

**Lösungsvorschläge und Erläuterungen**  
**Klausur zur Vorlesung**  
**Grundbegriffe der Informatik**  
**8. März 2018**

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

Email-Adr.:
-------------

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	
max. Punkte	1	10	12	14	10	10	
tats. Punkte							

Gesamtpunktzahl:	
------------------	--

Note:	
-------	--

---

/ 1

**Aufgabe 1 (1 Punkt)**

Beschriften Sie die Titelseite mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Geben Sie an, ob dies Ihr erster oder zweiter Versuch ist. Falls dieses Ihr zweiter Versuch ist, geben Sie bitte eine E-Mail Adresse an, unter der wir Sie erreichen können.

Beschriften Sie jedes weitere Blatt in der Kopfzeile der Vorderseite mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

**Aufgabe 2** (1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 10 Punkte)

- a) Gegeben das Alphabet
- $A = \mathbb{Z}_n$
- mit
- $n \in \mathbb{N}$
- . Was ist
- $A^* \setminus A^+$
- ?

/1

Antwort:

 $\{\epsilon\}$ 

- b) Nennen Sie die vier Bestandteile eines Kalküls.

/2

Alphabet  $A$ syntaktisch korrekte Formeln  $\text{For} \subseteq A^*$ Axiome  $Ax \subseteq \text{For}$ Schlussregeln  $R \subseteq \text{For}_{AL}^k$ 

- c) Es sei
- $A = \{1\}$
- und
- $B = \{2, 3\}$
- . Geben Sie alle binären Relationen von
- $A$
- in
- $B$
- an.

/2

Antwort:

 $\{\}, \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(1, 2), (1, 3)\}$ 

- d) Ist die Übersetzung
- $\text{Trans}_{2,16} = \text{Repr}_2 \circ \text{Num}_{16}$
- eine Codierung? Begründen Sie Ihre Antwort.

/2

Nein, denn  $\text{Trans}_{2,16}$  ist nicht injektiv,

da führende Nullen ignoriert werden.

- e) Ist die Isomorphie von Graphen eine Äquivalenzrelation?

/1

Antwort:

Ja

- f) Sei das Alphabet der Relationssymbole
- $\text{Rel}_{PL} = \{R, S\}$
- , das Alphabet der Funktionen
- $\text{Fun}_{PL} = \{f, g\}$
- und die Menge der Variablen und Konstanten geeignet gewählt. Geben Sie für die folgenden prädikatenlogischen Formeln an, welche Formeln atomare Formeln sind und welche nicht:

/2

(a)  $g(x, y) \doteq f(x, g(f(x, y), g(x, x)))$ (b)  $\forall x R(x) \wedge S(x, y)$ (c)  $S(f(x, x), y) \rightarrow R(x)$ (d)  $S(f(x, x), g(y, y))$ 

atomare Formeln:

a), d)

keine atomaren Formeln:

b), c)

---

*Weiterer Platz für Antworten zu Aufgabe 2:*

---

/ 12

**Aufgabe 3** (2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 4 = 12 Punkte)

Es sei  $A = \{1, 2, a, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c, g, 2, 8, 9\}$  und  $C = \{x, y\}$ .

a) Geben Sie  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $|A \cup B|$  und  $|A \cap B|$  an.

/2

b) Geben Sie  $2^C$  an.

/1

c) Geben Sie  $A \times C$  an.

/1

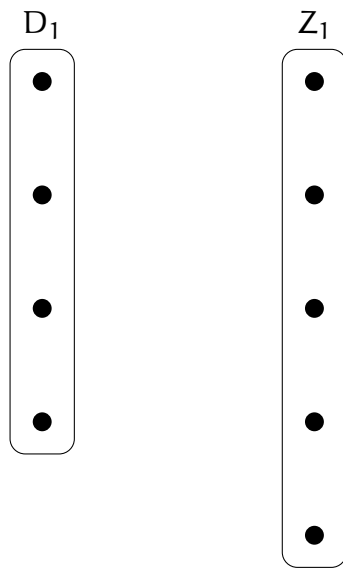
d) Geben Sie eine linkstotale Äquivalenzrelation  $R \subseteq A \times A$  an.

/2

---

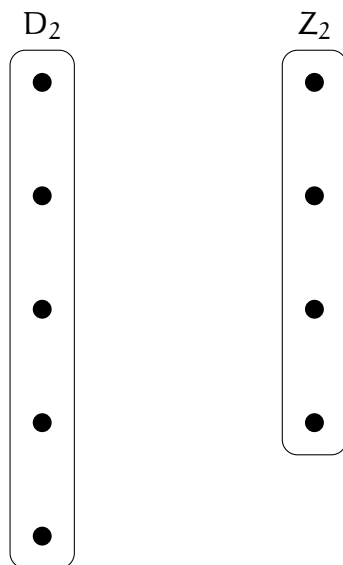
/1

- e) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine injektive Abbildung  $f : D_1 \rightarrow Z_1$  ein, die nicht rechtstotal ist.



/1

- f) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine rechtstotale partielle Abbildung  $g : D_2 \rightarrow Z_2$  ein.



g) Gegeben sei eine Menge  $M$  und die Relation

$$R_{rt} = \{(x, x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

$R_{rt}$  ist eine rechtstotale Äquivalenzrelation und es gilt  $|R_{rt}| \leq |R|$  für jede rechtstotale Äquivalenzrelation  $R \subseteq M \times M$ .

### Lösung 3

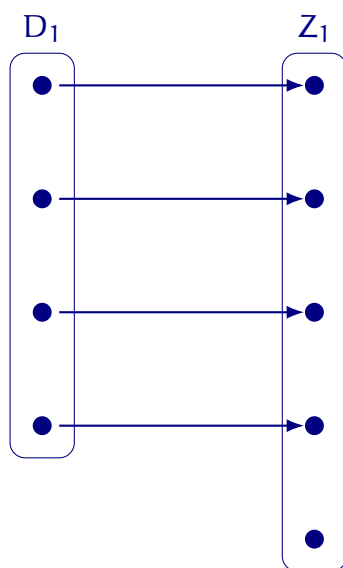
a)  $A \cup B = \{1, 2, 8, 9, a, b, c, g\}$ ,  $A \cap B = \{2, a\}$ ,  $|A \cup B| = 8$ ,  $|A \cap B| = 2$

b)  $2^C = \{\{\}, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$

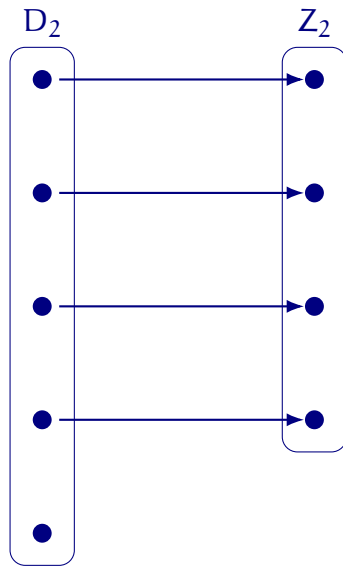
c)  $A \times C = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (a, x), (a, y)\}$

d)  $R = \{(1, 1), (2, 2), (a, a)\}$

e) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine injektive Abbildung  $f : D_1 \rightarrow Z_1$  ein, die nicht rechtstotal ist.



f) Zeichnen Sie in die folgende Abbildung mit Pfeilen eine rechtstotale partielle Abbildung  $g : D_2 \rightarrow Z_2$  ein.



- g) 1. Zu beweisen:  $R_{rt}$  ist eine rechtstotale Äquivalenzrelation
- Rechtstotal: Für jedes  $x \in M$  existiert ein  $y \in M$  mit  $(y, x) \in R_{rt}$ , nämlich  $y = x$  gemäß Definition.
  - Reflexiv:  $I_M \in R_{rt}$  gilt per Definition
  - Transitiv: Für jedes  $x, y, z \in M$  gilt: Wenn  $(x, y) \in R_{rt}$  und  $(y, z) \in R_{rt}$ , dann gilt gemäß Definition von  $R_{rt}$ :  $x = y$  und  $y = z$  und demnach  $x = y = z$  und somit gilt  $(x, z) = (x, x) \in R_{rt}$  gemäß Definition von  $R_{rt}$ .
  - Symmetrisch: Wenn  $(x, y) \in R_{rt}$ , dann gilt  $x = y$  und somit gilt auch  $(y, x) = (x, x) \in R_{rt}$
2. Zu beweisen:  $|R_{rt}| \leq |R|$  für jede rechtstotale Äquivalenzrelation  $R \subseteq M \times M$ .  
Reicht zu zeigen:  $|R_{rt}| \leq |R|$  für jede rechtstotale Relation  $R \subseteq M \times M$ .  
 $|R_{rt}| = |M|$  gemäß Definition von  $R_{rt}$ . Jede rechtstotale Relation  $R \subseteq M \times M$  muss mindestens  $|M|$  Elemente enthalten, gemäß der Definition von rechtstotal. Also gilt für jede rechtstotale Relation  $R \subseteq M \times M$ :  $|R_{rt}| = m \leq |R|$



---

*Platz für Antworten zu Aufgabe 3:*

---

/ 14

**Aufgabe 4** (1 + 2 + 2 + 5 + 4 = 14 Punkte)

Ein vollständiger Binärbaum der Stufe  $n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  sei ein gerichteter Baum mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder innere Knoten hat den Ausgangsgrad 2.
- Die Länge des Pfades von der Wurzel zu jedem Blatt ist genau  $n$ .

/1

a) Zeichnen Sie einen vollständigen Binärbaum der Stufe 0.

/2

b) Zeichnen Sie einen vollständigen Binärbaum der Stufe 2.

---

c) Gegeben sei das Alphabet  $A = \{l, r\}$  und die nachfolgenden gerichteten Graphen, für deren Knotenmenge  $V$  gilt:  $V \subset A^*$

/2

- $G = (V, E)$  mit  $V = \{\epsilon, l, r\}$  und  $E = \{(\epsilon, l), (\epsilon, r)\}$
- $G_l = (V_l, E_l)$  mit  $V_l = \{l, ll, lr\}$  und  $E_l = \{(l, ll), (l, lr)\}$
- $G_r = (V_r, E_r)$  mit  $V_r = \{r, rl, rr\}$  und  $E_r = \{(r, rl), (r, rr)\}$

Geben Sie die Graphisomorphismen  $f_l : V \rightarrow V_l$  und  $f_r : V \rightarrow V_r$  an, die zeigen, dass  $G$  sowohl zu  $G_l$  als auch zu  $G_r$  isomorph ist.

---

/5

- d) Definieren Sie induktiv einen vollständigen Binärbaum  $G_n$  der Stufe  $n$ . Verwenden Sie hierzu die Graphisomorphismen der vorherigen Aufgabe. Sie dürfen zudem die Funktion  $w$  verwenden, die für einen Baum  $G$  dessen Wurzel zurückgibt.

e) Beweisen Sie induktiv:

Ein vollständiger Binärbaum  $G_n$  der Stufe  $n$  hat genau  $2^{n+1} - 1$  Knoten.

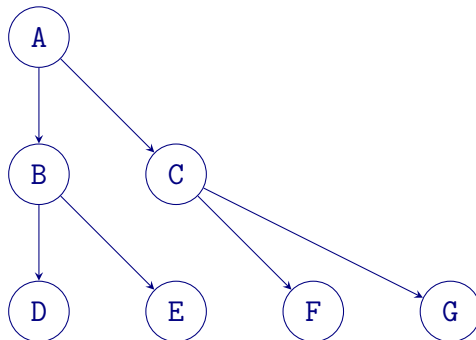
Sie dürfen davon ausgehen, dass ein vollständiger Binärbaum  $G_n$  der Stufe  $n$  zu jedem anderen vollständigen Binärbaum  $G'_n$  der Stufe  $n$  isomorph ist.

#### Lösung 4

a)



b)



c)

$$f_l : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto l \cdot w \quad f_r : A^* \rightarrow A^*, w \mapsto r \cdot w$$

d)

$$G_0 = (V_0, E_0) \text{ mit } V = \{\epsilon\}, E_0 = \{\}$$

$$G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1}) \text{ mit}$$

$$V_{n+1} = V_0 \cup \{x | f_l^{-1}(x) \in V_n\} \cup \{x | f_r^{-1}(x) \in V_n\}$$

$$E_{n+1} = \{(x, y) | (f_l^{-1}(x), f_l^{-1}(y)) \in E_n\} \cup \{(x, y) | (f_r^{-1}(x), f_r^{-1}(y)) \in E_n\} \cup \{(r(G_0), f_l(r(G_n))), (r(G_0), f_r(r(G_n)))\}$$

e)

$$\text{IA (n=0): } |V_0| = 1 = 2^{0+1} - 1$$

IV: Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt die Aussage.

IS (mit Aufgabe d):

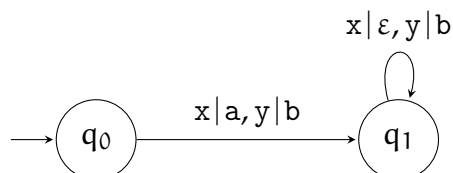
$$|V_{n+1}| = |V_0| + 2 \cdot |V_n| = 1 + 2 \cdot (2^{n+1} - 1) = 1 + 2^{n+2} - 2 = 2^{n+2} - 1$$

---

*Platz für Antworten zu Aufgabe 4:*

**Aufgabe 5 (1 + 1 + 4 + 4 = 10 Punkte)**

Gegeben sei der folgende Mealy-Automat  $M$  mit dem Eingabealphabet  $X = \{x, y\}$ , dem Ausgabealphabet  $Y = \{a, b\}$ , dem Startzustand  $q_0$ , der Zustandsüberföhrungsfunktion  $f$  und der Ausgabefunktion  $g$ :



- a) Gegeben sei das Wort  $w = xxyy$ . Geben Sie die Ausgabe des Mealy-Automaten, d.h., den Wert der verallgemeinerten Ausgabefunktion  $g_{**}(q_0, w)$ , für das Eingabewort  $w$  an.

/1

- b) Gegeben sei das Wort  $w_2 = ab$ . Geben Sie eine Eingabe  $w_1 \in X^*$  an, so dass der Mealy-Automat bei der Eingabe des Wortes  $w_1$  das Wort  $w_2$  ausgibt. Folglich soll  $g_{**}(q_0, w_1) = w_2$  gelten.

/1

---

/4

- c) Geben Sie graphisch einen Moore-Automaten an, der für jede Eingabesequenz  $s_e \in X^*$  die gleiche Ausgabesequenz  $s_a \in Y^*$  wie der angegebene Mealy-Automat erzeugt.



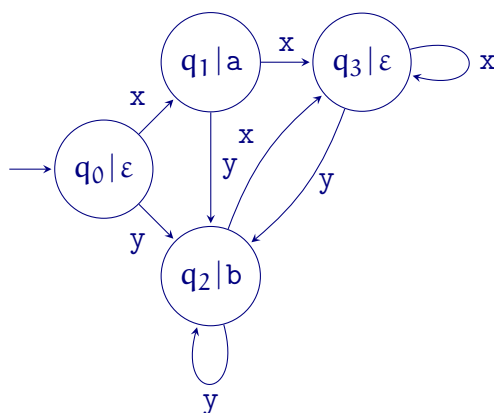
- d) Sei  $i \in \mathbb{N}^+$  beliebig, aber fest gewählt. Zudem sei das Alphabet  $A = \{a, b\}$  gegeben. Geben Sie formal (also nicht graphisch) einen endlichen Akzeptor an, der genau die Wörter der Sprache  $L = \{ab^i\} \subseteq A^*$  akzeptiert.

### Lösung 5

a)  $g_{**}(q_0, w) = abb$

b)  $w_1 = xy$

c)



d)

Endlicher Akzeptor  $B = (Z, z_0, X, f, F)$  mit

$$Z = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2 \text{ und } x \leq i\}$$

$$z_0 = -1$$

$$X = \{a, b\}$$

$$f : (Z \times X) \rightarrow Z, (z, x) \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } z = -1 \text{ und } x = a \\ z + 1 & , \text{ falls } z \geq 0 \text{ und } z < i \text{ und } x = b \\ -2 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (1)$$

$$F = \{i\}$$

---

*Platz für Antworten zu Aufgabe 5:*

---

/ 10

**Aufgabe 6** (1 + 1 + 3 + 5 = 10 Punkte)

- a) Geben Sie die Menge der Zahlen an, die im Zweierkomplement mit 14 Bit darstellbar sind.

/1

- b) Geben Sie die Zahl  $-40$  im Zweierkomplement unter Verwendung von 8 Bits an.

/1

- c) Schreiben Sie ein MIMA-Programm, welches die Zahl im Akku mit  $-2$  multipliziert. Sie können davon ausgehen, dass das Ergebnis mit 24 Bit im Zweierkomplement darstellbar ist. Neben den Speicheradressen aus der Vorlage stehen Ihnen noch die Speicheradressen tmp1 und tmp2 zur Verfügung, die Sie für Ihr Programm verwenden dürfen.

Speicheradresse	Befehl
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

- d) Schreiben Sie ein MIMA-Programm, welches eine positive Zahl im Akku mit der Zahl an Speicherstelle y multipliziert. Sie können davon ausgehen, dass das Ergebnis mit 24 Bit im Zweierkomplement darstellbar ist. Neben den Speicheradressen aus der Vorlage stehen Ihnen noch die Speicheradressen tmp1, tmp2, tmp3 und tmp4 zur Verfügung, die Sie für Ihr Programm verwenden dürfen.

/5

Speicheradresse	Befehl
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

## Lösung 6

a)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2^{13} \leq x \leq 2^{13} - 1\}$

b)  $-40 = 11011000$

c)

Speicheradresse	Befehl	Kommentar
0	NOT	
1	STV tmp1	
2	LDC 1	
3	ADD tmp1	
4	STV tmp1	
5	ADD tmp1	
6	HALT	HALT command is optional

---

d)

Speicheradresse	Befehl	Kommentar
0	STV tmp1	tmp1 = x
1	LDC 0	
2	STV tmp2	tmp2 = 0 (sum)
3	NOT	AKKU = -1
4	STV tmp3	tmp3 = -1
5	LDC 0	BEGIN LOOP
6	EQL tmp1	tmp1 == 0
7	JMN 15	
8	LDV tmp1	
9	ADD tmp3	
10	STV tmp1	tmp1 -= 1
11	LDV tmp2	
12	ADD y	
13	STV tmp2	tmp2 += y
14	JMP 5	
15	HALT	Result in tmp2

---

*Platz für Antworten zu Aufgabe 6:*