# Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{(x-y)} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$\begin{aligned}\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{(x-y)} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{x\cancel{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}}{\cancel{(\sqrt{x}+\sqrt{y})}(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{x-\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\cancel{\sqrt{xy}}-\cancel{\sqrt{xy}}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) $\log_{10}(\frac{10^x}{10^3})$

$$\begin{aligned}\log_{10}(\frac{10^x}{10^3}) &= \log_{10}(10^{x-3}) \\ &= x-3\end{aligned}$$

(c) $\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)} &= \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan(\varphi)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\varphi)+1} \\ &= \frac{\cancel{1+\tan(\varphi)}}{\cancel{1+\tan(\varphi)}} \\ &= 1\end{aligned}$$

# Aufgabe 2: Differentiation

Bestimmen Sie dir Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ nach $x$:

(a) $f(x) = a * \tan(x) + \cos(bx + c)$

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2(x)} - b * sin(bx + c)$$

(b) $f(x) = e^{x+y}(3 + 2x - x^2)$

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{x+y}(3 + 2x - x^2) + e^{x+y}(2 - 2x) \\ &= e^{x+y}(5 - x^2)\end{aligned}$$

(c) $f(x) = (3 + 4x^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}(3 + 3x^2)^{-\frac{1}{2}}6x \\ &= \frac{3x}{\sqrt{3 + 3x^2}}\end{aligned}$$

(d) $f(x) = x^x$

$$\begin{aligned}x^x &= e^{\ln x^x} \\ &= e^{x \ln x} \\ f'(x) &= e^{x \ln x}(1 \ln x + x\frac{1}{x}) \\ &= x^x(\ln x + 1)\end{aligned}$$

## Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion

$$x \mapsto g(x) = \frac{4x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (4x^2 - 4x)(x-2)^{-3} \\
g'(x) &= (4x^2 - 4x)(-3)(x-2)^{-4} + (8x-4)(x-2)^{-3} \\
&= \frac{-12x^2 + 12x}{(x-2)^4} + \frac{(8x-4)(x-2)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{-12x^2 + 12x}{(x-2)^4} + \frac{8x^2 - 20x + 8}{(x-2)^4} \\
&= \frac{-4x^2 - 8x + 8}{(x-2)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &\overset{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow -4x^2 - 8x + 8 &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 * 1 * (-2)}}{2 * 1} \\
\Leftrightarrow x &= -1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Extrema bei $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

## Aufgabe 4: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2$$

wobei $f(n)(0)$ die $n$-te Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnet. Entsprechend sind $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung ausgewertet bei $x = 0$. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung $x^2$:

(a) $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 \\
&= 1 + x + \frac{1}{2} x^2
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = sin(x^2)$

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 \\
&= (\sin(x^2))(0) + (2x\cos(x^2))(0)x + \frac{1}{2}(2\cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2))(0) x^2 \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{2} 2x^2 \\
&= x^2
\end{aligned}$$

# 1 Aufgabe 5: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel $\varphi$ in der Ebene im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch eine Matrix:

$$R_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Drehmatrizen kommutieren, $R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) = R_2(\varphi_2)R_2(\varphi_1)$

$$\begin{aligned} R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \\ &= R_2(\varphi_2)R_2(\varphi_1) \end{aligned}$$

(b) das Produkt $R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2)$ wieder zu einer Drehmatrix $R_2(\varphi_1 + \varphi_2)$ führt

$$\begin{aligned} &\text{Additionstheorem:} \\ &\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\ &\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\ \Rightarrow R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} \\ &= R_2(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

(c) $\det R_2(\varphi) = 1$

$$\begin{aligned} \det R_2(\varphi) &= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

# 2 Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n \times n$-Matrix $M$ lautet $M\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, wobei der $n$-Vektor $\overrightarrow{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar $\lambda$ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für $\lambda$ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms

$$\det(M - \lambda\mathbb{1}) = 0$$

wobei $\mathbb{1}$ die $n$-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender $3 \times 3$-Matrix $M$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\det(M - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 0 + 0 - (3-\lambda) - 0 - 0 \\
&= (3-\lambda)((1-\lambda^2) - 1) \\
&\stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow & \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2
\end{aligned}
$$

Einsetzen + Gaußen:

$$
\lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{III-\frac{1}{2}I}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3, x_2 = \frac{3}{2}x_3
$$

Wähle $x_3 = 2$

$$
\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{III+I}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{III-\frac{4}{3}II}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow x_1 = x_3 - 2x_2, x_2 = 0
$$

Wähle $x_1 = 1$

$$
\Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\lambda_3 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \stackrel{III-I}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3, x_2 = 0
$$

Wähle $x_1 = 1$

$$
\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
$$