

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1.① Вычислить

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \exp(x)}.$$

2.② На плоскости \mathbb{R}^2 рассматривается кривая

$$\gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 - y = 1 \}.$$

Система координат в \mathbb{R}^2 декартова прямоугольная. Вычислить максимальную кривизну кривой γ .

3.② Пусть M — наибольшее положительное число, для которого задача Коши

$$y''(x) = (y'(x))^2, \quad x > 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2},$$

имеет решение $y(x)$ на промежутке $x \in [0, M)$. Найти решение $y(x)$ при $x \in [0, M)$ и вычислить несобственный интеграл

$$I = \int_0^M \sqrt{\exp(y(x))} dx.$$

4.② Найти массу поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 0 < \sqrt{3}x < y < z \right\}$$

с поверхностной плотностью $\rho = \frac{2}{z^2 \sqrt{1 - z^2}}$. Система координат декартова прямоугольная.

5.③ Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1, 2]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \exp(-t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Z = \frac{Y}{X}$ и математическое ожидание случайной величины Z^2 .