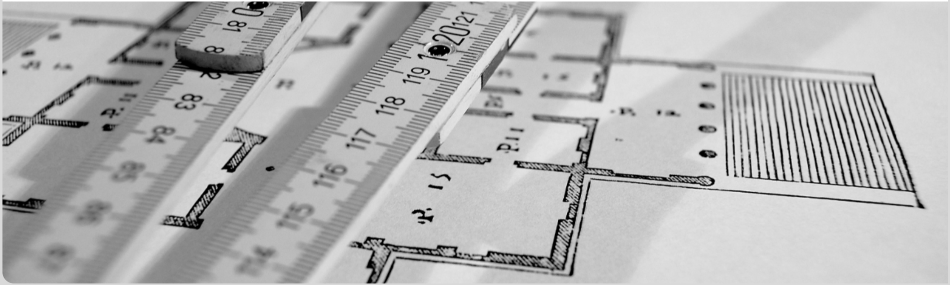
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 3 | 11.11.2016

Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

Aussagenlogik

Formale Sprachen

Übungsblätter

... gibt es natürlich noch nicht ;-)

Noch ein paar spezielle Hinweise:

- Text in Schwarz oder Blau (oder andere dunkle Farbe $\notin \{\text{Rot}, \text{Grün}\}$)
- Folgende Farben sind für Kennzeichnungen zugelassen:
  Blau, Schwarz, Dunkelgrün, Orange, Gelb.
  Andere Farben, insbesondere Rot, sind nicht zugelassen
  (und es gilt Blau = Lila, Gelb = Hellgrün, ...)
- Links und rechts bitte jeweils einen Rand von mind. 1,5 cm frei lassen.
- Aufgabennummer deutlich kenntlich machen
- Für (sehr) unsaubere Abgaben ist Punktabzug möglich!

Und ganz wichtig: Frühzeitig anfangen! ÜB 2 sowie folgende ÜB sind **doppelt so umfangreich** wie ÜB 1 (und geben entsprechend viele Punkte)!

In the previous episode of GBI...

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal W

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal W
- Jede Relation ist eine Funktion

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal W
- Jede Relation ist eine Funktion F

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal W
- Jede Relation ist eine Funktion F
- Jede Funktion ist eine Relation

Wahr oder Falsch?

- Eine Funktion muss linkseindeutig sein F
  Richtig: Eine Funktion muss rechtseindeutig und linkstotal sein
- Eine injektive Funktion ist linkseindeutig W
- Eine surjektive Funktion ist rechtstotal W
- Jede Relation ist eine Funktion F
- Jede Funktion ist eine Relation W

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$ F Aber: $(\mathrm{aa}, \mathrm{ba}) \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$ F Aber: $(\mathrm{aa}, \mathrm{ba}) \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$
- Ich benutze für jeden Beweis Induktion.

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$ F Aber: $(\mathrm{aa}, \mathrm{ba}) \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$
- Ich benutze für jeden Beweis Induktion. F
  Mit einem Schraubenschlüssel bekommt man keinen Nagel in die Wand.

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$ F Aber: $(\mathrm{aa}, \mathrm{ba}) \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$
- Ich benutze für jeden Beweis Induktion. F
  Mit einem Schraubenschlüssel bekommt man keinen Nagel in die Wand.
- $|\{\varepsilon\}| = 0$

Wahr oder Falsch?

- $aaba \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$ F Aber: $(\mathrm{aa}, \mathrm{ba}) \in \{a, b\}^2 \times \{a, b\}^2$
- Ich benutze für jeden Beweis Induktion. F
  Mit einem Schraubenschlüssel bekommt man keinen Nagel in die Wand.
- $|\{\varepsilon\}| = 0$ F $\{\varepsilon\} \neq \emptyset$

Zum Aufwärmen: Logikrätsel

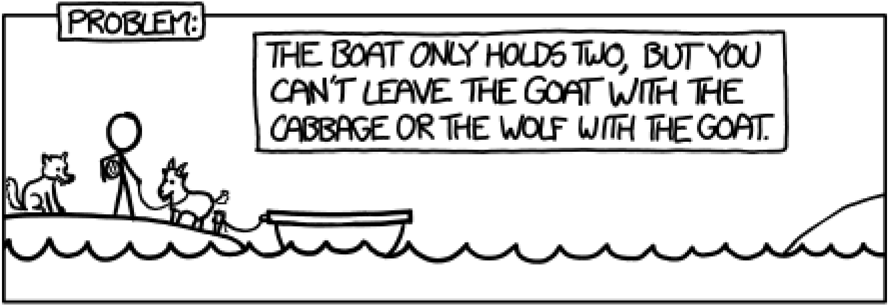


Abbildung: `http://xkcd.com/1134/`

Zum Aufwärmen: Logikrätsel

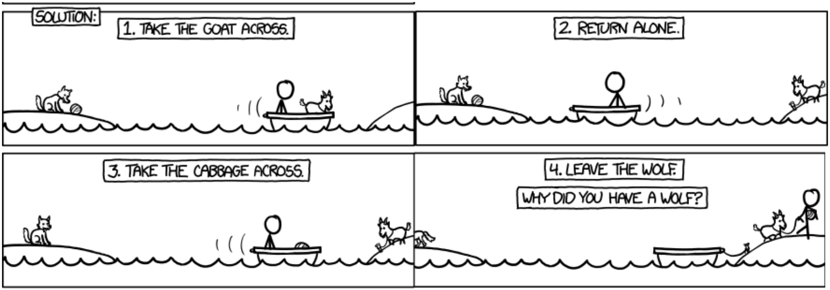


Abbildung: `http://xkcd.com/1134/`

Aussagenlogik

Formale Sprachen

Aussagenlogik

Aussagen sind Sätze, die entweder wahr oder falsch sind.
Der Wahrheitswert muss dabei nicht unbedingt bekannt oder „tatsächlich ermittelbar“ sein.

Beispiel

- $1 + 1 = 2$ ist eine Aussage. Sie ist wahr.
- „Es gibt nur endlich viele Primzahlen.“ ist eine Aussage. Sie ist falsch.
- Die Goldbachsche Vermutung ist eine Aussage. Ihr Wahrheitswert ist unbekannt.
- Die Welt wird am 11.11.11111 untergehen ist auch eine Aussage. Wir werden ihren Wahrheitswert aber wohl niemals ermitteln können.
- „Gelb“ ist keine Aussage.
- „Dieser Satz ist falsch.“ ist keine Aussage. Dem Satz kann offensichtlich kein Wahrheitswert zugeordnet werden.

Zwei Grundsätze der Aussagenlogik

- Jede Aussage ist entweder falsch oder wahr.
  Wir schreiben im Folgenden $\mathbb{B} = \{\mathrm{w}, \mathrm{f}\}$
- Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen eindeutig festgelegt.
  „$2 + 2 = 5 \to$ Pinguine können fliegen“ ist **wahr**.

Wir abstrahieren daher vom Inhalt und betrachten **Aussagevariablen**.

Syntax

Definition

Var_{AL} ist die Menge aller Aussagevariablen.

$A_{AL} = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup Var_{AL}$

Definition

For_{AL} ist die Menge aller syntaktisch korrekten Formeln über Var_{AL}.
Formal wird diese induktiv über Konstruktionsabbildungen definiert (*VL*).
Wendet man Klammereinsparungen an, entspricht das Ergebnis unserer intuitiven Verwendung.

Beispiel

$$Var_{AL} = \{A, B, C\}$$

$$For_{AL} = \{(A \rightarrow B) \vee \neg B, ...\}$$

Semantik

Die Semantik einer aussagenlogischen Formel wird durch Auswertung bestimmt.
Hierbei werden den Symbolen aus A_{AL} boolsche Funktionen zugeordnet.

Definition

Eine **boolesche Funktion** ist eine Abbildung der Form $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Beispiel

„Übliche“ boolesche Funktionen sind $b_{\neg}$, $b_{\wedge}$, $b_{\vee}$ und $b_{\rightarrow}$

Semantik

Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt von den Wahrheitswerten der verwendeten Aussagevariablen ab.

Definition

Sei $V \subseteq Var_{AL}$ die Menge der verwendeten Aussagevariablen.
Eine Funktion $I : V \to \mathbb{B}$ bezeichnet man als **Interpretation**.

Definition

Eine **Tautologie** ist eine aussagenlogische Formel, bei der für alle möglichen Interpretationen I gilt: $val_I(A) = \mathbf{w}$.

Liefert die Auswertung von zwei aussagenlogischen Formeln A und B für jede Interpretation I jeweils den gleichen Wert, also $val_I(A) = val_I(B)$, so bezeichnen wir diese Formeln als **äquivalent** und schreiben $A \equiv B$.

Auswertung

Für die Auswertung einer Aussagenlogsichen Formel A unter Interpretation I definieren wir die Abbildung $val_I(A)$.
Die Auswertung erfolgt dabei schrittweise.

$$
\begin{aligned}
& val_I((A \to B) \vee \neg B) \\
= {} & b_\vee(val_I(A \to B), val_I(\neg B)) \\
= {} & b_\vee(b_\to(val_I(A), val_I(B)), b_\neg(val_I(B))) \\
= {} & b_\vee(b_\to(I(A), I(B)), b_\neg(I(B)))
\end{aligned}
$$

Auswertung

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \rightarrow (H \rightarrow G)$$

Quelle: GBI Übung 2015/2016

Auswertung

Var_{AL} Aussagevariablen, For_{AL} aussagelogische Formeln

Behauptung: Für alle $G, H \in For_{AL}$ gilt

$$\models G \rightarrow (H \rightarrow G)$$

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I : Var_{AL} \rightarrow \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \rightarrow (H \rightarrow G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \rightarrow G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Auswertung

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I : Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg \mathbf{w} \vee (\neg val_I(H) \vee \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{f} \vee \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$.

Auswertung

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I : Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. ...

Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg \mathbf{f} \vee (\neg val_I(H) \vee \mathbf{f}) \\ &= \mathbf{w} \vee \neg val_I(H) \\ &= \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Auswertung

Beweis: Es seien $G, H \in For_{AL}$. Und es sei $I : Var_{AL} \to \mathbb{B}$ eine Interpretation. Nach Definition von val_I gilt

$$\begin{aligned} val_I(G \to (H \to G)) &= \neg val_I(G) \vee val_I(H \to G) \\ &= \neg val_I(G) \vee (\neg val_I(H) \vee val_I(G)). \end{aligned}$$

Fall 1: $val_I(G) = \mathbf{w}$. ...

Fall 2: $val_I(G) = \mathbf{f}$. ...

In jedem Fall gilt $val_I(G \to (H \to G)) = \mathbf{w}$. $\square$

Semantik

Möchte man eine AL-Formel für alle möglichen Interpretationen auswerten, so macht man dies meist in Form einer **Wahrheitstabelle**.

Aufgabe

Gegeben seien die Formeln

$$F_1 = (((B \rightarrow A) \vee B) \rightarrow (\neg A)) \wedge B$$

und

$$F_2 = \neg A \wedge B$$

Stellen Sie die Wahrheitstabellen von F_1 und F_2 auf. Sind die beiden Formeln äquivalent?

Lösung

Für die Formel F_1:

A	B	$B \to A$	$\ldots \vee B$	$\ldots \to \neg A$	$\ldots \wedge B$
w	w	w	w	f	f
w	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	f

Lösung

Für die Formel F_2:

A	B	$\neg A \wedge B$
w	w	f
w	f	f
f	w	w
f	f	f

Also sind die beiden Formeln äquivalent

$$F_1 \equiv F_2$$

Beweisbarkeit

Kalkül, Axiome, Schlussregeln, Modus Ponens, ...
Siehe VL!

Aussagenlogik

Formale Sprachen

Rückblick

Sei $\Sigma = \{A, B, ..., Z, a, b, ..., z\}$ ein Alphabet.
Dann enthält Σ^* alle Wörter, die man mit Zeichen aus Σ bilden kann. Aber nicht jedes dieser Wörter ist auch sinnvoll.

„egnarts si efiL“ ist kein sinnvolles Wort. Oder?

Wie wir sehen, hängt es immer vom Kontext ab, welche Wörter wir als (syntaktisch) korrekt betrachten.

Formale Sprachen

Definition

Sei Σ ein Alphabet.
Eine formale Sprache L ist eine Teilmenge von Σ^*.

Durch die formale Sprache geben wir an, welche der möglichen Wörter wir als *syntaktisch korrekt* ansehen.
Formale Sprachen werden häufig nicht direkt, sondern über Bildungsvorschriften angegeben.

Beispiel

$\Sigma = \{0, 1\}$
$L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \text{ endet auf } 10\} = \{10, 010, 110, 0010, \ldots\}$

Formale Sprachen

Beispiel

Formale Sprache L aller Wörter über $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, in denen nirgends das Teilwort $\mathtt{ab}$ vorkommt.

- $L = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \setminus \{w_1 \cdot \mathtt{ab} \cdot w_2 \mid w_1, w_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$
- Erst ein beliebiges Wort (evtl. ε) nur aus $\mathtt{b}$,
  danach ein beliebiges Wort (evtl. ε) nur aus $\mathtt{a}$.
- $L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{\mathtt{b}\}^* \text{ und } w_2 \in \{\mathtt{a}\}^*\}$

Bemerkungen

- Die Beschreibung einer formalen Sprache ist nicht eindeutig (siehe oben).
- Immer auf den Unterschied achten: $\{\mathtt{abc}\} \neq \mathtt{abc}$

Beispiele aus dem Leben

- Sprache der korrekten IP4-Adressen

$$192.168.178.1,$$
$$76.147.112.6, \ldots$$

  Aber nicht: 000.999.123.666
- Formale Sprache der Schlüsselwörter in Java

$$L = \{class, int, if, \ldots\}$$

- Formale Sprache der legalen Zahlen vom Typ **int**: Mit $A = \{0 \ldots 9\}$

$$A \cdot A^* = \{-19, 12849, 1001, 42, \ldots\}$$

  Und minus? Also besser $\{-, \varepsilon\} \cdot A \cdot A^*$

Produkt

Definition

Seien L_1 und L_2 zwei formale Sprachen. Dann bezeichnet

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ und } w_2 \in L_2\}$$

das **Produkt** der Sprachen L_1 und L_2.

In $L_1 \cdot L_2$ sind also alle Wörter enthalten, deren erster Teil aus L_1 und deren zweiter Teil aus L_2 ist.

Produkt

Beispiele

$\{a, b\} \cdot \{c, d\} = \{ac, ad, bc, bd\}$

$L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{\mathrm{b}\}^*, w_2 \in \{\mathrm{a}\}^*\} = \{\mathrm{b}\}^* \cdot \{\mathrm{a}\}^*$

Für alle formalen Sprachen L gilt:

$$L \cdot \{\varepsilon\} = L \qquad L \cdot \emptyset = \emptyset$$

Potenzen

Definition

Damit kann man induktiv die Potenz formaler Sprachen definieren:

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^{i+1} = L^i \cdot L$$

L^i enthält also alle Kombinationen von i (nicht unbedingt verschiedenen) Wörtern aus L.

Konkatenationsabschluss

Definition

Der Konkatenationsabschluss einer formalen Sprache L ist

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

Der ε-freie Konkatenationsabschluss ist

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

Achtung: Der ε-freie Konkatenationsabschluss muss nicht ε-frei sein!

$$\{\}^* = \{\varepsilon\}$$

Aufgabe

Es sei $A = \{a, b\}$. Beschreiben Sie die folgenden formalen Sprachen mit den Symbolen $\{, \}$, a, b, ε, $\cup$, $*$, Komma,$)$, $($ und $+$:

- die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort **ab** enthalten.
- die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.
- die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.

Lösung

- *die Menge aller Wörter über A, die das Teilwort* **ab** *enthalten.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{ab\} \cdot \{a, b\}^*$$

- *die Menge aller Wörter über A, deren vorletztes Zeichen ein b ist.*

$$\{a, b\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a, b\}$$

- *die Menge aller Wörter über A, in denen nirgends zwei b's unmittelbar hintereinander vorkommen.*

$$\{a, ba\}^* \cdot \{b, \varepsilon\}$$

Was ihr nun wissen solltet

- Aussagenlogik: Syntax und Semantik
- Was eine formale Sprache ist und warum das Konzept wichtig ist
- Wie man einfache formale Sprachen formal angeben kann
- Einfache Operationen auf formalen Sprachen

Was nächstes Mal kommt

- So viele Sprachen: Mehr zu formalen Sprachen
- Aus 2 mach 10: Übersetzungen

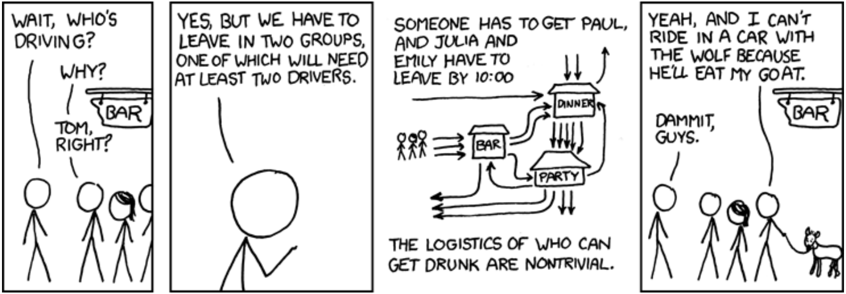


Abbildung: `https://xkcd.com/589/`

Credits

Vorgänger dieses Foliensatzes wurden erstellt von:

Thassilo Helmold
Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue