Conjuntos

Um conjunto é uma coleção de elementos.

A = {0,1} é um conjunto chamado A que possui o **elemento 0** e o **elemento 1**.

B = ∅ ou {} é um conjunto vazio, onde utilizamos o símbolo ∅ para simbolizar isso.

elementos também são chamados de membros desse conjunto.

Glossário

- Glossário
  - Representação de conjuntos
    - Representação por enumeração
    - Representação pelas propriedades dos elementos
  - Relação de pertinência
  - Representação Gráfica de um conjunto
  - Relação de Inclusão
  - Comparação entre pertinência e inclusão
  - Conjunto das partes
  - Número de elementos de um conjunto das partes
  - Operações com conjuntos
    - União entre conjuntos
    - Intersecção entre conjuntos
  - Diferença entre conjuntos
  - Produto Cartesiano de conjuntos
  - Relações
    - Representação de uma relação em um diagrama de flechas
    - Relações de Equivalência
    - Relações de ordem
    - Relações de ordem parcial não estrita
    - Relações de ordem total

Representação de conjuntos

A apresentação de um conjunto possui duas formas de apresentar:

- Representação por enumeração
- Representação pelas propriedades dos elementos

Representação por enumeração

Podemos apresentar todos os elementos internos do conjunto de forma enumerada, como mostra o exemplo abaixo:

> Conjunto dos números naturais pares maiores que zero e menores que 15
> **A = {2,4,6,8,10,12,14}**

Representação pelas propriedades dos elementos

Podemos representar o conjunto infinito ou finito com uma representação matemática que apresenta exatamente os elementos sem precisar ter que apresentar um a um.

> Conjunto dos números naturais pares maiores que zero e menores que 15
> **A = {x $\in \mathcal{N}$ / x/2 = 0 $\land$ x > 0 $\land$ x < 15}**

Nessa representação encima está querendo dizer o seguinte:

> Para um x pertencente aos valores naturais (x ∈ N), onde o valor de x dividido por 2 resulta em zero (**/ x/2 = 0**) e o valor de x é maior que zero (**∧ x > 0**) e o valor de x é menor que 15 (**∧ x < 15**).

Com isso mostramos que os valores desse conjunto são pares (valores divididos por 2 que dão zero são os números pares) assim como mostramos que os valores estão no limite maiores que zero e menores que 15.

Relação de pertinência

Podemos apresentar se um valor **pertence ou não** a um conjunto, onde podemos utilizar os símbolos matemáticos ∈ para caso o valor pertença e ∉ caso o valor não pertença.

x ∈ N está verificando se o valor de x **pertence** ao conjunto dos Naturais.

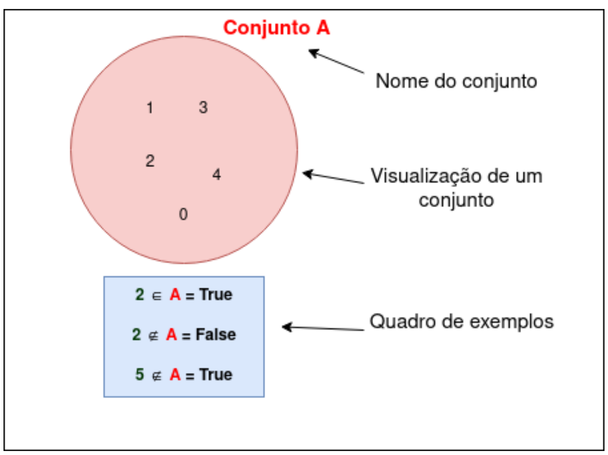
x ∉ Z está verificando se o valor e x **não pertence** ao conjunto dos Inteiros.

O resultado dessa verificação é um Booleano, ou seja, um valor True ou False.

> A = {0,1,2,3,4} 2 ∈
> **A = True 2 ∉ A**
> **= False 5 ∉ A**
> **= True**

Representação Gráfica de um conjunto

Vamos usar o exemplo da relação de pertinência para mostrar como é a visualização de um conjunto graficamente.



Apresentação gráfica de um conjunto,sendo verificado seus elementos

Relação de Inclusão

Dizemos que um conjunto A está contido no conjunto B se todos os elementos do conjunto A estiverem pertencentes no conjunto B.

O símbolo usado para dizer se está contido é o ⊂ e o símbolo para dizer que não está contido é o ⊄.

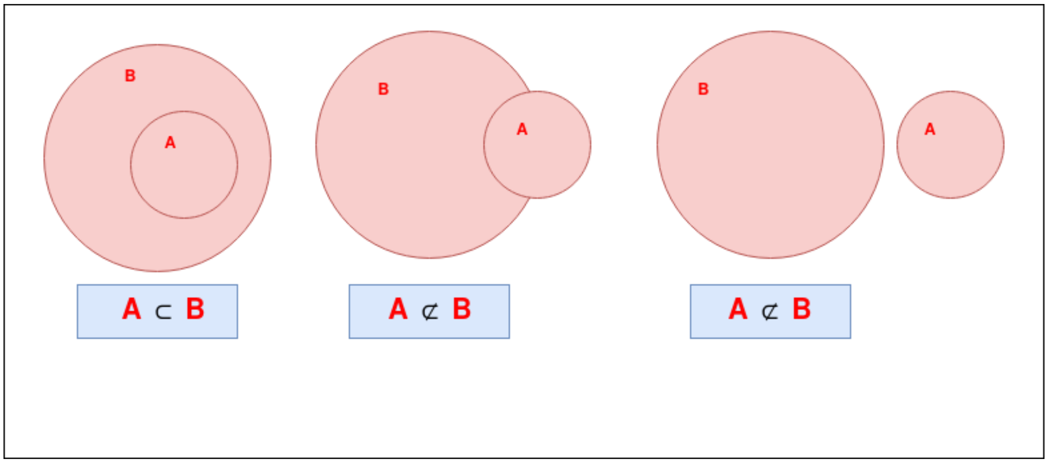
Devemos tomar cuidado, porque o está contido é diferente do de pertencimento, porque no pertencimento estamos verificando o elemento, no contido verificamos os conjuntos.

O conjunto A não está contido no conjunto B se **pelo menos** um elemento do conjunto A não estiver no conjunto B.

Com essa explicação, podemos ver essa explicação na seguinte forma matemática:

> A ⊂ B (A está contido em B)
> A ⊄B (A não está contido em B)

De uma forma visual dos tipos de inclusão:



Exemplo de Inclusão entre o Conjunto B com o Conjunto externo A

Em alguns livros e informações podemos ver o símbolo da inclusão para o lado contrário como ⊃que significa contém.

> B ⊃ A (O conjunto B contém o conjunto A)

Se o conjunto A está contido dentro do conjunto B, chamamos o conjunto A de **subconjunto** de B, assim como dentro do conjunto A ele é um **subconjunto** de si mesmo.

Outro símbolo bem usado é o está contido ou igual onde vai ter todos os elementos do conjunto A dentro do conjunto B ou o conjunto A é igual ao conjunto B, onde o símbolo é ⊆.

> A ⊆B (O conjunto A está contido ou é igual ao conjunto B)

Comparação entre pertinência e inclusão

Quando apresentamos matematicamente a pertinência e a inclusão devemos ter alguns cuidados, como por exemplo a forma de verificar se pertence ou se está contido.

Quando queremos ver se pertence a um conjunto, devemos apresentar o valor que pertence sozinho:

> 2 ∈ {0,1,2,3,4}

Quando estamos querendo ver se está contido em outro conjunto, devemos apresentar o valor dentro de um conjunto:

> {2} ⊂{0,1,2,3,4}

Caso tenha um conjunto dentro de um conjunto e queremos ver se esse conjunto pertence ao conjunto podemos ver da seguinte forma:

> {2} ∈{1,{2},3,4}

Nessas comparações podemos ver que quando escrevemos o 2 estamos falando do elemento 2 e quando escrevemos {2} estamos falando do conjunto que possui o elemento 2. No caso do {2} internamente do conjunto {1,{2},3,4} o {2} é considerado um elemento.

Conjunto das partes

Dizemos que um conjunto A tem o conjunto de partes representado por P(A) ou 2^A é o conjunto formado por todos os **subconjuntos** do conjunto A.

Tendo como exemplo o conjunto A = {2,3,5}, para termos os conjuntos das partes do conjunto A, basta escrevermos todos os **subconjuntos** pertencentes ao conjunto A.

> 1º - **Subconjunto** vazio {}, é o primeiro subconjunto de qualquer conjunto.
> 2º - **Subconjuntos** com um elemento: {2},{3},{5}.
> 3º - **Subconjuntos** com dois elementos: {2,3},{2,5},{3,5}.
> 4º - **Subconjuntos** com três elementos: {2,3,5} porque todo conjunto é um **subconjunto** dele mesmo.

Com isso, podemos mostrar o conjunto das partes do conjunto A como abaixo:

> P(A) = {{},{2},{3},{5},{2,3},{2,5},{3,5},{2,3,5}}

Número de elementos de um conjunto das partes

Nós descobrimos o número de elementos de um conjunto das partes a partir do número de elementos do conjunto que ele está sendo verificado usando a seguinte fórmula: $2^{|A|}$

No nosso exemplo anterior temos o conjunto A = {2,3,5} onde podemos ver que tem 3 elementos

o símbolo |A| significa que é o tamanho total do conjunto A, ou seja, 3 elementos

Na nossa fórmula colocamos esse valor: $2^{|A|} = 2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$

Com esse resultado podemos dizer que o conjunto das partes do conjunto A são 8 elementos.

Operações com conjuntos

Agora que foi entendido como um conjunto funciona, agora vamos ver como eles se interagem entre eles, onde temos algumas interações que são feitas entre conjuntos.

União entre conjuntos

O símbolo usado para apresentar a união entre conjuntos é ⋃.

esse tipo de interação unimos dois conjuntos em um só, ignorando os valores repetidos entre os conjuntos.

Vamos pegar como exemplo os conjuntos A e B abaixo:

> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}

Vamos criar com esses dois conjuntos, o novo conjunto A ⋃ B.

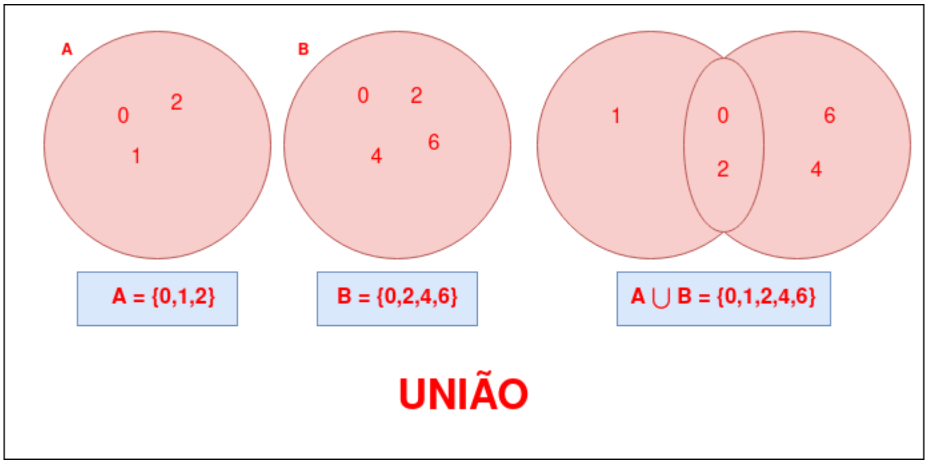
> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}
> A ⋃ B = {0,1,2,4,6}

Como visto acima, foi ignorado o valor 0 e o 2 repetidos, ficando somente uma vez no novo conjunto.

Forma matemática:

$$A \cup B = \{x / x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Forma visual:



Intersecção entre conjuntos

O símbolo usado para a intersecção é como o da união só que de cabeça para baixo ⋂

A intersecção serve para pegarmos os valores que tem em comum dentro dos dois conjuntos comparados.

Vamos pegar novamente os dois conjuntos trabalhados antes:

> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}

vamos criar com esses dois conjuntos um novo conjunto A ⋂ B com os valores em comum entre eles.

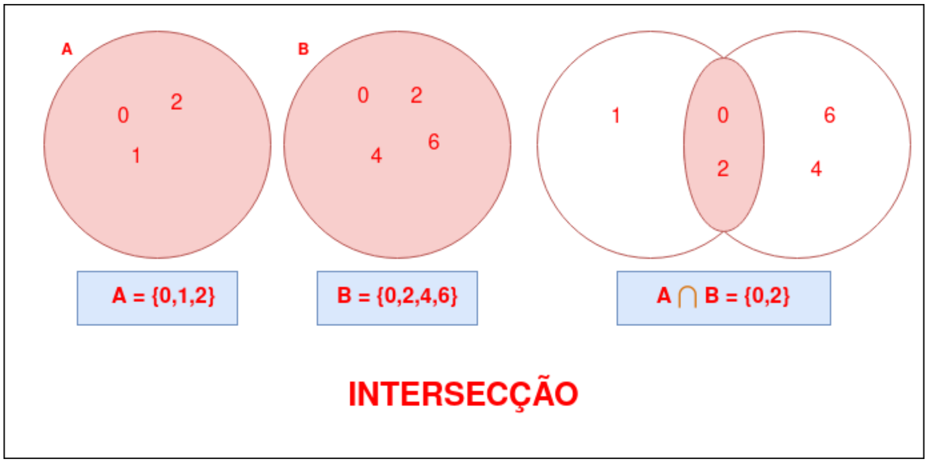
> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}
> A ⋂ B = {0,2}

Como visto acima, foi feito a intersecção dos dois conjuntos e foi visto que eles tem em comum os elementos 0 e 2, esse são os valores do novo conjunto.

Forma matemática:

$$A \cap \ B = \{x / x \in A \ \wedge x \in B\}$$

Forma visual:



Diferença entre conjuntos

O símbolo usado para a diferença entre conjuntos é -

A diferença é a interação onde pegamos os valores do primeiro conjunto que não tem no segundo conjunto.

Vamos pegar de exemplo de novo os conjuntos usados anteriormente:

> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}

No caso da diferença, podemos fazer dos dois lados, onde podemos verificar os valores do conjunto A que não tem no conjunto B e do conjunto B que não tem no conjunto A:

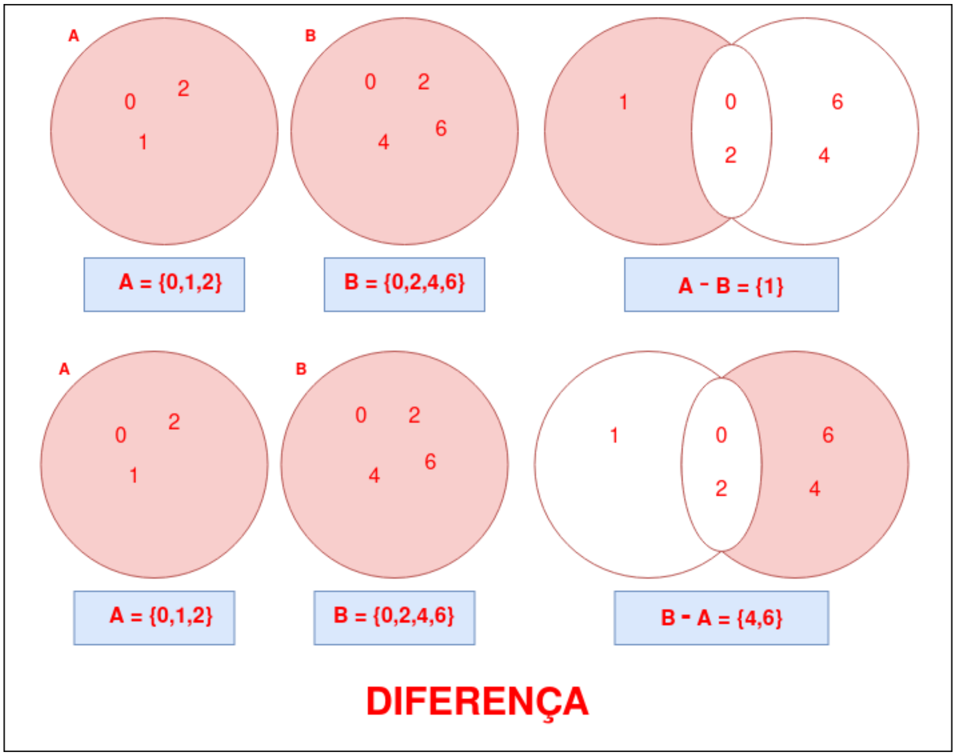
> A = {0,1,2}
> B = {0,2,4,6}
> A - B = {1} (devido que 0 e 2 já existem em B)
> B - A = {4,6} (devido que 0 e 2 já existem em A)

Forma matemática:

$$A \ - \ B = \{x/x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

$$B \ - \ A = \{x/x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$$

Forma visual:



Produto Cartesiano de conjuntos

O produto cartesiano entre dois conjuntos A e B se escreve A X B.

é o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) tal que a pertence ao conjunto A e b pertence ao conjunto B.

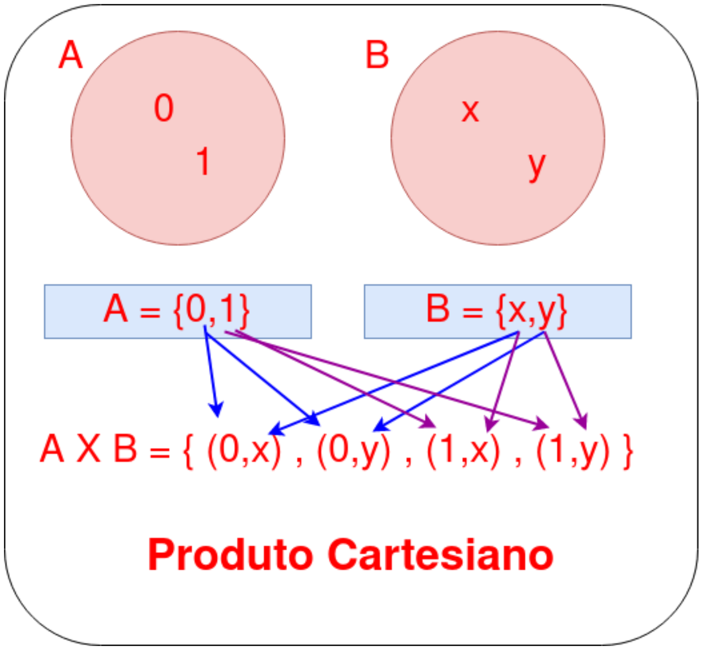
Vamos pegar esses dois conjuntos e vamos criar os produtos cartesianos.

> A = {0,1}
> B = {x,y}

Agora para criar os planos cartesianos, pegamos cada valor do conjunto A e fazer um par ordenado com cada valor do conjunto B.

> A = {0,1}
> B = {x,y}
> A X B = {(0,x),(0,y),(1,x),(1,y)}

Uma forma visual de ver os dados sendo transformados:



Umas informações importantes sobre produtos cartesianos:

$$A \times B \neq B \times A \, (Sendo\, que\, A \neq B \neq \emptyset)$$

acima está dizendo que o produto cartesiano do conjunto A com o conjunto B é diferente do produto cartesiano do conjunto B com o conjunto A, onde o conjunto A é diferente do conjunto B e eles são diferentes de vazios.

Para descobrir o número de produtos cartesianos, pegamos o número de elementos do conjunto A e do conjunto B e multiplicamos eles para saber o número de pares ordenados.

Vamos pegar o exemplo de cima:

> A = {0,1}
> B = {x,y}
> Número de elementos do conjunto A = 2
> Número de elementos do conjunto B = 2
> Cálculo: 2*2 = 4
> Planos cartesianos: A X B = {(0,x),(0,y),(1,x),(1,y)}

Isso comprova que o cálculo funciona! onde temos a prova do número de pares ordenados.

Relações

Relações também pode ser chamados de **Relações Binárias** e uma relação entre dois conjuntos A e B é qualquer **subconjunto** de A X B.

O conjunto A é chamado de **dominio.**

O conjunto B é chamado de **codominio**.

Vamos pegar um exemplo:

> A = {1,2,3} B = {2,4,6} A X B = {(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)}

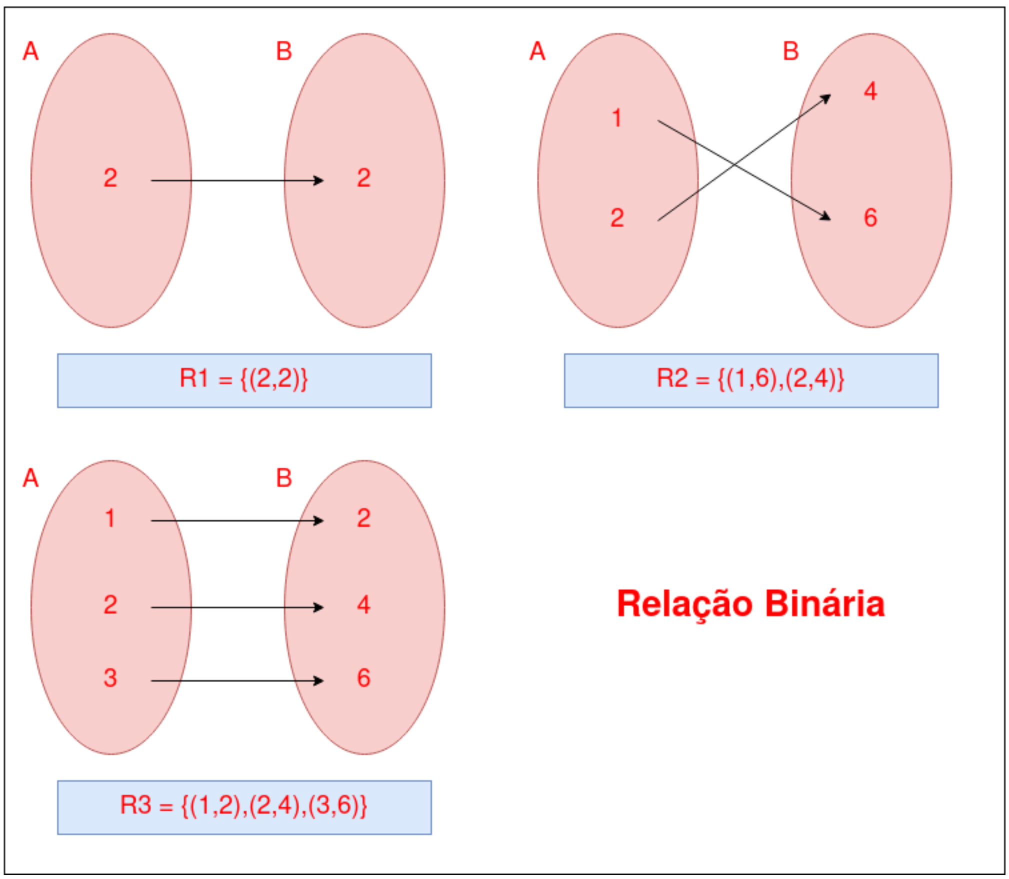
Se pegarmos alguns **subconjuntos** desse conjunto de pares ordenados, teremos algumas relações do conjunto A com o conjunto B.

> R_1 = {(2,2)}
> R_2 = {(1,6), (2,4)}
> R_3 = {(1,2), (2,4), (3,6)}

R_1, R_2 e R_3 são relações do conjunto A em conjunto B, pois seus elementos são pares ordenados (x,y), com x pertencente ao conjunto A e y pertencente ao conjunto B.

Representação de uma relação em um diagrama de flechas

Podemos representar os pares ordenados entre conjuntos conectando os valores entre flechas de um conjunto no outro.



Podemos representar matematicamente uma relação binária como abaixo:

$$R : A \Leftrightarrow B$$

Tendo essa relação, o **domínio** de definição de R é:

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \ \wedge (x, y) \in R\}$$

Traduzindo: x pertence ao conjunto A onde existe pelo menos um y do conjunto B nos pares ordenados pertencentes a relação binária.

Podemos mostrar a **imagem** pela seguinte forma:

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \ \wedge \ (x,y) \in R\}$$

Traduzindo: y pertence ao conjunto B onde existe pelo menos um x do conjunto A nos pares ordenados pertencentes a relação binária.

Tendo essa visão, podemos verificar o **domínio** e a **imagem**, como no exemplo abaixo:

> A = {0,1,2}
> B = {x,y}
> R_3 = {(1,x)}
> Domínio: dd(R_3) = {1}
> Imagem: img(R_3) = {x}

Relações de Equivalência

Seja uma relação binária $R : A \iff A$, diz-se que ela é uma relação de equivalência caso possua as seguintes 3 propriedades:

- Reflexiva = ∀x ∈ A / (x,x) ∈ R

"Para todo x pertence ao conjunto A, onde o par ordenado com mesmo valores pertence a relação R"

- Simétrica = ∀x ∈ A, y ∈ A / (x,y) ∈ R ⇒ (y,x) ∈ R

"Para todo x e o valor de y do conjunto A, onde o par ordenado (x,y) pertence a relação R"

- Transitiva = ∀x ∈ A, y ∈ A, z ∈ A / (x,y) ∈ R ∧ (y,z) ∈ R ⇒ (x,z) ∈ R

"Para todo x,y e z do conjunto A, o par ordenado (y,z) pertende a relação R assim como (x,z) pertence também a mesma relação"

Vamos a um exemplo que fica mais fácil de entender:

Exemplo 1: Temos o seguinte conjunto A e a relação R:

> A = {1,2,3,4}
> R = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)}

R é uma relação de equivalência porque ele satisfaz ás 3 propriedades pelos seguintes motivos:

- Reflexiva: R é reflexivo pois possui os seguintes pares ordenados {(1,1).(2,2),(3,3),(4,4)} e estão contidos em R.

> $\{\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\ \} \subseteq R$

- Simétrica: R é simétrico porque do par ordenado (a,b) possui a igual ao b da mesma forma que b igual ao a.

> $a = b \ \wedge \ b = a$
> $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

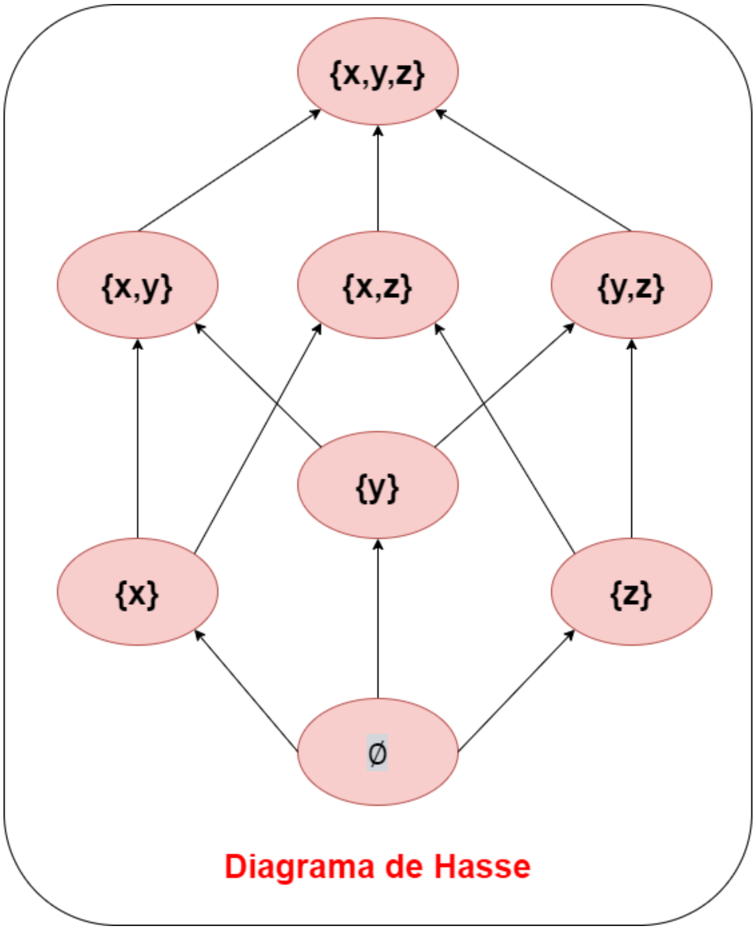
- Transitiva: R é simétrico porque do par ordenado (a,b) possui b = a e b = c, então podemos deduzir que c = a.

> $a = b \ \wedge \ b = c \ \Rightarrow \ c = a$
> $R = \{(a,b),(b,c),(c,a),(a,b)\}$ é o equivalente a $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ então podemos concluir que o valor de c pertence também ao conjunto A.

Relações de ordem

Uma relação de ordem também pode ser entendido como um **conjunto parcialmente ordenado** onde o conjunto tem uma ordem específica dos elementos internos dele.

Abaixo pode ser visto o Diagrama de Hasse mostrando a construção do conjunto e subconjuntos com 3 elementos



Relações de ordem parcial não estrita

Dado um conjunto A e uma relação binária R onde R está contido no produto cartesiado A X A

> $R \subseteq A \times A$

Dizemos que a relação binária é de ordem parcial não estrita (também pode ser encontrado nos livros como relação de ordem ampla) sobre o conjunto A caso as seguintes condições sejam verdadeiras:

- Reflexiva: $\forall x \in A.(x,x) \in R$

“Para todo x pertencente ao conjunto A, temos que os pares ordenados com os mesmos valores visto como (x,x) pertencem a relação R”

- Antissimétrica: $\forall x,y \in A.(x,y) \in R \ \wedge \ (y,x) \in R \Rightarrow x = y$

“Para todo x e y pertencente ao conjunto A, temos que os pares ordenados (x,y) pertencem a relação R e os pares ordenados (y,x) pertencem a relação R, tendo que x é igual ao y”

- Transitiva: $\forall x,y,z \in A.(x,y) \in R \ \wedge \ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

“Para todo x,y,z pertencente ao conjunto A, temos que o par ordenado (x,y) pertence a relação R e o par ordenado (y,z) pertence a relação R levando a conclusão que o par ordenado (x,z) pertence a relação R”

Vamos ver o exemplo como abaixo:

> $A = \{1, 2, 3, 4\}$
> $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$

a Relação R está contido no produto cartesiano $A \times A$, onde ele é uma relação de ordem parcial não estrita porque:

- Reflexiva: R é reflexivo porque possui valores nos pares ordenados iguais:

  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- Antissimétrica: R é antissimétrico porque possui pares ordenados (x,y) onde x e y são iguais:

  $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- Transitiva: R é transitivo porque temos a seguinte visualização dos dados:

  $R = \{(x, y), (x, z), (y, z), (x, y)\} \iff \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

  Onde podemos ver que todos os valores de x tem em y e os valores de z tem em x e y, dessa forma comprovando que os valores são iguais dos pares ordenados.

Relações de ordem total

Ordem total significa que todos os elementos podem ser comparados, onde os pares ordenados (a,b) não importa o local dos elementos do a e do elemento b eles possuem os dois.

Vamos de novo pegar os exemplos usados do conjunto A:

> $A = \{1, 2, 3, 4\}$
> $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$

Podemos verificar a relação de ordem total pela seguinte formula matemática:

> $\forall x, y \in A.(x, y) \in R \ \vee \ (y, x) \in R$

Com essa ideia, podemos ver que nossa relação R possui o par ordenado (1,2) e o par ordenado (2,1) e os dois pertencem a relação R.