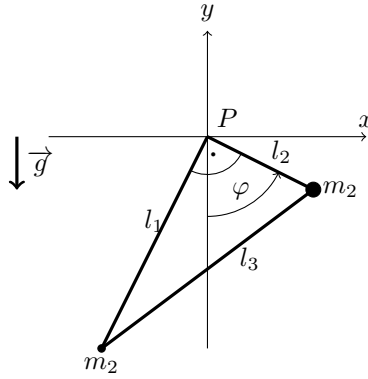


## Aufgabe 1: Lagrange Methode 2. Art - Starre Stangen



Gegeben ist eine Anordnung wie in der Skizze dargestellt, in der zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  mittels masseloser starrer Stangen mit Längen  $l_1$  und  $l_2$  mit einem Aufhängepunkt verbunden sind. Die beiden Massen sind über eine weitere starre masselose Stange der Länge  $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$  miteinander verbunden. Die Anordnung kann um den Aufhängepunkt  $P$  im Schwerfeld der Erde schwingen.

(a) Wie lauten die Zwangsbedingungen?

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 \\ f_2 &= x_2^2 + y_2^2 - l_2^2 \\ f_3 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_3^2 \end{aligned}$$

(b) Stellen Sie die Lagrange Gleichungen zweiter Art auf.

Verallgemeinerte Koordinate:  $\varphi$

$$x_1 = -l_1 \cos \varphi$$

$$x_2 = -l_2 \sin \varphi$$

$$y_1 = -l_1 \sin \varphi$$

$$y_2 = -l_2 \sin \varphi$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 - (-m_1 g l_1 \sin \varphi - m_2 g l_2 \cos \varphi)$$

Bewegungsgleichung:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = g(m_1 l_1 \cos \varphi - m_2 l_2 \sin \varphi)$$

(c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspositionen und die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage.

$$m_1 l_1 \cos \varphi = m_2 l_2 \sin \varphi \quad (\text{Beide Beschleunigungen gleich groß})$$

$$\Rightarrow \frac{m_1 l_1}{m_2 l_2} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

$$\Rightarrow \varphi_G = \arctan\left(\frac{m_1 l_1}{m_2 l_2}\right) \quad 0 \leq \varphi_G \leq \frac{\pi}{2}$$

Stabiles Gleichgewicht:  $\varphi = \varphi_G + \delta$

In Bewegungsgleichung:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)(\ddot{\varphi}_G + \ddot{\delta}) = g(m_1 l_1 (\cos \varphi_G - \delta \sin \varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2)) - m_2 l_2 (\sin \varphi_G - \delta \cos \varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2)))$$

$$\stackrel{\varphi_G \text{ const.}}{\Rightarrow} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\delta} = g(m_1 l_1 (\cos \varphi_G - \delta \sin \varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2)) - m_2 l_2 (\sin \varphi_G - \delta \cos \varphi_G + \mathcal{O}(\delta^2)))$$

$$\approx -g(m_1 l_1 \sin \varphi_G + m_2 l_2 \cos \varphi_G) \delta$$

$$= -\delta g \sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = g \frac{\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}$$

- (d) Bestimmen Sie die Zwangskräfte, welche die Stangen im stabilen Gleichgewicht auf die Massenzentren  $m_1$  und  $m_2$  ausüben.

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^N \lambda_{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \\ A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0 \quad i = 1..N, \mu = 1..N_z \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= m_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_3 \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2\lambda_3 \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_1 &= \frac{-m_1 g(m_1 + m_2)}{2\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}} \\ \lambda_2 &= \frac{-m_2 g(m_1 + m_2)}{2\sqrt{(m_1 l_1)^2 + (m_2 l_2)^2}} \end{aligned}$$

## Aufgabe 2: Lagrange Methode 1. und 2. Art - Perle auf Stab

Eine Perle gleitet reibungsfrei und ohne äußere Kräfte auf einem Stab, der sich in der  $x$ - $y$ -Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Ursprung dreht.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange Gleichungen erster Art auf und lösen Sie die Bewegungsgleichung. Führen Sie die Rechnung in Zylinderkoordinaten durch. Wie lautet die Zwangskraft und was ist ihre Bedeutung? Ist die Energie in diesem System erhalten?

Zwangsbedingungen:

$$f1 = \varphi - \omega t = 0$$

$$f2 = z = 0$$

Lagrange Multiplikator:  $m\ddot{\vec{x}} = \lambda \vec{\nabla} f$   $\vec{\nabla} f$  Zylinderkoordinaten

$$\nabla f = \hat{e}_{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varrho} + \hat{e}_{\varphi} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad \varrho \text{ Radius}$$

Ortsvektor in  $x$ - $y$ -Ebene  $\vec{x} = \varrho \hat{e}_{\varrho}$

$$\text{Beschleunigung } \ddot{\vec{x}} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_{\varrho} + (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi}) \hat{e}_{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_{\varrho} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi} \hat{e}_{\varphi}$$

$$m\ddot{\varrho} - m\varrho \dot{\varphi}^2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varrho}$$

$$m\varrho \ddot{\varphi} + 2m\dot{\varrho} \dot{\varphi} = \frac{\lambda}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 1$$

$$\Rightarrow \ddot{f} = \ddot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2m\varrho \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\varrho} - m\varrho \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\Rightarrow m\varrho \ddot{\varphi} = 0$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varrho} = \omega^2 \varrho$$

Lösen der Bewegungsgleichung ( $\varrho \neq 0$ )

$$\varrho(t) = \varrho_+ e^{\omega t} + \varrho_- e^{-\omega t}$$

$$\text{Zentrifugalkraft } \vec{z} = \lambda \nabla f = 2m\dot{\varrho}\omega \hat{e}_\varphi$$

$$\text{Energie: } V = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = 2m\varrho\dot{\varphi}\omega$$

$\Rightarrow$  Energie nicht erhalten

(b) Formulieren Sie nun die Bewegungsgleichung unter Verwendung der Lagrange Gleichung 2. Art.

$$V = 0$$

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho\omega^2)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varrho} = \omega^2 \varrho$$

### Aufgabe 3: Erhaltungsgrößen - Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential  $V$  soll mittels Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Die Parameter bewegen sich in folgenden Bereichen:  $r > 0, \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi]$ .

(a) Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie  $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$  des Teilchens in Kugelkoordinaten. Führen Sie die folgende Schritte aus:

(i) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren  $\vec{r}_{q_i}$  für die Kugelkoordinaten  $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$  mittels  $\vec{r}_{q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  und bilden Sie die normierten Einheitsvektoren  $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{r}_{q_i}}{|\vec{r}_{q_i}|}$ .

$$\vec{r}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_\vartheta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}_r| = \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta} = 1$$

$$|\vec{r}_\vartheta| = r$$

$$|\vec{r}_\varphi| = r \sin \vartheta$$

$$\vec{e}_r = \vec{r}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\vec{r}_\vartheta}{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{r}_\varphi}{r \sin \vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (ii) Zeigen Sie, dass Sie  $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dq_i}{dt} \frac{d\vec{r}}{dq_i}$  mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin(\vartheta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{dq_i}{dt} \frac{d\vec{r}}{dq_i} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin(\vartheta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{r} + \frac{d\vartheta}{dt}r\vec{e}_\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}r\vec{e}_\varphi \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + \frac{d\vartheta}{dt}r\vec{e}_\vartheta + \frac{d\varphi}{dt}r\sin(\vartheta)\vec{e}_\varphi \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + \dot{\vartheta}r\vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}r\sin(\vartheta)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

- (iii) Berechnen Sie nun die kinetische Energie  $T$  in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2)\end{aligned}$$

- (b) Bilden Sie die Lagrange-Funktion  $L$  für ein Teilchen mit Masse  $m$  im kugelsymmetrischen Potential  $V = V(r, t)$ . Welche Koordinate  $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$  ist zyklisch? Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstant verallgemeinerten Impuls  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2) - V(r, t)\end{aligned}$$

$\varphi$  kommt nicht vor  $\rightarrow \varphi$  zyklisch

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \\ &= mr^2\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}\end{aligned}$$