Kungl Tekniska Högskolan
Geodesi och satellitpositionering
Huaan Fan

2020-01-08

Written Examination

AG1817/AG2926 Map Projections and Reference Systems

To pass this exam, one should obtain at least 10 points out of 20 points in total

1. Coordinate systems and map projections (7p)

1a. If the 2nd eccentricity e' of a reference ellipsoid is given, derive the first eccentricity e . (1p)

1b. Define geodetic coordinates (ϕ, λ, h) for a ground point P. (1p)

1c. Briefly describe the main charateristics of UTM projections. (2p)

1d. Let R denote radius of the mean earth sphere and ϕ, λ denote spherical coordinates. A map project method has the following planar projection coordinates (x, y):

$$
\begin{aligned}
x &= R \cdot \phi \ , \\
y &= R \ \cos\phi \ \cdot \lambda
\end{aligned}
$$

Calculate : (3p)

a) the first fundamental coefficients $e,\ f,\ g$
b) the scale factor of the meridian
c) the scale factor of the parallel circle
d) the angle θ' between the projections of the meridians and parallel circls
e) the area scale factor ξ
f) Is this projection conformal or equivalent ?

2. Astrogeodetic triangulation and height systems (6p)

2a. Define the astronomical triangle on the celestial sphere. Which sides and angles change due to apparent motion ? (3p)

2b. Why are many national triangulation systems *non-geocentric* ? (1p)

2c. What is *theoretical misclosure* of geometric levelling? How can we avoid this problem? (2p)

3. Geodynamics and reference systems (7p)

3a. What is *nutation* ? How do we treat it when defining *International Celectial Reference Frame* (ICRF) ? (2p)

3b. What is the definition of *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) ? (1p)

3c. Outline the main procedures to transform geodetic coordinates (ϕ, λ, h) in *SWEREF 99* to Cartesian coordinates (x, y) on Swedish map projection system *RT* 90. Indicate which reference ellipsoids have been used. (4p)

First fundamental form coefficients

$$
\begin{aligned}
e &= \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{\bar{\phi}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\bar{\phi}}}\right)^2 \\
f &= \frac{\partial x}{\partial \bar{\bar{\phi}}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \bar{\bar{\phi}}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\
g &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2
\end{aligned}
$$

Special trigonometric functions

$$
\begin{cases}
\sin 0 = 0 & \sin 90^0 = 1 \\
\cos 0 = 1 & \cos 90^0 = 0 \\
\tan 0 = 0 \quad , & \tan 90^0 = \infty \\
\cot 0 = \infty & \cot 90^0 = 0
\end{cases}
$$

0406186522

FÖRSÄTTSBLAD TENTAMEN/ EXAMINATION COVER

Jag intygar att mobiltelefon och annan otillåten elektronisk utrustning är avstängd och förvaras på anvisad plats. / I hereby confirm that mobile phones and other unauthorized electronic equipment is shut off and placed according to instructions

MARKERA MED "X"/
MARK WITH "X" ☒

IFYLLES AV STUDENT OCH TENTAMENSVAKT/
TO BE FILLED IN BY THE STUDENT AND THE INVIGILATOR:

KURSKOD / COURSE CODE: AG1817

KURSNAMN / COURSE NAME: Kartprojektioner och referenssystem

PROVKOD / TEST CODE: TENA

TENTAMENSDATUM / EXAMINATION DATE (Y/Y/Y/Y - M/M - D/D): 2020 - 01 - 08

PROGRAMKOD / PROGRAM CODE: CSAMH

INLÄMNINGSTID / TIME SUBMITTED: 16.33

MARKERA BEHANDLADE UPPGIFTER MED "X "OCH EJ BEHANDLADE UPPGIFTER MED "-" /
MARK WITH "X" PROBLEMS SOLVED. MARK WITH "-" PROBLEMS NOT ATTEMPTED

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	X	X																	

IFYLLES AV INSTITUTIONEN / TO BE FILLED IN BY THE DEPARTMENT:

BEDÖMNING / ASSESSMENT

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	3	6																	

BONUSPOÄNG/ BONUS POINTS: 1,0

SLUTSUMMA / FINAL POINTS: 15,0

BETYG/ GRADE: C

Godkänns av examinator / approved by Examiner..

1) a) $\acute{e}$ given ✓, bestäm e ✓ $\acute{e} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} \Rightarrow$ $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$b = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\acute{e}}$

ej färdigt

0,5

b) definiera geodetiska koordinater (ϕ, λ, h) för en punkt P:

ϕ = latitud ~~ϕ~~
λ = longitud
h = höjd över ellipsoid till punkt P.

geodetisk latitud skiljer sig lite från geocentrisk latitud, geodetisk latitud beror på normalen på ellipsoiden, vilket är nära men dock inte skär exakt jordens mittpunkt. ~~[illegible]~~ man kan säga att ϕ säger vinkeln för var på en meridian man befinner sig, dvs mellan nordpolen och sydpolen, medans λ säger vinkeln längs med ekvatorn.

0,5

() UTM : Universal transversal merkator; baserad på transversal merkator projektion, dvs projicerad på en cylinder med rotationsaxel vinkelrätt mot jordens rotationsaxel.
UTM delar in jorden i 60 st zoner med 6° mellan varje meridian, en "false easting" på 500 km läggs till på y-värdet, på södra halvklotet adderas 10 000 km som en false northing, varför man gör detta är för att undvika negativa x och y-värden. projektionen är vinkelriktig och längdriktig för vissa meridianer, skalfaktorn = 0,9996

2

KTH VETENSKAP OCH KONST

1 d) a) $\begin{cases} x = R\cdot\phi \\ y = R\cos\phi\cdot\lambda \end{cases}$

a) bestäm e, f, g

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2 = R^2 + (-R\sin\phi\cdot\lambda)^2$$
$$= R^2 + R^2\sin^2\phi\,\lambda^2 = R^2(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial x}{\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\lambda} = R\cdot 0 + (-R\sin\phi\,\lambda)\cdot R\cos\phi$$
$$= -R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 = 0 + (R\cos\phi)^2 = R^2\cos^2\phi$$

b) $$h = \frac{\sqrt{e}}{R} = \frac{\sqrt{R^2(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)}}{R} = ? \; \frac{R(1+\sin\phi\,\lambda)}{R} = 1+\sin\phi\,\lambda$$

c) $$k = \frac{\sqrt{g}}{R\cos\phi} = \frac{\sqrt{(R\cos\phi)^2}}{R\cos\phi} = \frac{R\cos\phi}{R\cos\phi} = 1$$

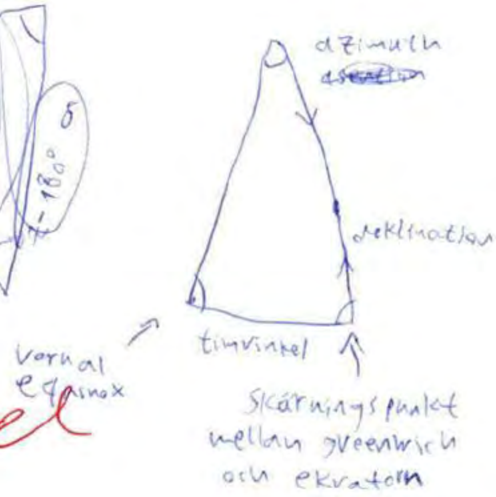
d) $$\cos\theta' = \frac{f}{\sqrt{eg}} = \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{\sqrt{R^2(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)\cdot R^2\cos^2\phi}} = \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{\sqrt{(R^4\cos^2\phi)(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)}} =$$
$$= \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{\sqrt{R^4\cos^2\phi + R^4\cos^2\phi\cdot\sin^2\phi\cdot\lambda^2}} = \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{\sqrt{R^4\cos^2\phi(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)}} \; ? \; \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{R^2\cos\phi(1+\sin\phi\,\lambda)} =$$
$$= \frac{-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda}{R^2\cos\phi + R^2\cos\phi\sin\phi\,\lambda} = -\frac{\sin\phi\,\lambda}{1+\sin\phi\,\lambda} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-\sin\phi\,\lambda}{\sqrt{1+\sin^2\phi\,\lambda^2}}\right)$$

e) $$\xi = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{R^2\cos\phi} = \frac{\sqrt{R^2(1+\sin^2\phi\,\lambda^2)\cdot R^2\cos^2\phi - (-R^2\sin\phi\cos\phi\,\lambda)^2}}{R^2\cos\phi} = \frac{\sqrt{(R^2+R^2\sin^2\phi\,\lambda^2)R^2\cos^2\phi - \cdots}}{R^2\cos\phi}$$
$$= \frac{\sqrt{R^4\cos^2\phi + R^4\sin^2\phi\cos^2\phi\,\lambda^2 - R^4\sin^2\phi\cos^2\phi\,\lambda^2}}{R^2\cos\phi} = \frac{\sqrt{R^4\cos^2\phi}}{R^2\cos\phi} = \frac{R^2\cos\phi}{R^2\cos\phi} = 1$$

2

f) Eftersom att $\xi = 1$ så är projektionen equivalent = Areariktig.

2.a) Astronomisk triangel på vissa stören:
alla vinklar förändras pga apparent motion
2 sidor förändras pga Apparent motion.



fel

0

2b) Många nationella triangulerings-system är non-geocentric, detta är inte så konstigt, poängen med nationella system är att de endast ska tillämpas på en nationell nivå, därför etableras de på en nationell nivå.
Ett globalt system baserat på en global geoid passar ofta sämre än en lokal geoid etablerad och tillämpad för samma yta.
Eftersom att en lokalt anpassad modell skiljer sig från en modell baserat på medelvärdet av jorden så kommer den lokala ofta inte vara geocentrisk.

1

exempel på hur mittpunkten för en Nationell och en global modell kan skilja sig.

2c) theoretical misclosure of geometric leveling handlar om att genom att använda avvägning kan man få olika resultat för höjden beroende på vilken väg man gör, tex från A till B:
Detta fel kan undvikas genom att mäta skillnad i potential istället för skillnad i höjd över geoiden.

2

3.a) Nutation, koppling till ICRF? Regelbunden del av rotation av jordens rotations-axel kallas precesion. Den oregelbundna delen av denna rotation kallas nutation.

Försök till skiss hur jordaxelns position förändras pga precesion. 1 varv tar 26000 år, dvs 26000 år för att komma tillbaka till samma position.

Nutation uppstår pga dragningskraft från solen & andra planeter. Eftersom att nutation får jordaxelns rotation att följa en oregelbunden bana så vill man ha en gemensam referens att förhålla sig till.

Då använder vi ICRF, där vi förhåller oss till epok J2000.0, dvs 1 januari 2000 12h UTC, där vi har definierat mean celestial north pole. I ICRF låter vi Z-axeln gå genom mean celestial north pole.

1,5

? 3b) ITRF definieras med hänsyn till CIO, conventional international origin, CIO avser den punkt som var medelvärdet för nordpolen vid mätningar mellan år 1900 och 1905. Genom att jämföra med CIO kan man beräkna polrörelse.

0,5

3c) Vi vill gå från: $(\phi,\lambda,h)_{SWEREF99} \longrightarrow (x,y)_{RT90}$

1. $(\phi,\lambda,h)_{SWEREF99} \xrightarrow{GRS80} (X,Y,Z)_{SWEREF99}$ ✓
2. $(X,Y,Z)_{SWEREF99} \xrightarrow{\text{Helmert transformation}} (X,Y,Z)_{RT90}$ ✓
3. $(X,Y,Z)_{RT90} \xrightarrow{\text{Bessel 1841}} (\phi,\lambda,h)_{RT90}$ ✓
4. $(\phi,\lambda)_{RT90} \xrightarrow{\text{Bessel 1841}} (x,y)_{RT90}$ ✓

4