweils den Wert von Repr_5 an: 25, 32, 73, 18 /2

b) Bestimmen Sie den Huffman-Baum des Wortes $w = \mathtt{bccdefgacgf}$. /3

/1

c) Geben Sie w aus Teilaufgabe b) in der Huffman-Codierung an, die durch Ihren Baum aus Teilaufgabe b) vorgegeben wird.

/2

d) Geben Sie ein Wort der Länge 4 über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ an, dessen Huffman-Codierung die Länge 8 hat.

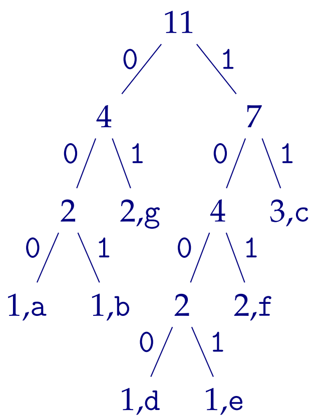
/2

e) Wieviele Wörter der Länge 4 über dem Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$ gibt es, deren Huffman-Codierung die Länge 8 hat.

Lösung 6

a) $\mathrm{Repr}_5(25) = 100$, $\mathrm{Repr}_5(32) = 112$, $\mathrm{Repr}_5(73) = 243$, $\mathrm{Repr}_5(18) = 33$

b)



c) $w = 001|11|11|1000|1001|101|01|000|11|01|101$

d) $w = abcd$

e) $n = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

Platz für Antworten zu Aufgabe 6:

Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 6: