UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

Dipartimento di Ingegneria e Scienza
dell'Informazione

Corso di Laurea in
Informatica

ESERCIZI DI PROBABILITA'

Autore

Fabio Missagia

Anno accademico 2021-2022

Esercizio del 2022-03-28

Sia $\Omega = \{a, m, v, u, y, t, k, q, j, e, x, h, r, g, z, d, c, i\}$ lo spazio campionario e siano

$\mathcal{P}(\Omega) \ni \mathcal{A} = \{\emptyset, \{i, r, q, u\}, \{a, m, v, y, t, k, j, e, x, h, g, z, d, c\}, \{a, m, v, u, y, t, k, q, j, e, x, h, r, g, z, d, c, i\}\}$

e sia $A = \{h, a, d, x, v, i, e, k, m, c, j, g, t, y\}$ un sottoinsieme di Ω.

Quesiti

Quesito 1

$\star\mathcal{A}$ è un'algebra su Ω?

- Ω e $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $\forall A \in \mathcal{A}$ anche $A^c \in \mathcal{A}$
- l'unione finita di elementi di $\mathcal{A}$ continua a stare in $\mathcal{A}$.
  La risposta quindi è sì.

Quesito 2

$\star$Si determini la probabilità che, pescando a caso da A, si estragga una vocale (per vocali si intendono gli elementi dell'insieme $\{a, e, i, o, u\}$).

Consideriamo l'evento $E = \{a, i, e\}$, ognuna di queste vocali è un successo quindi basta contare i successi sui possibili esiti $\frac{\#\text{successi}}{\#\text{esiti possibili}} = \frac{\#E}{\#A} = \frac{3}{14}$

Quesito 3

$\star$Si determini la probabilità che, pescando a caso da A, si estragga una lettera tra le seguenti s, a, o, l, u, n, g.

Di nuovo l'evento in questione è $E = A \cap \{s, a, o, l, u, n, g\} = \{a, g\}$ da cui $P(E) = \frac{2}{14}$

Quesito 4

$\star$Si determini la probabilità che, pescando a caso da A, si estragga una vocale che appartenga anche a s, a, o, l, u, n, g.

In questo caso costituiscono un successo le lettere che stanno in $\{a, e, i, o, u\} \cap \{s, a, o, l, u, n, g\} \cap A = \{a\}$

Quesito 5

Si determini la probabilità che, pescando a caso un elemento da A, si estragga una vocale o una lettera che sta anche in s, a, o, l, u, n, g.

Usando la proprietà che per due generici eventi A e B, la probabilità della loro unione è

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \{a, i, e\} + \{a, g\} - \{a\} = \{a, i, e, g\} = \frac{4}{14}$$

Esercizio del 2022-03-29

Durante una sessione di un gioco da tavolo un giocatore deve tirare due dadi da dieci e tenere il valore più alto. Se tale valore è almeno 9 il giocatore riuscirà a fuggire.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilitá che il giocatore riesca a fuggire?

Hint: Per l'esperimento aleatorio del lancio di un dado si considera $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
Per il lancio di due dadi?

Come suggerito si scriva prima lo spazio campionario relativo all'esercizio: gli elementi ω sono coppie del tipo (n_1, n_2) con $n_1, n_2 \in \{1, \ldots, 10\}$ cioè $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Il giocatore non subisce danni se si verifica l'evento E="il valore più alto tra n_1 e n_2 è maggiore o uguale di 6", ossia chiamiamo $E_i = \{n_i \geq 6\}, i = 1,2$ allora $E = E_1 \cup E_2$.

Ricordiamo la seguente proprietà della funzione di probabilità:

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Possiamo costruirci una tabella rappresentante il nostro esperimento aleatorio:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	10
4	4	4	4	4	5	6	7	8	9	10
5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	10
6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10
7	7	7	7	7	7	7	7	8	9	10
8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	10
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

e contiamo quanti elementi di Ω cadono nell'area data dall'intersezione dei due eventi.
La risposta è $\frac{36}{100}$.

Quesito 2

⋆Il primo dado è stato lanciato ed il giocatore ha ottenuto 7. Qual è la probabilità che, tirando il secondo dado, il giocatore riesca a fuggire?

Dato che il lancio di un dato è già avvenuto e noi sappiamo il risultato, l'unica possibilità per vincere è che con l'altro dado esca un numero uguale o superiore a 9. In pratica è come se solo con il lancio di un dato si decidesse se si vince o perde (in pratica c'è solo una riga della tabella di prima), per cui le possibili combinazioni sono 10, ovvero $(7,1) - (7,2) - (7,3)$ e così via fino a $(7,10)$. Le uniche che andranno bene però sono $(7,9)$ e $(7,10)$, quindi la probabilità è di $\frac{2}{10}$.

Quesito 3

⋆Qual è la probabilità che "ottenere lo stesso valore sui due dadi" avvenga?
N.B.: Si considera l'evento generale, non condizionato al lancio del quesito 2.

Le possibili combinazioni di due dadi uguali sono $\frac{10}{100}$, ovvero $\frac{1}{10}$, che corrisponde agli elementi nella diagonale della tabella iniziale.

Esercizio del 2022-03-30

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è il numero di interi dispari che si possono costruire con i numeri $2, 3, 4, 8, 9$, senza che alcun numero si ripeta (i.e. l'intero finale deve essere di 5 cifre)?

Abbiamo dei vincoli sull'ultima cifra che può essere scelta tra 3 e 9.
Una volta fissata l'ultima cifra le altre possono essere scelte fra i restanti 5 - 1 numeri. Abbiamo quindi $D_{4,4} \cdot 2 = P_4 \cdot 2 = 4! \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$.

Quesito 2

⋆Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un numero tra quelli del quesito precedente, questo sia maggiore di 40000?

Calcoliamo il numero $N_<$ gli interi minori di 40000, questi sono quelli che iniziano per 2, 3 e qui dobbiamo distinguere i pari e i dispari, poiché se iniziamo con un numero dispari avremo una possibilità in meno per l'ultima cifra.

Prendiamo in considerazione quelli che iniziano con 2, essi saranno del tipo
$2\_\_\_3$ oppure $2\_\_\_9$, ossia $1 \cdot 3! \cdot 2 = 12$

Prendiamo ora in considerazione quelli che iniziano con 3, essi saranno del tipo
$3\_\_\_9$ e basta, visto che devono essere dispari, quindi $1 \cdot 3! \cdot 1 = 6$

La probabilità che il numero scelto a caso sia minore di 40000 è $\frac{6+12}{48} = \frac{18}{48}$,
quindi la probabilità che, scegliendo a caso un numero tra quelli del quesito precedente, questo sia maggiore di 40000 è $1 - \frac{18}{48} = \frac{30}{48} = 0.625$

Esercizio del 2022-03-30 Versione 2

Quesiti

Quesito 1

⋆In Svezia le targhe sono composte da 3 lettere (A - Z) e 3 cifre (0 - 9). Assumendo che le lettere siano 26 e che sia tutto random, quindi niente sigle di stati, province, città etc., quante possibili targhe (diverse) si possono stampare?

$26^3 \cdot 10^3 = 1.7576 \cdot 10^7$

Quesito 2

⋆In Germania invece le lettere iniziali possono essere da 1 a 3 e questa sigla indica un luogo. Dopo la sigla iniziale si trova la parte casuale formata da due lettere (A-Z), anche qui consideriamo solo le 26 lettere come sopra, seguita da 4 numeri (0-9). Si considerino le sigle di 3 cifre che iniziano per C, le possibilità sono: "CAS" "CHA" "CLP" "CLZ" "COC" "COE" "CUX". Quante possibili targhe (diverse) si possono stampare in questo caso?

Dato che stiamo considerando il caso in cui le targhe possono iniziare solo con una delle 7 sigle fornite, non ci resta che calcolare, similmente a prima, il numero di combinazioni di lettere e di cifre.

$7 \cdot 26^2 \cdot 10^4 = 4.732 \cdot 10^7$

Quesito 3

⋆Torniamo in Svezia e si consideri la targa $E, P, F, 4, 8, 2$ quante sono le targhe possibili con le stesse lettere e numeri?

In questo caso si ha a che fare con permutazioni (disposizioni senza ripetizione, dove il numero di elementi è uguale al numero di "posti" disponibili). Di conseguenza dovremmo calcolare le permutazioni di 3 lettere in 3 posizioni e di 3 numeri in 3 posizioni, ovvero $3! \cdot 3!$.
Quindi il numero possibile di combinazioni è 36.

Esercizio del 2022-03-31

Il preside della facoltà di Scienze deve istituire un comitato formato da 10 persone tra matematici o fisici per valutare un candidato per la cattedra di Fisica Matematica.

In facoltà ci sono 24 matematici e 14 fisici.

Quesiti

Quesito 1

⋆Quanti sono i possibili comitati formati da 7 matematici e 3 fisici?

Ovviamente ogni elemento (persona) è distinto. Al tempo stesso l'ordine con cui compaiono nel comitato non è importante. Siamo dunque interessati a combinazioni $C_{n,r} = \binom{r}{n}$ e in particolare $C_{24,7} = \binom{24}{7} = 346104$, i modi di scegliere i 7 matematici, e $C_{14,3} = \binom{14}{3} = 364$, i modi di scegliere 3 fisici.

La scelta dei matematici non influisce su quella dei fisici, dunque il numero richiesto è dato dal prodotto $C_{24,7} \cdot C_{14,3} = \binom{24}{7} \cdot \binom{14}{3} = 125981856$.

Quesito 2

⋆Facendo abbinamenti casuali qual è la probabilità di avere un comitato formato da 7 matematici e 3 fisici?

Dall'esercizio precedente ho ricavato la combinazione di 10 persone, in cui so che 7 di questi sono matematici e 3 sono fisici. Se si effettua la combinazione di $24 + 14 = 38$ persone in 10 "posti" si otterranno i possibili comitati di 10 persone in cui c'è un numero variabile di matematici e fisici.

Il risultato è quindi $\frac{\binom{24}{7} \cdot \binom{14}{3}}{\binom{38}{10}} = 0.2664964$

Quesito 3

⋆Quanti sono i possibli comitati di 9 persone tali che:

1. abbiano un numero di matematici uguale o maggiore al numero di fisici
2. contengano almeno 2 fisico/i?

Gli unici comitati in cui i matematici sono in numero maggiore ai fisici e dove sono presenti almeno 2 fisici sono: (5m - 4f), (6m - 3f), (7m, 2f). Di conseguenza i possibili comitati di 9 persone con queste condizioni si calcola con la somma delle varie combinazioni:

$$\binom{24}{5} \cdot \binom{14}{4} + \binom{24}{6} \cdot \binom{14}{3} + \binom{24}{7} \cdot \binom{14}{2} = 123034912$$

Esercizio del 2022-04-01

Vogliamo disegnare una nuova bandiera, formata da tre strisce verticali colorate.

Vogliamo, inoltre, che il colore della striscia centrale sia diverso da quello delle altre due.

Quesiti

Quesito 1

⋆Quante possibili bandiere diverse possiamo creare con 6 colori?

Per la prima striscia possiamo scegliere tra 6 possibili colori, per la seconda 5 (tutti i colori tranne quello della prima striscia) e per la terza di nuovo 5 (tutti tranne quello della seconda striscia). Quindi ho $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ possibili bandiere.

Quesito 2

⋆Consideriamo ora le possibili bandiere ottenute: qual è la probabilità di avere una bandiera con solo due colori

Il numero di bandiere di soli due colori sono costruite scegliendo per la prima striscia tra 6 colori, per la seconda tra 5 (come prima, perché il vincolo rimane), mentre per l'ultima striscia dobbiamo scegliere lo stesso colore della prima. Osserviamo che non esiste altra possibilità, visto che le prime due strisce devono essere necessariamente di colori diversi e la terza non può avere lo stesso colore della seconda.

Le possibili scelte sono $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$; inoltre, visto che ci viene richiesta la probabilità, dobbiamo dividere questo numero per il totale delle bandiere create, $6 \cdot 5 \cdot 5$. Possiamo quindi semplificare e ottenere $\frac{1}{5}$. Potevamo arrivare allo stesso risultato considerando che la probabilità di essere in questa situazione dipende solo dalla terza striscia e uno solo dei possibili colori dà il risultato cercato, quindi la probabilità è $\frac{1}{5}$.

Quesito 3

⋆Consideriamo come sopra le possibili bandiere ottenute: qual è la probabilità di avere una bandiera con tre colori?

Il numero di bandiere di tre colori sono costruite scegliendo per la prima striscia tra 6 colori, per la seconda tra 5 colori, e per l'ultima striscia possiamo scegliere tra i 4 colori rimasti a disposizione. Le possibili scelte sono quindi $6 \cdot 5 \cdot 4$. Come prima, dato che ci viene richiesta la probabilità, dobbiamo dividere questo numero per il totale delle bandiere create. Otterremo quindi $\frac{4}{5}$.

Potevamo arrivare allo stesso risultato considerando che l'evento "ottenere una bandiera con tre colori" è il complementare dell'evento "ottenere una bandiera con solo due colori" dato che per i vincoli imposti non possiamo ottenere una bandiera con meno di 2 colori. Quindi

$$P(\text{"ottenere una bandiera con tre colori"}) = 1 - P(\text{"ottenere una bandiera con solo due colori"}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Esercizio del 2022-04-01(2)

Esercizio del 2022-04-01 Versione 2

Vogliamo mettere lo smalto a una bambola, in modo tale che due dita consecutive non abbiano lo stesso colore, quindi l'indice non deve avere lo stesso colore del pollice, il medio non deve avere lo stesso colore dell'indice, l'anulare non deve avere lo stesso colore del medio e il mignolo non deve avere lo stesso colore dell'anulare.

Quesiti

Quesito 1

⋆Quanti possibili modi abbiamo per mettere lo smalto alle unghie di una singola mano se abbiamo a disposizione 5 smalti differenti?

Per il primo dito possiamo scegliere tra 5 colori, dall'indice in poi possiamo scegliere tra 4 colori, ovvero tutti i colori tranne quello del dito precedente. Quindi i possibili modi per mettere lo smalto sono $5 \cdot 4^4 = 1280$.

Quesito 2

⋆Considerando che abbiamo diversi modi per mettere lo smalto alle unghie di una singola mano con le modalità sopra richieste, qual è la probabilità di usare solo 2 colori?

Per calcolare questa probabilità devo trovare tutte le combinazioni dei 5 colori per 2 posizioni, ciò è possibile attraverso una disposizione senza ripetizione perché ogni allineamento sarà diverso dall'altro se i colori sono diversi oppure se sono in ordine diverso $\frac{5!}{(5-2)!} = 20$.
Dato che ci serve la probabilità, divideremo questo risultato per tutte le combinazioni possibili con i 5 colori, ovvero il valore del quesito 1, che risulterà $\frac{20}{1280}$.
Analogamente, per la prima parte, si poteva svolgere come il primo quesito, ovvero che nel primo dito abbiamo 5 colori da scegliere, nel secondo ne avremo 4, quindi tutti gli altri ma non quello del dito precedente, e dal terzo in poi avremo a disposizione sempre un colore che sarà quello che avremo usato nelle due dita precedenti ma che è diverso dal colore del dito precedente. Quindi sarebbe $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 20$

Quesito 3

⋆Quanti modi abbiamo di mettere lo smalto alle unghie di una mano scegliendo lo stesso colore per pollice e mignolo?

Ci sono due casi da valutare: il primo caso è che pollice, medio e mignolo abbiano lo stesso colore e nel secondo caso che pollice e mignolo abbiano lo stesso colore, ma per il medio è diverso.

- Nel primo caso per il colore del pollice, del mignolo e del medio avremo a disposizione 5 colori, di conseguenza per l'indice possiamo scegliere gli altri 4 colori, perché non può avere lo stesso colore né del pollice né del medio (che in questo caso hanno lo stesso). La stessa cosa accade per la scelta del colore dell'anulare, in quanto non può avere lo stesso colore né del medio né del mignolo (che anche in questo caso hanno lo stesso). Quindi le combinazioni disponibili saranno $5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 80$
- Nel secondo caso invece, come nel primo, avremo a disposizione 5 colori per pollice e mignolo, ma questa volta per il medio ne useremo un altro, che potremmo scegliere tra 4 colori disponibili. Per la scelta dell'indice potremo scegliere solo tra 3 colori, perché deve essere diverso da quello del pollice e del medio (che questa volta hanno colori diversi) e la stessa cosa accade per la scelta del colore dell'anulare. Anche qui potremo scegliere tra 3 colori, perché deve essere diverso da quello del medio e del mignolo (che questa volta hanno colori diversi). Quindi le combinazioni disponibili saranno $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 180$

Le combinazioni con le caratteristiche della consegna saranno uguali alla somma delle due casistiche, ovvero $80 + 180 = 260$.

Esercizio del 2022-04-04

Si consideri il lancio di una moneta, di cui non si sa se sia equilibrata o truccata. Ci viene detto che, lanciando la moneta due volte, la probabilità di ottenere esattamente una testa "T" e una croce "C" (non necessariamente in questo ordine) è 0.495.
N.B. Dire che la moneta è equilibrata significa che testa e croce sono equiprobabili.

Quesiti

Quesito 1

⋆La moneta è equilibrata?

Possiamo calcolare la probabilità di ottenere testa o croce nel seguente modo:

$$2 \cdot P(T) \cdot P(C) = 0.495$$

$$2 \cdot P(T) \cdot (1 - P(T)) = 0.495$$

$$2 \cdot P(T) - 2 \cdot P(T)^2 = 0.495$$

$$-P(T)^2 + P(T) - \frac{0.495}{2} = 0$$

$$P(T) = 0.45 \quad \text{oppure} \quad P(T) = 0.55$$

Quindi la moneta non è equilibrata.

Quesito 2

⋆Ora che sappiamo cosa aspettarci, giochiamo. Supponiamo che la probabilità di fare croce $P_m(C)$ sia minore o uguale della probabilità $P_m(T)$ di fare testa. Tiriamo la moneta ed esce T. Qual è la probabilità di ottenere C rilanciando la moneta?

Dal quesito precedente sappiamo che $P(T) = 0.45$ oppure $P(T) = 0.55$, quindi $P(T) = 0.55$ e $P(C) = 0.45$ visto che il testo ci dice che $P_m(C)$ è minore o uguale della probabilità $P_m(T)$.
Quindi la probabilità di ottenere C rilanciando la moneta è $P(C) = 0.45$, visto che sapere che è uscito testa precedentemente non influenza il lancio successivo.

Quesito 3

⋆Giochiamo ancora e questa volta lanciamo la moneta tre volte. Il primo esito è T, qual è la probabilità di non ottenere tre T?

L'evento accaduto è

$$H = \{\{T, C, C\}, \{T, C, T\}, \{T, T, C\}, \{T, T, T\}\}$$

La probabilità di non ottenere tre T è $1 - P(T, T, T)$, ma sapendo che il primo esito è T, la probabilità sarà $1 - 0.55 \cdot 0.55 = 0.6975$

Esercizio del 2022-04-05

Roberta lancia due volte un dado con 12 facce, numerate da 1 a 12.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità che almeno uno dei risultati dei due lanci sia strettamente maggiore di 5?

Possiamo procedere in 2 modi:

- Possiamo calcolare la probabilità dell'evento complementare, ossia che entrambi i risultati siano minori o uguali a 5. La probabilità che il primo lancio risulti minore o uguale a 5 è di $\frac{5}{12}$, e stessa cosa per il secondo lancio, visto che sono indipendenti.
  Quindi la probabilità che almeno uno dei risultati dei due lanci sia strettamente maggiore di 5 è

$$1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = 1 - \frac{25}{144} = \frac{119}{144}$$

- Alternativamente, potevamo costruirci una semplice tabella:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	4	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	10	11	12
6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	11	12
7	7	7	7	7	7	7	7	8	9	10	11	12
8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	10	11	12
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	12
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	12
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12

  in cui prendiamo il lancio con l'esito maggiore e contare i singoli esiti.

Quesito 2

⋆Qual è la probabilità che il valore assoluto della differenza dei due risultati sia pari sapendo che il risultato di almeno uno dei due dadi è un numero minore o uguale di 5?

Gli unici casi in cui la somma sia pari è che entrambi i numeri siano o pari oppure entrambi dispari.
Anche qui possiamo procedere in 2 modi:

- Nel caso in cui il primo dado abbia un numero minore o uguale a 5, avremo $6 \cdot 2$ combinazioni di pari e $6 \cdot 3$ combinazioni di dispari. La stessa cosa vale col secondo dado, da cui però dobbiamo togliere l'intersezione, ovvero il caso in cui siano entrambi minori o uguali a 5. Quindi $30 + 30 - (3 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = 47$. Possiamo calcolare i casi totali allo stesso modo del quesito precedente, che sono 95. La probabilità è quindi $\frac{47}{95}$
- Alternativamente possiamo fare la tabella sgravata

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	X		X		X		X		X		X	
2		X		X		X		X		X		X
3	X		X		X		X		X		X	
4		X		X		X		X		X		X
5	X		X		X		X		X		X	
6		X		X								
7	X		X		X							
8		X		X								
9	X		X		X							
10		X		X								
11	X		X		X							

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12		X		X								

e contarci a mano i casi.

Esercizio del 2022-04-06

Un'azienda compra il materiale di cancelleria per i suoi dipendenti da tre fornitori (AspraZucchi, Baiser, Coder-NA). Il fornitore AspraZucchi fornisce il 7% del materiale, Baiser il 84% e Coder-NA il restante.

Può succedere che la cancelleria proveniente dai fornitori sia difettosa, in particolare il 4% dei prodotti di AspraZucchi presenta difetti, così come il 9% di quelli di Baiser e il 10% di quelli di Coder-NA.

Quesiti

Possiamo calcolare la $\%$ di materiale che fornisce Coder-NA facendo $1 - 0.07 - 0.84 = 0.09 = 9\%$
Scriviamo inoltre i nostri eventi:

- D = la penna è difettosa
- F_1 = la penna proviene dal fornitore AspraZucchi
- F_2 = la penna proviene dal fornitore Baiser
- F_3 = la penna proviene dal fornitore Coder-NA

Quesito 1

**⋆Francesca si presenta per il suo primo giorno di lavoro e le viene data una penna nuova.
Con che probabilità la penna è difettosa?**

Dobbiamo calcolare

$$P(D) = \sum_{j=1}^{3} P(F_j)P(D|F_j) = 0.07 \cdot 0.04 + 0.84 \cdot 0.09 + 0.09 \cdot 0.1 = 0.0874$$

Quesito 2

**⋆Jakub ha a sua volta preso una penna, stamattina. Non appena la prova, si accorge che è difettosa.
Con che probabilità la penna di Jakub è stata acquistata da Coder-NA?**

Per rispondere alla domanda usiamo il Teorema di Bayes:

$$P(F_i|D) = \frac{P(F_i)P(D|F_i)}{\sum_j P(F_j)P(D|F_j)}$$

$$P(\text{"Coder"} \mid \text{"Difettosa"}) = \frac{P(\text{"Coder"})P(\text{"Difettosa"}|\text{"Coder"})}{P(\text{"Difettosa"})}$$

$$= \frac{0.09 \cdot 0.1}{0.0874} = 0.1029748$$

Quesito 3

⋆Con che probabilità la penna di Jakub non è stata acquistata da Baiser?

Sfruttiamo i conti fatti per il quesito precedente: possiamo o sommare $P(F_1|D) + P(F_3|D)$ o, equivalentemente, sottrarre $P(F_2|D)$ da 1.
Procediamo nel secondo modo:

$$1 - P(\text{"Baiser"} \mid \text{"Difettosa"}) = 1 - \frac{P(\text{"Baiser"})P(\text{"Difettosa"}|\text{"Baiser"})}{P(\text{"Difettosa"})}$$

$$= 1 - \frac{0.84 \cdot 0.09}{0.0874} = 0.1350114$$

Esercizio del 2022-04-06(2)

Esercizio del 2022-04-06 Versione 2

Le previsioni meteo dicono che a Strembo la probabilità di pioggia è 0.12, la probabilità che ci sia bel tempo è 0.86 ma che c'è anche una remota probabilità, 0.02, che nevichi.

Quando Mario Rossi andava al lavoro in ufficio a Strembo, arrivava in ritardo con probabilità 0.07 quando pioveva, con probabilità 0.53 in caso di neve e con probabilità 0.03 anche nei giorni in cui c'era il sole.

Mario riesce ogni tanto ad essere in ritardo al lavoro anche oggi con lo smartworking da casa.

Quesiti

Il procedimento è il medesimo in tutti e tre i casi. Scriviamo i nostri eventi:

- B = Mario è in ritardo
- A_1 = nel giorno considerato piove
- A_2 = nel giorno considerato nevica
- A_3 = nel giorno considerato c'è bel tempo

Quesito 1

⋆Con che probabilità era in ritardo, quando ancora andava in ufficio?

Dobbiamo calcolare

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j)P(B|A_j) = 0.12 \cdot 0.07 + 0.02 \cdot 0.53 + 0.86 \cdot 0.03 = 0.0448$$

Quesito 2

⋆Dai registri dell'ufficio, risulta che il 31 gennaio 2020 Mario Rossi è arrivato in ritardo. Qual è la probabilità che quel giorno nevicasse?

Per rispondere alla domanda usiamo il Teorema di Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}$$

$$P(\text{"Nevica"}|\text{"Ritardo"}) = \frac{P(\text{ "Nevica" })P(\text{ "Ritardo"}|\text{ "Nevica" })}{P(\text{ "Ritardo"})}$$

$$= \frac{0.02 \cdot 0.53}{0.0448} = 0.2366071$$

Quesito 3

⋆Qual è la probabilità che il 31 gennaio 2020 (giorno in cui Mario Rossi era in ritardo) ci fosse brutto tempo?

Sfruttiamo i conti fatti per il quesito precedente: possiamo o sommare $P(A_1|B) + P(A_3|B)$ o, equivalentemente, sottrarre $P(A_3|B)$ da 1.
In entrambi i casi si ottiene il medesimo risultato.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}$$

$$1 - P(\text{"Bel tempo"}|\text{"Ritardo"}) = 1 - \frac{P(\text{ "Bel tempo" })P(\text{ "Ritardo"}|\text{ "Bel tempo" })}{P(\text{ "Ritardo"})}$$

$$= 1 - \frac{0.86 \cdot 0.03}{0.0448} = 0.4241071$$

Esercizio del 2022-04-07

In questo esperimento casuale ci sono 4 sacchetti di biglie colorate e un dado equilibrato a 4 facce. In tutti i sacchetti ci sono 5 biglie rosse, denotate con "R" e 11 biglie nere, denotate con "N".

Lanciamo il dado e ne osserviamo il risultato: indichiamo con n il numero ottenuto. A questo punto prendiamo n sacchetti e peschiamo una biglia da ciascuno di essi.

Quesiti

Osservazioni:

- ci sono due fasi in questo esperimento, prima il lancio del dado a 4 facce e in seguito l'estrazione delle biglie colorate;
- il fatto che si peschi da n sacchetti diversi può essere pensato, equivalentemente, come estrazione con reinserimento da un unico sacchetto, visto che tutti i sacchetti hanno il medesimo contenuto;

Gli esiti dell'esperimento sono del tipo $(n, x_1, \ldots, x_n)$ con $n = 1, \ldots, 4$ e $x_i =$"R" oppure "N", il colore della i-esima biglia estratta, ad esempio

$$(1, R), (1, N), (2, R, R), (2, R, N), (2, N, R), (2, N, N)$$

Il dado è equilibrato, quindi $P(\text{esce n}) = \frac{1}{4}$ per ogni n tra 1 e 4.
La probabilità di estrarre una biglia rossa è $\frac{5}{16} = 0.3125$, mentre è la probabilità di estrarre una biglia nera è $\frac{11}{16} = 0.6875$.

Quesito 1

⋆**Qual è la probabilità che alla fine si peschi esattamente N, N?**

Possiamo pescare esattamente N, N se otteniamo 2 al lancio del dado e poi peschiamo prima N e successivamente N.
Infatti $P((N, N)|n = 1) = 0$ e lo stesso per ogni $n \neq 2$.

$$P((2, N, N)) = P(N, N|n = 2)P(n = 2) = \frac{1}{4} \cdot 0.6875 \cdot 0.6875 = 0.1181641$$

Quesito 2

⋆**Qual è la probabilità che alla fine si peschi esattamente N, N, R?**

Lo svolgimento è analogo a quello del quesito precedente:

$$P((3, N, N, R)) = P(N, N, R|n = 3)P(n = 3) = \frac{1}{4} \cdot 0.6875 \cdot 0.6875 \cdot 0.3125 = 0.0369263$$

Quesito 3

⋆**Qual è la probabilità che si estraggano almeno 1 N?**

Ragioniamo in modo generico sui modi in cui possiamo ottenere "almeno k N":

- tiriamo il dado ottengo $n = k$ e poi peschiamo k N
- tiriamo il dado, esce $n > k$ e poi peschiamo almeno k N (l'ordine qui non è importante)

Dobbiamo quindi fare una bella sommatoria tenendo in considerazione il numero che esce dal dado:

- Esce 1? Allora la probabilità sarà $\frac{1}{4} \cdot P(N)$
- Esce 2? Allora la probabilità sarà $\frac{1}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot P(N) \cdot P(R) + \frac{1}{4} \cdot \binom{2}{2} \cdot P(N)^2 \cdot P(R)^0$
- Esce 3? Allora la probabilità sarà $\frac{1}{4} \cdot \binom{3}{1} \cdot P(N) \cdot P(R)^2 + \frac{1}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot P(N)^2 \cdot P(R)^1 + \frac{1}{4} \cdot \binom{3}{3} \cdot P(N)^3 \cdot P(R)^0$
- Esce 3? Allora la probabilità sarà $\frac{1}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot P(N) \cdot P(R)^3 + \frac{1}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot P(N)^2 \cdot P(R)^2 + \frac{1}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot P(N)^3 \cdot P(R)^1 + \frac{1}{4} \cdot \binom{4}{4} \cdot P(N)^4 \cdot P(R)^0$

$$P(N > 0) = \sum_{n=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4} \cdot \binom{n}{k} \cdot P(N)^k \cdot P(R)^{n-k} \right) = \sum_{n=1}^{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4} \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{11}{16}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{n-k} \right) = 0.8874474$$

In R:

```
N <- 11/16
R <- 1 - N
1/4*N + 1/4*pbinom(0, 2, N, lower.tail = FALSE) + 1/4*pbinom(0, 3, N, lower.tail = FALSE) + 1/4*pbinom(0, 4, N, lower.tail =
FALSE)
```

Esercizio del 2022-04-07

In questo esperimento casuale abbiamo due sacchetti A e B e una moneta non equilibrata di parità $p = 0.25$ (probabilità che esca testa): il sacchetto A contiene 7 biglie rosse R_A e 6 nere N_A, il sacchetto B contiene 12 biglie rosse R_B e 10 nere N_B.

Vogliamo fare due estrazioni. Prima di pescare, lanciamo la moneta per decidere da quale sacchetto pescare. Se esce testa "T" peschiamo dal sacchetto A, se esce croce "C" peschiamo da B. Quando peschiamo una biglia la reimmettiamo nel sacchetto prima di lanciare nuovamente la moneta e procedere alla seconda estrazione.

Quesiti

Osservazioni:

- In questo esperimento ci sono due fasi: prima il lancio della moneta per decidere da quale sacchetto pescare e poi l'estrazione della biglia colorata.
- È importante tener conto del reinserimento della biglia nel sacchetto dopo la prima estrazione.

Abbiamo due lanci di moneta. Gli esiti dell'esperimento sono

$$(T,T,R_A,R_A),(T,T,R_A,N_A),(T,T,N_A,R_A),(T,T,N_A,N_A)$$

$$(T,C,R_A,R_B),(T,C,R_A,N_B),(T,C,N_A,R_B),(T,C,N_A,N_B)$$

$$(C,C,R_B,R_B),(C,C,R_B,N_B),(C,C,N_B,R_B),(C,C,N_B,N_B)$$

$$(C,T,R_B,R_A),(C,T,R_B,N_A),(C,T,N_B,R_A),(C,T,N_B,N_A)$$

La moneta non è equilibrata, quindi $P(T) = 0.25$ e $P(C) = 1 - 0.25 = 0.75$.
La probabilità di estrarre una biglia rossa dal sacchetto A è $\frac{7}{13} = 0.5384615$
La probabilità di estrarre una biglia nera dal sacchetto A è $\frac{6}{13} = 0.4615385$
Lo stesso vale per il sacchetto B considerando i corrispondenti numeri di biglie rosse e nere in B.
La probabilità di estrarre una biglia rossa dal sacchetto B è $\frac{12}{22} = 0.5454545$
La probabilità di estrarre una biglia nera dal sacchetto B è $\frac{10}{22} = 0.4545454$

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità di pescare entrambe le volte da A e che entrambe le biglie pescate siano nere?

Pescare due volte da A significa che abbiamo ottenuto (T,T) dai lanci della moneta, evento la cui probabilità è $P(T,T) = 0.25^2$. Allora, indicando con NN l'evento in cui abbiamo estratto due biglie nere, abbiamo

$$P((T,T),NN)) = P(NN \cap (T,T))) = P(NN|(T,T))P(T,T) = 0.4615385 \cdot 0.4615385 \cdot 0.25^2 = 0.0133136$$

Quesito 2

⋆Qual è la probabilità di pescare una volta da A e una volta da B e di estrarre due biglie nere?

Se peschiamo una volta da A e una volta da B, vuol dire nei due lanci della moneta abbiamo ottenuto (T,C) o (C,T). Inoltre dobbiamo pescare per forza una biglia nera.
Di conseguenza:

$$P((T,C),(C,T) \cap NN) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{22} \cdot 2 = 0.0786713$$

Quesito 3

⋆Qual è la probabilità di aver estratto almeno una biglia rossa da A?

Bisogna considerare i casi in cui si pesca in A e si estrae una biglia rossa, ed essi sono:

$$R_A * N_A + R_A * R_A + N_A * R_A + R_A * N_B + R_A * R_B + N_B * R_A + R_B * R_A$$

ossia

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{13} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{22} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{22} \cdot 2 = 0.2511095$$

Esercizio del 2022-04-08

Si calcola che il 27% dei ratti di una regione sia portatore di un virus pericoloso per l'uomo. I ratti vengono sottoposti a un test che presenta un certo margine di insicurezza, nel senso che esso dà risposta positiva sia nel 92% dei ratti portatori sia nel 3% dei ratti sani (non portatori).

Un ratto viene sottoposto al test.

Quesiti

Riassumendo, sappiamo che
$P(\text{"portatore"}) = 27\%$
$P(\text{"non portatore"}) = 100\% - 27\% = 73\%$

Inoltre:

	Test positivo	Test negativo
Portatore (27%)	92%	8%
Non portatore (73%)	3%	97%

Quesito 1

⋆Determinare la probabilità di una risposta negativa del test.

Sia N="test negativo", siamo interessati a $P(N)$. Per il teorema delle probabilità totali

$$P(N) = P(N|\text{ratto portatore})P(\text{ratto portatore}) + P(N|\text{ratto non portatore})P(\text{ratto non portatore})$$

$$= 0.08 \cdot 0.27 + 0.97 \cdot 0.73 = 0.7297$$

oppure, equivalentemente indicando con N^c="test positivo"

$$P(N) = 1 - P(N^c)$$

$$= 1 - P(N^c|\text{ratto portatore})P(\text{ratto portatore}) + P(N^c|\text{ratto non portatore})P(\text{ratto non portatore})$$

Quesito 2

⋆Sapendo che l'esito del test è stato negativo, determinare la probabilità che il ratto sia, in realtà, portatore.

Usando il Teorema di Bayes:

$$P(\text{portatore}|\text{negativo}) = \frac{P(\text{portatore} \cap \text{negativo})}{P(\text{negativo})} = \frac{P(\text{portatore}) \cdot P(\text{negativo}|\text{portatore})}{P(\text{negativo})}$$

$$= \frac{0.27 \cdot 0.08}{0.7297} = 0.0296012$$

Esercizio del 2022-04-08(2)

Esercizio del 2022-04-08 Versione 2

Due bambini giocano a trasmettersi un messaggio attraverso uno strano apparecchio. Questo può inviare sequenze di 4 caratteri composte dalle sole lettere "A", "B", "C". Uno dei due bambini trasmette una delle seguenti stringhe:

- "$AAAA$", con probabilità 0.23
- "$BBBB$", con probabilità 0.25
- "$CCCC$", con probabilità 0.52

Per ogni lettera, la probabilità che essa sia trasmessa correttamente è $p = 0.42$, mentre la probabilità di essere distorta in ciascuna delle altre due lettere è la stessa. Ogni lettera è trasmessa in maniera indipendente dalla ogni altra.

Quesiti

Quindi, per ogni lettera, la probabilità che essa sia trasmessa correttamente è $p = 0.42$, mentre la probabilità di essere distorta in ciascuna delle altre due lettere è $\frac{1-0.42}{2} = 0.29$

Quesito 1

⋆Calcolare la probabilità che sia stata trasmessa la sequenza "$AAAA$", avendo ricevuto la sequenza "C, C, A, C".

Si usa il teorema delle probabilità totali: chiamiamo E_1="$AAAA$", E_2="$BBBB$", E_3="$CCCC$", si ha che

$$P(E_1|C,C,A,C) = \frac{P(C,C,A,C|E_1)P(E_1)}{P(C,C,A,C|E_1)P(E_1) + P(C,C,A,C|E_2)P(E_2) + P(C,C,A,C|E_3)P(E_3)}$$

Ora prendiamo ad esempio $P(C,C,A,C|E_1)$, se la sequenza trasmessa è "$AAAA$" abbiamo che le lettere trasmesse sono (distorta, distorta, corretta, distorta) e quindi in termini di probabilità abbiamo $0.29 \cdot 0.29 \cdot 0.42 \cdot 0.29$. Quindi

$$P(E_1|C,C,A,C) = \frac{0.29^3 \cdot 0.42 \cdot 0.23}{0.29^3 \cdot 0.42 \cdot 0.23 + 0.29^4 \cdot 0.25 + 0.29 \cdot 0.42^3 \cdot 0.52} = 0.1540192$$

Quesito 2

⋆Date le tre lettere "A", "B", "C" quante sono le possibili sequenze lunghe 6 caratteri?

Per ciascuna posizione nella sequenza possiamo scegliere tra 3 lettere, quindi in tutto abbiamo $3^6 = 729$ possibili sequenze.

Esercizio del 2022-04-11

Data la seguente funzione di ripartizione:

$$\begin{cases} 1 - \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prendiamo in particolare $\sigma = 1.229$.

Quesiti

Quesito 1

⋆ **Qual è la probabilità dell'intervallo** $[-1.12, 1.12)$**?**
$\Pr([-1.12, 1.12)) = F(1.12^-) - F(-1.12^-) = 0.3398201 - 0 = 0.3398201$

Quesito 2

⋆ **Qual è la probabilità dell'intervallo** $(0.215, 0.712]$**?**
$\Pr((0.215, 0.712]) = F(0.712^+) - F(0.215^+) = 0.1393029289592$

Quesito 3

⋆ **Qual è infine la probabilità di** $(0.215, 1.58] \cap (0.712, 1.727] \cup (1.822, 2.274]$**?**
L'intervallo è quindi $(0.712, 1.58] \cup (1.822, 2.274]$, di conseguenza la probabilità è:
$\Pr((0.712, 1.58] \cup (1.822, 2.274]) = F(1.58^+) - F(0.712^+) + F(2.274^+) - F(1.822^+) = 0.5605703$

Esercizio del 2022-04-13

Data la seguente funzione di ripartizione:

$$\begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ c \cdot (x-1)^3 & \text{per } 1 \leq x \leq 9.5 \\ 1 & \text{per } x \geq 9.5 \end{cases}$$

Quesiti

Quesito 1

⋆ **Qual è la costante $c > 0$ tale per cui F è una funzione di distribuzione?**
Si osservi che nella definizione per casi, il fatto che gli intervalli si intersechino in qualche punto non è un problema per c scelta opportunamente.

Per essere una funzione di distribuzione (e, in realtà, per essere una funzione)

$F(9.5) = 1 = c \cdot (9.5-1)^3$ da cui $c = \frac{1}{(9.5-1)^3} = \frac{8}{4913}$

Quesito 2

⋆ **Qual è il numero reale t tale che l'intervallo $(1.84, t]$ abbia probabilità 0.86?**
Sappiamo che $P((1.84, t]) = F(t) - F(1.84)$, quindi cerchiamo t tale che $F(t) = 0.86 + F(1.84)$.
Sostituendo i valori:

$$\begin{aligned} F(t) &= 0.8609651 \\ \frac{8}{4913} \cdot (t-1)^3 &= 0.8609651 \\ t &= 9.0862552 \end{aligned}$$

Esercizio del 2022-04-14

Sia X una variabile aleatoria discreta su R con supporto $R_X = \{1, 2, 3, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 19\}$.

Quesiti

Quesito 1

Si consideri la funzione $p(x)$ definita in R che su R_X assume i valori riportati in tabella ed è nulla altrimenti.

x	1.000	2.000	3.000	7.000	9.000	10.000	13.000	14.000	15.000	19.000
p(x)	0.116	0.131	0.001	0.170	0.138	0.148	0.069	0.065	0.147	0.014

⋆ **La funzione $p(x)$ è una densità discreta valida?**
Dobbiamo verificare che siano rispettate le condizioni di una funzione di probabilità, ovvero che

$$p(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{x \in R_X} p(x) = 1$$

In questo caso, $0.116 + 0.131 + 0.001 + 0.170 + 0.138 + 0.148 + 0.069 + 0.065 + 0.147 + 0.014 = 0.999$
Quindi $p(x)$ non è una densità discreta valida.

Quesito 2

Se $p(x)$ non è una densità discreta, si modifichi il valore di $p(3)$ in modo che $p(x)$ diventi una densità discreta valida e si risponda ai seguenti quesiti utilizzando la nuova $p(x)$ corretta.

⋆**Qual è la probabilità che X sia uguale a 14 o a 2? In altre parole: quanto vale $P(X \in 14, 2)$?**

Affinché $p(x)$ sia una densità discreta valida, basta porre $p(3) = 1 - \sum_{x \in R_X} p(x) = 0.002$.

Dopodiché la probabilità richiesta è data dalla somma di p(14) + p(2), cioè $0.065 + 0.131 = 0.196$

Quesito 3

Si considerino ora i seguenti valori

x	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
p(x)	0.230	0.120	0.020	0.160	0.020	0.180	0.190	0.040	0.010	0.030

⋆**Qual è la probabilità che X sia un qualsiasi numero pari o un numero divisibile per 3?**

Qui notiamo che l'intersezione dei due eventi $X \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $X \in \{3, 6, 9\}$ è non vuota, per cui alla somma delle rispettive probabilità dobbiamo sottrarre la probabilità dell'intersezione.

$$p(x) = \overbrace{0.120 + 0.160 + 0.180 + 0.040 + 0.030}^{\text{p(numero pari)}} + \overbrace{0.020 + 0.180 + 0.010}^{\text{p(divisibile per 3)}} - \overbrace{0.180}^{\text{p(intersezione \{6\})}} = 0.56$$

Esercizio del 2022-04-15

Sia X una variabile aleatoria discreta con la seguente funzione di distribuzione (o ripartizione)

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-0.425,\\ 0.0531 & -0.425\le x<0.474,\\ 0.2541 & 0.474\le x<1.372,\\ 0.5713 & 1.372\le x<2.271,\\ 0.8383 & 2.271\le x<3.17,\\ 0.9647 & 3.17\le x<4.069,\\ 0.9966 & 4.069\le x<4.967,\\ 1 & 4.967\le x.\end{cases}$$

Quesiti

Per rispondere ai quesiti abbiamo bisogno di determinare la densità discreta p_X della nostra v.a. X. Ricordiamo che la funzione di ripartizione/distribuzione di una v.a. discreta è costante a tratti con salti negli $x\in R_X$ e che tali salti hanno ampiezza $P(X=x)$. Quindi

$$p_X(x)=P(X=x)=P(X\le x)-P(X<x)$$

Allora si ha:

$$p_X(x)=\begin{cases}0.0531 & \text{per } x=-0.425,\\ 0.201 & \text{per } x=0.474,\\ 0.3172 & \text{per } x=1.372,\\ 0.267 & \text{per } x=2.271,\\ 0.1264 & \text{per } x=3.17,\\ 0.0319 & \text{per } x=4.069,\\ 0.0034 & \text{per } x=4.967\end{cases}$$

Quesito 1

⋆**Quanto vale $P(X=1.372)$?**
Avendo la funzione di densità discreta, ci basta guardare il suo valore nel punto.
$P(X=1.372)=F(1.372^+)-F(1.372^-)=0.3172$

Quesito 2

⋆**Qual è il valore della funzione di ripartizione $F(x)$ di X in $x=0.3673014$?**

Avendo la funzione di ripartizione, ci basta guardarne il valore in $x=0.3673014$, cioè nell'intervallo $-0.425\le x<0.474$.
$F(0.3673014)=0.0531$

Quesito 3

⋆**Qual è la probabilità dell'intervallo $(1.372,5.1]$?**

La probabilità di questo intervallo si trova ricordando che $\Pr((a,b])=F(b^+)-F(a^+)=1-0.5713=0.4287$

Quesito 4

⋆**Qual è la probabilità dell'intervallo $[0.474,1.372)$?**

La probabilità di questo intervallo si trova ricordando che $\Pr([a,b))=F(b^-)-F(a^-)=0.2541-0.0531=0.201$

Esercizio del 2022-04-19

Abbiamo ancora una volta una funzione di ripartizione $F_X(x)$, di cui sappiamo che

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.29 & -2 \leq x < 1 \\ 0.021x^2 - 0.009x + 0.528 & 1 \leq x < 3 \\ 0.06x + 0.7 & 3 < x < 5 \\ 1 & x \geq 5. \end{cases}$$

Quesiti

Quesito 1

⋆**Quanto vale $F_X(3)$?**
A una prima lettura del testo, potrebbe sembrare che ci sia un errore: F_X è definita per $x < 3$ e per $x > 3$, ma non nel punto 3. Tuttavia sappiamo che è una funzione di ripartizione, dunque deve essere continua a destra, pertanto

$F_X(3) = \lim_{x \to 3^+} F_X(x) = \lim_{x \to 3^+} 0.06x + 0.7 = 0.88.$

Quesito 2

⋆**Qual è la probabilità dell'intervallo $(-\infty, 2)$?**

In questo caso dobbiamo prestare attenzione al fatto che l'estremo superiore dell'intervallo è aperto: a seconda che 2 sia o meno un punto di continuità della funzione F_X, le cose cambiano. Possiamo però ricordarci che in ogni caso

$$P\left((-\infty, 2)\right) = P(X < 2) = F(2^-) - \lim_{x \to -\inf} F_X(x)$$

$$= \lim_{x \to 2^-} F_X(x) - 0 = 0.021 \cdot (2)^2 + (-0.009 \cdot (2)) + 0.528 = 0.594$$

Quesito 3

⋆**Qual è la probabilità dell'intervallo $[2, 3)$?**

Anche qui dobbiamo stare attenti a quali estremi sono aperti e quali chiusi, ma in analogia a prima abbiamo

$$\begin{aligned} P\left([2, 3)\right) = \lim_{x \to 3^-} F_X(x) - \lim_{x \to 2^-} F_X(x) &= 0.021 \cdot (3)^2 + (-0.009 \cdot (3)) + 0.528 - (0.021 \cdot (2)^2 + (-0.009 \cdot (2)) + 0.528) \\ &= 0.69 - 0.594 = 0.096 \end{aligned}$$

Quesito 4

⋆**Qual è la probabilità dell'intervallo $[1, 7)$?**

In 1 abbiamo una discontinuità, mentre in 7 la funzione è continua. Allora

$P\left([1, 7)\right) = 1 - \lim_{x \to 1^-} F_X(x) = 1 - 0.29 = 0.71$

Esercizio del 2022-04-20

Sia dato lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dove, $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathbb{B}(\mathbb{R})$ e P e definita (non nulla) nei seguenti singoletti di $\mathbb{R}$

x	1.00	3.00	5.00	7.00	8.00	9.00	11.00	13.00
p(x)	0.09	0.02	0.17	0.11	0.12	0.11	0.19	0.19

La probabilità data è discreta e abbiamo che $P(\{x\}) = p(x)$ è la funzione di densità (discreta) di una variabile aleatoria X.

Per calcolare la probabilità degli intervalli richiesti ricordiamo che $P((a, b])$ può essere ottenuta usando la funzione di distribuzione (o ripartizione) corrispondente alla densità p, ossia

$$F(x) = P((-\infty, x])) = \sum_{z:z\leq x} p(z)$$

tramite $P((a, b]) = F(b) - F(a)$. Dobbiamo solo fare attenzione al tipo di intervallo.

Volendo possiamo trovarci $F(X)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 0.09 & 1 \leq x < 3, \\ 0.11 & 3 \leq x < 5, \\ 0.28 & 5 \leq x < 7, \\ 0.39 & 7 \leq x < 8, \\ 0.51 & 8 \leq x < 9, \\ 0.62 & 9 \leq x < 11, \\ 0.81 & 11 \leq x < 13, \\ 1 & 13 \leq x. \end{cases}$$

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità dell'intervallo $(1, 8]$?

$$P(1 < X \leq 8) = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0.02 + 0.17 + 0.11 + 0.12 = 0.42$$
$$= F(8^+) - F(1^+) = 0.51 - 0.09 = 0.42$$

Quesito 2

⋆Qual è la probabilità dell'intervallo $(5, +\infty)$?

$$P((5, +\infty)) = P(X = 7) + P(X = 9) + \ldots + P(X = 13) = 0.11 + 0.12 + 0.11 + 0.19 + 0.19 = 0.72$$

Quesito 3

⋆Qual è il valore della funzione di distribuzione (di ripartizione) nel punto $x = 5$?

$F(5) = P((-\infty, 5])) = \sum_{z:z\leq 5} p(z) = 0.09 + 0.02 + 0.17 = 0.28$

Quesito 4

⋆Il valore della funzione di distribuzione (di ripartizione) in $x_1 = 7$ è (strettamente) maggiore di quello in $x_2 = 9$?

Senza calcoli, basta vedere se $x_1 > x_2$, poiché, per definizione, una funzione di distribuzione (o ripartizione) è non-decrescente.
Quindi la risposta è no.

Esercizio del 2022-04-21

La variabile aleatoria X descrive il lancio di un dado bilanciato a 8 facce.

La variabile aleatoria Y è definita come $Y = f(X)$, con

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 160.$$

Abbiamo quindi una trasformazione nonlineare di una variabile aleatoria discreta.

La densità discreta di Y è la stessa di X, ma calcolata nelle preimmagini: a lezione abbiamo visto che

$$\varphi_Y(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi_X(x),$$

ma in questo caso particolare possiamo osservare che nessuno dei valori di Y ha preimmagine diversa da un singoletto: al supporto di X, cioè $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ corrisponde il supporto di $Y\{-119,-108,-115,-128,-135,-124,-83,0\}$ di uguale cardinalità.

Riassumendo:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-119	-108	-115	-128	-135	-124	-83	0
$p(x)/p(y)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Quesiti

Quesito 1

⋆**Quanto vale $P(Y = -108)$?**

Vale

$$P(Y = -108) = P(X \in f^{-1}(-108)) = P(X = 2) = \frac{1}{8}$$

In particolare il fatto che la derivata di f si annulli in 2 non è rilevante.

Quesito 2

⋆**Quanto vale $P(Y < 108)$?**

Dobbiamo andare a sommare $\varphi_X(x)$ su tutti gli x la cui immagine è minore di -108. Attenzione, questo non vuol dire che dobbiamo sommare su tutti gli $x < 2$!

I valori di Y minori di -108 sono $-135, -128, -124, -119, -115$, corrispondenti ai valori di $X: 1, 3, 4, 5, 6$.
Ciascuno di essi ha probabilità $1/8$.
Quindi $P(Y < 108) = \frac{5}{8}$.

Quesito 2

⋆**Quanto vale la probabilità $P(X = 5, Y > 0)$?**

Nel momento in cui fissiamo il valore di X, fissiamo anche quello di Y, quindi dobbiamo controllare l'intersezione, ovvero se $f(5)$ sia positiva o meno:

$$P(X = 5, Y > 0) = P(X = 5, f(5) > 0) = \overbrace{I_{f(5)>0}}^{(Y=-135)} \cdot \frac{1}{8} = 0$$

Quesito 3

⋆**Quanto vale la probabilità $P(X = 5, Y < 0)$?**

$\frac{1}{8}$

Esercizio del 2022-04-22

Un negozio di dolciumi ha in magazzino molte uova di cioccolato di tre tipi: al latte, fondente e bianco.
Per mancanza di personale, quando arriva un ordine viene preso un uovo a caso, non necessariamente corrispondente al tipo ordinato.
La probabilità di prendere un uovo al cioccolato al latte è 27%, di prenderlo al cioccolato fondente è 41%.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità, ordinando un singolo uovo, che ne arrivi uno al cioccolato bianco?

Possiamo descrivere questo esperimento con una variabile aleatoria Bernoulliana di parametro $p = 0.32$, che otteniamo come il complementare della probabilità di ottenerne uno al cioccolato al latte o fondente.
$1 - 0.27 - 0.41 = 0.32$.

Quesito 2

⋆Supponiamo ora di ordinare 5 uova di cioccolato: con che probabilità ce ne sarà solamente uno di cioccolato bianco?

Ogni ordine è una ripetizione dell'esperimento fatto al quesito 1. La variabile aleatoria che cerchiamo è quindi descritta da una binomiale di parametri $N = 5$ e $p = 0.32$.
Ne vogliamo calcolare la funzione di densità discreta in $k = 1$, visto che ne vogliamo uno di cioccolato bianco.

$$p_X(1) = \binom{5}{1} \cdot 0.32 \cdot (0.68)^4 = 0.342102$$

Con R possiamo calcolare il valore di $p_X(x)$ di una binomiale di parametri *size* e *prob* (numero di prove e probabilità, rispettivamente) usando il comando *dbinom(k, n(size), prob)*, in questo caso *dbinom(1,5,0.32)*.

Quesito 3

⋆Se in un gruppo di 7 amici in cui ciascuno ha ordinato un uovo sono il solo cui piacciano le uova al cioccolato fondente, con che probabilità ne avrò al massimo 4 da mangiare?

Abbiamo sempre una distribuzione binomiale, ma cambiano i parametri: stiamo effettuando 7 ordini e la probabilità di successo è ora $p = 0.41$. Non solo, vogliamo calcolare $P(X \leq 4)$. Per calcolare questa probabilità possiamo procedere osservando che $P(X \leq 4) = F_X(4)$. A questo punto

$$P(X \leq 4) = F_X(4) = \sum_{k=0}^{4} p_X(k)$$

$$= \binom{7}{0} \cdot 0.41^0 \cdot 0.59^7 + \binom{7}{1} \cdot 0.41^1 \cdot 0.59^6 + \binom{7}{2} \cdot 0.41^2 \cdot 0.59^5 + \binom{7}{3} \cdot 0.41^3 \cdot 0.59^4 + \binom{7}{4} \cdot 0.41^4 \cdot 0.59^3 = 0.8937425$$

In alternativa possiamo andare a sottrarre da 1 i casi non favorevoli (cioè $k > 4$), cosa che può essere più semplice da calcolare, a seconda dei casi:

$$P(X \leq 4) = 1 - \sum_{k=5}^{7} p_X(k)$$

$$= 1 - (\binom{7}{5} \cdot 0.41^5 \cdot 0.59^2 + \binom{7}{6} \cdot 0.41^6 \cdot 0.59^1 + \binom{7}{7} \cdot 0.41^7 \cdot \cancel{0.59^0}\ ) = 0.8937425$$

Possiamo usare R per aiutarci nei conti, usando la funzione *dbinom* e sommando sui valori, oppure usando *pbinom(q, size, prob)*, che ci calcola la funzione di ripartizione in q, o ancora usando *pbinom(q, size, prob, lower.tail = FALSE)* che ci restituisce $P(X > q) = 1 - F_X(q)$.
Nel nostro caso:

```
1-(dbinom(5,7,0.41) + dbinom(6,7,0.41) + dbinom(7,7,0.41)) = 0.8937425
```

oppure

```
(pbinom(4,7,0.41))
```

Esercizio del 2022-04-22 Versione 2

Un'urna contiene 19 biglie azzurre, 24 biglie bianche e 29 biglie cremisi.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità, effettuando una singola estrazione, di estrarre una biglia cremisi?

Possiamo descrivere questo esperimento con una variabile aleatoria bernoulliana di parametro $p = 29/72$, che otteniamo dividendo il numero di biglie cremisi per il numero totale di biglie nell'urna.

Quesito 2

⋆Supponiamo ora di fare più estrazioni con reimmissione. Qual è la probabilità di estrarre esattamente una biglia cremisi in $N = 7$ estrazioni?

Ogni estrazione è una ripetizione dell'esperimento fatto al quesito 1. La variabile aleatoria che cerchiamo è quindi descritta da una binomiale di parametri $N = 7$ e $p = 0.4027778$. Ne vogliamo calcolare la funzione di densità discreta in $k = 1$:

$$p_X(1) = \binom{7}{1} \cdot 0.4027778 \cdot (0.5972222)^6 = 0.127932$$

Quesito 3

Sempre facendo più estrazioni con reimmissione, qual è la probabilità di estrarre almeno 4 biglie azzurre in $M = 12$ estrazioni?

Abbiamo sempre una distribuzione binomiale, ma cambiano i parametri: stiamo effettuando 12 estrazioni con reimmissione e la probabilità di successo è ora $p = 19/72$. Non solo, vogliamo calcolare $P(X \geq 4)$. Per calcolare questa probabilità possiamo procedere in (almeno) due modi. In un caso iniziamo osservando che $P(X \geq 4) = 1 - F_X(3)$, sfruttando il fatto che X è una v.a. discreta. A questo punto

$$P(X \geq 4) = 1 - F_X(3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} p_X(k) = 0.3945539$$

Nell'altro caso andiamo a sommare direttamente le probabilità dei casi favorevoli:

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{12} p_X(k)$$

Esercizio del 2022-04-26

Abbiamo un dado a 6 facce non equilibrato. In particolare per ogni faccia del dado, la probabilità che essa esca è

1	2	3	4	5	6
0.31	0.07	0.05	0.11	0.17	0.29

Vinciamo se esce 2 o 4. Se esce uno degli altri numeri, perdiamo.

Quesiti

Possiamo intanto descrivere l'esito del singolo lancio del dado come una variabile aleatoria X bernoulliana ($X = 1$ se esce 2 o 4, $X = 0$ altrimenti) di parametro p, pari alla probabilità di successo.

$$p = P(\{2\} \cup \{4\}) = P(\{2\}) + (\{4\}) = 0.07 + 0.11 = 0.18$$

Quesito 1

⋆Consideriamo n=23 lanci del dado. Qual è la probabilità che otteniamo almeno 5 successi?
Osserviamo che questo esperimento può essere descritto da una variabile binomiale Y di parametri $n = 23$ e $p = 0.18$.

Avere almeno 5 successi, vuol dire che ne otteniamo 5 o più. Quindi vogliamo calcolare $P(Y \geq 5)$. Per calcolare questa probabilità possiamo procedere in (almeno) due modi. In un caso iniziamo osservando che $P(Y \geq 5) = 1 - F_Y(4)$, quindi l'evento complementare a quell richiesto. A questo punto

$$P(Y \geq 5) = 1 - F_Y(4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} \varphi_Y(k)$$

$$= 1 - (\binom{23}{0} \cdot 0.18^0 \cdot 0.82^{23} + \binom{23}{1} \cdot 0.18^1 \cdot 0.82^{22} + \binom{23}{2} \cdot 0.18^2 \cdot 0.82^{21} + \binom{23}{3} \cdot 0.18^3 \cdot 0.82^{20} \binom{23}{4} \cdot 0.18^4 \cdot 0.82^{19}) = 0.4007204$$

dove φ_Y è la funzione di densità discreta di Y. Nell'altro caso andiamo a sommare direttamente le probabilità dei casi favorevoli:

$$P(Y \geq 5) = \sum_{k=5}^{23} \varphi_Y(k).$$

Quesito 2

⋆Ora, invece, lanciamo il dado finché non otteniamo un successo. Qual è la probabilità che otteniamo il primo successo esattamente al lancio numero k=2 del dado?

Sia T la variabile aleatoria che rappresenta il primo successo (o evento in generale) dopo l'esecuzione di k prove indipendenti, ognuna con probabilità di successo p.
Ma allora T è legata alla distribuzione geometrica di parametro p.
Ricordiamo:

> Se la probabilità di successo in ogni prova è p, allora la probabilità che alla k-esima prova si ottenga il primo successo è
>
> $$P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Questo perchè la probabilità di avere il primo successo al tentativo k è quella dell'evento in cui $k - 1$ insuccessi sono seguiti da un successo.
Nel nostro caso

$$P(X = 2) = 0.18 \cdot (0.82)^1 = 0.1476$$

Quesito 3

⋆Qual è la probabilità che ci occorrano più di k=2 lanci per ottenere il primo successo?

La variabile aleatoria T è tale che

$$P(T > k) = (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

perché dire che abbiamo il primo successo dopo l'istante k equivale a dire che nei primi k tentativi abbiamo avuto solo insuccessi.

Alternativamente, possiamo calcolare la probabilità richiesta in modo più canonico come

$$(P(T > 2))^C = 1 - P(T \leq 2) = 1 - F_T(2) = 1 - (0.18 + 0.18 \cdot 0.82) = 0.6724$$

Questo si traduce come "*non è vero che ci occorrono più di 2 lanci per ottenere il primo successo, lo otterremo al primo o al secondo lancio*"

Esercizio del 2022-04-27

In un test online, le domande vengono proposte ai partecipanti una per volta. Ogni partecipante continua a ricevere domande finché non sbaglia un certo numero prefissato 6 di risposte. Le domande sono infinite, di difficoltà costante e si stima che la probabilità di un partecipante di rispondere correttamente a una domanda sia uguale a 55%.

Quesiti

Quesito 1

⋆Se Andrea fa questo test, con che probabilità non risponderà correttamente ad alcuna domanda?

Cerchiamo di capire quale distribuzione si presta al nostro esperimento.
Abbiamo una successione di prove indipendenti (le domande), ciascuna delle quali riceve una risposta corretta con probabilità 0.55 e riceve una risposta sbagliata con probabilità 0.45. Abbiamo un limite al numero di tentativi, dato dal primo istante in cui viene data la risposta sbagliata numero 6. Ci viene quindi da pensare a una binomiale negativa, in cui però "successo" è "sbagliare una risposta" e "insuccesso" è darla correttamente. Allora ogni prova ha "successo" con probabilità $p = 0.45$, e la variabile aleatoria binomiale negativa di parametri $n = 6$ e p conta il numero di "insuccessi". La probabilità di vedere k "insuccessi" è la densità discreta calcolata in k,

$$\varphi_X(k) = \binom{n+k-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^k$$

che in questo caso (k=0 perché vogliamo la probabilità che Andrea non abbia alcun insuccesso nello sbagliare risposta, cioè che le sbagli tutte) diventa

$$\varphi_X(0) = \binom{6-1}{6-1} \cdot 0.45^6 \cdot (1-0.45)^0 = 0.45^6,$$

Per questo quesito avremmo anche potuto non pensare alla binomiale negativa, infatti abbiamo bisogno di esattamente 6 "risposte errate" in 6 tentativi, quindi semplicemente 0.45^6.

Quesito 2

⋆Qual è invece la probabilità che risponda in tutto a esattamente 12 domande?

Rispondere in tutto a 12 domande vuol dire rispondere correttamente a 6 domande e non rispondere correttamente a 6 domande. Quindi, le prime 11 risposte saranno una combinazione di 6 risposte corrette e 5 risposte errate, mentre la 12-esima dovrà essere per forza errata (per far terminare il test).

$$P(X = 12) = \binom{11}{6} \cdot 0.55^6 \cdot 0.45^5 \cdot 0.45 = 0.1061923$$

Quesito 3

⋆A causa di un recente problema al sistema informatico, le domande sono in numero molto ridotto: in tutto ce ne sono 14. Se per caso dovessero finire le domande, il test si conclude. Qual è la probabilità che Andrea veda tutte le domande preparate per il test?

Per vedere tutte le domande, Andrea deve rispondere correttamente ad almeno 8 domande. Ci chiediamo quindi quale sia la probabilità $P(X \geq 8)$.
In questo caso basta sommare tutte le combinazioni di k risposte giuste e $n-k$, da 14 fino a 8.
Bisogna però prestare attenzione al caso di 8 risposte giuste e 6 errate, visto che se Andrea sbagliasse le 6 domande prima di arrivare alla 14-esima il test si concluderebbe.

$$P(X \geq 8) = \binom{14}{14} \cdot 0.55^{14} \cdot 0.45^0 + \binom{14}{13} \cdot 0.55^{13} \cdot 0.45^1 + \ \dots \ + \binom{14}{9} \cdot 0.55^9 \cdot 0.45^5 + \binom{13}{8} \cdot 0.55^8 \cdot 0.45^5 \cdot 0.45$$

In R:

```
dbinom(14,14,0.55)+dbinom(13,14,0.55)+dbinom(12,14,0.55)+dbinom(11,14,0.55)+
dbinom(10,14,0.55)+dbinom(9,14,0.55)+dbinom(8,13,0.55)*0.45
```

che risulta 0.426806.

Esercizio del 2022-04-27 Versione 2

Consideriamo il seguente esperimento aleatorio.

Prima di lanciare un nuovo prodotto, un'azienda vuole darne alcuni esemplari ad alcune persone per avere un ultimo feedback e farsi ulteriore pubblicità: infatti come condizione chiede che i riceventi pubblichino almeno un post al giorno sui loro social media in cui parlino del prodotto.

Di conseguenza hanno stimato che ogni persona che verrà contattata accetterà il prototipo (e le condizioni) con probabilità 62.9%

Quesiti

Quesito 1

⋆Se in Italia vogliono distribuire 6 prototipi, con che probabilità dovranno contattare esattamente 6 persone?

La probabilità che ogni persona accetti è 0.629, quindi se abbiamo 6 persone, la probabilità che ognuno accetti è la stessa e quindi la probabilità sarà uguale a $0.629^6 = 0.0619304$

Quesito 2

⋆Qual è invece la probabilità che debbano contattarne esattamente 14?

Dato che dobbiamo contattare esattamente 14 persone, l'ultima deve accettare con probabilità di 0.629. Dobbiamo quindi calcolare la probabilità delle varie combinazioni di 13 persone, in cui 5 accettano. Per fare ciò utilizzeremo la distribuzione binomiale e moltiplicheremo tale risultato alla probabilità che l'ultima accetti e quindi avremo $\binom{13}{5} \cdot 0.629^5 \cdot (1-0.629)^8 \cdot 0.629 = 0.02860709$

Quesito 3

Sapendo che comunque l'azienda non contatterà più di 17 persone, qual è la probabilità che riescano a distribuire tutti i 6 prototipi?

Il quesito è uguale a quello dell'altra versione.
Consideriamo $p = 0.629$ e $q = 1 - p$.

$$P(X \geq 6) = p^6 + \binom{6}{5} \cdot p^5 \cdot q \cdot p + \binom{7}{5} \cdot p^5 \cdot q^2 \cdot p + \binom{8}{5} \cdot p^5 \cdot q^3 \cdot p + \ \dots \ + \binom{16}{5} \cdot p^5 \cdot q^1 1 \cdot p = 0.9947389$$

Esercizio del 2022-04-28

Abbiamo una variabile aleatoria X di distribuzione binomiale di parametri $n = 30$ e $p = 0.299$.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è il valore atteso di X?

Per definizione:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p_X(x) = \ldots = n \cdot p = 30 \cdot 0.299 = 8.97$$

Quesito 2

⋆Sia ora Y una variabile aleatoria di Poisson con parametro $\lambda = np$ (ove n, p sono quelli del quesito precedente). Qual è il valore atteso di $4Y + 17.305$?

Sappiamo che $\mathbb{E}(aY + b) = a\mathbb{E}(Y) + b$ per cui ci basta calcolare il valore atteso della v.a. di Poisson Y.

$$\mathbb{E}(4Y + 17.305) = 4 \cdot \mathbb{E}(Y) + 17.305 = 4 \cdot \lambda + 17.305 = 4 \cdot 8.97 + 17.305 = 53.185$$

Quesito 3

⋆Sia la Y la stessa del quesito precedente, qual è la probabilità $P(Y = 6)$?

Qui basta sostituire il valore desiderato nella funzione di densità discreta della v.a. Poissoniana Y:

$$P(Y = 6) = p(6) = \frac{\lambda^6 e^{-\lambda}}{6!} = \frac{8.97^6 \cdot e^{-8.97}}{6!} = 0.0920027$$

Esercizio del 2022-04-28 Versione 2

Abbiamo una variabile aleatoria X di distribuzione binomiale di parametri $n = 18$ e $p = 0.28$.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Qual è il valore atteso di X?**

Per definizione:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p_X(x) = \ldots = n \cdot p = 18 \cdot 0.28 = 5.04$$

Quesito 2

⋆**Supponiamo ora che $n = 132$ e che la v.a. X abbia distribuzione binomiale di parametri $n = 132$ e $p = 0.28$. Consideriamo la variabile aleatoria $Z = \frac{X - n \cdot p}{np(1-p)}$. Qual è il valore atteso di Z?**

Sappiamo che $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ e quindi avremo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left(\frac{X - n \cdot p}{np(1-p)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{X}{np(1-p)} - \frac{n \cdot p}{np(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{np(1-p)} \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{n \cdot p}{np(1-p)} \\
&= \frac{1}{\cancel{np}(1-p)} \cdot \cancel{(n \cdot p)} - \frac{\cancel{n \cdot p}}{\cancel{np}(1-p)} \\
&= \frac{1}{(1-p)} - \frac{1}{(1-p)} = 0
\end{aligned}$$

Quesito 3

⋆**Approssimiamo la distribuzione di $\mathbb{Z}$ con la distribuzione normale standard, cioe $Z \sim N(0, 1)$. Qual è la probabilità dell'intervallo $(0, 0.81)$?**

Dato che la distribuzione Z è stata approssimata con la normale standard, la probabilità dell'intervallo richiesto si calcola facendo

$$\int_0^{0.81} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \int_0^{0.81} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0.2910299$$

In R:

```
pnorm(0.81, 0, 1) - pnorm(0, 0, 1)
```

Esercizio del 2022-04-29

Di una variabile aleatoria X sappiamo che ha la seguente funzione di densità: $f(t) = c \cdot t(6-t)$ per $t \in (0,6)$ e identicamente nulla altrimenti.

Quesiti

Siccome ne conosciamo la funzione di densità, sappiamo che la variabile aleatoria X è assolutamente continua.

Quesito 1

⋆**Quanto vale c?**

Dalla definizione di v.a. continua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\text{quindi}$$

$$\int_0^6 c \cdot t(6-t)dt = 1$$

$$c\int_0^6 t(6-t)dt = 1$$

$$c = \frac{1}{\int_0^6 t(6-t)dt} = \frac{1}{36}$$

Quesito 2

⋆**Qual è il valore atteso di T^2, ossia il secondo momento non centrato?**

$$\mathbb{E}[T^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^6 \frac{1}{36} \cdot t^3(6-t)\, dt = 10.8$$

Quesito 3

⋆**Implementare in R la funzione di ripartizione $F(t)$ e inserire, sotto forma di vettore *c(valore1, valore2, ...)*, i valori della F nei seguenti punti: -0.1, 3.84, 1.49, 3.84, 4.46, 3.43, 6**

Da definizione,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \int_0^t f(s)ds & 0 \le t < n \\ 1 & \text{for } t \ge n \end{cases}$$

Ora,

$$\int_0^t f(s)ds = \int_0^t \frac{1}{36} s(6-s)ds = \frac{1}{12}t^2 - \frac{t^3}{108}$$

In R:

```
F <- function(t) { ifelse(t > 0, ifelse(t < 6, 1/12*(t^2)-((t^3)/(108)), 1), 0) }
```

Per cui

```
##    [,1]     [,2]      [,3]     [,4]      [,5]      [,6] [,7]
## x  -0.1 3.840000 1.4900000 3.840000 4.4600000 3.4300000    6
## Fx  0.0 0.704512 0.1543792 0.704512 0.8361839 0.6067638    1
```

Quindi la risposta è:
c(0, 0.7045120, 0.1543792, 0.7045120, 0.8361839, 0.6067638, 1)

Esercizio del 2022-04-29(2)

Esercizio del 2022-04-29 Versione 2

Di una variabile aleatoria X sappiamo che ha la seguente funzione di densità: $f(x) = c \cdot x^{-5}$ per $x > 7$ e identicamente nulla altrimenti.

Quesiti

Siccome ne conosciamo la funzione di densità, sappiamo che la variabile aleatoria X è assolutamente continua.

Quesito 1

⋆**Quanto vale c?**

La costante di rinormalizzazione c deve essere tale che $\int_7^\infty c \cdot x^{-5} dx = 1$, ossia $c = (5-1) \cdot 7^{5-1} = 9604$ (si tratta di integrare un monomio).

Quesito 2

⋆**Qual è il valore atteso di X**

Per definizione, il valore atteso di una variabile aleatoria con densità f a supporto in $(7, +\infty)$ è

$$\mathbb{E}[X] = \int_7^\infty x \cdot f(x) dx$$

In questo caso,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_7^\infty x \cdot (5-1) \cdot 7^{5-1} \cdot x^{-5} dx \\ &= \int_7^\infty (5-1) \cdot 7^{5-1} \cdot x^{-4} dx \\ &= \frac{7(5-1)}{5-2} \\ &= 9.3333333\end{aligned}$$

Quesito 3

Quanto valgono le seguenti probabilità?

- $P(X = 29.58)$
- $P(X \in [29.58, 34.1))$
- $P(X \in (29.58, 34.1])$
- $P(X \in (-1.91, 29.58))$

Inserire un vettore di risposte del tipo *c(valore1, valore2, valore3, valore4)*.

Poiché la X ha densità $P(X = x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per lo stesso motivo (continuità della funzione di ripartizione, F, di X)

$P(X \in [29.58, 34.1)) = P(X \in (29.58, 34.1])$

e questa probabilità si trova come da definizione:

$$P(X \in (29.58, 34.1]) = \int_{29.58}^{34.1} f(x) dx$$

Alternativamente possiamo prima trovare la funzione di ripartizione $F(x) = \int_7^{34.1} f(x) dx = 1 - 7^{5-1} \cdot x^{-(5-1)}$ per $x > 7$ e nulla altrove, e poi calcolare $P(X \in (29.58, 34.1]) = F(34.1) - F(29.58)$.

Lo stesso vale per l'ultima probabilità richiesta, osservando che $F(-1.91) = 0$ e quindi $P(X \in (-1.91, 29.58)) = F(29.58)$.

La risposta è quindi *c(0, 0.0013604, 0.0013604, 0.9968638)*.

Esercizio del 2022-05-02

Al centralino telefonico di uno studio medico, si è osservato che le chiamate negli orari di ambulatorio arrivano secondo una distribuzione esponenziale di media 67 secondi. Chiamiamo T la corrispondente variabile aleatoria.

Quesiti

Data una variable aleatoria esponenziale $T \sim \exp(\lambda)$, sappiamo che la sua media ($\mathbb{E}(x)$) è $\frac{1}{\lambda}$.

Detto questo, è immediato ricavare che nel nostro caso $\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}(x)} = \frac{1}{67} = 0.0149254$.

Quesito 1

⋆**Con che probabilità il tempo tra due chiamate successive è maggiore di 52.5 secondi?**

La probabilità richiesta è:

$$P(T > 52.5) = 1 - \int_0^{52.5} 0.0149254 \cdot e^{-0.0149254t}\, dt = e^{-0.0149254 \cdot 52.5} = 0.4567669$$

Quesito 2

⋆**Qual è t (in secondi) per cui siamo certi al 95% che il tempo trascorso tra due telefonate sia minore di t secondi?**

In questo caso ci viene data la probabilità e dobbiamo determinare t, cioè siamo interessati alla funzione quantile calcolata in 0.95:

$$P(T < t) = \int_0^t 0.0149254 \cdot e^{-0.0149254 \cdot t} dt = 1 - e^{-0.0149254 \cdot t} = 0.95,$$

$$\text{da cui}$$

$$t = -\frac{\log(1 - 0.95)}{0.0149254} = 200.7140623$$

Quesito 3

⋆**Sapendo che sono già trascorsi 57.3 secondi dall'ultima telefonata, qual è la probabilità che si debba attendere al più (al massimo) altri 44 secondi per la telefonata successiva?**

La distribuzione esponenziale, come la geometrica, gode della proprietà di assenza di memoria, sapere che sono già passati 57.3 secondi non influenza la probabilità, quindi:

$$P(T < 57.3 + 44 | T > 57.3) = P(T < 44)$$

Di conseguenza

$$P(T < 44) = \int_0^{44} 0.0149254 \cdot e^{-0.0149254t}\, dt = 0.4814488$$

Quesito 4

⋆**Per valutare l'opportunità di assumere una nuova risorsa al centralino, si usa un modello in cui compare la variabile casuale $U = \sqrt[3]{T}$.**
Qual è la funzione di densità di U (in R)?

Sappiamo quindi che $t = u^3$ e che $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, da cui possiamo ricavarci $F_U(u) = F_T(u^3) = 1 - e^{-\lambda u^3}$.
Ora

$$f_U(u) = \frac{d}{du}(1 - e^{-\lambda u^3}) = -e^{-\lambda u^3} \cdot (-\lambda 3u^2) = \begin{cases} \lambda 3u^2 e^{-\lambda u^3} & x > 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

In R:

```
f_U <- function(u) {
  ifelse(u > 0, (3 * (u ^ 2) * 1/67) * exp(- (1/67) * (u ^ 3)), 0)
}
```

Esercizio del 2022-05-03

A un posto di controllo della Polizia, passano e vengono fermati in media 5 autoveicoli all'ora. Indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di autoveicoli fermati tra le 8 e le 9 del mattino. (Suggerimento: X può essere descritta con uno dei modelli visti a lezione, il parametro della distribuzione è la media indicata.)

Quesiti

Possiamo descrivere questo fenomeno casuale usando la distribuzione di Poisson. Infatti quello che conosciamo è solamente il numero medio di veicoli fermati. Tra i modelli visti a lezione è quello più adatto. Quindi $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, con $\lambda = 5$.

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità che la Polizia non fermi autoveicoli nell'ora indicata?

Ci stiamo chiedendo quale sia $P(X = 0)$ o equivalentemente $\varphi_X(0)$. Possiamo usare la definizione della densità discreta di una variabile aleatoria di Poisson,

$$P(X = 0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5}$$

che in questo caso ci dà $e^{-5} = 0.0067379$. Potremmo fare lo stesso calcolo usando la funzione *dpois* di R, calcolata in 0.

Quesito 2

⋆Qual è la probabilità che nell'ora indicata ne fermi esattamente 2?

$$P(X = 2) = \frac{5^2}{2!}e^{-5} = 0.0842243$$

Quesito 3

⋆Ora, sia Y una v.a. di Gauss di parametri μ, σ^2 rispettivamente la media (o valore atteso) e la varianza della variabile X.
Qual è la probabilità che Y valga almeno 7 e non più di 11?

La media e la varianza di $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ coincidono con λ, per cui $Y \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Qui ci interessa la probabilità che Y cada nell'intervallo $[7, 11]$. Ricordando che Y, essendo Gaussiana, ha una densità definita su tutto $\mathbb{R}, P(Y \in [7, 11]) = P(X \in (7, 11])$. Per trovare questa probabilità possiamo calcolare l'integrale della densità Gaussiana, con i parametri dati, fra i due estremi oppure usare la funzione di ripartizione *pnorm* in 11 e 4 e farne la differenza.
Quindi

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x, 5, \sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 5^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{\sqrt{5}}\right)^2\right\}$$

$$P(X \in (7, 11]) = \int_7^{11} \frac{1}{\sqrt{2\pi 5^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{\sqrt{5}}\right)^2\right\} = 0.1819015$$

Esercizio del 2022-05-04

Sia data la seguente variabile aleatoria bivariata discreta

$X \backslash Y$	**-1.32**	**-0.25**	**0.76**	**1.47**
1.28	2 k	3 k	4 k	6 k
2.32	9 k	1 k	7 k	5 k
3.22	10 k	12 k	11 k	8 k

dove sulle righe abbiamo la variabile X e sulle colonne la variabile Y.

Quesiti

Quesito 1

⋆Calcolare la costante k che deve essere utilizzata per rendere la tabella una funzione di probabilità congiunta.

Abbiamo che la somma per righe e colonne nella tabella sopra devono dare 1.

$X \backslash Y$	**-1.32**	**-0.25**	**0.76**	**1.47**	$p_X(x)$
1.28	2 k	3 k	4 k	6 k	15 k
2.32	9 k	1 k	7 k	5 k	22k
3.22	10 k	12 k	11 k	8 k	41 K
$p_Y(y)$	21 k	16 k	22 k	19 k	1

Quindi $21k + 16k + 22k + 19k = 1$ oppure $15k + 22k + 41k = 1$ da cui $k = \frac{1}{78}$.

Quesito 2

⋆Calcolare la distribuzione di probabilità marginale di X. Qual è la $P(X \leq 2.32)$?

Indichiamo con R_Y il range o immagine di Y, i.e. l'insieme di valori assunti da Y, la funzione di probabilità di X è data da

$$p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

da cui $P(X \leq x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_X(x_k)$

Quindi $P(X \leq 2.32) = \frac{15}{78} + \frac{22}{78} = \frac{37}{78}$

Quesito 3

⋆Calcolare la distribuzione di probabilità marginale di Y. Qual è la $P(Y > -0.25)$?

$P(Y > -0.25) = \frac{22}{78} + \frac{19}{78} = \frac{41}{78}$

Quesito 4

⋆Qual è la varianza di X?

$\mathbb{E}(X) = 1.28 \cdot \frac{15}{78} + 2.32 \cdot \frac{22}{78} + 3.22 \cdot \frac{41}{78} = \frac{3371}{1300} = 2.5930769$

$\mathbb{E}(X^2) = 1.28^2 \cdot \frac{15}{78} + 2.32^2 \cdot \frac{22}{78} + 3.22^2 \cdot \frac{41}{78} = \frac{473411}{65000} = 7.28$

$\mathbb{V}ar(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{473411}{65000} - \frac{3371}{1300}^2 = 0.5591982$

Quesito 5

⋆Qual è il valore atteso di Y?

$\mathbb{E}(Y) = -1.32 \cdot \frac{21}{78} + (-0.25) \cdot \frac{16}{78} + 0.76 \cdot \frac{22}{78} + 1.47 \cdot \frac{19}{78} = \frac{431}{2600} = 0.1657692$

Esercizio del 2022-05-05

Consideriamo la seguente funzione $f(x, y) = k \cdot (4x + 3y)$ per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ e nulla altrove.

Quesiti

Quesito 1

⋆Per quale valore di k, $f(x, y)$ è una densità di probabilità?

Affinchè $f(x, y)$ sia una densità di probabilità, deve valere

- $f(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\ dx\ dy = 1$.

Dobbiamo quindi determinare k per cui entrambe queste proprietà sono verificate.

$$\int_0^1 \int_0^1 k(4x + 3y)dxdy = 1$$
$$k = \frac{1}{\int_0^1 \int_0^1 (4x + 3y)dxdy}$$
$$k = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

Quesito 2

⋆Siano X, Y variabili aleatorie con la densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = f(x, y)$ determinata nel quesito 1. Indichiamo con $f_X(f_Y)$ la densità marginale di $X(Y)$ e con $F_X(F_Y)$ la rispettiva funzione di distribuzione (o ripartizione).
Quanto valgono $F_X(0.9)$ e $F_Y(0.29)$? Inserire i due valori come vettore *c(valore1, valore2)*.

Determiniamo la densità marginale di X, cioè $f_X(x)$. Per $x \in [0, 1]$:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}_Y} f_{X,Y}(x, y)dy = \frac{2}{7} \int_0^1 (4x + 3y)\ dy$$
$$= \frac{8}{7}x + \frac{3}{7}$$

Determiniamo la densità marginale di Y, cioè $f_Y(y)$. Per $y \in [0, 1]$:

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}_X} f_{X,Y}(x, y)dx = \frac{2}{7} \int_0^1 (4x + 3y)\ dx$$
$$= \frac{2}{7} \cdot (2 + 3y)$$

Ora, non ci resta che calcolare i rispettivi integrali:

$$F_X(0.9) = \int_{-\infty}^{0.9} f_X(x)dx = \int_0^{0.9} \left(\frac{8}{7}x + \frac{3}{7}\ dx\right) = 0.8485714$$
$$F_Y(0.29) = \int_{-\infty}^{0.29} f_y(y)dy = \int_0^{0.29} \left(\frac{2}{7} \cdot (2 + 3y)\right) = 0.2017571$$

La risposta è: *c(0.8485714, 0.2017571)*

Quesito 3

⋆Qual è il valore atteso di $XY + 0.333$?

Si osservi che, dato il vettore aleatorio bivariato (X, Y), possiamo scrivere $Z = g(X, Y) = XY$ e il valore atteso $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X, Y)) = \int g(x, y) f(x, y)\ dx\ dy$.
Come prima cosa, osserviamo che per linearità $E[0.333 + XY] = 0.333 + E[XY]$. Possiamo quindi calcolarci $E[XY]$ e andarlo poi a sommare a 0.333.
Qui abbiamo un vettore aleatorio (X, Y) e $Z = g(X, Y) = XY$ per cui il valore atteso è

$$E[Z] = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y)\ dx\ dy = \frac{2}{4+3} \cdot \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (4x + 3y)dxdy$$
$$= \frac{2}{4+3} \cdot \left(\frac{4+3}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

Per concludere $E[0.333 + XY] = 0.333 + \frac{1}{3} = 0.6663333$.

Esercizio del 2022-05-05 Versione 2

Consideriamo la seguente funzione $f(x,y) = \frac{1}{6} \cdot (9x + 3y)$ per $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ e nulla altrove.

Quesiti

Quesito 2

$\star$Indichiamo con $F_{X,Y}$ la funzione di ripartizione della coppia X, Y, quanto vale $F_{X,Y}(0.83, 0.68)$?

Abbiamo due alternative:

1. determinare la $F_{X,Y}$ per generici (x,y), oppure
2. risolvere direttamente l'integrale

$$\int_0^{0.68} \int_0^{0.83} f(x,y) dx dy$$

Scegliamo la prima e quindi scriviamo

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= \int_0^y \int_0^x f(r,s) dr ds \\ &= \int_0^y \int_0^x \frac{1}{6}(ar + bs) dr ds \\ &= \frac{1}{6} \int_0^y \left(\int_0^x ar\ dr + \int_0^x bs\ dr \right) ds \\ &= \frac{1}{6} \int_0^y \left(\frac{1}{2} ax^2 + bsx \right) ds \\ &= \frac{1}{12} \left(9x^2 y + 3xy^2 \right). \end{aligned}$$

Infine, ci basta valutare $F_{X,Y}(0.83, 0.68) = 0.447287$.

Esercizio del 2022-05-06

Abbiamo in un piccolo contenitore, un moscerino della frutta, la cui durata di vita (in settimane) può essere descritta da una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = c\lambda x e^{-\lambda x^2} \quad \lambda, x > 0$$

con $\lambda = 1.51$. Il contenitore è monitorato attraverso un sensore, la cui durata (sempre in settimane) può essere descritta da una variabile aleatoria Y di densità

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y} \quad y \geq 0$$

con $\alpha = 1.1$.

Quesiti

Quesito 1

⋆Determinare c affinché f_X sia una densità di probabilità.

Affinchè $f(x, y)$ sia una densità di probabilità, deve valere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$
$$\text{quindi}$$
$$\int_0^{+\infty} c \cdot 1.51 \cdot x \cdot e^{-1.51 \cdot x^2}\, dx = 1$$
$$c = \frac{1}{\int_0^{+\infty} 1.51 \cdot x \cdot e^{-1.51 \cdot x^2}\, dx} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Vale quindi:

$$f_X(x) = 2 \cdot 1.51 x e^{-1.51 x^2} \quad x > 0$$

Quesito 2

⋆Calcolare $P(X \in [0.13, 0.91])$.

$$P(X \in [0.13, 0.91]) = \int_{0.13}^{0.91} 2 \cdot 1.51 \cdot x \cdot e^{-1.51 \cdot x^2}\, dx = 0.6884225$$

Quesito 3

⋆Calcolare il momento primo (o momento di ordine 1) di Y.

Il momento primo, noto anche come valore atteso o speranza, si calcola per le variabili aleatorie continue nel modo seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y \cdot \alpha e^{-\alpha y} dy = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1,1} = 0.909090\ldots$$

usando l'integrazione per parti.

Quesito 4

⋆Calcolare il momento secondo di Y.

Il momento secondo (che non è necessariamente la varianza, ad esempio, non lo è in questo caso) si ottiene in modo analogo al momento primo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y^2 \cdot \alpha e^{-\alpha y} dy = \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2}{1.1^2} = 1.6528926$$

usando due volte l'integrazione per parti.

Quesito 5

⋆Calcolare la probabilità che il moscerino sopravviva al più 0.61 settimane e il sensore duri al più 0.9 settimane.

Le due variabili aleatorie sono indipendenti, quindi possiamo calcolarne la funzione di ripartizione congiunta semplicemente moltiplicando le funzioni di ripartizione (o gli integrali delle funzioni di densità).

$$F_{X,Y}(0.61, 0.9) = F_X(0.61) \cdot F_Y(0.9) = \int_0^{0.61} 2 \cdot 1.51 x e^{-1.51 x^2}\, dx \cdot \int_0^{0.9} 1.1\, e^{-1.1 y}\, dy$$
$$= 0.2701332$$

Esercizio del 2022-05-09

Consideriamo una moneta *non* equilibrata, per cui la probabilità di avere testa è $p = 0.409$. Lanciamo un dado a 6 facce e poi la moneta, tante volte quante il valore uscito nel lancio del dado. Sia D la variabile aleatoria che ci dà l'esito del dado e N la variabile aleatoria che conta il numero di teste uscite.

Quesiti

Possiamo descrivere l'evento con la seguente tabella:

$N \backslash D$	1	2	3	4	5	6	$p_N(n)$
0	0,0985000	0,0582135	0,0344042	0,0203329	0,0120167	0,0071019	0,2305692
1	0,0681667	0,0805730	0,0714280	0,0562852	0,0415807	0,0294890	0,3475226
2	0	0,0278802	0,0494315	0,0584281	0,0575517	0,0510195	0,2443110
3	0	0	0,0114030	0,0269567	0,0398285	0,0470773	0,1252654
4	0	0	0	0,0046638	0,0137816	0,0244348	0,0428802
5	0	0	0	0	0,0019075	0,0067640	0,0086715
6	0	0	0	0	0	0,0007802	0,0007802
$p_D(d)$	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	1

Ogni cella è ottenuta mediante la distribuzione binomiale:

$$p_{D,N}(d,n) = P(D=d) \cdot P(N=n|D=d) = \frac{1}{6} \cdot \binom{d}{n} p^n (1-p)^{d-n}$$

dove $p = 0.409$. Osserviamo infatti che, per quanto riguarda la probabilità condizionata $P(N=n|D=d)$, se lanciando il dado otteniamo la faccia con il numero d, lanceremo la moneta d volte e dunque conteremo il numero di successi (teste) sui d tentativi (lanci), cioè abbiamo una distribuzione binomiale di parametri d e p.

Per esempio

$$P(N=0, D=1) = \frac{1}{6} \cdot \binom{1}{0} \cdot 0.409^0 \cdot 0.591^1 = 0.0985$$

$$P(N=3, D=5) = \frac{1}{6} \cdot \binom{5}{3} \cdot 0.409^3 \cdot 0.591^2 = 0.0398285$$

Quesito 1

⋆Qual è il valore atteso di N?
Per calcolare il valore atteso, o momento primo, ci occorre innanzitutto conoscere le probabilità discrete marginali di N, $p_N(n) = P(N=n)$, per $n = 0, \ldots,$ 6, infatti la definizione di valore atteso per una variabile aleatoria discreta a valori in $0, \ldots, 6$ è:

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{6} n \cdot P(N=n)$$

Ricordiamo che la densità discreta marginale di N, p_N, si ottiene come:

$$p_N(n) = P(N=n) = \sum_{d \in \mathcal{R}_D} p_{D,N}(d,n),$$

dove $p_{D,N}(d,n) = P(D=d, N=n)$ è la densità discreta congiunta di D e N, e $\mathcal{R}_D = \{1, \ldots, 6\}$ sono i possibili esiti del lancio del dado.
Quindi,

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n=0}^{6} n \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{6} n \cdot p_N(n)$$

$$= 0.2305692 \cdot 0 + 1 \cdot 0.3475226 + 2 \cdot 0.2443110 + 3 \cdot 0.1252654 + 4 \cdot 0.1252654 + 5 \cdot 0086715 + 6 \cdot 0.0007802$$

$$= 1.4315$$

Quesito 2

⋆Qual è la media (valore atteso) di N sapendo che $D = 2$?

Vogliamo sapere quindi la media di N condizionata all'evento $D = 2$.

$$\mathbb{E}[N|D=2] = \sum_{n=0}^{6} n \cdot P(N=n \mid D=2) = \sum_{n=0}^{6} n \cdot \frac{p_{D,N}(d,n)}{p_D(d)}$$

$$= 0 \cdot \frac{0.0582135}{0.17} + 1 \cdot \frac{0.0805730}{0.17} + 2 \cdot \frac{0.0278802}{0.17} + 0 = 0.818$$

$_N\backslash^D$	2
0	0.0582135
1	0.0805730
2	0.0278802
3	0
4	0
5	0
6	0
$p_D(d)$	0.17

Quesito 3

⋆**Sapendo che alla fine dell'esperimento abbiamo avuto 2 teste, qual è la media del risultato del lancio del dado?**

Dobbiamo calcolare:

$$\mathbb{E}[D|N=2] = \sum_{d=1}^{6} d \cdot P(D=d|N=2) = \sum_{d=1}^{6} d \cdot \frac{p_{D,N}(d,n)}{p_N(n)}$$

$$= 1 \cdot \cancel{\frac{0}{0,2443110}} + 2 \cdot \frac{0,0278802}{0,2443110} + 3 \cdot \frac{0,0494315}{0,2443110} + 4 \cdot \frac{0,0584281}{0,2443110} + 5\frac{0,0575517}{0,2443110} + 6\frac{0,0510195}{0,2443110}$$

$$= 4.2226624$$

$_N\backslash^D$	1	2	3	4	5	6	$p_N(n)$
2	0	0,0278802	0,0494315	0,0584281	0,0575517	0,0510195	0,2443110

Quesito 4

⋆**Determinare il valore di** $\mathbb{E}[ND]$

$$\mathbb{E}[ND] = \sum_d \sum_n n \cdot d \cdot p_{N,D}(n,d)$$

oppure, grazie ad una serie di uguaglianze, si poteva facilmente intuire che

$$\mathbb{E}[ND] = \sum_{d=1}^{8} \frac{d^2 \cdot p}{8}$$

Esercizio del 2022-05-10

Consideriamo il seguente esperimento casuale: lanciamo un dado (equilibrato) a 8 facce finché non esce 8; quando esce 8 ci fermiamo. Sia N la variabile aleatoria che rappresenta il numero di lanci e sia X la v.a. che conta quante volte è uscita la faccia con il numero 3.

Quesiti

Possiamo notare che N è una variabile aleatoria geometrica di parametro $p = \frac{1}{8}$ (poichè il dado è equilibrato), mentre X è una binomiale, visto che dobbiamo contare quanti 3 escono (successi).

Quesito 1

⋆**Qual è la varianza di X condizionato a $N = 4, \mathbb{V}\text{ar}[X|N = 4]$?**

Sapendo che ci sono stati 4 lanci, questo vuol dire che l'ultimo è stato un 8, mentre nei precedenti 3 lanci abbiamo ottenuto valori diversi da 8. Tra questi, solo la faccia con il numero 3 costituisce un successo, che quindi ha probabilità $p = \frac{1}{7} = 0.1428571$.
La v. a. $X|N = 4$ è quindi una binomiale di parametri $n = 3$ e $p = 0.1428571$, che si calcola come:

$$np(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{18}{49}$$

Quesito 2

⋆**Quanto vale $\mathbb{E}[X^2|N = 4]$?**

Conosciamo sia il valore atteso, sia la varianza della v.a. $X|N = 3$, possiamo quindi usarli assieme alla “formula” per scomporre la varianza:

$$np(1-p) = \mathbb{V}\text{ar}(X|N = 3) = \mathbb{E}(X^2|N = 3) - (\mathbb{E}(X|N = 3))^2$$
$$\text{da cui}$$
$$\mathbb{E}(X^2|N = 3) = np(1-p) + (np)^2 = \frac{18}{49} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{27}{49}$$

Quesito 3

Scrivere una funzione ad un parametro del tipo *function(x) {...}* che implementi $P(z(N) = x)$ ove $z(n) = \mathbb{E}(X|N = n) \forall n \in R_N$ è, come visto a lezione, una trasformazione della variabile N.

Sappiamo, dai precedenti quesiti, che $z(n) = \mathbb{E}(X|N = n) = (n-1)\frac{1}{7}$ per cui possiamo riscrivere la v.a. $z(N) = \mathbb{E}(X|N)$ come trasformazione (affine) della variabile N.
Ricordiamo inoltre che N conta il numero di prove per avere un successo: è quindi una v.a. geometrica di parametro $p = \frac{1}{8}$ (poiché il dado è equilibrato) e sappiamo che

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}$$

per $k \in R_N = \{1, 2, \ldots\}$, mentre è nulla altrimenti.
Il quesito chiede però di calcolarci $P(\{z(N) = x\})$, quindi

$$P(\{z(N) = x\}) = P\left(\left\{(N-1)\frac{1}{7} = x\right\}\right) = P(\{N - 1 = 7x\}) = P(N = 1 + 7x)$$

A questo punto possiamo usare la funzione *dgeom* che R ci mette a disposizione per calcolare $P(N = 1 + 7x)$, ricordando però che in R è implementata come $p(x) = p(1-p)^k$ mentre la nostra è del tipo $p(x) = p(1-p)^{k-1}$. Basta quindi togliere 1 al valore in input.[1]
Il nostro k sarà quindi $7x$, mentre $p = \frac{1}{8}$.
In R:

```
function(x) {dgeom(x=7x, 1/8)}
```

---

1. $P(N = 1 + 7x)$ con $p(1-p)^{k-1}$ diventa $p(1-p)^{1+7x-1}$ cioè $p(1-p)^{7x}$
   In R:
   $P(N = 1 + 7x)$ con $p(1-p)^k$ diventerebbe $p(1-p)^{1+7x}$, quindi dobbiamo fare -1
   Diventa $p(1-p)^{1+7x-1}$ = $p(1-p)^{7x}$ $\rightarrow$ che è quello che interessa a noi ↩

Esercizio del 2022-05-11

Sia X una variabile aleatoria Poissoniana di parametro λ_X. Sappiamo che $P(X=2)=P(X=3)$.

Sia inoltre Y un'altra variabile aleatoria Poissoniana, indipendente da X, di media (valore atteso) 9.

Sia infine $Z=X+Y$ la somma delle due variabili aleatorie precedenti, che è nota essere anch'essa una variabile di Poisson con media $\lambda_X+\lambda_Y$.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Qual è il valore di λ_X?**

Ricordiamo la funzione di densità discreta per una v.a. Poissoniana:

$$P(X=k)=\frac{\lambda_X^k e^{-\lambda_X}}{k!}$$

Ora, la condizione $P(X=2)=P(X=3)$ equivale a

$$\frac{\lambda_X^2 e^{-\lambda_X}}{2}=\frac{\lambda_X^3 e^{-\lambda_X}}{6} \Big/ \cdot 6$$

$$3\cdot\lambda_X^2 \cancel{e^{-\lambda_X}}=\lambda_X^3 \cancel{e^{-\lambda_X}}$$

$$3\cdot\lambda_X^2-\lambda_X^3=0$$

$$\lambda_X^2(3-\lambda_X)=0$$

$$\lambda_X=3$$

Quesito 2

⋆**Qual è la probabilità $P(X=10 \mid Z=14)$?**

Sappiamo che $\lambda_X=3$, $\lambda_Y=9$ e $\lambda_Z=\lambda_X+\lambda_Y=12$.
Vale quindi:

$$\begin{aligned}
P(X=10|Z=14) &= \frac{P(X=10,Z=14)}{P(Z=14)} \\
&= \frac{P(X=10,X+Y=14)}{P(Z=14)} \\
&= \frac{P(X=10,Y=14-10)}{P(Z=14)} = \overbrace{\frac{P(X=10)\cdot P(Y=4)}{P(Z=14)}}^{\text{Grazie all'indipendenza stocastica}} \\
&= \frac{\frac{3^{10}\cdot e^{-3}}{10!}\cdot\frac{9^4\cdot e^{-9}}{4!}}{\frac{12^{14}\cdot e^{-12}}{14!}} = 0.0003021
\end{aligned}$$

In R, questo è calcolabile semplicemente facendo

```
(dpois(10, 3) * dpois(4, 9))/dpois(14, 12)
```

Quesito 3

⋆**Qual è la varianza condizionata $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|Z=14)$?**

Come si poteva intuire

$$\begin{aligned}
P(X=k \mid Z=n) &= \frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(Z=n)} \\
&= \frac{\lambda_X^k \cancel{e^{-\lambda_X}}}{k!}\cdot\frac{\lambda_Y^{n-k}\cancel{e^{-\lambda_Y}}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(\lambda_X+\lambda_Y)^n \cancel{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}}} \\
&= \binom{n}{k}\frac{\lambda_X^k\lambda_Y^{n-k}}{(\lambda_X+\lambda_Y)^{n+k-k}} \\
&= n\cdot\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione di probabilità condizionata è una legge binomiale con parametri n e $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$ per cui sappiamo immediatamente che la varianza di $X|Z=n$ è $n\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\left(1-\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)$.
(Vedi proprietà delle poissoniane).

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X|Z=14)=14\cdot\frac{3}{12}\left(1-\frac{3}{12}\right)=2.625$$

Quesito 4

⋆Qual è il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(X|Z=14)$?

$$\mathbb{E}(X|Z=14)=14\cdot\frac{3}{12}=3.5$$

Esercizio del 2022-05-12

Consideriamo la seguente funzione, $f(x,y) = \epsilon x^2 y$ per $(x,y) \in [0, 2.31] \times [0, 2.31]$ e nulla altrove.

Quesiti

Quesito 1

$\star$**Per quale valore di ϵ, $f(x,y)$ è una densità di probabilità?**

Affinché $f(x,y)$ sia una densità di probabilità, deve valere $f(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ e il suo integrale su $\mathbb{R}^2$ deve essere uguale a 1.

Indichiamo con $K = 2.31$. La prima condizione è soddisfatta sul rettangolo $[0,K] \times [0,K]$ se $\epsilon > 0$.

Inoltre deve valere:

$$\int_0^{2.31} \int_0^{2.31} \epsilon x^2 y \, dx \, dy = 1$$
$$\epsilon = \frac{1}{\int_0^{2.31} \int_0^{2.31} x^2 y \, dx \, dy}$$
$$\epsilon = \frac{1}{\int_0^{2.31} x^2 \frac{(2.31)^2}{2} \, dx \, dy}$$
$$\epsilon = \frac{1}{\frac{(2.31)^3}{3} \cdot \frac{(2.31)^2}{2}}$$
$$\epsilon = 0.0912203$$

Quesito 2

$\star$**Siano X, Y variabili aleatorie con la densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$ determinata nel quesito 1.**
Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

Ricordiamo che due variabili X, Y continue, con densità congiunta $f_{X,Y}(x,y)$, sono stocasticamente indipendenti se e solo se

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

per ogni $(x,y) \in R_X \times R_Y$.

Calcoliamo quindi le rispettive densità marginali f_X e f_Y e vediamo se il loro prodotto è uguale alla densità congiunta. Di nuovo, indichiamo con $K = 2.31$.

Per $x \in [0, K]$

$$f_X(x) = \int_0^K \epsilon x^2 y \, dy = \frac{\epsilon}{2} K^2 x^2$$

e nulla altrove.

Analogamente, per $y \in [0, K]$

$$f_Y(y) = \int_0^K \epsilon x^2 y \, dx = \frac{\epsilon}{3} K^3 y$$

e nulla altrove.
Ora $f_X(x) f_Y(y) = \frac{\epsilon^2}{6} K^5 x^2 y = 0.0912203 \cdot xy$, quindi X e Y sono indipendenti.

Quesito 3

$\star$**Quanto vale la somma del valore atteso di X e quello di Y?**

Dobbiamo calcolare i due integrali $x \cdot f_X(x)$ e $y \cdot f_Y(y)$. Indichiamo con $K = 2.31$ e con $\epsilon = 0.0912203$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^K \frac{\epsilon}{2} K^2 x^3 dx = \frac{\epsilon}{8} K^6$$
$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y) dy = \int_0^K \frac{\epsilon}{3} K^3 y^2 dy = \frac{\epsilon}{9} K^6$$

da cui

$$\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{17}{72} \cdot \epsilon \cdot K^6 = 3.2725$$

Quesito 4

$\star$**Quanto vale $\mathbb{E}(XY)$?**

Poiché X e Y sono indipendenti

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{\epsilon}{8}K^6 \cdot \frac{\epsilon}{9}K^6 = \frac{1}{72} \cdot 0.0912203^2 \cdot 2.31^{12} = 2.66805$$

Esercizio del 2022-05-12 Versione 2

Consideriamo la seguente funzione, $f(x,y) = 0.2x^2y$ per $(x,y) \in [0,K] \times [0,K]$ e nulla altrove.

Quesiti

Quesito 1

$\star$**Per quale valore di $K > 0$, $f(x,y)$ è una densità di probabilità?**

Affinché $f(x,y)$ sia una densità di probabilità, deve valere $f(x,y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2$ e il suo integrale su $\mathbb{R}^2$ deve essere uguale a 1.

La prima condizione è sempre soddisfatta sul rettangolo $[0,K] \times [0,K]$.

Per la seconda condizione deve valere (indichiamo con $\epsilon = 0.2$):

$$1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} \epsilon x^2 y \, dx \, dy = \int_0^K \left(\epsilon \, y \int_0^K x^2 \, dx\right) dy = \epsilon \frac{1}{3} K^3 \int_0^K y \, dy = \frac{\epsilon}{6} K^5$$

da cui $K = \left(\frac{6}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{6}{0.2}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Esercizio del 2022-05-13

Siano X, Y variabili aleatorie con densità congiunta $f(x, y) = 0.36$ per $0 < x < 2.3570226$ e $0 < y < x$ e nulla altrove.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Qual è la probabilità $P(X < 2.16)$?**

$$P(X < 2.16) = \int_{-\infty}^{2.16} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{2.16} \int_0^x 0.36\, dy\, dx = \int_0^{2.16} 0.36 \cdot x\, dx = \frac{0.36}{2} 2.16^2$$
$$= 0.839808$$

Quesito 2

⋆**Le variabili aleatorie X e Y sono (stocasticamente) indipendenti?**

Ricordiamo che due variabili X, Y continue, con densità congiunta $f_{X,Y}(x, y)$, sono stocasticamente indipendenti se e solo se

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

per ogni $(x, y) \in R_X \times R_Y$.
Quindi

$$f_X(x) = \int_0^x 0.36\, dy = 0.36x$$

$$f_Y(x) = \int_0^{2.3570226} 0.36\, dx = 2.3570226$$

$$\int_0^x 0.36\, dy \cdot \int_0^{2.3570226} 0.36\, dx = 0.36 \cdot 2.3570226 \cdot 0.36x \neq f_{X,Y}(x, y) = 0.36$$

Le variabili aleatorie X e Y NON sono stocasticamente indipendenti.

Quesito 3

⋆**Quanto vale $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y|X = 2.16)$?**

Dobbiamo calcolare quindi

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{2.3570226} x \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^{2.3570226} 0.36x^2\, dx = \frac{0.36}{3} \cdot 2.3570226^3$$

$$\mathbb{E}(Y|X = 2.16) = \int_0^x y \cdot f_{Y|X}(y|2.16)\, dy = \int_0^x y \cdot \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}\, dy = \int_0^x y \cdot \frac{0.36}{0.36x}\, dy = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

da cui $\mathbb{E}(Y|X = 2.16) = \frac{2.16}{2} = 1.08$

In conclusione, $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y|X = 2.16) = \frac{0.36}{3} \cdot 2.3570226^3 - 1.08 = 0.4913484$

Quesito 4

⋆**Quanto vale $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$?**

Ricordiamo che

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Y) = \int_0^{2.3570226} y \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^{2.3570226} y \cdot 0.36 \cdot 2.3570226\, dy = \frac{2.3570226^2}{2} \cdot 0.36 \cdot 2.3570226 = 2.3570226$$

Esercizio del 2022-05-13 Versione 2

Siano X, Y variabili aleatorie con densità congiunta $f(x, y) = 0.43$ per $0 < x < 2.1566555 - y$, $0 < y < 2.1566555$ e nulla altrove.

Quesiti

Si noti che il dominio di y in realtà è $0 < y < 2.1566555 - x$. (Sommo y e sottraggo x da $0 < x < 2.1566555 - y$)

Quesito 1

⋆**Qual è la probabilità $P(X \leq 0.9)$?**

Seguendo le definizioni:

$$P(X \leq 0.9) = F_X(0.9) = \int_{-\infty}^{0.9} f_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0.9} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{0.9} \int_{0}^{2.1566555-x} 0.43\, dy\, dx = 0.660476$$

Quesito 2

⋆**Le variabili aleatorie X e Y sono (stocasticamente) indipendenti?**

La risposta è no, poiché il supporto di una variabile dipende dal valore dell'altra (il supporto non è un rettangolo). Si può verificare anche usando la definizione di indipendenza stocastica, come fatto nell'altra versione.

Quesito 3

⋆**Quanto $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)$?**

Dobbiamo calcolare i due integrali $x \cdot f_X(x)$ e $y \cdot f_Y(y)$. Osserviamo che il triangolo è delimitato dalla retta $y = 2.1566555 - x$ da cui $x = 2.1566555 - y$. Sfruttando questa simmetria si vede che $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = 0$.

Quesito 4

⋆**Quanto vale $\mathbb{E}(Y|X = 0.9)$?**

Ricordiamo che

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{R_Y} y \cdot f_{Y|X}(y|x)$$

Quindi dobbiamo effettivamente ricavare $f_X(x)$ e poi $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$.
Poniamo $T = 2.1566555$.

$$f_X(x) = \int_0^{T-x} 0.43\, dy = 0.43(T - x)$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X = 0.9) = \int_0^{T-x} y \cdot f_{Y|X}(y|x)\, dy = \int_0^{T-x} y \cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\, dy = \int_0^{T-x} y \cdot \frac{\cancel{0.43}}{\cancel{0.43}\,(T-x)}\, dy$$

$$= \int_0^{T-x} y \cdot \frac{1}{(T-x)} dy = \frac{1}{(T-x)} \cdot \int_0^{T-x} y\, dy = \frac{1}{\cancel{(T-x)}} \cdot \frac{(T-x)^{\cancel{2}}}{2}$$

$$= \frac{(T-x)}{2} = \frac{2.1566555 - 0.9}{2} = 0.6283277$$

Esercizio del 2022-05-16

Nella pavimentazione di una stanza vengono adoperati listelli di legno di lunghezza media $16.5\ cm$. Dai macchinari per la produzione, si sa che le lunghezze di tali listelli seguono una legge normale con deviazione standard uguale a $\sigma = 0.15\ cm$.

Per ricoprire il buco lasciato dai lavori per inserire un tubo, bisogna creare una striscia larga quanto un listello e lunga $493.5047174\ cm$, con un opportuno numero n di listelli.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Qual è la probabilità che servano più di $n = 30$ listelli per creare una striscia lunga $493.5047174\ cm$?**

Innanzitutto, sia X_i la v.a. che indica la lunghezza dell'i-esimo listello. Allora, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, con $\mu = 16.5\ cm$ e $\sigma = 0.15\ cm$.

Sia poi S_n la v. a. che indica la somma delle lunghezze degli n listelli. Allora,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Poiché le X_i sono indipendenti tra di loro, si ha che $S_n \sim \mathcal{N}(n \cdot \mu, \sqrt{n} \cdot \sigma)$ dal momento che la distribuzione Gaussiana è riproducibile.

Ora, servono più di 30 listelli per una striscia lunga $493.5047174\ cm$ solo se la somma delle lunghezze dei listelli è minore di $493.5047174\ cm$, dobbiamo quindi trovare

$$P(S_{30} \leq 493.5047174) = \int_0^{493.5047174} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} = 0.0343795$$

dove $\mu = 16.5 \cdot 30$ e $\sigma = 0.15 \cdot \sqrt{30}$
In R:

```
pnorm(493.5047174, mean = 16.5 * 30, sd = 0.15 * sqrt(30))
```

Quesito 2

⋆**Qual è la probabilità che servano meno di $n = 30$ listelli per creare una striscia lunga $493.5047174\ cm$?**

Servono meno di 30 listelli per una striscia lunga $493.5047174\ cm$ se $S_{30} > 493.5047174$. Dobbiamo calcolare quindi la P($S_{30} > 493.5047174$).

Basta quindi calcolarsi $1 - \text{Quesito 1}$, sfruttando il fatto che la Gaussiana è una distribuzione continua.

$$P(S_{30} > 493.5047174) = 1 - \int_0^{493.5047174} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} = 0.9656205$$

dove $\mu = 16.5 \cdot 30$ e $\sigma = 0.15 \cdot \sqrt{30}$

Quesito 3

⋆**Quanto dovrebbe essere lunga la striscia affinché 30 listelli siano sufficienti per ricoprirla con una probabilità maggiore o uguale al 66.372%?**

Dobbiamo trovare quel valore L della lunghezza della striscia per cui valga

$$P(S_{30} > L) \geq 0.66372$$

Ossia

$$P(S_{30} > L) = 1 - \int_0^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \geq 0.66372$$

Possiamo utilizzare R per risolvere facilmente questo calcolo:

```
qnorm(0.66372, mean = 16.5 * 30, sd = 0.15 * sqrt(30), lower.tail = FALSE)
```

Che risulta 494.6528.

Esercizio del 2022-05-17

Abbiamo due variabili aleatorie binomiali indipendenti X e Y, di parametri rispettivamente $(n = 6, p = 0.272)$ e $(n = 8, p = 0.272)$. Prendiamone anche la somma $S = X + Y$, che, come è noto, è distribuita come una binomiale di parametri $(n = 14, p = 0.272)$.

Quesiti

Quesito 1

⋆Qual è la probabilità che S sia compresa nell'intervallo $[2, 9)$?

Sappiamo che S è binomiale di parametri $(n = 6 + 8, p = 0.272)$ e che $P(S \in [2, 9)) = P(S \in (1, 8]$, quindi, in R:

```
pbinom(8,14,0.272) - pbinom(1,14,0.272)
```

Che risulta 0.9227695.

Quesito 2

⋆Se sappiamo che $S = 11$, qual è la probabilità che $X = 6$?

Dobbiamo quindi calcolare $P(X = 6 \mid S = 11)$:

$$
\begin{aligned}
P(X = 6 \mid S = 11) &= \frac{P(X = 6, S = 11)}{P(S = 11)} \\
&= \frac{P(X = 6, X + Y = 11)}{P(S = 11)} \\
&= \frac{P(X = 6, Y = 5)}{P(S = 11)} \\
&= \frac{\binom{n_X}{6}\, p^6 (1-p)^{n_X - 6} \cdot \binom{n_Y}{5}\, p^5 (1-p)^{n_Y - 5}}{\binom{n_S}{11}\, p^{11} (1-p)^{n_S - 11}} \\
&= \frac{\cancel{\binom{6}{6}}\, p^6\, \cancel{(1-p)^{6-6}} \cdot \binom{8}{5}\, p^5 (1-p)^{8-5}}{\binom{14}{11}\, p^{11} (1-p)^{14-11}} \\
&= \frac{\binom{8}{5}\, \cancel{p^{11}(1-p)^3}}{\binom{14}{11}\, \cancel{p^{11}(1-p)^3}} = 0.1538462
\end{aligned}
$$

Quesito 3

⋆Se sappiamo che $S = 8$, qual è la probabilità che $Y \in [2, 5]$?

Dobbiamo quindi calcolare $P(Y \in [2, 5] \mid S = 8)$, chiamiamo quindi k il valore compreso tra 2 e 5:

$$
\begin{aligned}
P(Y \in [2, 5] \mid S = 8) &= \frac{(Y \in [2, 5], S = 8)}{P(S = 8)} \\
&= \frac{(Y \in [2, 5], X + Y = 8)}{P(S = 8)} \\
&= \frac{(Y = k, X = 8 - k)}{P(S = 8)} \\
&= \frac{\binom{8}{k}\, \cancel{p^k} (1-p)^{8-k} \cdot \binom{6}{8-k}\, \cancel{p^{8-k}} (1-p)^{6-(8-k)}}{\binom{14}{8}\, \cancel{p^8} (1-p)^6} \\
&= \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{6}{8-k} \cdot \cancel{(1-p)^{8-2-k+k}}}{\binom{14}{8} \cdot \cancel{(1-p)^6}} = \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{6}{8-k}}{\binom{14}{8}}
\end{aligned}
$$

A questo punto dobbiamo calcolare $P(Y \in [2, 5])$, quindi

$$
\sum_{k=2}^{5} \frac{\binom{8}{k} \cdot \binom{6}{8-k}}{\binom{14}{8}} = 0.8438228
$$

In R è possibile calcolarlo come

```r
res <- 0
for(i in 2:5) {
    res = res + (choose(8,i) * choose(6,8-i))/choose(14,8)
}
res
```

Esercizio del 2022-05-17

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale di parametri $\lambda_1 = 0.7$ e $\lambda_2 = 0.9$ rispettivamente.

Sia $U := \min\{X, Y\}$.

Quesiti

La funzione di distribuzione di X è quindi $1 - e^{-0.7x}$
La funzione di distribuzione di Y è quindi $1 - e^{-0.9y}$

Quesito 1

⋆Qual è la distribuzione di U?
Determinare la funzione di ripartizione F_U e implementarla in R, inserendola come una funzione ad un parametro, del tipo: *function(x) {...}*.

Iniziamo dal supporto di U: X e Y sono definite su $(0, +\infty)$, per cui anche il loro minimo avrà valori da 0 a $+\infty$, estremi esclusi.

Dobbiamo trovare $F_U(u) = P(U \leq u) = 1 - P(U > u)$. In questo caso la seconda caratterizzazione ci è più utile. Osserviamo infatti che, affinché $\min\{X, Y\} > u$, entrambe le variabili devono soddisfare $X > u \cap Y > u$, da cui

$$
\begin{aligned}
P(U > u) &= P(\min\{X, Y\} > u) \\
&= P(X > u, Y > u) \\
&= P(X > u) \cdot P(Y > u) \\
&= (1 - P(X \leq u)) \cdot (1 - P(Y \leq u)) \\
&= (1 - (1 - e^{-0.7u})) \cdot (1 - (1 - e^{-0.9u})) \\
&= e^{-0.7u} \cdot e^{-0.9u} \\
&= e^{-1.6u}
\end{aligned}
$$

In R:

```
function(u) {
  ifelse(u >= 0, 1 - exp(-1.6 * u), 0)
}
```

Si noti che la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria esponenziale si annulla in 0, per cui le condizioni $u >= 0$ e $u > 0$, portano allo stesso risultato.

Quesito 2

⋆**Quanto vale $P(U > 0.884 | X > 0.118)$?**

$$
\begin{aligned}
P(U > 0.884 | X > 0.118) &= \frac{P(U > 0.884, X > 0.118)}{P(X > 0.118)} \\
&= \frac{P(U > 0.884, X > 0.118)}{P(X > 0.118)} \\
&= \frac{P(X > 0.884 \cap Y > 0.884 \cap X > 0.118)}{P(X > 0.118)} \\
&= \frac{P(X > 0.884 \cap Y > 0.884)}{P(X > 0.118)} \\
&= \frac{P(X > 0.884) \cdot P(Y > 0.884)}{P(X > 0.118)} \\
&= \frac{(1 - P(X \leq 0.884)) \cdot (1 - P(Y \leq 0.884))}{(1 - P(X \leq 0.118))} \\
&= \frac{(1 - (1 - e^{-0.7 \cdot 0.884})) \cdot (1 - (1 - e^{-0.9 \cdot 0.884}))}{(1 - (1 - e^{-0.7 \cdot 0.118}))} \\
&= \frac{e^{-1.6 \cdot 0.884}}{e^{-0.7 \cdot 0.118}} = 0.2640016
\end{aligned}
$$

Quesito 3

⋆Quanto vale $P(U > 0.118 | X > 0.884)$?

$$
\begin{aligned}
P(U > 0.118 | X > 0.884) &= \frac{P(U > 0.118, X > 0.884)}{P(X > 0.884)} \\
&= \frac{P(U > 0.118, X > 0.884)}{P(X > 0.884)} \\
&= \frac{P(X > 0.118 \cap Y > 0.118 \cap X > 0.884)}{P(X > 0.884)} \\
&= \frac{P(X > 0.884 \cap Y > 0.118)}{P(X > 0.884)} \\
&= \frac{P(X > 0.884) \cdot P(Y > 0.118)}{P(X > 0.884)} \\
&= \frac{(1 - P(X \leq 0.884)) \cdot (1 - P(Y \leq 0.118))}{(1 - P(X \leq 0.884))} \\
&= \frac{(1 - (1 - e^{-0.7 \cdot 0.884})) \cdot (1 - (1 - e^{-0.9 \cdot 0.118}))}{(1 - (1 - e^{-0.7 \cdot 0.884}))} \\
&= \frac{e^{-0.7 \cdot 0.884} \cdot e^{-0.9 \cdot 0.118}}{e^{-0.7 \cdot 0.884}} = 0.8992448
\end{aligned}
$$

Quesito 4

⋆Qual è il valore atteso di XY, $\mathbb{E}(XY)$?

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda_X} \cdot \frac{1}{\lambda_Y} = \frac{10}{7} \cdot \frac{10}{9} = 1.5873016$

Esercizio del 2022-05-19

Sono date due variabili casuali discrete: X prende valori in $\{-8, 2.5, 6\}$, mentre $Y(\omega) \in \{-8.5, -2.5, 9\}$.

Si conoscono: la funzione di probabilità marginale $p_X(x) = P(X = x)$

-8	2.5	6
0.09	0.25	0.66

e le probabilità condizionate $p_{Y|X}(y|x)$ (righe della seguente tabella)

$X \backslash^Y$	-8.5	-2.5	9
-8	0.33	0.02	0.65
2.5	0.01	0.38	0.61
6	0.13	0.05	0.82

Quesiti

Dalla definizione di probabilità condizionata:

$$p_{Y|X}(x|y) = \mathrm{P}(\{Y = y\}|\{X = x\}) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

da cui

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{Y|X}(Y = y|X = x) \cdot p_X(x)$$

Possiamo quindi costruirci una tabella per rappresentare $p_{X,Y}(x, y)$:

$X \backslash^Y$	-8,5	-2,5	9	$p_X(x)$
-8	0,0297	0,0018	0,0585	0,09
2,5	0,0025	0,095	0,1525	0,25
6	0,0858	0,033	0,5412	0,66
$p_Y(y)$	0,118	0,1298	0,7522	1

Per esempio $P(X = -8, Y = -8.5) = p_{Y|X}(Y = -8.5|X = -8) \cdot p_X(-8) = 0.33 \cdot 0.09 = 0.0297$

Involontariamente ci siamo calcolati anche la funzione di probabilità marginale $p_Y(y) = P(Y = y)$, che sarà

-8,5	-2,5	9
0,118	0,1298	0,7522

Quesito 1

$\star$**Qual è la probabilità della coppia $(6, 9)$, secondo la legge bivariata di (X, Y)?**

$P(X = 6, Y = 9) = p_{Y|X}(Y = 9|X = 6) \cdot p_X(6) = 0.82 \cdot 0.66 = 0.5412$

Quesito 2

$\star$**Determinare $\mathrm{Cov}(X, Y)$.**

Sappiamo che $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Per prima cosa, calcolare i valori attesi di X e Y, ossia $\sum_{x=0}^{n} x \cdot p_X(x)$

$$\mathbb{E}(X) = -8 \cdot 0.09 + 2.5 \cdot 0.25 + 6 \cdot 0.66 = 3.865$$

Stessa cosa per il valore atteso di Y:

$$\mathbb{E}(Y) = -8.5 \cdot 0.118 + (-2.5) \cdot 0.1298 + 9 \cdot 0.7522 = 5.4423$$

Invece,

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x, y) = -8 \cdot (-8.5) \cdot 0.0297 + -8 \cdot (-8.5) \cdot 0.0018 + \ \dots \ + 6 \cdot 9 \cdot 0.5412 = 24.981975$$

Quindi:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 24.981975 - (3.865 \cdot 5.4423) = 3.9474855$$

Quesito 3

⋆**Determinare l'indice di correlazione di Pearson, $\rho(X, Y)$.**

Ricordiamo che $\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X) \cdot \mathbb{V}ar(Y)}}$, ci mancano quindi $\mathbb{V}ar(X)$ e $\mathbb{V}ar(Y)$.

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$, ma ora ci manca $E(X^2)$, che è facilmente ottenibile nel seguente modo:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \cdot p_X(x) = (-8)^2 \cdot 0.09 + (2.5)^2 \cdot 0.25 + (6)^2 \cdot 0.66 = 31.0825$$

Quindi

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 31.0825 - 3.865^2 = 16.144275$$

Eseguiamo ora gli stessi procedimenti per Y:

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{y} y^2 \cdot p_Y(y) = (-8.5)^2 \cdot 0.118 + (-2.5)^2 \cdot 0.1298 + (9)^2 \cdot 0.7522 = 70.26495$$

Quindi

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 70.26495 - 5.4423^2 = 40.64632071$$

Per concludere:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X) \cdot \mathbb{V}ar(Y)}} = \frac{3.9474855}{\sqrt{16.144275 \cdot 40.64632071}} = 0.1540992945$$

Esercizio del 2022-05-20

In un cinema multisala vengono venduti solo biglietti in prevendita online e non all'entrata. Sapendo che il 12% delle persone che acquistano un biglietto online per un film poi non si presenta al cinema, i gestori del sito di prevendita del cinema vendono 13 biglietti per il film proiettato nella sala 1, che ha 12 posti e 17 biglietti per quello nella sala 2, da 16 posti.

Quesiti

Quesito 1

⋆Calcolare la probabilità che almeno una persona che ha comprato il biglietto online (per il primo film) non trovi posto nella sala 1.

Sia X_1 la v.a che conta il numero di persone che che si presentano al cinema per il film della sala 1.

Definendo "successo" l'evento "La persona che ha acquistato il biglietto si presenta al cinema", la probabilità di successo è $p = 0.88$. Quindi X_1 conterà il numero di successi (persone che si presentano) su 13 tentativi (biglietti venduti per la sala 1), cioè $X_1 \sim \text{bin}(n = 13, p = 0.88)$.

Se si presentano al cinema per il primo film più di 12 persone, cioè più del numero di posti della sala 1, allora almeno una persona non troverà posto, quindi in definitiva dobbiamo calcolare $P(X_1 > 12)$:

$$P(X_1 > 12) = \sum_{k=13}^{13} \binom{13}{k} 0.88^k (1 - 0.88)^{13-k} = 1 - \sum_{k=0}^{12} \binom{13}{k} 0.88^k (1 - 0.88)^{13-k} = 0.1897906$$

Con R possiamo farlo nel seguente modo:

```
pbinom(12, 13, 0.88, lower.tail = FALSE)
```

Quesito 2

⋆Calcolare la probabilità che nessun acquirente del biglietto online per il secondo film abbia problemi a trovare posto nella sala 2.

Ragionando come prima, chiamiamo X_2 la v.a. che conta il numero di persone che si presentano al cinema per il film della sala 2, allora $X_2 \sim \text{bin}(n = 17, p = 0.88)$.

In questo caso dobbiamo calcolare la probabilità che il numero di persone che si presentano per il secondo film sia al più uguale al numero di posti della sala 2, i.e. $P(X_2 \le 16)$.

$$P(X_2 \le 16) = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} 0.88^k (1 - 0.88)^{16-k} = 0.8861834$$

Con R possiamo farlo nel seguente modo:

```
pbinom(16, 17, 0.88)
```

Quesito 3

⋆Calcolare il numero di biglietti che si potrebbero vendere per la sala 1, accettando che la probabilità di scontentare una persona (i.e. non trova posto nella sala 1) non sia superiore a 0.35.

Sia $\alpha = 0.35$. Fissata la probabilità α, dobbiamo determinare il parametro n_1 tale per cui

$$P(X_1 > 12) = \sum_{k=13}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k (1 - p)^{n_1 - k} \le \alpha$$

Nel quesito 1 abbiamo determinato che la probabilità che almeno una persona non trovi posto nella sala (che sia scontenta) è del 0.1897906.
È sufficiente quindi aumentare il numero di biglietti finchè la probabilità supererà 0.35.
Proviamo con 14 biglietti (e 12 posti):
In R:

```
pbinom(12, 14, 0.88, lower.tail = FALSE)
```

produce il risultato 0.485864. Abbiamo superato $\alpha = 0.35$, quindi il numero di biglietti che si potrebbero vendere per la sala 1, accettando che la probabilità di scontentare una persona non sia superiore a 0.35, è 13.

Quesito 4

⋆In media quante persone si presentano per il film della sala 2?

Dobbiamo calcolare il valore atteso di una v.a. binomiale di parametri n_2 e p, cioè $E[X_2] = n_2 \cdot p = 17 \cdot 0.88 = 14.96$.

Esercizio del 2022-05-23

Si supponga che il numero di molecole di sodio in $1\ ml$ di acqua minerale sia descritto da una v.a. di Poisson con media 300. Lo strumento con cui analizziamo quest'acqua può ricevere solo multipli interi positivi di $1\ ml$ (capacità della pipetta con cui viene caricato).

Quesiti

Quesito 1

$\star$**Determinare la probabilità che $10\ ml$ di acqua contengano più di 3000 molecole, utilizzando l'approssimazione normale (Teorema Limite Centrale) e la correzione di continuità.**

Ricordiamo che la somma di v.a. X_i di Poisson di parametro λ è una variabile di Poisson con parametro dato dalla somma dei parametri, i.e. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ è poissoniana di parametro $n\lambda$.

Sia X_{10} la v.a. che indica il numero di molecole di sodio in 10 ml di acqua. Se 1 ml di acqua ha $\lambda = 300$, 10 ml hanno $\lambda = 10 \cdot 300 = 3000$.
Essendo una v.a. di Poisson, abbiamo $\mathbb{E}[X_{10}] = \mathbb{V}ar(X_{10}) = 3000$.
Detto questo, dobbiamo calcolare

$$P(X_{10} > 3000) = 1 - P(X_{10} \leq 3000)$$

Dovendo usare l'approssimazione con TLC e la correzione di continuità si ha

$$\begin{aligned}
1 - P_{\text{Poisson}}(X_{10} \leq 3000) &\approx 1 - P_{Normale}\left(X_{10} \leq \frac{X_{10} - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\approx 1 - P\left(X_{10} \leq \frac{X_{10} - \mathbb{E}[X_{10}]}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X_{10})}}\right) \\
&\approx 1 - P\left(X_{10} \leq \frac{(3000 + 0.5) - 3000}{\sqrt{3000}}\right) \\
&\approx 1 - P\left(X_{10} \leq \frac{0.5}{3000}\right) = 0.4963582
\end{aligned}$$

calcolabile in R nel seguente modo:

```
1 - pnorm(0.5/sqrt(3000), 0, 1)
```

Quesito 2

$\star$**Qual è l'errore assoluto (ossia la differenza in valore assoluto) tra la probabilità ottenuta con l'approssimazione calcolata al quesito 1 e il valore esatto? (Nella risposta si diano almeno 3 cifre decimali significative.)**

Dobbiamo confrontare la soluzione del quesito 1 con il valore della funzione di ripartizione della v.a. di Poisson X_{10} calcolata in 3000:

$$P(X_{10} > 3000) = 1 - P(X_{10} \leq 3000) = 1 - F_{X_{10}}(3000)$$

ed in seguito

$$|1 - F_{X_{10}}(3000) - 0.4963582| = 0.001213786$$

calcolabile in R nel seguente modo:

```
q1 <- 1 - pnorm(0.5/sqrt(3000), 0, 1)
q2 <- 1 - ppois(3000, 3000)
abs(q1-q2)
```

Quesito 3

$\star$**Determinare la minima quantità di ml di acqua da analizzare nello strumento affinché la probabilità che ci siano almeno 3600 molecole di sodio sia non inferiore a 0.81, utilizzando l'approssimazione normale e la correzione di continuità.**

Sia X_n la v.a. che indica il numero di molecole di sodio in $n\ ml$ di acqua, allora X_n è una v.a. di Poisson di parametro $n \cdot 300$.

Dobbiamo quindi determinare n in modo che si verifichi $P(X_n \geq 3600) \geq 0.81$.
Utilizzando l'approssimazione normale e la correzione di continuità, abbiamo

$$
\begin{aligned}
P(X_n \geq 3600) \geq 0.81 = P(X_n > 3600 - 0.5) \geq 0.81 \\
= 1 - P(X_n \leq 3600 - 0.5) \geq 0.81 \\
= 1 - P\left(X_n \leq \frac{(3600 - 0.5) - n \cdot 300}{\sqrt{n \cdot 300}}\right) \geq 0.81
\end{aligned}
$$

A questo punto possiamo procedere in 2 modi:
Il modo più semplice è sostituire a n numeri sempre maggiori e fermarsi quando si supera 0.81.
Utilizzando R con $n = 11$:

```
n <- 11
X <- (3600 - 0.5 - n * 300)/(sqrt(n*300))
1 - pnorm(X, 0, 1)
```

produce $8.428245 \cdot 10^{-8}$
Con $n = 12$ risulta 0.4966755.
Mentre con $n = 13$ risulta 0.9999992.
Quindi 13 ml sono la minima quantità di acqua da analizzare nello strumento affinché la probabilità che ci siano almeno 3600 molecole di sodio sia non inferiore a 0.81.

Alternativamente si poteva procedere col seguente metodo, un po' più analitico:

$$
\begin{aligned}
1 - \phi\left(\frac{(3600 - 0.5) - n \cdot 300}{\sqrt{n \cdot 300}}\right) \geq 0.81 = \phi\left(\frac{(3600 - 0.5) - n \cdot 300}{\sqrt{n \cdot 300}}\right) \leq 0.19 \\
= \frac{(3600 - 0.5) - n \cdot 300}{\sqrt{n \cdot 300}} \leq \phi^{-1}(0.19) \\
= \frac{(3600 - 0.5) - n \cdot 300}{\sqrt{n \cdot 300}} = -0.8778963
\end{aligned}
$$

Da cui, spostando un po' di roba a destra e a sinistra, si ottiene $n \geq 12.1751896$, ossia $n \geq 13$, dal momento che il macchinario può prendere solo un numero intero positivo di ml.

Ricordo che per calcolare $\phi^{-1}(0.19)$ è sufficiente utilizzare la funzione *qnorm* di R:

```
qnorm(0.19, mean=0, sd=1)
```

Esercizio del 2022-05-23 Versione 2

Un giocatore di pallacanestro ha una probabilità del 56% di fare canestro con un tiro da 3 punti.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Determinare la probabilità che il giocatore non faccia più di 78 punti in 43 tiri tutti da 3 punti, utilizzando l'approssimazione normale (Teorema Limite Centrale) e la correzione di continuità.**

Sia X_{43} la v.a che conta il numero di canestri su 43 tiri da 3 punti, quindi $X_{43} \sim bin(n = 43, p = 0.56)$. Dato che ogni canestro segnato fa guadagnare 3 punti, dovremo calcolarci la probabilità che il giocatore faccia al più 26 canestri.

Sappiamo che $E[X_{43}] = n \cdot p = 24.08$ e $Var(X_{43}) = np(1-p) = 10.5952$ Allora, usando l'approssimazione con TLC e la correzione di continuità si ha

$$P(X_{43} \leq 26) = P\left(\frac{X_{43} - 24.08}{\sqrt{10.5952}} \leq \frac{(26+0.5) - 43 \cdot 0.56}{\sqrt{43 \cdot 0.56(1-0.56)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{(26+0.5) - 24.08}{\sqrt{10.5952}}\right)$$

calcolabile in R nel seguente modo:

```
pnorm(((26.5-24.08)/sqrt(10.5952)), 0, 1)
```

che risulta 0.7714.

Quesito 2

⋆**Qual è l'errore assoluto (ossia la differenza in valore assoluto) tra la probabilità ottenuta con l'approssimazione calcolata al quesito 1 e il valore esatto? (Nella risposta si diano almeno 3 cifre decimali significative.)**

Dobbiamo confrontare la soluzione del quesito 1 con il valore della funzione di ripartizione della variabile aleatoria binomiale X_{43} calcolata in 26, $F_{X_{43}}(26)$ ed in seguito

$$|1 - F_{X_{10}}(3000) - 0.7714| = 0.0010601$$

calcolabile in R nel seguente modo:

```
q1 <- pnorm(((26.5-24.08)/sqrt(10.5952)), 0, 1)
q2 <- pbinom(26,43,0.56)
abs(q1-q2)
```

Esercizio del 2022-05-24

Delle caramelle artiginali hanno un peso distribuito come una normale con media $\mu = 6.551g$ e deviazione standard $\sigma = 0.644\ g$. Al controllo qualità le caramelle con un peso (strettamente) superiore a $7.5560759\ g$ o (strettamente) inferiore a $5.5849642\ g$ vengono scartate.

Quesiti

Quesito 1

⋆**Qual è la probabilità che una caramella sia scartata al controllo qualità?**

Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu = 6.551, \sigma^2 = 0.414736)$ la v.a. che rappresenta il peso di una caramella artigianale.

La probabilità che una caramella sia scartata è uguale a

$$P(X > 7.5560759) + P(X < 5.5849642) = (1 - P(X \leq 7.5560759)) + P(X < 5.5849642) = 0.1261$$

In R:

```
u = 6.551
o = 0.644
max = 7.5560759
min = 5.5849642
pnorm(max, u, o, FALSE) + pnorm(min,u,o)
```

Quesito 2

⋆**Qual è la probabilità che se vengono controllate 45 caramelle, queste pesino complessivamente più di $302.1823425\ g$?**

Sia S_n la v.a. che indica il peso di n caramelle. Dato che S_n è somma di n v.a. gaussiane indipendenti di media μ e varianza σ^2, avremo $S_n \sim \mathcal{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$ (la Gaussiana è riproducibile).

Quindi, per $n = 45$ e $W = 302.1823425$, dobbiamo calcolare

$$P(S_n > W) = 1 - P(S_n \leq W) = 0.04363294$$

In R:

```
pnorm(w,n*u, sqrt(n)*o, FALSE)
```

Quesito 3

⋆**Qual è la probabilità che su 45 caramelle al più 6 siano da scartare?**

Sia Y la v.a. che conta le caramelle da scartare sulle $n = 45$ da controllare. Dobbiamo allora calcolare $P(Y \leq 6)$.

Osserviamo che dobbiamo contare il numero di successi (caramelle scartate al controllo) su $n = 45$ tentativi (caramelle controllate). Per cui $Y \sim bin(n, p)$ dove p è la probabilità che una caramella sia scartata, calcolata al quesito 1.

In R:

```
pbinom(6, 45, 0.1261)
```

Che risulta 0.6622954.

Esercizio del 2022-05-25

Abbiamo quattro variabili aleatorie: X, Y, W, Z.

Le prime due, X e Y, sono indipendenti tra loro e hanno entrambe distribuzione poissoniana, di parametri $\lambda_X = 2$ e $\lambda_Y = 4$ rispettivamente.

La variabile Z è una normale (o Gaussiana) standard, mentre $W = 1.8 \cdot Z$.

Quesiti

Quesito 1

$\star$**Dare la migliore possibile stima dall'alto della probabilità che la somma $X + Y$ sia maggiore o uguale a 13, usando la disuguaglianza di Markov.**

La disuguaglianza di Markov, per una variabile aleatoria non negativa T, è:

$$P(T \geq a) \leq \frac{E(T)}{a}$$

Per poter usare la disuguaglianza di Markov non abbiamo bisogno di conoscere (o ricordare) la funzione di ripartizione o la densità discreta. Abbiamo però bisogno di calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $X + Y$: il valore atteso della somma è la somma dei valori attesi, quindi, siccome X e Y sono di Poisson:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \lambda_X + \lambda_Y = 6$$

Ora possiamo scrivere la disuguaglianza nel nostro caso (osserviamo che entrambe le variabili aleatorie sono non negative e dunque tale è anche la loro somma):

$$P(X + Y \geq a) \leq \frac{E(X + Y)}{a}$$

$$P(X + Y \geq a) \leq \frac{6}{13}$$

$$P(X + Y \geq a) \leq 0.4615385$$

Quesito 2

$\star$**Dare la migliore possibile stima dall'alto della probabilità (condizionata) $P(X \geq 8.51 \mid X + Y = 13)$, usando la disuguaglianza di Markov.**

Ricordiamo che una proprietà di una variabile Poissoniana è che la distribuzione di X condizionata da $X + Y = n$, in questo caso, è una distribuzione binomiale di parametri n e $\frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y}$, ossia di parametri 13 e $\frac{2}{6}$ (vedi teoria).
Di conseguenza:

$$P(X \geq 8.51 \mid X + Y = 13) \leq \frac{E(X \mid X + Y = 13)}{8.51}$$

$$P(X \geq 8.51 \mid X + Y = 13) \leq \frac{13 \cdot \frac{2}{6}}{8.51}$$

Ricordiamo però che il supporto di una variabile Poissoniana è per $k = 0, 1, \ldots$, ossia per $k \in \mathbb{N}$, quindi, arrotondiamo 8.51 a 9, anche perchè così riusciamo a rendere la disuguaglianza più precisa:

$$P(X \geq 9 \mid X + Y = 13) \leq \frac{13 \cdot \frac{2}{6}}{9}$$

$$P(X \geq 9 \mid X + Y = 13) \leq 0.4814815$$

Quesito 3

$\star$**Dare una stima dal basso della probabilità $P(|W| < 3.2)$, usando la disuguaglianza di Chebychev.**

La disuguaglianza di Chebychev afferma che

$$Pr(|Y - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

Siccome $W = 1.8 \cdot Z$ e $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ di conseguenza $W \sim \mathcal{N}(0, 1.8)$.
Inoltre possiamo riscrivere $P(|W| < 3.2)$ come $1 - P(|W| \geq 3.2)$
Abbiamo quindi

$$Pr(|Y| \geq 3.2) \leq \frac{1.81^2}{3.2^2}$$

$$Pr(|Y| \geq 3.2) \leq \frac{3.24}{10.24}$$

Noi però dobbiamo dare una stima dal basso della probabilità $P(|W| < 3.2)$, cerchiamo quindi di ricondurci ad essa:

$$-Pr(|Y| \geq 3.2) \geq -\frac{3.24}{10.24}$$

$$\text{Aggiungendo 1 ad entrambe le parti}$$

$$1 - Pr(|Y| \geq 3.2) \geq 1 - \frac{3.24}{10.24}$$

$$P(|W| < 3.2) \geq 0.6835938$$

Quesito 4

⋆Qual è l'errore assoluto (rispetto al valore vero di $P(|W| < 3.2)$) fatto nella stima precedente?

Qui, a differenza del quesito precedente, vogliamo sfruttare il fatto che sappiamo la distribuzione di W. Possiamo infatti riscrivere la quantità cercata nel modo seguente:

$$P(|W| < 3.2) = P(-3.2 < W < 3.2) = F_W(3.2) - F_W(-3.2)$$

Ricordando che $W \sim \mathcal{N}(0, 1.8)$, possiamo calcolare $F_W(3.2) - F_W(-3.2)$ in R:

```
pnorm(3.2, 0, 1.8) - pnorm(-3.2, 0, 1.8)
```

Per finire, non ci resta che sottrarre a questo valore quello ottenuto al quesito 3 e prenderne il valore assoluto, che risulta 0.2409659.