Grundbegriffe der Informatik
Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium: Nr. Name des Tutors:

Ausgabe: 21. Januar 2016

Abgabe: 29. Januar 2016, 12:30 Uhr
im GBI-Briefkasten im Untergeschoss
von Gebäude 50.34

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- rechtzeitig,
- in Ihrer eigenen Handschrift,
- mit dieser Seite als Deckblatt und
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

abgegeben werden.

Vom Tutor auszufüllen:

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 19	(Physik: 19)
Blätter 1 – 11:	/ 194	(Physik: 171)

Im folgenden schreiben wir $[n \mapsto f(n)]$ für die Funktion $f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ : n \mapsto f(n)$. Statt $O([n \mapsto f(n)])$ schreiben wir kürzer $O(n \mapsto f(n))$ und analog bei $\Omega(\cdot)$ und $\Theta(\cdot)$.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass $\Omega(n \mapsto 2^n) \cap O(n \mapsto n^2)$ die leere Menge ist.

Hinweis: Gemäß der Vorlesung gilt $[n \mapsto 2^n] \not\preceq [n \mapsto n^2]$.

Lösung 11.1
Angenommen $\Omega(n \mapsto 2^n) \cap O(n \mapsto n^2) \neq \{\}$. Dann gibt es ein $f \in \Omega(n \mapsto 2^n) \cap O(n \mapsto n^2)$. Wegen $f \in \Omega(n \mapsto 2^n)$, gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot 2^n.$$

Und wegen $f \in O(n \mapsto n^2)$, gibt es ein $c' \in \mathbb{R}_+$ und ein $n'_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$\forall n \geq n'_0 : f(n) \leq c' \cdot n^2.$$

Also gilt

$$\forall n \geq \max\{n_0, n'_0\} : c \cdot 2^n \leq f(n) \leq c' \cdot n^2.$$

Somit gilt

$$\forall n \geq \max\{n_0, n'_0\} : 2^n \leq \frac{c'}{c} \cdot n^2.$$

Folglich gilt $[n \mapsto 2^n] \preceq [n \mapsto n^2]$, im Widerspruch zum Hinweis $[n \mapsto 2^n] \not\preceq [n \mapsto n^2]$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)
Es sei $p \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung derart, dass eine nicht-negative ganze Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ existiert und nicht-negative reelle Zahlen $a_i \in \mathbb{R}_0^+$, für $i \in \mathbb{Z}_{k+1}$, mit $a_k \neq 0$ existieren so, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i.$$

Die Abbildung p ist also eine Polynomfunktion des Grades k mit nicht-negativen reellwertigen Koeffizienten und Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass $p \in \Theta(n \mapsto n^k)$ gilt.

Lösung 11.2
Man setze $c = a_k$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \geq a_k n^k = cn^k.$$

Somit gilt $p \in \Omega(n \mapsto n^k)$.

Setze $c' = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \leq \sum_{i=0}^{k} a_i n^k = c' n^k.$$

Somit gilt $p \in O(n \mapsto n^k)$.

Insgesamt gilt $p \in \Omega(n \mapsto n^k) \cap O(n \mapsto n^k) = \Theta(n \mapsto n^k)$.

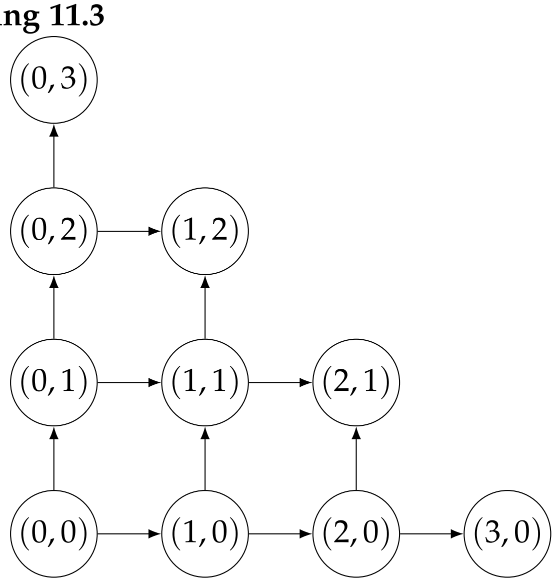
Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei G_n der Graph (V_n, E_n) mit

$$\begin{aligned} V_n &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 \mid x + y \leq n\} \\ E_n &= \quad \{((x,y),(x+1,y)) \mid x + 1 + y \leq n\} \\ &\quad \cup \{((x,y),(x,y+1)) \mid x + y + 1 \leq n\} \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie G_3.
b) Für welche $n \in \mathbb{N}_0$ ist G_n ein Baum?
c) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |V_n|] \in \Theta(f)$.
d) Geben Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |E_n|] \in \Theta(g)$.

Lösung 11.3

a) 

b) für $n = 0$ und $n = 1$
c) $f : n \mapsto n^2$ (exakt sind es $(n+1)(n+2)/2$)
d) $g : n \mapsto n^2$ (exakt sind es $2((n+1)(n+2)/2 - (n+1)) = n(n+1)$)

Aufgabe 11.4 (7 Punkte)

Für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist der sogenannte *Kantengraph* (engl. *line graph*) $L(G) = (V', E')$ wie folgt definiert: Wenn E nicht leer ist, dann ist

$$\begin{aligned} V' &= E, \\ E' &= \{((x,y),(y,z)) \mid (x,y),(y,z) \in V'\}; \end{aligned}$$

wenn E leer ist, dann ist $V' = \{0\}$ und $E' = \{\}$.

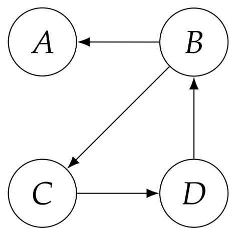
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei der n-te iterierte Kantengraph $L^n(G)$ so definiert:

$$L^0(G) = G,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : L^{n+1}(G) = L(L^n(G)) .$$

Es bezeichne im folgenden $L_V^n(G)$ die Knotenmenge von $L^n(G)$ und $L_E^n(G)$ die Kantenmenge von $L^n(G)$.

Hinweis: $|M|$ bezeichnet im folgenden stets die Kardinalität, also die Anzahl der Elemente, einer endlichen Menge M.

a) Zeichnen Sie zu dem Graphen H_1



den Kantengraphen $L(H_1)$ und benennen sie dessen Knoten sinnvoll.

b) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ so an, dass $[n \mapsto |L_V^n(H_1)|] \in \Theta(f)$.

c) Geben Sie einen Graphen H_2 mit 5 Knoten und 5 Kanten so an, dass für dessen iterierte Kantengraphen $L^n(H_2)$ gilt:

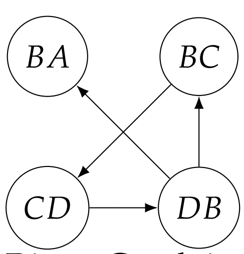
$$[n \mapsto |L_E^n(H_2)|] \in \Theta(n \mapsto 0) .$$

d) Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei B_n der de Bruijn-Graph mit Knotenmenge $V_n = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^n$ und Kantenmenge $E_n = \{(xw, wy) \mid x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\} \land w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^{n-1}\}$ (siehe Kapitel 15).
   - Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Bijektion $\varphi_n\colon E_n \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^{n+1}$ an.
   - Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ der Kantengraph $L(B_n)$ isomorph zu B_{n+1} ist.
   - Für welche $k \in \mathbb{Z}_4$ gilt $[n \mapsto |L_V^n(B_2)|] \in O(n \mapsto k^n)$?

Lösung 11.4

Korrektur: Punkteaufteilung: $1 + 1 + 2 + 3$

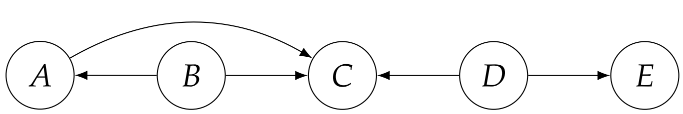
a)



Dieser Graph ist isomorph zu H_1

b) $n \mapsto 4$

c)



Anmerkung: In $L(H_2)$ existiert nur noch eine einzige Kante, nämlich von Knoten (B, A) zu Knoten (A, C); die einzige Kante ist also keine Schlinge. Folglich existieren in $L^2(H_2)$ keine Kanten mehr und damit auch nicht in allen weiteren iterierten Kantengraphen.

d) **Korrektur:** $0.5 + 2 + 0.5$ Punkte

- $\varphi_n \colon E_n \to \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^{n+1} \colon (xw, wy) \mapsto xwy$
- Das eben definierte φ_n leistet schon das von einem Isomorphismus Gewünschte.
  Es ist noch zu zeigen
  - Wenn eine Kante in $L(B_n)$ von s nach t führt, dann auch eine Kante in B_{n+1} von $\varphi_n(s)$ nach $\varphi_n(t)$:
    Im folgenden seien $x, x', y, y', z \in \{0, 1\}$ und $w, w', v \in \{0, 1\}^*$.
    Es sei $s = (xw, wy)$ und $t = (x'w', w'y')$. Wenn eine Kante von s zu t führt, dann ist $wy = x'w'$.
    * Falls $n = 1$ und daher $w = w' = \varepsilon$ ist, ist auch $y = x'$ und alles vereinfacht sich zu $s = (x, y)$ und $t = (y, y')$. Dann ist $\varphi_n(s) = xy$ nach $\varphi_n(t) = yy'$ und es gibt nach Definition von E_2 eine Kante von $\varphi_1(s)$ nach $\varphi_1(t)$.
    * Falls $n \geq 2$ ist, gibt es ein v mit $wy = x'vy = x'w'$ und es ist $s = (xx'v, x'vy)$ und $t = (x'vy, vyy')$. Man erhält $\varphi_n(s) = xx'vy$ nach $\varphi_n(t) = x'vyy'$ und nach Definition von E_{n+1} existiert eine Kante von $\varphi_1(s)$ nach $\varphi_1(t)$.
  - Wenn eine Kante in B_{n+1} von $\varphi_n(s)$ nach $\varphi_n(t)$ führt, dann auch eine Kante in $L(B_n)$ von s nach t:
    * Falls $n = 1$, ist $\varphi_n(s) = xy$ nach $\varphi_n(t) = yy'$. Also ist der Endpunkt der Kante (x, y) der Anfangspunkt der Kante (y, y') und folglich existiert in $L(B_1)$ eine Kante von $s = (x, y)$ zu $t = (y, y')$.
    * Falls $n \geq 2$, ist $\varphi_n(s) = xwy$ und $\varphi_n(t) = x'w'y'$. Wenn es eine Kante von $\varphi_n(s)$ zu $\varphi_n(t)$ gibt, dann ist $wy = x'w'$ und es muss ein v existieren mit $wy = x'vy = x'w'$. Folglich existiert in $L(B_n)$ eine Kante von (xw, wy) zu $(x'w', w'y')$.
- für $k \in \{2, 3\}$