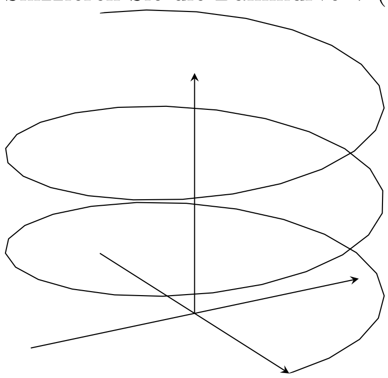
Aufgabe 1: Bahnkurven

Bewegungen eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

(a) Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ a\sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, c > 0$$

(i) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t.



(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z-Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

$$\begin{aligned} h &= \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right| \\ &= z_2 - z_1 \\ &= cb_2 - cb_1 \\ &= c(T + b_1) - cb_1 \\ &= cT \\ &= c\frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

(b) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch

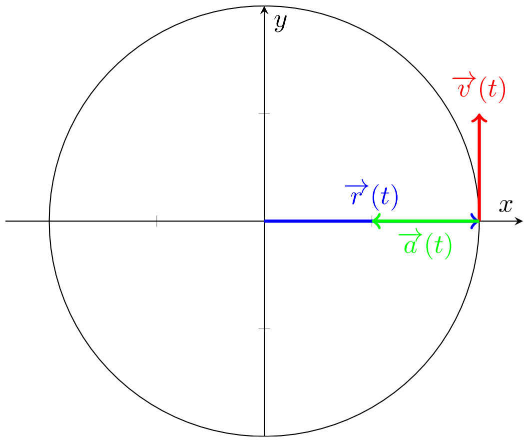
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.



$\vec{r}(t) \perp$ Bahn, $\vec{v}(t) \parallel$ Bahn, $\vec{a}(t) \perp$ Bahn

(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde,mit Masse M_E, in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v_s = |\vec{v_s}(t)|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F_G}(\vec{r}) = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis*: Lex secunda.

$$\begin{aligned}
\text{Zentripetalkraft } \vec{F_z}(\vec{r}) &= m_s\vec{a_s} \\
\text{Es gilt } |\vec{F_G}(\vec{r})| &= |\vec{F_z}(\vec{r})| \\
\Leftrightarrow \frac{G\cancel{m_s}}{r_s^2} &= \cancel{m_s}a_s \\
\Leftrightarrow \frac{G}{r_{\cancel{s}}^{\cancel{2}}} &= \frac{v_s^2}{\cancel{r_s}} \\
\Leftrightarrow v_s &= \sqrt{G\frac{M_E}{r_s}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lösen von Bewegungsgleichungen

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h.eine Bewegung $\vec{r}(t)$ beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} = -mg\vec{e_z}$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (0,0,0)^\top$ und $\vec{v}(0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)^\top$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel zum Erdboden bezeichnet und $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist, die in negative z-Richtung wirkt.

(a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$. Gehen Sie komponentenweise vor. Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$? Drücken Sie zuletzt z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}(t) = 0, && \dot{x}(t) = v\cos\alpha, && x(t) = v\cos(\alpha)t \\
&\ddot{y}(t) = 0, && \dot{y}(t) = 0, && y(t) = 0 \\
&\ddot{z}(t) = -g, && \dot{z}(t) = v\sin(\alpha) - gt, && z(t) = v\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) \text{ linear}, z(t) \text{ parabel} x = v\cos(\alpha)t$$

$$\Rightarrow t = \frac{x}{v\cos\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\text{Einsetzen: } z(x) &= \frac{\cancel{v}\sin(\alpha)x}{\cancel{v}\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2 \\
&= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z(x) \text{ parabel}$$

(b) Bei welchem anfänglichen Winkel α_{max} erreicht man die maximale Wurfdistanz x_{max}? *Hinweis*: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{fin}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes α_{max} erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum x_{max}.

$$\begin{aligned}
z(t_{fin}) &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow v\sin(\alpha)t_{fin} - \frac{1}{2}gt_{fin}^2 &= 0 \\
t_{fin} &= \frac{-2v\sin\alpha}{-g} \\
&= 2v\frac{\sin\alpha}{g} \\
x(t_{fin}) &= v\cos(\alpha)2v\frac{\sin\alpha}{g} \\
&= 2v^2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} \\
&\Rightarrow x \text{ maximal für } \sin\alpha\cos\alpha \text{ maximal} \\
\Rightarrow \alpha_{max} &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerefeld der Erde mit Beschleunigung g ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l, die zwei Massen m_1 an Position z_1 und m_2 an Position z_2 verbindet, die sich in nur z-Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x- und y-Richtung vernachlässigen.

(a) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.

$$\begin{aligned}
\text{Zwangsbedingung: } l &= -z_1 - z_2 \\
z_2 &= -z_1 - l \\
\dot{z_2} &= \dot{z_1} \\
&\Rightarrow \text{Generalisierte Koordinate } z_1
\end{aligned}$$

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:

(i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerefeld ist gegeben durch $V = mgz$.

$$\begin{aligned}
V &= m_1gz_1 + m_2gz_2 \\
&= g(m_1z_1 + m_2z_2) \\
&= g(m_1z_1 + m_2(-z_1 - l)) \\
&= gz_1(m_1 - m_2) - gm_2l
\end{aligned}$$

(ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}\dot{z_1}^2(m_1 + m_2) \\
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}\dot{z_1}^2(m_1 + m_2) - gz_1(m_1 - m_2) + gm_2l
\end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$\begin{aligned}
\text{Euler-Lagrange-Gleichung: } \frac{\partial L}{\partial \text{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\text{q}}} &\overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z_1} &= -g(m_1 - m_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= \dot{z_1}(m_1 + m_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= \ddot{z_1}(m_1 + m_2) \\
\text{Eingesetzt: } -g(m_1 - m_2) - \ddot{z_1}(m_1 + m_2) &= 0 \\
\Rightarrow \ddot{z_1} &= -g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Perle auf rotierendem Draht[1]

An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Masse m gleitet.

(a) Stelle die Lagrangegleichung 1. Art für die Zylinderkoordinaten z, r, φ auf und löse die Bewegungsgleichung von $z(t)$ für die Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{Zylinderkoordinaten: } r, z, \varphi \\
&\text{Zwangsbedingungen:} \\
f_1(z, r\varphi) &= r + z\tan\alpha = 0 \\
f_2(z, r, \varphi) &= \varphi - \omega t = 0 \\
L &= \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgz \\
&\text{Komponenten:} \\
z: m\ddot{z} + mg &= \tan\alpha\lambda_1 \\
r: m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 &= \lambda_1 \\
m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= \lambda_2 \\
&\text{Zwangsbedingungen einsetzen:} \\
m\ddot{z} + mg &= \tan\alpha\lambda_1 \\
m\tan\alpha(z\omega^2 - \ddot{z}) &= \lambda_1 \qquad (*) \\
m\tan^2\alpha\frac{d}{dt}z^2\omega &= \lambda_2 \\
\Rightarrow \ddot{z} - \omega^2 z\sin^2\alpha + g\cos^2\alpha &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Ansatz:} \\
z(t) &= a_1\mathrm{e}^{\omega t\sin\alpha} + a_2\mathrm{e}^{-\omega t\sin\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha \\
\overset{\text{Anfangsbedingungen}}{\Rightarrow} z(t) &= -\frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha(\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1) \\
\Rightarrow r(t) &= \frac{\cot\alpha g}{\omega^2}(\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1) \\
&z(t) \text{ einsetzen in } (*): \\
\lambda_1(t) &= mg\cot\alpha(1 - \cos^2\alpha\cosh(\omega t\sin\alpha)) \\
\lambda_2(t) &= 2m\frac{g^2}{\omega^2}\cos\alpha\cot\alpha(\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1)\sinh(\omega t\sin\alpha)
\end{aligned}$$

[1] schwierig, vermutlich nicht Klausurrelevant

(b) Berechne die Energie der Perle und zeige, dass der Energiegewinn durch rheonome Zwangsarbeit verursacht wird.

$$\begin{aligned}
\text{Energie: } E(t) &= \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\omega^2) + mgz \\
&= m\cot^2\alpha \frac{g^2}{\omega^2}(\cosh(\omega t \sin\alpha) - 1)^2
\end{aligned}$$

$$\text{Energiegewinn} \leftrightarrow \lambda_2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\varphi} \lambda_2(\varphi')\mathrm{d}\varphi' &= \omega \int_0^{t} \lambda_2(t')\mathrm{d}t' \\
&= 2m\cot^2\alpha \frac{g^2}{\omega^2} \int_0^{\omega t \sin\alpha} (\cosh x - 1)\sinh x \mathrm{d}x \\
&= 2m\cot^2\alpha \frac{g^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{4}\cosh(2x) - \cosh x\right]_0^{\omega t \sin\alpha} \\
&= E(t)
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $x = \omega t \sin\alpha$ verwendet wurde.