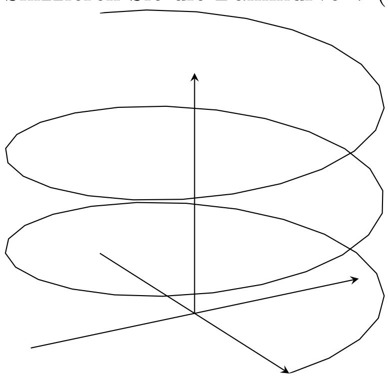
Aufgabe 1: Bahnkurven

Bewegungen eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

(a) Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ a\sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, c > 0$$

(i) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t.



(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z-Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

$$\begin{aligned} h &= \left| \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right| \\ &= z_2 - z_1 \\ &= cb_2 - cb_1 \\ &= c(T + b_1) - cb_1 \\ &= cT \\ &= c\frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

(b) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch

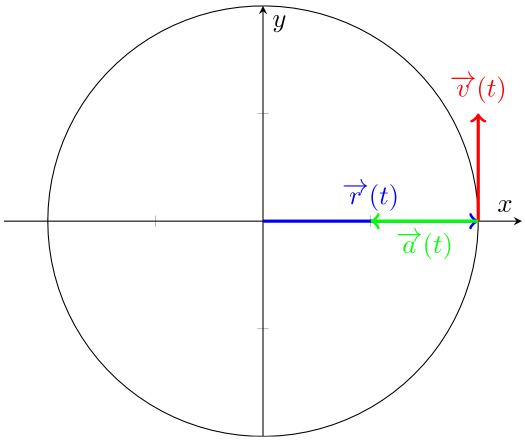
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.



$\vec{r}(t) \perp$ Bahn, $\vec{v}(t) \parallel$ Bahn, $\vec{a}(t) \perp$ Bahn

(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde,mit Masse M_E, in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v_s = |\vec{v_s}(t)|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F_G}(\vec{r}) = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis*: Lex secunda.

$$\begin{aligned} \text{Zentripetalkraft } \vec{F_z}(\vec{r}) &= m_s\vec{a_s} \\ \text{Es gilt } |\vec{F_G}(\vec{r})| &= |\vec{F_z}(\vec{r})| \\ \Leftrightarrow \frac{G\cancel{m_s}}{r_s^2} &= \cancel{m_s}a_s \\ \Leftrightarrow \frac{G}{r_s^{\cancel{2}}} &= \frac{v_s^2}{\cancel{r_s}} \\ \Leftrightarrow v_s &= \sqrt{G\frac{M_E}{r_s}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lösen von Bewegungsgleichungen

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h.eine Bewegung $\vec{r}(t)$ beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} = -mg\vec{e_z}$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (0,0,0)^\top$ und $\vec{v}(0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)^\top$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel zum Erdboden bezeichnet und $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist, die in negative z-Richtung wirkt.

(a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$. Gehen Sie komponentenweise vor. Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$? Drücken Sie zuletzt z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) = 0, && \dot{x}(t) = v\cos\alpha, && x(t) = v\cos(\alpha)t \\ &\ddot{y}(t) = 0, && \dot{y}(t) = 0, && y(t) = 0 \\ &\ddot{z}(t) = -g, && \dot{z}(t) = v\sin(\alpha) - gt, && z(t) = v\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x(t)$ linear, $z(t)$ parabel

$$
\begin{aligned}
x &= v\cos(\alpha)t \\
\Rightarrow t &= \frac{x}{v\cos\alpha} \\
\text{Einsetzen: } z(x) &= \frac{\cancel{v}\sin(\alpha)x}{\cancel{v}\cos\alpha} - \frac{1}{2}g(\frac{x}{v\cos\alpha})^2 \\
&= x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} \\
&\Rightarrow z(x) \text{ parabel}
\end{aligned}
$$

(b) Bei welchem anfänglichen Winkel α_{max} erreicht man die maximale Wurfdistanz x_{max}? *Hinweis*: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{fin}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes α_{max} erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum x_{max}.

$$
\begin{aligned}
z(t_{fin}) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow v\sin(\alpha)t_{fin} - \frac{1}{2}gt_{fin}^2 &= 0 \\
t_{fin} &= \frac{-2v\sin\alpha}{-g} \\
&= 2v\frac{\sin\alpha}{g} \\
x(t_{fin}) &= v\cos(\alpha)2v\frac{\sin\alpha}{g} \\
&= 2v^2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} \\
&\Rightarrow x \text{ maximal für } \sin\alpha\cos\alpha \text{ maximal} \\
\Rightarrow \alpha_{max} &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerefeld der Erde mit Beschleunigung g ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l, die zwei Massen m_1 an Position z_1 und m_2 an Position z_2 verbindet, die sich in nur z-Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x- und y-Richtung vernachlässigen.

(a) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.

$$
\begin{aligned}
\text{Zwangsbedingung: } l &= -z_1 - z_2 \\
z_2 &= -z_1 - l \\
\dot{z_2} &= \dot{z_1} \\
&\Rightarrow \text{Generalisierte Koordinate } z_1
\end{aligned}
$$

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:

(i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerefeld ist gegeben durch $V = mgz$.

$$
\begin{aligned}
V &= m_1gz_1 + m_2gz_2 \\
&= g(m_1z_1 + m_2z_2) \\
&= g(m_1z_1 + m_2(-z_1 - l)) \\
&= gz_1(m_1 - m_2) - gm_2l
\end{aligned}
$$

(ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{z_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z_2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{z_1}^2(m_1+m_2) \\ L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}\dot{z_1}^2(m_1+m_2) - gz_1(m_1-m_2) + gm_2 l \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

$$\begin{aligned} \text{Euler-Lagrange-Gleichung: } \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\underset{\sim}{q}}} &\overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z_1} &= -g(m_1-m_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= \dot{z_1}(m_1+m_2) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= \ddot{z_1}(m_1+m_2) \\ \text{Eingesetzt: } -g(m_1-m_2) - \ddot{z_1}(m_1+m_2) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{z_1} &= -g\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Perle auf rotierendem Draht[1]

An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Massse m gleitet.

(a) Stelle die Lagrangegleichung 1. Art für die Zylinderkoordinaten z, r, φ auf und löse die Bewegungsgleichung von $z(t)$ für die Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} &\text{Zylinderkoordinaten: } r, z, \varphi \\ &\text{Zwangsbedingungen:} \\ f_1(z, r\varphi) &= r + z\tan\alpha = 0 \\ f_2(z, r, \varphi) &= \varphi - \omega t = 0 \\ L &= \frac{m}{2}(z^2 + r^2 + \varphi^2) - mgz \\ &\text{Komponenten:} \\ z: m\ddot{z} + mg &= \tan\alpha\lambda_1 \\ r: m\overrightarrow{r} - mr\varphi^2 &= \lambda_1 \qquad (*) \\ m\frac{d}{dt}(r^2\ddot{\varphi}) &= \lambda_2 \\ &\text{Zwangsbedingungen einsetzen:} \\ m\ddot{z} + mg &= \tan\alpha\lambda_1 m\tan\alpha(z\omega^2 - \ddot{z}) = \lambda_1 \\ m\tan^2\alpha\frac{d}{dt}z^2\omega &= \lambda_2 \\ \Rightarrow \ddot{z} - \omega^2 z\sin^2\alpha - g\cos^2\alpha &= 0 \\ &\text{Ansatz:} \\ z(t) &= a_1 e^{\omega t\sin\alpha} + a_2 e^{-\omega t\sin\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha \\ \overset{\text{Anfangsbedingungen}}{\Rightarrow} z(t) &= \frac{g}{\omega^2}\cos\alpha(\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1) \\ \lambda_1, \lambda &\to (*) \text{ einsetzen} \end{aligned}$$

[1] schwierig, vermutlich nicht Klausurrelevant

(b) Berechne die Energie der Perle und zeige, dass der Energiegewinn durch rheonome Zwangsarbeit verursacht wird.

$$\begin{aligned}\text{Energie: } E(t) &= \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2\omega^2) + mgz \\ &= m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}(\cosh(\omega t\sin\alpha) - 1)^2\end{aligned}$$

Energiegewinn $\leftrightarrow \lambda_2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\varphi}\lambda_2(\varphi')\mathrm{d}\varphi' &= m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}\int_0^{\sin\alpha}(\cosh x - 1)\sinh x\mathrm{d}x \\ &= 2m\cot^2\alpha\frac{g^2}{\omega^2}\left[\frac{1}{4}\cosh(2x) - \cosh x\right]_0^{\omega t\sin\alpha}\end{aligned}$$