

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{(x-y)} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
 \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{(x-y)} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{x(\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{y}})}{(\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{y}})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
 &= \frac{x - \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) - \sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
 &= \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right) &= \log_{10}(10^{x-3}) \\
 &= x - 3
 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)} &= \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan(\varphi)}} \\
 &= \frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\varphi)+1} \\
 &= \frac{\cancel{1+\tan(\varphi)}}{\cancel{1+\tan(\varphi)}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Differentiation

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ nach x :

$$\text{(a)} \quad f(x) = a * \tan(x) + \cos(bx + c)$$

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2(x)} - b * \sin(bx + c)$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = e^{x+y}(3 + 2x - x^2)$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{x+y}(3 + 2x - x^2) + e^{x+y}(2 - 2x) \\
 &= e^{x+y}(5 - x^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = (3 + 4x^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2}(3 + 3x^2)^{-\frac{1}{2}}6x \\
 &= \frac{3x}{\sqrt{3 + 3x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{(d)} \quad f(x) = x^x$$

$$\begin{aligned}
 x^x &= e^{\ln x^x} \\
 &= e^{x \ln x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{x \ln x} \left(1 \ln x + x \frac{1}{x}\right) \\
 &= x^x (\ln x + 1)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion

$$x \mapsto g(x) = \frac{4x^2 - 4x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} g(x) &= (4x^2 - 4x)(x - 2)^{-3} \\ g'(x) &= (4x^2 - 4x)(-3)(x - 2)^{-4} + (8x - 4)(x - 2)^{-3} \\ &= \frac{-12x^2 + 12x}{(x - 2)^4} + \frac{(8x - 4)(x - 2)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{-12x^2 + 12x}{(x - 2)^4} + \frac{8x^2 - 20x + 8}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{-4x^2 - 8x + 8}{(x - 2)^4} \\ g'(x) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow -4x^2 - 8x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ \Leftrightarrow x &= -1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

\Rightarrow Extrema bei $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Aufgabe 4: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist gegeben durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2$$

wobei $f^{(n)}(0)$ die n -te Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnet. Entsprechend sind $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung ausgewertet bei $x = 0$. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen bis zur zweiten Ordnung x^2 :

(a) $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sin(x^2)$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 \\ &= (\sin(x^2))(0) + (2x \cos(x^2))(0)x + \frac{1}{2} (2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2))(0)x^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2} 2x^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch eine Matrix:

$$R_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Drehmatrizen kommutieren, $R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) = R_2(\varphi_2)R_2(\varphi_1)$

$$\begin{aligned} R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \\ &= R_2(\varphi_2)R_2(\varphi_1) \end{aligned}$$

(b) das Produkt $R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2)$ wieder zu einer Drehmatrix $R_2(\varphi_1 + \varphi_2)$ führt

Additionstheorem:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_2(\varphi_1)R_2(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix} \\ &= R_2(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

(c) $\det R_2(\varphi) = 1$

$$\begin{aligned} \det R_2(\varphi) &= \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n \times n$ -Matrix M lautet $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n -Vektor \vec{x} einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

wobei $\mathbb{1}$ die n -dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 3×3 -Matrix M :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(3 - \lambda) + 0 + 0 - (3 - \lambda) - 0 - 0 \\ &= (3 - \lambda)((1 - \lambda^2) - 1) \\ &\stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\end{aligned}$$

Einsetzen + Gauß:

$$\begin{aligned}\lambda_1 = 3 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{2}I} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3, x_2 = \frac{3}{2}x_3\end{aligned}$$

Wähle $x_3 = 2$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III + I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - \frac{4}{3}II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow x_1 = x_3 - 2x_2, x_2 = 0\end{aligned}$$

Wähle $x_1 = 1$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = 2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3, x_2 = 0\end{aligned}$$

Wähle $x_1 = 1$

$$\Rightarrow x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$