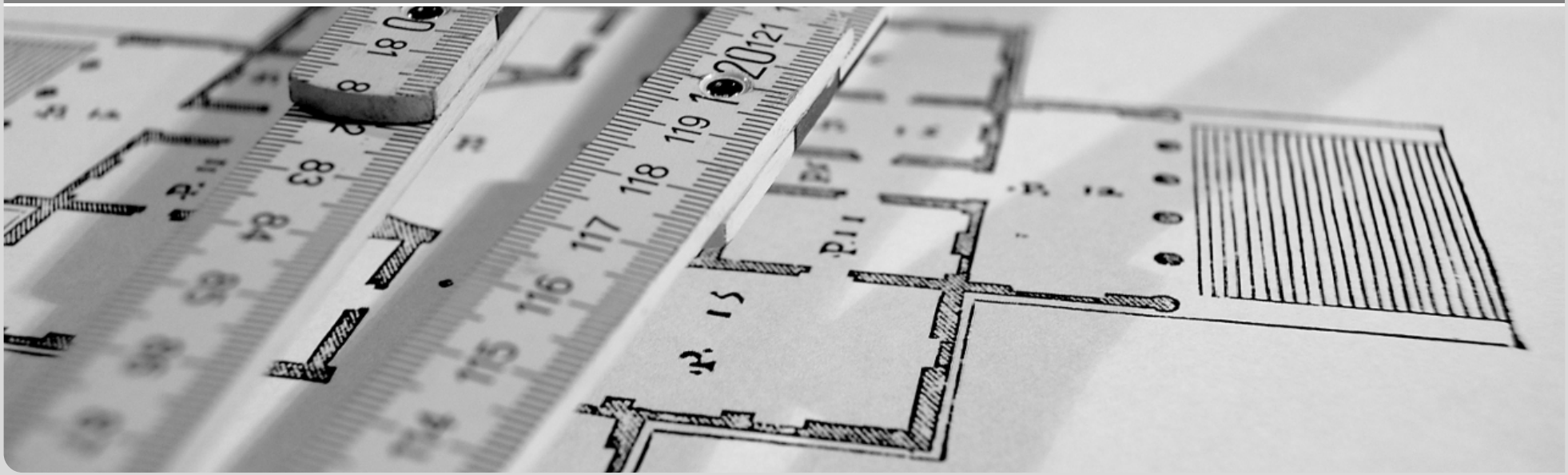
Grundbegriffe der Informatik
Tutorium 36

Termin 6 | 02.12.2016
Thassilo Helmold

KIT – Karlsruher Institut für Technologie



Inhalt

Funktionen von Funktionen

Speicher

MIMA

Abbildung: https://www.xkcd.com/994/

Zum letzten Übungsblatt

- Vollständige Induktion: Die Induktionsvoraussetzung lautet „für **ein** i gilt...“.
  Für alle i zeigt ihr es erst in der Induktion!
- Kaum jemand hat das richtig gemacht, es ist aber wirklich essentiell. Wer das bei der Klausur falsch macht, verschenkt einfache Punkte!
- Folgendes ist **nicht** korrekt, um A zu zeigen:
  $A \implies B$, B ist wahr. Also ist auch A wahr.
  Hier bedarf es Äquivalenz, damit aus B auch A folgt!

In the previous episode of GBI...

Rückblick: Codierungen

- Codierungen: Injektive Abbildungen (meist Homomorphismen)
- ε-Freiheit, Präfixfreiheit
- Einfaches decodieren für präfixfreie Homomorphismen
- Huffman-Codierungen: Präfixfreie Codes mit optimaler Länge

Wahr oder falsch?

- Das Zweierkomplement ist gut zum Rechnen — W
- Jeder Homomorphismus ist präfixfrei — F
- Jede Huffman-Codierung ist präfixfrei — W
- Jeder ε-freie Homomorphismus ist präfixfrei — F — Aber: Jeder präfixfreie Homomorphismus ist ε-frei
- Präfixfreie Codes sind einfach zu decodieren. — W

Zum Aufwärmen: Vogelfarben

Wir zeigen nun:

Alle Vögel haben die gleiche Farbe!

Achtung: Dieser Beweis enthält selbstverständlich einen Fehler!

Zum Aufwärmen: Vogelfarben

Dazu verwenden wir **vollständige Induktion** und zeigen die folgende, äquivalente Aussage:

$\forall n \in \mathbb{N}_+$: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Zum Aufwärmen: Vogelfarben

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : \text{In jeder Menge, die genau } n \text{ Vögel enthält,}$$
$$\text{haben alle Vögel die gleiche Farbe.}$$

Induktionsanfang

$n = 1$: Wenn eine Menge genau 1 Vogel enthält, dann haben offensichtlich alle Vögel die gleiche Farbe.

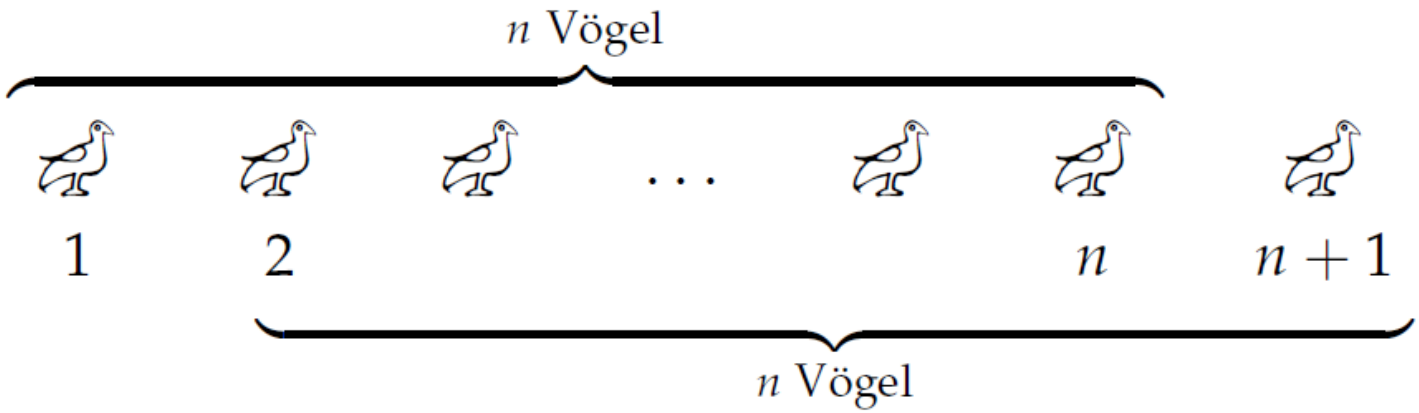
Induktionsvoraussetzung

Für ein beliebiges aber festes n gelte: In jeder Menge, die genau n Vögel enthält, haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Zum Aufwärmen: Vogelfarben

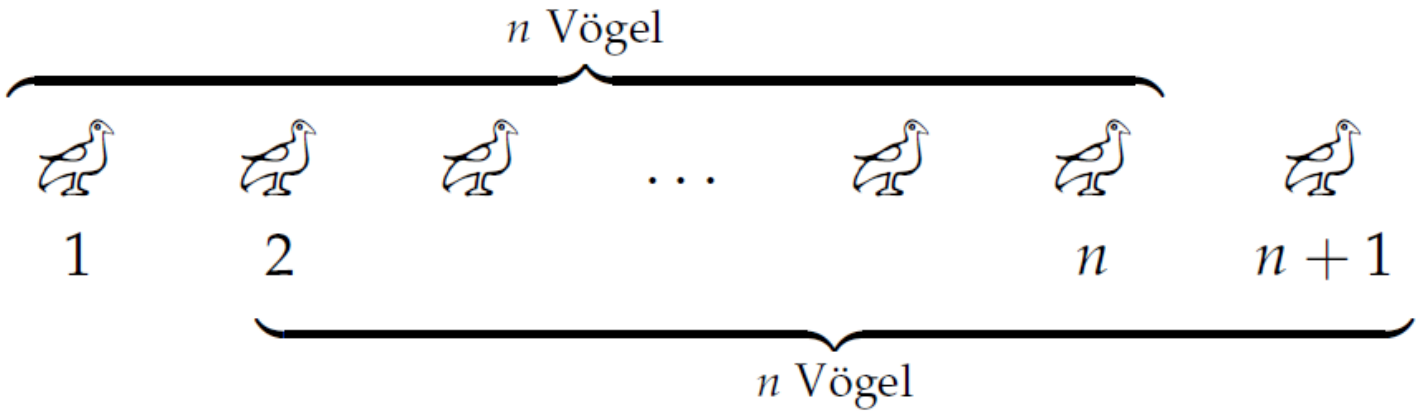
Induktionsschluss

Man zeige die Aussage für $n+1$: Sei also M eine Menge, die genau $n+1$ Vögel enthalte. Man stelle sich vor, dass die Vögel alle nebeneinander sitzen:



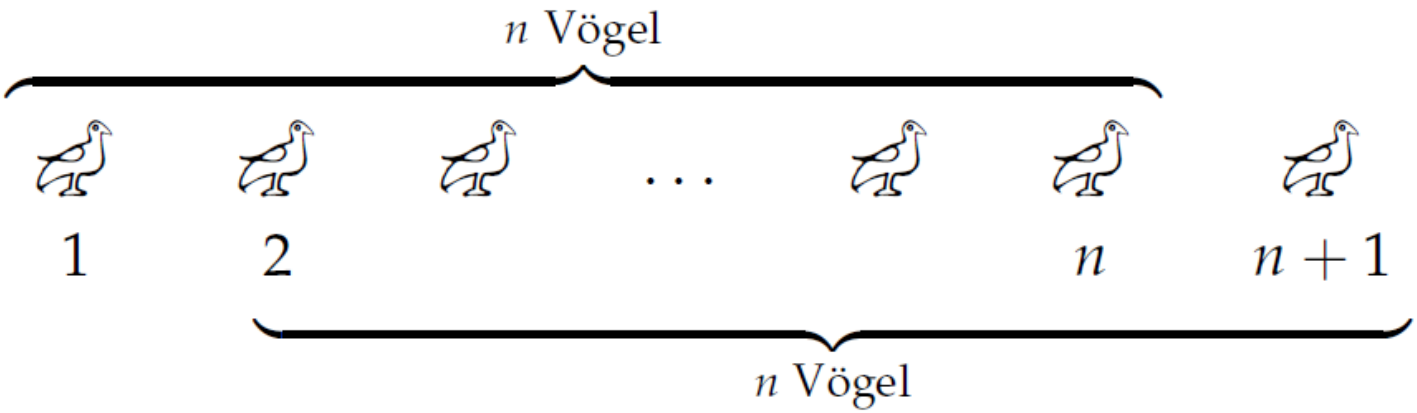
Zum Aufwärmen: Vogelfarben

Induktionsschluss



Die Vögel 1, 2, ..., n bilden eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben sie nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe.
Die Vögel 2, 3, ..., $n+1$ bilden auch eine Menge mit genau n Vögeln. Also haben nach Induktionsvoraussetzung auch diese alle die gleiche Farbe.
Folglich haben auch die Vögel 1 und $n+1$ die gleiche Farbe, also haben alle Vögel die gleiche Farbe.

Vogelfarben: Auflösung



Das Bild ist zwar außerordentlich hübsch, suggeriert aber leider etwas, was nicht immer stimmt: Für $n = 2$ überlappen sich die Teilmengen „ohne den ersten“ und „ohne den letzten“ Vogel nicht. Es ist also nicht erzwungen, dass beide Vögel die gleiche Farbe haben. (Und das macht „alles weitere“ auch kaputt: Wenn nicht immer 2 Vögel die gleiche Farbe haben, dann auch nicht immer 3 Vögel, usw.)

Funktionen von Funktionen

Speicher

MIMA

Funktionen

Definition

Seien A und B Mengen. Mit B^A bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von A nach B, also

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Man kann sich das wie eine Tabelle vorstellen. Wir wählen für jedes $a \in A$ ein $b \in B$.

Beobachtung

Für endliche Mengen A und B gilt:

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

Problem: Ziffern filtern

Wir wollen aus einer Ziffernfolge (Wort aus Z_{10}^*) Ziffern herausfiltern, die eine bestimmte Eigenschaft haben:
Gerade

$$
\begin{aligned}
\mathit{filter}_{even} : Z_{10}^* &\to Z_{10}^* \\
\varepsilon &\mapsto \varepsilon \\
z \cdot v &\mapsto \begin{cases} z \cdot \mathit{filter}_{even}(v) & \text{falls } z \in \{2, 4, 6, 8, 0\} \\ \mathit{filter}_{even}(v) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wobei } z \in Z_{10} \text{ und } v \in Z_{10}^*
\end{aligned}
$$

Problem: Ziffern filtern

Wir wollen aus einer Ziffernfolge (Wort aus Z_{10}^*) Ziffern herausfiltern, die eine bestimmte Eigenschaft haben:
Ungerade

$$
\begin{aligned}
\mathit{filter}_{odd} : Z_{10}^* &\to Z_{10}^* \\
\varepsilon &\mapsto \varepsilon \\
z \cdot v &\mapsto \begin{cases} z \cdot \mathit{filter}_{odd}(v) & \text{falls } z \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \\ \mathit{filter}_{odd}(v) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wobei } z \in Z_{10} \text{ und } v \in Z_{10}^*
\end{aligned}
$$

Problem: Ziffern filtern

Wir wollen aus einer Ziffernfolge (Wort aus Z_{10}^*) Ziffern herausfiltern, die eine bestimmte Eigenschaft haben:
Löst die Ungleichung $x^2 - 3 * x < 20$

$$
\begin{aligned}
\mathit{filter}_{solves} : Z_{10}^* &\to Z_{10}^* \\
\varepsilon &\mapsto \varepsilon \\
z \cdot v &\mapsto \begin{cases} z \cdot \mathit{filter}_{solves}(v) & \text{falls } z^2 - 3 * z < 20 \\ \mathit{filter}_{solves}(v) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wobei } z \in Z_{10} \text{ und } v \in Z_{10}^*
\end{aligned}
$$

Problem: Ziffern filtern

Aufgabe

Schreibt die Funktionen zum Filtern aller Ziffern...

- > 5
- < 5
- < 2 oder > 7
- ... die perfekt sind
- ... die sich ausmalen lassen

Nein, das wäre natürlich Unsinn!
Alle Funktionen unterscheiden sich nur an einer Stelle: Der Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die Ziffer in das Ergebnis mit aufgenommen wird.

Filter

Definiere stattdessen eine universelle Filter-Funktion:

$$
\begin{aligned}
\mathit{filter}_p : Z_{10}^* &\to Z_{10}^* \\
\varepsilon &\mapsto \varepsilon \\
z \cdot v &\mapsto \begin{cases} z \cdot \mathit{filter}_p(v) & \text{falls } p(v) = \mathbf{w} \\ \mathit{filter}_p(v) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wobei } z \in Z_{10} \text{ und } v \in Z_{10}^*
\end{aligned}
$$

Für alle

$$p : Z_{10} \to \mathbb{B}$$

Filter

Definiere beispielsweise nun:

$$even : Z_{10} \to \mathbb{B}, z \mapsto \begin{cases} \mathbf{w} & \text{falls } z \in \{2, 4, 6, 8, 0\} \\ \mathbf{f} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $filter_{even}(123456) = 135$
Auch für alle anderen Filter müssen wir nur noch die p-Funktionen definieren, was viel einfacher und kürzer ist als jedes Mal die ganze Filter-Funktion neu zu definieren.

Charakteristische Funktion

Sei M eine abzählbar unendliche Menge und $L \subseteq M$.

Definition

Die Charakteristische Funktion einer (Teil-)Menge L ist die Funktion

$$C_L : M \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in L \\ 0 & x \notin L \end{cases}$$

Also gilt $C_L \in \{0, 1\}^M$

Klar ist außerdem: Es gibt eine Bijektion C zwischen Mengen und Charakteristischen Funktionen:

$$C : 2^M \to \{0, 1\}^M, L \mapsto C_L$$

Charakteristische Funktion

Jetzt können wir auf diesen Funktionen äquivalente Operationen wie auf Mengen definieren...
Vereinigung: $V: \{0,1\}^M \times \{0,1\}^M \to \{0,1\}^M$

Beispielbild für $L_1 = \{a, c, d\}$ und $L_2 = \{b, c\}$

	L_1	L_2	$L_1 \cup L_2$
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$V(f_1, f_2)$
a	1	0	1
b	0	1	1
c	1	1	1
d	1	0	1
e	0	0	0

Charakteristische Funktion

Jetzt können wir auf diesen Funktionen äquivalente Operationen wie auf Mengen definieren...
Vereinigung: $V: \{0,1\}^M \times \{0,1\}^M \to \{0,1\}^M$

Wie definiert man $V(f_1, f_2)$? Zum Beispiel so:

$$V: \{0,1\}^M \times \{0,1\}^M \to \{0,1\}^M$$
$$(f_1, f_2) \mapsto (x \mapsto \max(f_1(x), f_2(x)))$$

Oder so: $V(f_1, f_2)(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$

Wir haben gesehen:

- Eine Abbildung, die eine Funktion auf einen Wert abbildet
- Eine Abbildung, die einen Wert auf eine Funktion abbildet

Gleich werden wir das kombinieren!

(Hinweis: Abbildung und Funktion sind hier synonyme Begriffe!)

Funktionen von Funktionen

Speicher

MIMA

Bit vs Byte

Definition

Eine **Bit** ist ein Zeichen des Alphabets $\{0, 1\}$
Ein Wort aus 8 *Bits* wird *Byte* genannt.

Definition

Ein *Speicher m* bildet Adressen (*Adr*) auf Werte (*Val*) ab.
Also $m \in Val^{Adr}$

Hier interessiert uns nicht die konkrete Realisierung der Speicherung, sondern nur die abstrakte Funktionsweise.

Hinweis

Im Umgang mit Speicher benutzen wir hier nur Zahlen im Binärsystem.
D.h. $Adr = 2^k$, $Val = 2^l \quad k, l \in \mathbb{N}_+$.

Speicher

Methoden:
memread (m, adr) um eine Zelle zu lesen.
memwrite (m, adr, val) um in eine Zelle zu schreiben.

$$\begin{aligned} memread : Val^{Adr} \times Adr &\to Val \\ (m, a) &\mapsto m(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} memwrite : Val^{Adr} \times Adr \times Val &\to Val^{Adr} \\ (m, a, v) &\mapsto m' \end{aligned}$$

Mit

$$m'(a') = \begin{cases} v & \text{falls } a' = a \\ m(a') & \text{falls } a' \neq a \end{cases}$$

Speicher

Beispiel

$memread(m, 01) = 00000111$

Speicher m	
00	00101000
01	00000111
10	10010110
11	00100101

Zustand bei $t = 0$

Speicher

Beispiel

$memread(m, 01) = 00000111$
$memwrite(m, 01, 11111100)$
$memread(memwrite(m, 01, 11111100), 01) = 11111100$

Speicher m	
00	00101000
01	11111100
10	10010110
11	00100101

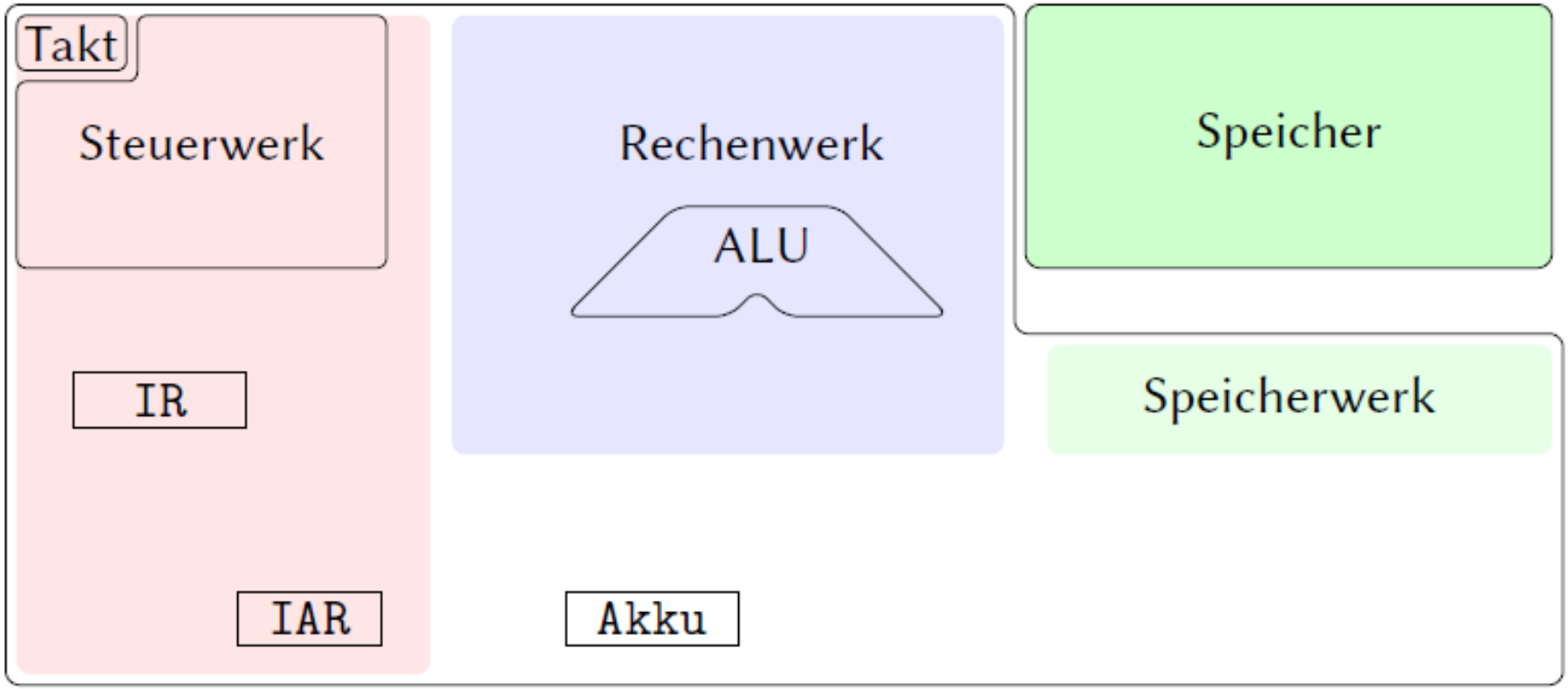
Zustand bei $t = 1$

Funktionen von Funktionen

Speicher

MIMA

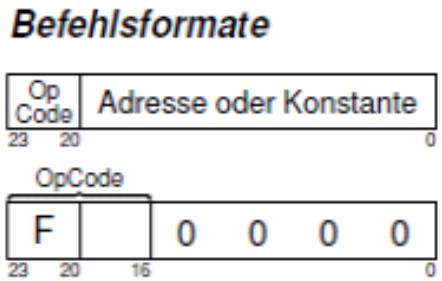
MIMA



Die *MIMA* ist ein idealisierter Prozessor.

Eigenschaften

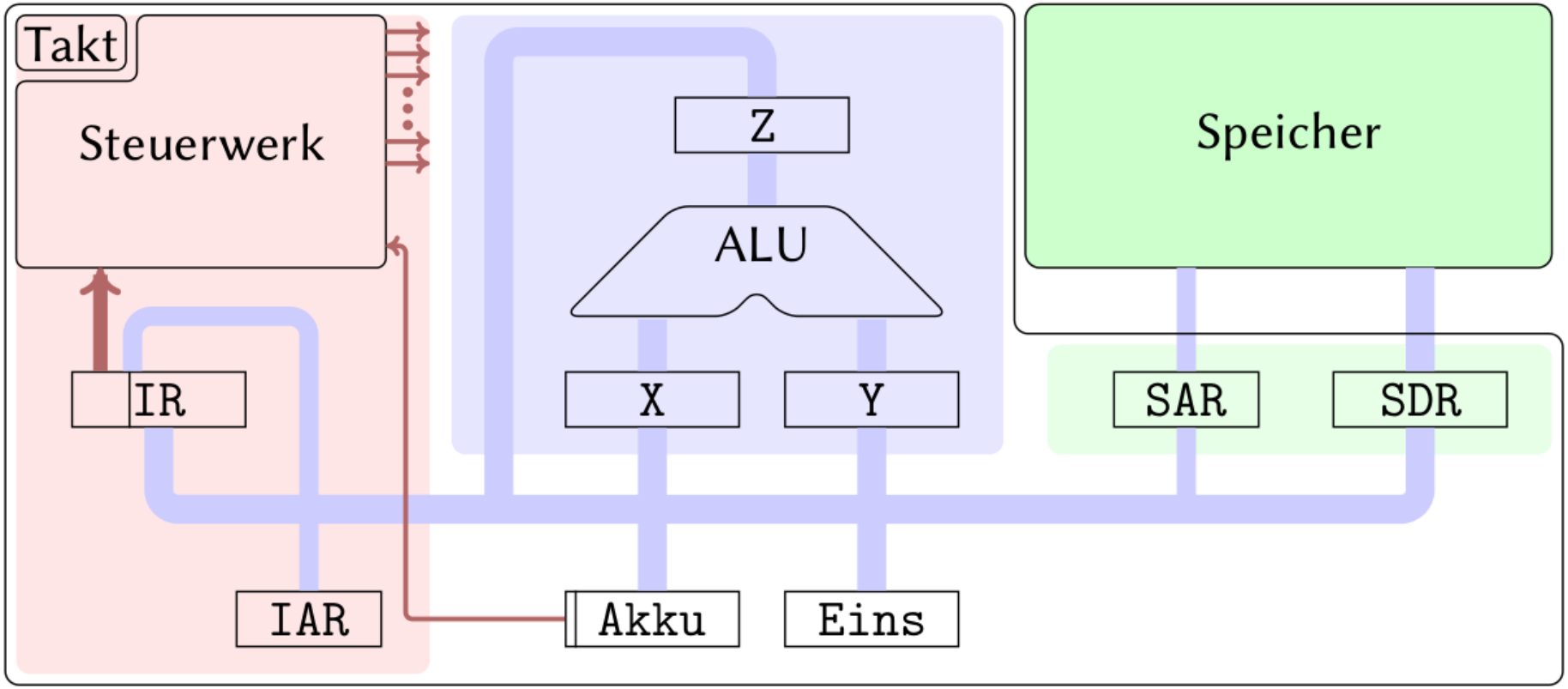
- Adressen sind 20 Bit lang
- „Werte“ sind 24 Bit lang
- Befehlscodierungen:
  - 4 Bit für den OpCode und 20 Bit für einen Parameter (Adresse / Konstante)
  - 8 Bit Befehl (Rest irrelevant)



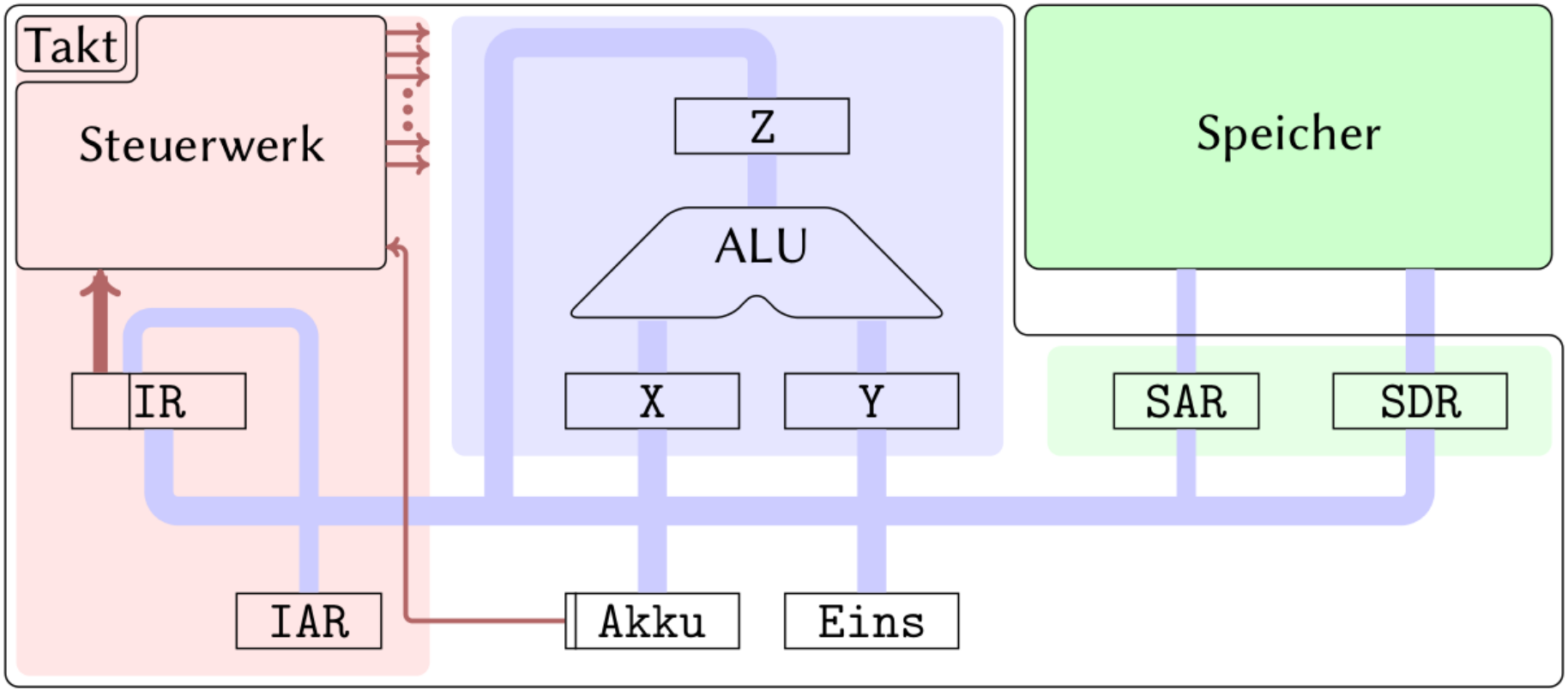
Wichtige Register

- *IAR* : InstruktionsAdressRegister : Speichert Adresse des aktuell auszuführenden Befehls.
- *IR*: InstruktionsRegister : Speichert den auszuführenden Befehl.
- *SAR*: SpeicherAdressRegister : Enthält die Adresse eines Wertes, der aus dem Speicher gelesen werden soll.
- *SDR*: SpeicherDatenRegister : Enthält einen Wert, der aus dem Speicher geladen wurde.

Aufbau



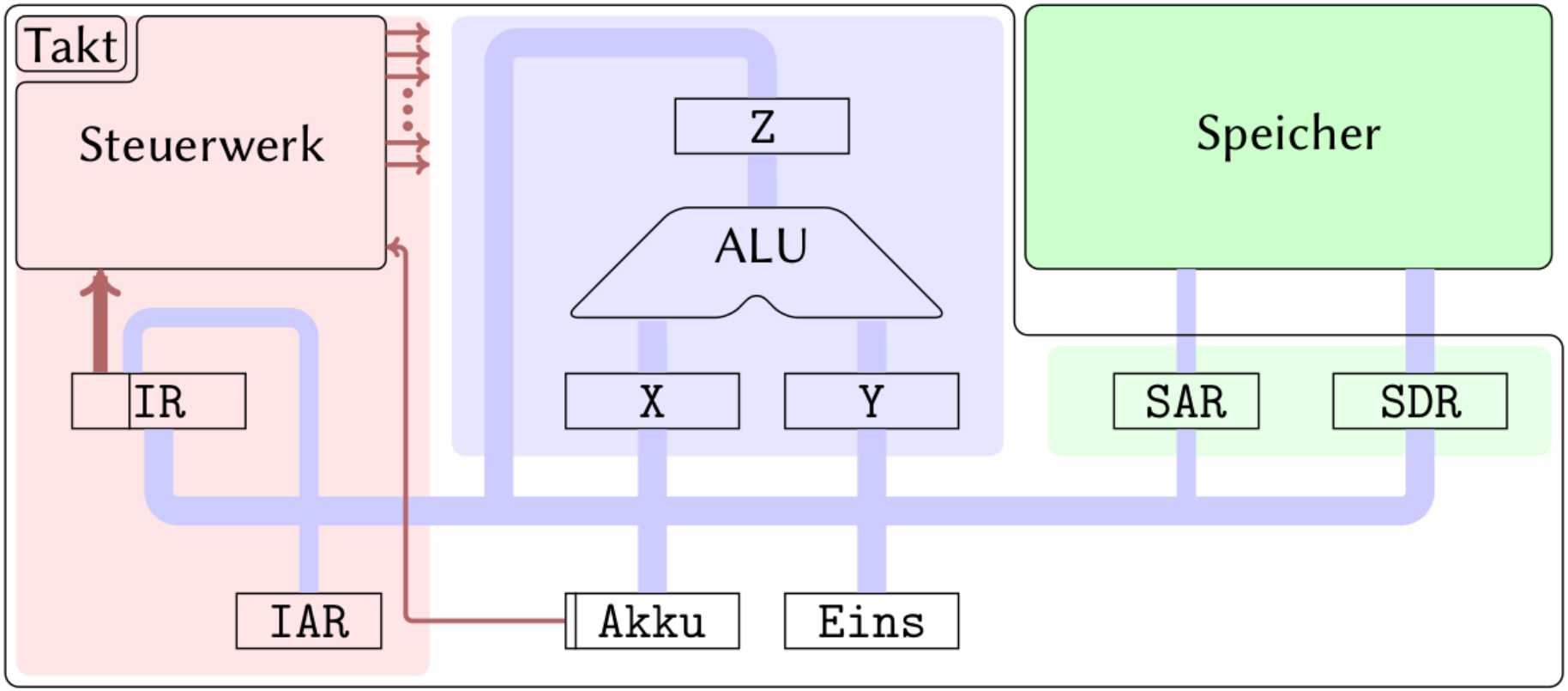
Befehlsholphase



1 IAR $\rightarrow$ SAR und IAR $\rightarrow$ X

Befehlsadresse dem Speicher übergeben und Zähler zum Erhöhen an ALU geben.

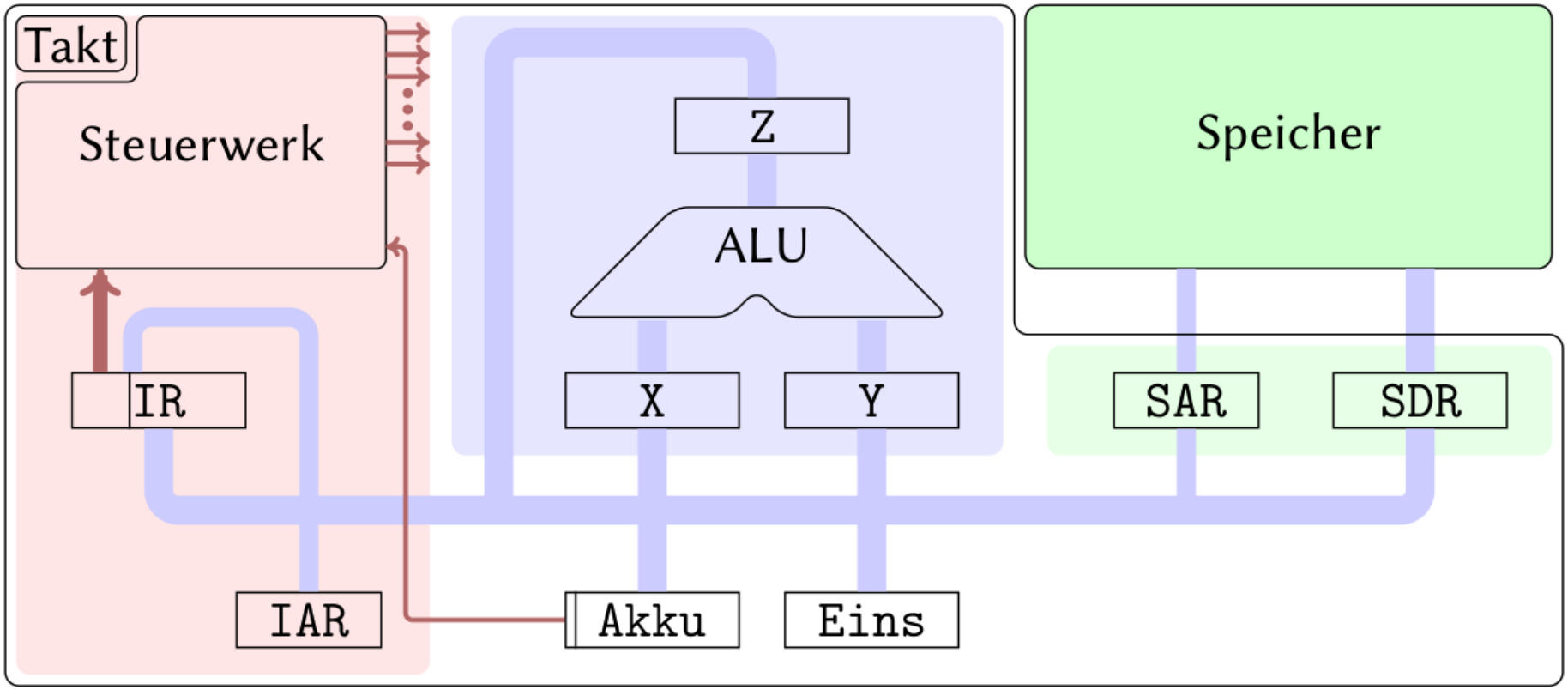
Befehlsholphase



2 Eins $\rightarrow$ Y

1-Wert für Erhöhung des Zählers an ALU geben.

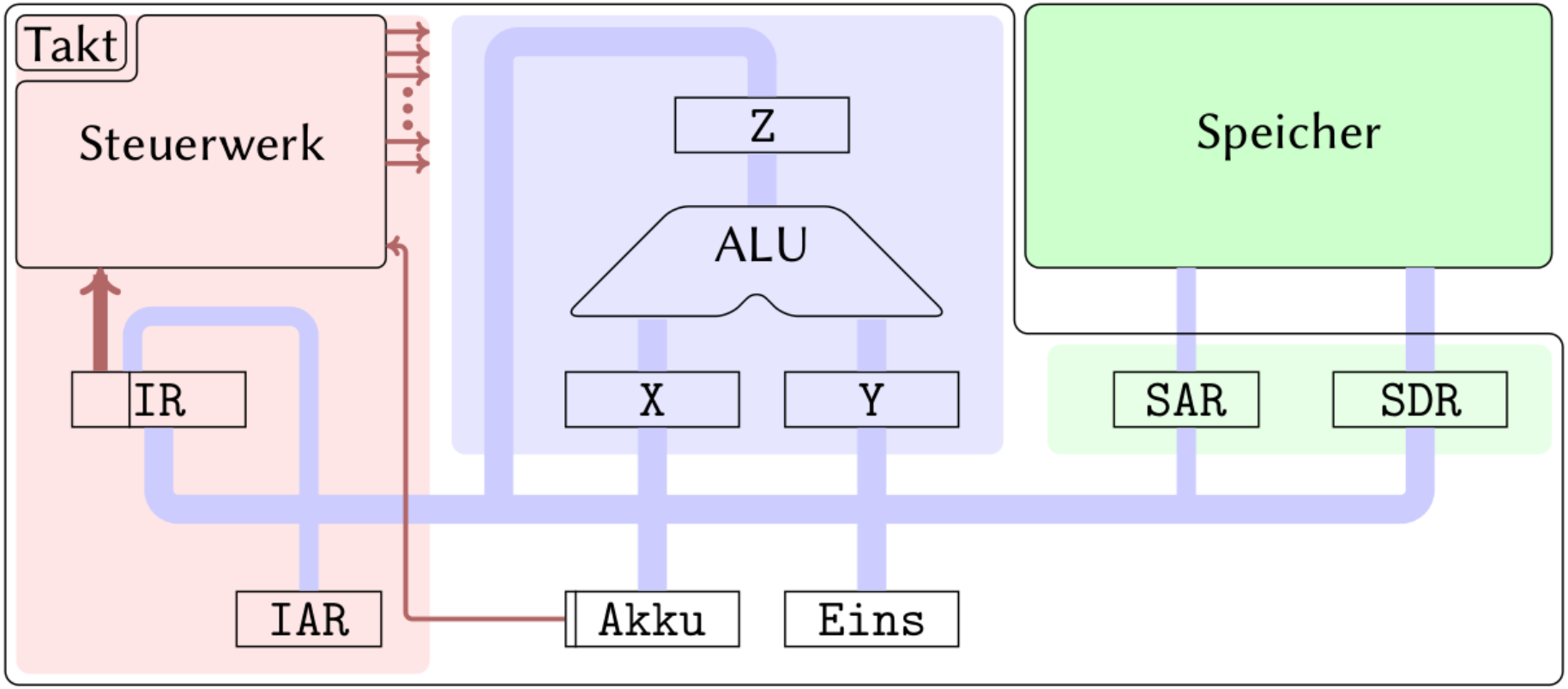
Befehlsholphase



3 ALU aufaddieren (Z=X+Y)

Nächste Befehlsadresse berechnen.

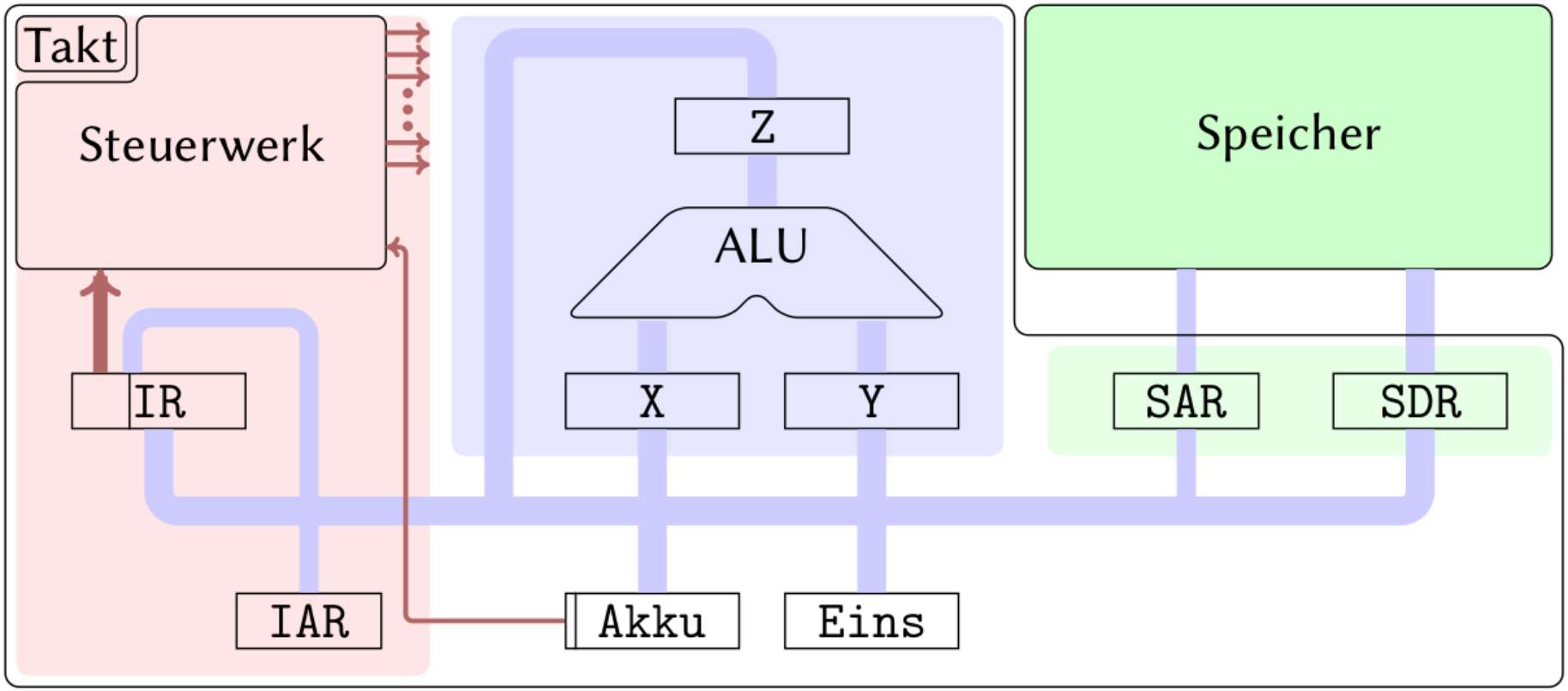
Befehlsholphase



4 $Z \rightarrow IAR$

Adresse für nächste Runde speichern.

Befehlsholphase



5 SDR $\rightarrow$ IR

Wert zur angefragten Adresse erhalten.

Befehle

Die MIMA besitzt einen Befehlssatz mit möglichen Befehlen. Andere Befehle (oder Varianten) werden NICHT unterstützt und können daher nicht verwendet werden!

- Rechenoperationen
  - ADD adr
  - AND, OR, XOR adr
  - NOT, RAR (keine Paramter)
- Zugriffsoperationen
  - LDC const (const ist dabei eine **20-Bit** Konstante)
  - LDV, STV adr
  - LDIV, STIV adr
- Vergleichsoperation: EQL adr (-1 wenn gleich, 0 sonst)
- Sprünge
  - JMP adr
  - JMN adr (Jump if negative)
- HALT

Bemerkungen

Indirekte Adressierung

			Hauptspeicher			
	Akku	···	$M(46)$	···	$M(81)$	···
initial	?		81		25	
LDV 46						
	81		81		25	
LDIV 46						
	25		81		25	

HALT

Jedes Programm muss mit HALT enden! Sonst läuft das Programm endlos weiter!

Negative Konstanten

Negative Konstanten können nicht mit LDC geladen werden.
Warum? Unser Akku ist 24 Bit breit, aber wir können nur in die hinteren 20 Bit laden!

Negative Zahlen

Aufgabe

Schreibe ein Programm, das von einer an Adresse a_1 gegebenen positiven Zahl das Zweierkomplement berechnet und an Adresse a_2 ablegt.

Negative Zahlen

Aufgabe

Schreibe ein Programm, das von einer an Adresse a_1 gegebenen positiven Zahl das Zweierkomplement berechnet und an Adresse a_2 ablegt.

Lösung

LDV a_1
NOT
STV a_2
LDC 1
ADD a_2
STV a_2

Beispiele

Beispiele zur Umsetzung von Answeisungen aus Hochsprachen:
Siehe Übung

Übung: Modulo

Schreibe ein Programm, das eine an Speicheradresse a_1 gegebenen Zahl Modulo R rechnet und an Adresse a_2 ablegt.

- Modulo 2
- Modulo 3

Lösung: Modulo 2

```
start: LDC 1 //00000000000000000000000001
       AND a1
       STV a1
       HALT
```

Lösung: Modulo 3

```
start: LDC 1
       STV One
       LDC 3
       NOT
       ADD One
       STV MThree

while: LDV MThree
       ADD a1
       JMN abschluss
       STV a1
       JMP while

ende:  LDC 3
       ADD a1
       HALT
```

Was ihr nun wissen solltet

- Speicher - Abbildungen, die Abbildungen auf Abbildungen abbilden!
- Wie ein einfacher Prozessor aufgebaut ist
- Wie man die MIMA für einfache Aufgaben nutzt

Was nächstes Mal kommt

- Grammatik ist schwer - aber nicht bei uns!

Abbildung: https://www.xkcd.com/676/

Danksagung

Dieser Foliensatz basiert in Teilen auf Folien von:

Philipp Basler
Nils Braun
Dominik Doerner
Ou Yue